

Interdisziplinäres Praktikum:
- Nichtlineare Modellierung in den Naturwissenschaften -
Turbulenz
- Ein Zwischenbericht -

Christoph Blum und Golo Strickmann

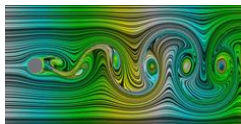
22. Dezember 2009

Überblick

- ① Einführung
- ② Dynamik von Fluiden
 - Navier-Stokes-Gleichung
 - Wirbeltransportgleichung
- ③ Numerische Methoden
 - Zeitableitung
 - Ortsableitung
 - Verfahren
 - Beispiel
- ④ Ausblick
 - 2D-Navier-Stokes
 - Kelvin-Helmholtz-Instabilität

Turbulenz

Was ist Turbulenz?



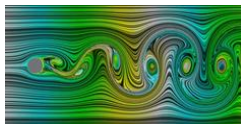
Strömende Fluide können turbulentes Verhalten zeigen.

Wichtige Eigenschaften sind:

- Starke Vermischung (Konvektion) von Material und anderen Größen (Impuls, Wärme)
- die Unvorhersagbarkeit (Sensitivität der AB)
- die Koexistenz von Wirbeln unterschiedlicher Größe und Intensität
- Energiedissipation

Turbulenz

Was ist Turbulenz?



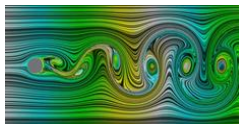
Strömende Fluide können turbulentes Verhalten zeigen.

Wichtige Eigenschaften sind:

- Starke Vermischung (Konvektion) von Material und anderen Größen (Impuls, Wärme)
- die Unvorhersagbarkeit (Sensitivität der AB)
- die Koexistenz von Wirbeln unterschiedlicher Größe und Intensität
- Energiedissipation

Turbulenz

Was ist Turbulenz?



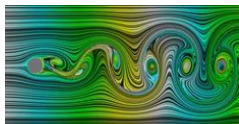
Strömende Fluide können turbulentes Verhalten zeigen.

Wichtige Eigenschaften sind:

- Starke Vermischung (Konvektion) von Material und anderen Größen (Impuls, Wärme)
- die Unvorhersagbarkeit (Sensitivität der AB)
- die Koexistenz von Wirbeln unterschiedlicher Größe und Intensität
- Energiedissipation

Turbulenz

Was ist Turbulenz?



Strömende Fluide können turbulentes Verhalten zeigen.

Wichtige Eigenschaften sind:

- Starke Vermischung (Konvektion) von Material und anderen Größen (Impuls, Wärme)
- die Unvorhersagbarkeit (Sensitivität der AB)
- die Koexistenz von Wirbeln unterschiedlicher Größe und Intensität
- Energiedissipation

Turbulenz

Wo trifft man auf Turbulenz?



Von der Milch, die in den Kaffee geschüttet wird, Wirbel bildet und sich vermischt ...

Turbulenz

Wo trifft man auf Turbulenz?



... über die Benzin-Luft-Mischung im Motor unseres Autos ...

Turbulenz

Wo trifft man auf Turbulenz?



... bis hin zu Formationen in der Atmosphäre (z.B. Kármánsche Wirbelstraßen, Kelvin-Helmholtz-Instabilitäten).

Turbulenz

Warum sich mit Turbulenz beschäftigen?

- Ingenieurwesen: Anwendungen (Turbulenzmodelle)
- Physik: Grundlagenforschung
- Mathematik: Nachweis von Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Turbulenz

Warum sich mit Turbulenz beschäftigen?

- Ingenieurwesen: Anwendungen (Turbulenzmodelle)
- Physik: Grundlagenforschung
- Mathematik: Nachweis von Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Turbulenz

Warum sich mit Turbulenz beschäftigen?

- Ingenieurwesen: Anwendungen (Turbulenzmodelle)
- Physik: Grundlagenforschung
- Mathematik: Nachweis von Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Dynamik von Fluiden

Navier-Stokes-Gleichung

Navier-Stokes-Gleichung

Betrachte die Impulsbilanz infinitesimaler Volumenelemente:

$$\frac{d}{dt} \underline{p}(\underline{x}, t) = \underline{F}(\underline{x}, t)$$

$$\frac{d}{dt} (\rho \cdot \underline{u}) = \underline{f}_{ges}$$

- $\underline{u}(\underline{x}, t)$: Geschwindigkeit
- $\underline{f}_{ges}(\underline{x}, t)$: Kraftdichte

Navier-Stokes-Gleichung

Betrachte die Impulsbilanz infinitesimaler Volumenelemente:

$$\frac{d}{dt} \underline{p}(\underline{x}, t) = \underline{F}(\underline{x}, t)$$

$$\frac{d}{dt} (\rho \cdot \underline{u}) = \underline{f}_{ges}$$

- $\underline{u}(\underline{x}, t)$: Geschwindigkeit
- $\underline{f}_{ges}(\underline{x}, t)$: Kraftdichte

Inkompressibilität

Inkompressibilität des Fluids:

$$\rho(\underline{x}, t) = \rho$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_t \rho + \underline{\nabla} \cdot \underline{j} = 0$$

→

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$$

(Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes)

Navier-Stokes-Gleichung

$$\rho \cdot \frac{d}{dt} \underline{u} = \rho \cdot (\partial_t + \underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} = \underbrace{-\underline{\nabla} P + \eta \Delta \underline{u} + \underline{f}}_{\underline{f}_{ges}}$$

mit

- $P(\underline{x}, t)$: Druck (konservativ)
- η : molekulare Zähigkeit (dissipativ)
- $\underline{f}(\underline{x}, t)$: Kraftdichte äußerer Kräfte

Navier-Stokes-Gleichung

$$\rho \cdot \frac{d}{dt} \underline{u} = \rho \cdot (\partial_t + \underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} = \underbrace{-\underline{\nabla} P + \eta \Delta \underline{u} + \underline{f}}_{\underline{f}_{ges}}$$

mit

- $P(\underline{x}, t)$: Druck (konservativ)
- η : molekulare Zähigkeit (dissipativ)
- $\underline{f}(\underline{x}, t)$: Kraftdichte äußerer Kräfte

Navier-Stokes-Gleichung

$$\rho \cdot \frac{d}{dt} \underline{u} = \rho \cdot (\partial_t + \underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} = \underbrace{-\underline{\nabla} P + \eta \Delta \underline{u} + \underline{f}}_{\underline{f}_{ges}}$$

mit

- $P(\underline{x}, t)$: Druck (konservativ)
- η : molekulare Zähigkeit (dissipativ)
- $\underline{f}(\underline{x}, t)$: Kraftdichte äußerer Kräfte

dimensionslose N.-S.-Gleichung

$$(\partial_t + \underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} = -\underline{\nabla} p + \frac{1}{Re} \Delta \underline{u} + \underline{f}$$

mit:

- $p(\underline{x}, t) = \frac{P(\underline{x}, t)}{\rho}$
- $Re = \frac{UL}{\nu}$
- $\nu = \frac{\eta}{\rho}$: Dynamische Viskosität
- L, T und $U = \frac{L}{T}$: charakteristische Längen-, Zeit- und Geschwindigkeitsskalen

Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{UL}{\nu}$$

- Verhältnis von konvektiven ($U/T = U^2/L$) und dissipativen ($\nu U/L^2$) Einflüssen
- je größer Re , desto turbulenter ist die Strömung
- alle internen Größen sammeln sich in Re
- Art der Strömung anhand der Reynolds-Zahl charakterisierbar



- Ähnlichkeitsprinzip.

Probleme der Navier-Stokes-Gleichung

$$\partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} = -\underline{\nabla} p + \frac{1}{Re} \Delta \underline{u} + \underline{f}$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$$

- 4 Unbekannte - 4 Gleichungen
- Nichtlinearität
- Nichtlokalität

Nichtlokalität

Durch Divergenzbildung der N.S.-Gleichung erhält man:

$$\Delta p = -\underline{\nabla} \cdot [(\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u}]$$

(Poisson-Gleichung)

Lösung unter Verwendung der Greenschen Funktion:

$$p(\underline{x}, t) = \int \frac{1}{4\pi |\underline{x} - \underline{x}'|} \underline{\nabla} \cdot [(\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u}] d\underline{x}'$$

Nichtlokalität

Durch Divergenzbildung der N.S.-Gleichung erhält man:

$$\Delta p = -\underline{\nabla} \cdot [(\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u}]$$

(Poisson-Gleichung)

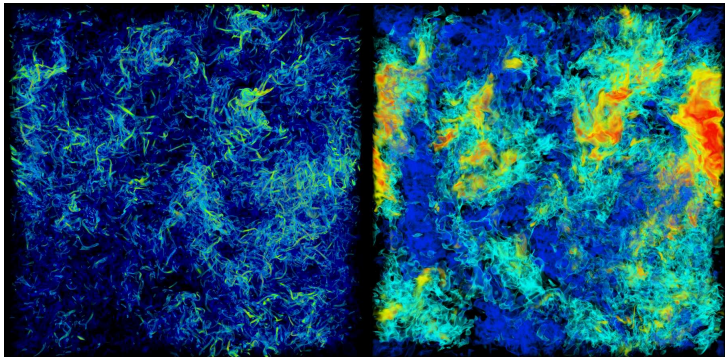
Lösung unter Verwendung der Greenschen Funktion:

$$p(\underline{x}, t) = \int \frac{1}{4\pi |\underline{x} - \underline{x}'|} \underline{\nabla} \cdot [(\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u}] d\underline{x}'$$

Wirbelstärke

Def.: Wirbelstärke (Vortizität)

$$\underline{\omega} = \underline{\nabla} \times \underline{u}$$



Wirbeltransportgleichung

Durch Rotationsbildung der N.S.-Gleichung erhält man:

$$(\partial_t + \underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{\omega} = (\underline{\omega} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} + \nu \Delta \underline{\omega} + \underline{\nabla} \times \underline{f}$$

- Druck eliminiert
- Nichtlokalität immer noch da, weil \underline{u} per Biot-Savart-Gesetz ermittelt werden muss.

aber: Speziallösungen.

Lamb-Oseen-Wirbel (2D)

Betrachte:

- zylindersymmetrischen Wirbel in der x-y-Ebene
- $\rightarrow \underline{\omega}$ in z-Richtung
- $\underline{\nabla} \times \underline{f} = 0$
- die nichtlinearen Terme verschwinden

$$\partial_t \underline{\omega} + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{\omega} = (\underline{\omega} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} + \nu \Delta \underline{\omega}$$

Lamb-Oseen-Wirbel (2D)

Betrachte:

- zylindersymmetrischen Wirbel in der x-y-Ebene
- $\rightarrow \underline{\omega}$ in z-Richtung
- $\underline{\nabla} \times \underline{f} = 0$
- die nichtlinearen Terme verschwinden

$$\partial_t \underline{\omega} + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{\omega} = (\underline{\omega} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} + \nu \Delta \underline{\omega}$$

(„Wärmeleitungsgleichung“)

Lamb-Oseen-Wirbel (2D)

Eine Lösung:

$$\omega_z = \frac{\Gamma}{\pi r_B} e^{-r^2/r_B^2}$$

Damit erhält man einen zerfließenden Wirbel.
mit:

- Γ : Zirkulation
- $r_B^2 = 4\nu t$

Burgers-Wirbel (3D)

Überlagerung des Lamb-Oseen-Wirbels mit der Potentialströmung:

$$\underline{u}_{pot}(\underline{x}, t) = \left[-\frac{a}{2}x, -\frac{a}{2}y, az \right]$$

→ stationärer Wirbel:

$$\Omega_z = \frac{\Gamma}{\pi r_B} e^{-r^2/r_B^2}$$

mit

- $r_B^2 = \frac{4\nu}{a}$
- a : Stärke der Potentialströmung

Numerische Verfahren



Navier-Stokes-Gleichung

$$\partial_t \underline{u} = -(\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} - \underline{\nabla} p + \Delta \underline{u} + \underline{f}$$

- Mathematisches Problem: Partielle Differentialgleichung
- \Rightarrow Sowohl Ableitungen im Ort als auch in der Zeit
- \Rightarrow Aufsplitten des Problems in die Ortsableitung und die Zeitableitung
- Pseudospektralmethode

Navier-Stokes-Gleichung

$$\partial_t \underline{u} = -(\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} - \underline{\nabla} p + \Delta \underline{u} + \underline{f}$$

- Mathematisches Problem: Partielle Differentialgleichung
- \Rightarrow Sowohl Ableitungen im Ort als auch in der Zeit
- \Rightarrow Aufsplitten des Problems in die Ortsableitung und die Zeitableitung
- Pseudospektralmethode

Navier-Stokes-Gleichung

$$\partial_t \underline{u} = -(\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} - \underline{\nabla} p + \Delta \underline{u} + \underline{f}$$

- Mathematisches Problem: Partielle Differentialgleichung
- \Rightarrow Sowohl Ableitungen im Ort als auch in der Zeit
- \Rightarrow Aufsplitten des Problems in die Ortsableitung und die Zeitableitung
- Pseudospektralmethode

Navier-Stokes-Gleichung

$$\partial_t \underline{u} = -(\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} - \underline{\nabla} p + \Delta \underline{u} + \underline{f}$$

- Mathematisches Problem: Partielle Differentialgleichung
- \Rightarrow Sowohl Ableitungen im Ort als auch in der Zeit
- \Rightarrow Aufsplitten des Problems in die Ortsableitung und die Zeitableitung
- Pseudospektralmethode

Eulerverfahren

- Lösung gewöhnlicher DGL
- Quadraturformel zur Lösung der Integrodifferentialgleichung
- Ableitung ersetzen durch Differenzenquotient

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \Rightarrow \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

mit $\Delta t =$ Schrittweite des Gitters

Eulerverfahren

- Lösung gewöhnlicher DGL
- Quadraturformel zur Lösung der Integrodifferentialgleichung
- Ableitung ersetzen durch Differenzenquotient

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \Rightarrow \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

mit $\Delta t =$ Schrittweite des Gitters

Eulerverfahren

- Lösung gewöhnlicher DGL
- Quadraturformel zur Lösung der Integrodifferentialgleichung
- Ableitung ersetzen durch Differenzenquotient

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \Rightarrow \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

mit $\Delta t =$ Schrittweite des Gitters

Beispiel Eulerverfahren

- Beispiel:

$$\partial_t f(t) = rhs[f(t)]$$

Dabei ist $rhs[f(t)]$ die Abhängigkeit von $f(t)$.

- Diskretisierung:

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta t \cdot rhs[f(t)]$$

Beispiel Eulerverfahren

- Beispiel:

$$\partial_t f(t) = rhs[f(t)]$$

Dabei ist $rhs[f(t)]$ die Abhängigkeit von $f(t)$.

- Diskretisierung:

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta t \cdot rhs[f(t)]$$

Runge-Kutta-4-Verfahren

- Idee: Ähnlich Eulerverfahren
- Aber: Andere Quadraturformel
- \Rightarrow Zeitschritt:

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \frac{\Delta t}{6} \cdot (k_1(t) + 2 \cdot k_2(t) + 2 \cdot k_3(t) + k_4(t))$$

mit

$$k_1(t) = rhs[f(t)]$$

$$k_2(t) = rhs \left[f(t) + \frac{\Delta t}{2} k_1(t) \right]$$

$$k_3(t) = rhs \left[f(t) + \frac{\Delta t}{2} \cdot k_2(t) \right]$$

$$k_4(t) = rhs \left[f(t) + \Delta t k_3(t) \right]$$

Runge-Kutta-4-Verfahren

- Idee: Ähnlich Eulerverfahren
- Aber: Andere Quadraturformel
- \Rightarrow Zeitschritt:

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \frac{\Delta t}{6} \cdot (k_1(t) + 2 \cdot k_2(t) + 2 \cdot k_3(t) + k_4(t))$$

mit

$$k_1(t) = rhs[f(t)]$$

$$k_2(t) = rhs \left[f(t) + \frac{\Delta t}{2} k_1(t) \right]$$

$$k_3(t) = rhs \left[f(t) + \frac{\Delta t}{2} \cdot k_2(t) \right]$$

$$k_4(t) = rhs \left[f(t) + \Delta t k_3(t) \right]$$

Runge-Kutta-4-Verfahren

- Idee: Ähnlich Eulerverfahren
- Aber: Andere Quadraturformel
- \Rightarrow Zeitschritt:

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \frac{\Delta t}{6} \cdot (k_1(t) + 2 \cdot k_2(t) + 2 \cdot k_3(t) + k_4(t))$$

mit

$$k_1(t) = rhs[f(t)]$$

$$k_2(t) = rhs \left[f(t) + \frac{\Delta t}{2} k_1(t) \right]$$

$$k_3(t) = rhs \left[f(t) + \frac{\Delta t}{2} \cdot k_2(t) \right]$$

$$k_4(t) = rhs \left[f(t) + \Delta t k_3(t) \right]$$

Fouriertransformation

- Funktion $f(\underline{x}, t)$ im Ortsraum
- Transformation in Fourierraum

$$\mathcal{F}[f(\underline{x}, t)] \doteq F(\underline{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\underline{k} \cdot \underline{x}} f(\underline{x}, t) d^3x$$

- Rücktransformation in den Ortsraum

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\underline{k}, t)] \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} F(\underline{k}, t) d^3k$$

Fouriertransformation

- Funktion $f(\underline{x}, t)$ im Ortsraum
- Transformation in Fourierraum

$$\mathcal{F}[f(\underline{x}, t)] \doteq F(\underline{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\underline{k} \cdot \underline{x}} f(\underline{x}, t) d^3x$$

- Rücktransformation in den Ortsraum

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\underline{k}, t)] \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} F(\underline{k}, t) d^3k$$

Fouriertransformation

- Funktion $f(\underline{x}, t)$ im Ortsraum
- Transformation in Fourierraum

$$\mathcal{F}[f(\underline{x}, t)] \doteq F(\underline{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\underline{k} \cdot \underline{x}} f(\underline{x}, t) d^3x$$

- Rücktransformation in den Ortsraum

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\underline{k}, t)] \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} F(\underline{k}, t) d^3k$$

Fouriertransformation

Ableitung im Ortsraum

$$\begin{aligned}\underline{\nabla}_{\underline{x}} f(\underline{x}, t) &= \underline{\nabla}_{\underline{x}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} F(\underline{k}, t) d^3 k \\&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\nabla}_{\underline{x}} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} F(\underline{k}, t) d^3 k \\&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} i\underline{k} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} F(\underline{k}, t) d^3 k \\&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} i\underline{k} F(\underline{k}, t) d^3 k \\&= \mathcal{F}^{-1}[i\underline{k} F(\underline{k}, t)]\end{aligned}$$

Fouriertransformation

Ableitung im Ortsraum

$$\begin{aligned}\underline{\nabla}_{\underline{x}} f(\underline{x}, t) &= \underline{\nabla}_{\underline{x}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} F(\underline{k}, t) d^3 k \\&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\nabla}_{\underline{x}} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} F(\underline{k}, t) d^3 k \\&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} i\underline{k} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} F(\underline{k}, t) d^3 k \\&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} i\underline{k} F(\underline{k}, t) d^3 k \\&= \mathcal{F}^{-1}[i\underline{k} F(\underline{k}, t)]\end{aligned}$$

Fouriertransformation

Ableitung im Ortsraum

$$\begin{aligned}\nabla_{\underline{x}} f(\underline{x}, t) &= \nabla_{\underline{x}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} F(\underline{k}, t) d^3 k \\&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla_{\underline{x}} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} F(\underline{k}, t) d^3 k \\&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} i\underline{k} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} F(\underline{k}, t) d^3 k \\&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} i\underline{k} F(\underline{k}, t) d^3 k \\&= \mathcal{F}^{-1}[i\underline{k} F(\underline{k}, t)]\end{aligned}$$

Fouriertransformation

Ableitung im Ortsraum

$$\begin{aligned}\nabla_{\underline{x}} f(\underline{x}, t) &= \nabla_{\underline{x}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} F(\underline{k}, t) d^3 k \\&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla_{\underline{x}} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} F(\underline{k}, t) d^3 k \\&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} i\underline{k} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} F(\underline{k}, t) d^3 k \\&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} i\underline{k} F(\underline{k}, t) d^3 k \\&= \mathcal{F}^{-1}[i\underline{k} F(\underline{k}, t)]\end{aligned}$$

Fouriertransformation

Ableitung im Ortsraum

$$\begin{aligned}\nabla_{\underline{x}} f(\underline{x}, t) &= \nabla_{\underline{x}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} F(\underline{k}, t) d^3 k \\&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla_{\underline{x}} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} F(\underline{k}, t) d^3 k \\&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} i\underline{k} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} F(\underline{k}, t) d^3 k \\&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} i\underline{k} F(\underline{k}, t) d^3 k \\&= \mathcal{F}^{-1}[i\underline{k} F(\underline{k}, t)]\end{aligned}$$

Fouriertransformation

Ableitung im Ortsraum

$$\begin{aligned}\nabla_{\underline{x}} f(\underline{x}, t) &= \nabla_{\underline{x}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} F(\underline{k}, t) d^3 k \\&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla_{\underline{x}} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} F(\underline{k}, t) d^3 k \\&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} i\underline{k} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} F(\underline{k}, t) d^3 k \\&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} i\underline{k} F(\underline{k}, t) d^3 k \\&= \mathcal{F}^{-1}[i\underline{k} F(\underline{k}, t)]\end{aligned}$$

Pseudospektralmethode

- Ortsableitung: In Fourierraum durchführen
- \Rightarrow Multiplikation mit Wellenvektor
- \Rightarrow Übergang

$$\underline{\nabla}_{\underline{x}} \cdot \underline{u}(\underline{x}, t) \xrightarrow{\mathcal{F}} i \underline{k} \cdot \underline{u}(\underline{k}, t)$$

Pseudospektralmethode

- Ortsableitung: In Fourierraum durchführen
- \Rightarrow Multiplikation mit Wellenvektor
- \Rightarrow Übergang

$$\underline{\nabla}_{\underline{x}} \cdot \underline{u}(\underline{x}, t) \xrightarrow{\mathcal{F}} i \underline{k} \cdot \underline{u}(\underline{k}, t)$$

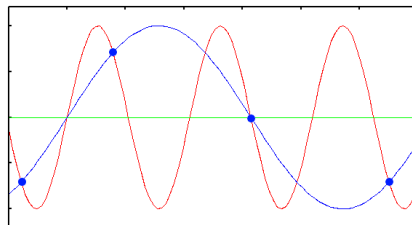
Pseudospektralmethode

- Ortsableitung: In Fourierraum durchführen
- \Rightarrow Multiplikation mit Wellenvektor
- \Rightarrow Übergang

$$\underline{\nabla}_{\underline{x}} \cdot \underline{u}(\underline{x}, t) \xrightarrow{\mathcal{F}} i \underline{k} \cdot \underline{u}(\underline{k}, t)$$

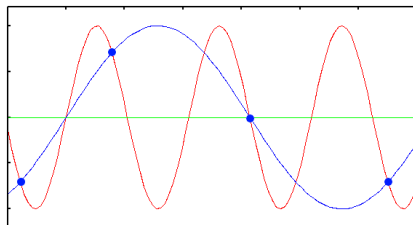
Aliasing-Effekt:

- Diskretisierungfehler: Endliche Anzahl der Gitterpunkte
- \Rightarrow Endliche Anzahl Frequenzen darstellbar
- Nyquist-Frequenz $f_{Ny} = \frac{1}{2}f_{Abtast}$
- Maximal darstellbare Frequenz: $f_{max} < f_{Ny}$



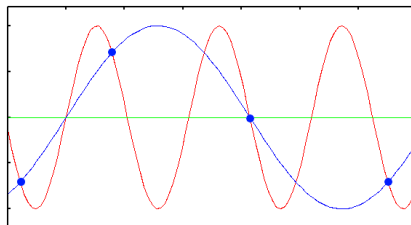
Aliasing-Effekt:

- Diskretisierungfehler: Endliche Anzahl der Gitterpunkte
- \Rightarrow Endliche Anzahl Frequenzen darstellbar
- Nyquist-Frequenz $f_{Ny} = \frac{1}{2}f_{Abtast}$
- Maximal darstellbare Frequenz: $f_{max} < f_{Ny}$



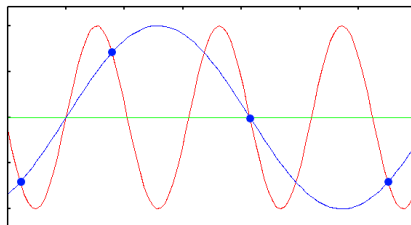
Aliasing-Effekt:

- Diskretisierungfehler: Endliche Anzahl der Gitterpunkte
- \Rightarrow Endliche Anzahl Frequenzen darstellbar
- Nyquist-Frequenz $f_{Ny} = \frac{1}{2}f_{Abtast}$
- Maximal darstellbare Frequenz: $f_{max} < f_{Ny}$



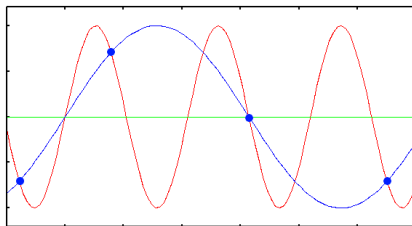
Aliasing-Effekt:

- Diskretisierungsfehler: Endliche Anzahl der Gitterpunkte
- \Rightarrow Endliche Anzahl Frequenzen darstellbar
- Nyquist-Frequenz $f_{Ny} = \frac{1}{2}f_{Abtast}$
- Maximal darstellbare Frequenz: $f_{max} < f_{Ny}$



Dealiasing

- Tiefpassfilter: Hohe Frequenzen rausgefiltert



Pseudospektralmethode am Beispiel

1D-Burgers-Gleichung

- Burgersgleichung in 1D

$$\partial_t u(x, t) = -u(x, t) \cdot \partial_x u(x, t) + \nu \partial_x^2 u(x, t)$$

- $u(x, t)$: Geschwindigkeit, ν : Dynamische Viskosität
- Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}[\partial_t u(x, t)] = -\mathcal{F}[u(x, t)] * \mathcal{F}[\partial_x u(x, t)] + \mathcal{F}[\nu \partial_x^2 u(x, t)]$$

- Problem: Nichtlinearer Term $\mathcal{F}[u(x, t) \cdot \partial_x u(x, t)]$

Pseudospektralmethode am Beispiel

1D-Burgers-Gleichung

- Burgersgleichung in 1D

$$\partial_t u(x, t) = -u(x, t) \cdot \partial_x u(x, t) + \nu \partial_x^2 u(x, t)$$

- $u(x, t)$: Geschwindigkeit, ν : Dynamische Viskosität
- Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}[\partial_t u(x, t)] = -\mathcal{F}[u(x, t)] * \mathcal{F}[\partial_x u(x, t)] + \mathcal{F}[\nu \partial_x^2 u(x, t)]$$

- Problem: Nichtlinearer Term $\mathcal{F}[u(x, t) \cdot \partial_x u(x, t)]$

Pseudospektralmethode am Beispiel

1D-Burgers-Gleichung

- Burgersgleichung in 1D

$$\partial_t u(x, t) = -u(x, t) \cdot \partial_x u(x, t) + \nu \partial_x^2 u(x, t)$$

- $u(x, t)$: Geschwindigkeit, ν : Dynamische Viskosität
- Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}[\partial_t u(x, t)] = -\mathcal{F}[u(x, t)] * \mathcal{F}[\partial_x u(x, t)] + \mathcal{F}[\nu \partial_x^2 u(x, t)]$$

- Problem: Nichtlinearer Term $\mathcal{F}[u(x, t) \cdot \partial_x u(x, t)]$

Pseudospektralmethode am Beispiel

1D-Burgers-Gleichung

- Lösung: Rücktransformation der einzelnen Terme: Multiplikation der Terme im Ortsraum
- Transformation der Nichtlinearität in den Fourierraum
$$nlin(x, t) := u(x, t) \cdot \partial_x u(x, t)$$
- $\Rightarrow \mathcal{F}[\partial_t u(x, t)] = -\mathcal{F}[nlin(x, t)] + \mathcal{F}[\nu \partial_x^2 u(x, t)]$

Pseudospektralmethode am Beispiel

1D-Burgers-Gleichung

- Lösung: Rücktransformation der einzelnen Terme: Multiplikation der Terme im Ortsraum
- Transformation der Nichtlinearität in den Fourierraum
$$nlin(x, t) := u(x, t) \cdot \partial_x u(x, t)$$
- $\Rightarrow \mathcal{F}[\partial_t u(x, t)] = -\mathcal{F}[nlin(x, t)] + \mathcal{F}[\nu \partial_x^2 u(x, t)]$

Pseudospektralmethode am Beispiel

1D-Burgers-Gleichung

- Lösung: Rücktransformation der einzelnen Terme: Multiplikation der Terme im Ortsraum
- Transformation der Nichtlinearität in den Fourierraum
$$nlin(x, t) := u(x, t) \cdot \partial_x u(x, t)$$
- $\Rightarrow \mathcal{F}[\partial_t u(x, t)] = -\mathcal{F}[nlin(x, t)] + \mathcal{F}[\nu \partial_x^2 u(x, t)]$

Pseudospektralmethode am Beispiel 1D-Burgers-Gleichung

- Beispielprogramm
- Sinussignal bildet Schock aus

Pseudospektralmethode am Beispiel 1D-Burgers-Gleichung

- Beispielprogramm
- Sinussignal bildet Schock aus

Erweiterung auf 2D Navier-Stokes-Gleichung

- Was fehlt noch?

$$\text{B.-Gl. : } \partial_t u(x, t) = -u(x, t) \cdot \partial_x u(x, t) + \nu \partial_x^2 u(x, t)$$

$$\text{N.-S.-Gl. : } \partial_t \underline{u} = -\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} - \underline{\nabla} p + \nu \Delta \underline{u} + \underline{f}$$

- 2. Dimension
- Druckterm
- Antriebsterm
- Lösung: Wirbeltransportgleichung

$$\partial_t \underline{\omega} = -(\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{\omega} + (\underline{\omega} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} + \nu \Delta \underline{\omega} + \underline{\nabla} \times \underline{f}$$

Erweiterung auf 2D Navier-Stokes-Gleichung

- Was fehlt noch?

$$\text{B.-Gl. : } \partial_t u(x, t) = -u(x, t) \cdot \partial_x u(x, t) + \nu \partial_x^2 u(x, t)$$

$$\text{N.-S.-Gl. : } \partial_t \underline{u} = -\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} - \underline{\nabla} p + \nu \Delta \underline{u} + \underline{f}$$

- 2. Dimension
- Druckterm
- Antriebsterm
- Lösung: Wirbeltransportgleichung

$$\partial_t \underline{\omega} = -(\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{\omega} + (\underline{\omega} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} + \nu \Delta \underline{\omega} + \underline{\nabla} \times \underline{f}$$

Erweiterung auf 2D Navier-Stokes-Gleichung

- Was fehlt noch?

$$\text{B.-Gl. : } \partial_t u(x, t) = -u(x, t) \cdot \partial_x u(x, t) + \nu \partial_x^2 u(x, t)$$

$$\text{N.-S.-Gl. : } \partial_t \underline{u} = -\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} - \underline{\nabla} p + \nu \Delta \underline{u} + \underline{f}$$

- 2. Dimension
- Druckterm
- Antriebsterm
- Lösung: Wirbeltransportgleichung

$$\partial_t \underline{\omega} = -(\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{\omega} + (\underline{\omega} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} + \nu \Delta \underline{\omega} + \underline{\nabla} \times \underline{f}$$

Erweiterung auf 2D Navier-Stokes-Gleichung

- Was fehlt noch?

$$\text{B.-Gl. : } \partial_t u(x, t) = -u(x, t) \cdot \partial_x u(x, t) + \nu \partial_x^2 u(x, t)$$

$$\text{N.-S.-Gl. : } \partial_t \underline{u} = -\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} - \underline{\nabla} p + \nu \Delta \underline{u} + \underline{f}$$

- 2. Dimension
- Druckterm
- Antriebsterm
- Lösung: Wirbeltransportgleichung

$$\partial_t \underline{\omega} = -(\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{\omega} + (\underline{\omega} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} + \nu \Delta \underline{\omega} + \underline{\nabla} \times \underline{f}$$

Erweiterung auf 2D Navier-Stokes-Gleichung

- Was fehlt noch?

$$\text{B.-Gl. : } \partial_t u(x, t) = -u(x, t) \cdot \partial_x u(x, t) + \nu \partial_x^2 u(x, t)$$

$$\text{N.-S.-Gl. : } \partial_t \underline{u} = -\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} - \underline{\nabla} p + \nu \Delta \underline{u} + \underline{f}$$

- 2. Dimension
- Druckterm
- Antriebsterm
- Lösung: Wirbeltransportgleichung

$$\partial_t \underline{\omega} = -(\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{\omega} + (\underline{\omega} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} + \nu \Delta \underline{\omega} + \underline{\nabla} \times \underline{f}$$

Kelvin-Helmholtz-Instabilität



Abbildung: Darstellung Kelvin-Helmholtz-Instabilität in Wolken

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!