Praktikum ‘Nichtlineare Modellierung in den Naturwissenschaften’

Gruppe: ‘Turbulenz’

Michael Wilczek

Christoph Beekmans   Paul Striewski

Inhalt

Physikalische Grundlagen

- Navier-Stokes-Gleichungen
- Wirbeltransportgleichung
- Punktwirbeldynamik

Implementierung

- Zeitschrittverfahren
- Pseudo-Spektralverfahren
- Beispiel: Advektionsgleichung
- Beispiel: Burgersgleichung

Was ist Turbulenz?

Charakteristika von Turbulenz in einem Kontinuum

- Viele verschiedene räumliche Skalen und Stärken von Wirbeln
- Schwer vorherzusagendes Verhalten der Strömung
- Starke Änderungen der Strömung bei kleinen Änderungen der Randbedingungen

Navier-Stokes-Gleichungen

- System von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung
- Leiten sich vom Impulserhaltungssatz (2. Newtonsches Axiom) und der Massenerhaltung ab

Für Turbulenz wichtig: **inkompressible Navier-Stokes-Gleichung**

Navier-Stokes-Gleichungen

Nicht-kompressible Navier-Stokes-Gleichung

$$\frac{\partial \vec{u}(\vec{x},t)}{\partial t} + (\vec{u}(\vec{x},t) \cdot \nabla)\vec{u}(\vec{x},t) = -\nabla \vec{p}(\vec{x},t) + \upsilon \triangle \vec{u}(\vec{x},t) + \vec{f}(\vec{x},t)$$

$\frac{\partial \vec{u}(\vec{x},t)}{\partial t}$	beschreibt die zeitliche Geschwindigkeitsänderung
$\vec{u}(\vec{x},t) \cdot \nabla \vec{u}(\vec{x},t)$	Konvektionsterm, beschreibt die räumliche Änderung der Strömung
$\nabla \vec{p}(\vec{x},t)$	beschreibt den Druckgradienten
$\nu \triangle \vec{u}(\vec{x},t)$	Dissipationsterm, beschreibt Einfluss der Reibung (mit Viskositätsfaktor ν)
$\vec{f}(\vec{x},t)$	Äuere Kräfte, z. Bsp. Gravitationskraft (Volumenkraftdichte)

Navier-Stokes-Gleichungen

Reynolds-Zahl (1)

- Dimensionslose Kennzahl zur Beschreibung von Strömungssituationen
- Beschreibt das Verhaltnis von Trägheits - zu Zähigkeitskräften
- $Re = \frac{UL}{\nu}$
  Wobei:
  U : Charakteristische Geschwindigkeitsskala
  L : Charakteristische Langenskala
  ν: Viskosität

Navier-Stokes-Gleichungen

Reynolds-Zahl (2)

$\rightarrow$ Strömungssituationen mit gleicher Reynoldszahl haben gleiches Turbulenzverhalten

Beispiele:

- Wasser
  - Schiff : $10^7 - 10^{10}$
  - Delphin : 10^7
- Luft
  - Auto : 10^7

Wirbeltransportgleichung

Beschreibung der Strömung durch das Wirbelstärkefeld, wobei die Wirbelstärke $\vec{\omega}$ definiert ist durch

$$\vec{\omega}(\vec{x}, t) = \nabla \times \vec{u}(\vec{x}, t)$$

Nach Anwendung der Rotation auf die Navier-Stokes-Gleichung

$$\frac{\partial \vec{u}(\vec{x}, t)}{\partial t} + (\vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \nabla)\vec{u}(\vec{x}, t) = -\nabla \vec{p}(\vec{x}, t) + \upsilon \triangle \vec{u}(\vec{x}, t) + \vec{f}(\vec{x}, t)$$

folgt die Wirbeltransportgleichung ($\rightarrow$)

Wirbeltransportgleichung (2)

Fortsetzung

$$(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}(\vec{x},t)\cdot\nabla)\vec{\omega}(\vec{x},t)=\vec{\omega}(\vec{x},t)\cdot\nabla\vec{u}(\vec{x},t)+\nu\triangle\vec{\omega}(\vec{x},t)+\nabla\times\vec{f}(\vec{x},t)$$

, wobei für den 2D-Fall gilt für den Wirbelstreckungsterm

$$\vec{\omega}(\vec{x},t)\cdot\nabla\vec{u}(\vec{x},t)=0$$

(In 2D ist $\vec{\omega}(\vec{x},t)=\omega_z(x,y,t)$ nur von x und y abhängig)

Wirbeltransportgleichung (3)

Fortsetzung

Nimmt man noch an, dass

$$\nabla \times \vec{f}(\vec{x}, t) = 0$$

, so ergibt sich die Helmholtzsche Wirbeltransportgleichung

$$\frac{\partial \vec{\omega}(\vec{x}, t)}{\partial t} + (\vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \nabla)\vec{\omega} = \nu \triangle \vec{\omega}(\vec{x}, t)$$

Punktwirbeldynamik

Punktwirbeldynamik

Punktwirbel sind einzelne kohärente Wirbel mit

- Wirbelzentrum $\vec{r}$
- Wirbelstärke $\vec{\omega}$

Punktwirbeldynamik

Punktwirbeldynamik

- Ein Wirbel bewegt sich im Geschwindigkeitsfeld, das von den jeweils anderen erzeugt wird
- So gilt für jeden Wirbel die Bewegungsgleichung in 2D:

$$\vec{u}_j(x,t) = \sum_{i \neq j} \Gamma_i \vec{e}_z \times \frac{1}{2\pi} \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)^2}$$

- $\rightarrow$ Einfluss eines Wirbels auf einen anderen ist proportional zu 1/r mit Abstand r

2 Punktwirbel

System wird beschrieben durch

$$\frac{d\vec{x}_1(\vec{t})}{dt} = \Gamma \vec{e}_z \times \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{\pi \left|\vec{r}\right|^2}$$

und

$$\frac{d\vec{x}_2(\vec{t})}{dt} = \Gamma \vec{e}_z \times \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{\pi \left|\vec{r}\right|^2}$$

Fallunterscheidung:

- $\Gamma_1 = \Gamma_2$
- $\Gamma_1 = -\Gamma_2$

2 Punktwirbel

1) $\Gamma_1 = \Gamma_2$
$\rightarrow$ System hat festen Schwerpunkt $\vec{R} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$
$\rightarrow$ Abstandsvektor $\vec{r}$ ändert sich gemäß

$$\dot{\vec{r}} = \frac{2\Gamma}{2\pi}\vec{e}_z \times \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

2) $\Gamma_1 = -\Gamma_2$

- Abstandsvektoränderung: $\frac{d}{dt}[\vec{x}_1 - \vec{x}_2] = 0$
- Schwerpunktänderung: $\frac{d}{dt}[\vec{x}_1 + \vec{x}_2] = \frac{2\Gamma}{2\pi}\vec{e}_z \times \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|}$

$\rightarrow$ Schwerpunkt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit
$\rightarrow$ Abstandsvektor ändert sich nicht

3 und 4 Punktwirbel

3 Punktwirbel

- bilden Dreieck
- Wirbelkonfiguration ändert sich nicht
- nicht chaotisch

4 Punktwirbel

- können chaotische Bewegungen ausführen
- bei bestimmten Anfangskonfigurationen nicht-chaotisch

Implementierung

Reihenfolge bei der Implementierung

- Punktwirbelgleichung $\longrightarrow$ Zeitschrittverfahren
- Fourier-Methoden für die Behandlung von Ortsableitungen:

$$
\begin{aligned}
u_t &= \nu u_{xx} && \text{(Wärmeleitungsgleichung)} \\
u_t &= -c u_x + \nu u_{xx} && \text{(Advektions- Diffusions-Gleichung)} \\
u_t &= -u u_x + \nu u_{xx} && \text{(Burgersgleichung)}
\end{aligned}
$$

Reihenfolge bei der Implementierung

- Punktwirbelgleichung $\longrightarrow$ Zeitschrittverfahren

- Fourier-Methoden für die Behandlung von Ortsableitungen:

$$
\begin{aligned}
u_t &= \nu u_{xx} && \text{(Wärmeleitungsgleichung)} \\
u_t &= -c u_x + \nu u_{xx} && \text{(Advektions- Diffusions-Gleichung)} \\
u_t &= -u u_x + \nu u_{xx} && \text{(Burgersgleichung)}
\end{aligned}
$$

Zeitschrittverfahren

Euler-Verfahren

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y' = f(t, y), \; y(t_0) = y_0$$

Ersetze Differential- durch Differenzenquotienten

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f_n(t_n, y_n)$$

$$\rightsquigarrow \quad y_{n+1} = y_n + h \; f_n(t_n, y_n) + (h^2)$$

Zeitschrittverfahren

Runge-Kutta-Verfahren

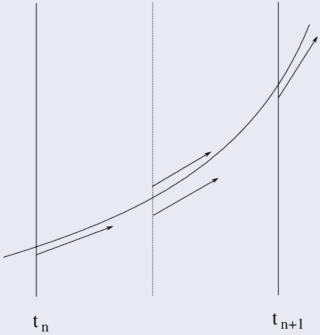
- Eigentlich Familie von Einschrittverfahren für Anfangswertprobleme.
- Hier nur *klassisches* Runge-Kutta-Verfahren: Gegeben sei die AWA

$$y' = f(t, y), \ y(t_0) = y_0$$

Runge-Kutta 4

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$
$$k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$$
$$k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})$$
$$k_4 = f(t_n + h, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + (h^5)$$
$$t_{n+1} = t_n + h$$



Wiederholung FT

- Für eine Funktion $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\mathcal{F}u(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-ik\cdot x}\, dx$$

- Für spezielle Abbildungen gilt die wichtige Beziehung:

$$\mathcal{F}(u_{x_j}) = ik_j\, \mathcal{F}(u)$$

Spektralverfahren: Ein erstes Beispiel

Beispiel

Advektions-Diffusions-Gleichung

$$
\begin{aligned}
& u_t = -c u_x + \nu u_{xx} \\
\rightsquigarrow \;\; & \mathcal{F}(u_t) = -ick\mathcal{F}(u) - \nu k^2 \, \mathcal{F}(u)
\end{aligned}
$$

Visualisierung

Visualisierung Advektions-Diffusions-Gleichung

Burgersgleichung - Nichtlinearität

Nichtlinearer Term in der Burgersgleichung

$$u_t = -uu_x + \nu u_{xx}$$

wird durch $\mathcal{F}$ in den Term

$$\mathcal{F}(u_t) = -\mathcal{F}(u) * ik\mathcal{F}(u) - \nu k^2 \mathcal{F}(u)$$

überführt.
Aufwand für die Berechnung des (diskreten) Faltungsprodukts: (N^2).

Burgersgleichung: $u_t = -uu_x + \nu u_{xx}$

Besser:
Berechne das Produkt im *Ortsraum*.

$$\mathcal{F}(u \cdot u_x) = \mathcal{F}\left[u \cdot \mathcal{F}^{-1}(ik\mathcal{F}(u))\right]$$

Insgesamt dann:

$$\mathcal{F}(u_t) = -\mathcal{F}\left[u \cdot \mathcal{F}^{-1}(ik\mathcal{F}(u))\right] - \nu k^2 \mathcal{F}(u)$$

Aufwand für Produktbildung im Ortsraum lediglich (N).
Hinzukommend: Aufwand für Hin- und Rücktransformation: $(N \log N)$.

Visualisierung

Visualisierung Burgers-Gleichung

Spektralverfahren

Spektralverfahren: (Behandlung der Ortsableitungen)

- Vorzüge:
  - Hohe Genauigkeit
  - Finite Differenzen erbringen durchschnittlich erst bei deutlich höherer Gitterpunktanzahl ähnlich präzise Ergebnisse.
  - Vorteile insbesondere bei höheren Ableitungen.
- Nachteil: Eingeschränkte Anwendbarkeit (einfache Geometrie des Gebiets).

Ausblick

Nächste Schritte:

- Erweiterung auf $2D$.
- Ziel: Wirbeltransportgleichung

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!