Abschlussvortrag Praktikum 'Nichtlineare Modellierung in den Naturwissenschaften'

Gruppe: 'Turbulenz'

Michael Wilczek

Christoph Beekmans   Paul Striewski

Inhalt

Physikalische Grundlagen

- Navier-Stokes-Gleichungen
- Wirbeltransportgleichung, Punktwirbeldynamik
- Wirbeltransportgleichung mit axialsymmetrischer Wirbelstärke
- Lamb-Oseen-Wirbel als Lösung

Implementierung

- Wärmeleitungsgleichung in 2D
- Wirbeltransportgleichung
- Beispiele

Navier-Stokes-Gleichungen

Nicht-kompressible Navier-Stokes-Gleichung

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + (\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\cdot\nabla)\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = -\nabla p(\mathbf{x},t) + \nu\triangle\mathbf{u}(\mathbf{x},t) + \mathbf{f}(\mathbf{x},t)$$

$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x},t)}{\partial t}$	beschreibt die zeitliche Geschwindigkeitsänderung
$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\cdot\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$	Konvektionsterm, beschreibt die räumliche Änderung der Strömung
$\nabla\mathbf{p}(\mathbf{x},t)$	beschreibt den Druckgradienten
$\nu\triangle\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$	Dissipationsterm, beschreibt Einfluss der Reibung (mit Viskositätsfaktor ν)
$\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$	Äußere Kräfte, z. Bsp. Gravitationskraft (Volumenkraftdichte)

Wirbeltransportgleichung

Beschreibung der Strömung durch das Wirbelstärkefeld, wobei die Wirbelstärke $\boldsymbol{\omega}$ definiert ist durch

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$$

Nach Anwendung der Rotation auf die Navier-Stokes-Gleichung

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla \mathbf{p} + \nu \triangle \mathbf{u} + \mathbf{f}$$

folgt die Wirbeltransportgleichung ($\rightarrow$)

Wirbeltransportgleichung (2)

Fortsetzung

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \triangle \boldsymbol{\omega} + \nabla \times \mathbf{f}$$

, wobei in 2D für den Wirbelstreckungsterm gilt

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0$$

(In 2D zeigt $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ nur in z-Richtung und $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ist nur von x und y abhängig)

Wirbeltransportgleichung (3)

Damit ergibt sich die Helmholtzsche Wirbeltransportgleichung

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} = \nu \triangle \boldsymbol{\omega}$$

Wirbeltransportgleichung mit axialsymmetrischer Wirbelstärke

Wirbelstärkefeld

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \omega_z(r, t)\mathbf{e_z} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

und in 2D

$$\omega(\mathbf{x}, t) = \omega_z(r, t)\mathbf{e_z} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Geschwindigkeitsfeld

Auf Grund des Biot-Savart-Gesetzes erzeugt dieses Feld ein azimuthales Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = u_\varphi(r, t)\mathbf{e}_\varphi$$

Wirbeltransportgleichung mit axialsymmetrischer Wirbelstärke (2)

Advektionsterm in Zylinderkoordinaten

$$\mathbf{u}(r,t)\cdot\nabla\omega(r,t) = (u_\varphi(r,t)\mathbf{e}_\varphi\cdot\nabla)\omega(r,t) = \frac{1}{r}u_\varphi(r,t)\frac{\partial}{\partial\varphi}\omega(r,t) = 0$$

Resultierende Wirbeltransportgleichung

$$\frac{\partial\omega_z}{\partial t} = \nu\triangle\omega_z$$

$\rightarrow$ Form der Wärmeleitungsgleichung

Wirbeltransportgleichung mit axialsymmetrischer Wirbelstärke (3)

Schreibt man den Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten, so folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega_z(r,t) = \nu \triangle \omega_z = \nu \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r}\omega_z(r,t)\right)$$

Lamb-Oseen-Wirbel als Lösung

Wirbelstärke

$$\omega_z(r,t) = \frac{\Gamma}{\pi r_B^2} e^{\frac{-r^2}{r_B^2}} \quad r_B = 4\nu t$$

mit der Zirkulation Γ

Geschwindigkeit

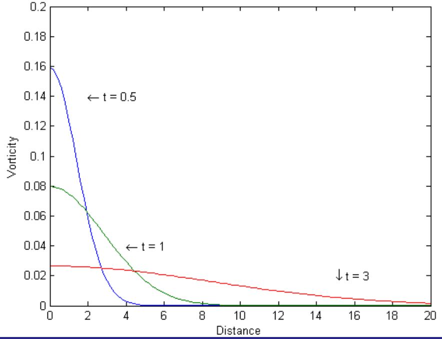
Aus dem Biot-Savart-Gesetz folgt dann:

$$\mathbf{u}(r,t) = \frac{\Gamma}{2\pi r}(1 - e^{\frac{-r^2}{r_B^2}})\mathbf{e}_\varphi$$

Verlauf der Wirbelstärke

Lösung des Lamb-Oseen-Wirbels

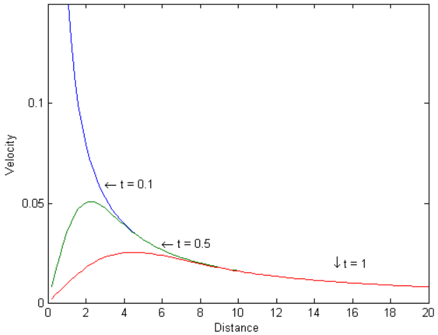
$$\omega_z(r,t) = \frac{\Gamma}{\pi r_B^2} e^{\frac{-r^2}{r_B^2}} \qquad r_B = 4\nu t$$



Verlauf der Gechwindigkeit

Lösung des Geschwindigkeitsfeldes

$$\mathbf{u}(r,t) = \frac{\Gamma}{2\pi r}(1 - e^{\frac{-r^2}{r_B^2}})\mathbf{e}_\varphi$$



Verhalten im Fernfeld

Für r $\gg r_B$ gilt offenbar:

$$u_\varphi(r,t) = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

$\rightarrow$ Lamb-Oseen-Wirbel hat im Fernfeld die Eigenschaften eines Punktwirbels

Implementierung

Reihenfolge bei der Implementierung

Ziel: Wirbeltransportgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega(\mathbf{x},t) = -(u(\mathbf{x},t)\cdot\nabla)\omega(\mathbf{x},t) + \nu\Delta\omega(\mathbf{x},t)$$

- Wärmeleitungsgleichung in 2D:

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega(\mathbf{x},t) = \nu\Delta\omega(\mathbf{x},t)$$

- Behandlung der Nichtlinearität:

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega(\mathbf{x},t) = \underline{-(u(\mathbf{x},t)\cdot\nabla)\omega(\mathbf{x},t)} + \nu\Delta\omega(\mathbf{x},t)$$

Wärmeleitungsgleichung

Fourierreihe in 2D

Erweiterung der Fouriertransformation auf $2D$, Wellenzahlen werden zu Wellenvektoren.

$$\hat{z}_{k_x,k_y} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} z_{m,n} e^{\frac{-2\pi i m k_x}{M}} e^{\frac{-2\pi i n k_y}{N}}$$

Wärmeleitungsgleichung 2D

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega(\mathbf{x}, t) = \nu \left(\frac{\partial 2}{\partial x 2}\omega(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial 2}{\partial y 2}\omega(\mathbf{x}, t) \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\omega}_k = -\nu(k_x 2 + k_y 2)\hat{\omega}_k$$

Demonstration der Wärmeleitungsgleichung.

Wirbeltransportgleichung

Herleitung der Verfahrensvorschrift

Bestimme $u(\mathbf{x}, t)$ im Term

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega = -(u \cdot \nabla)\omega + \nu\Delta\omega$$

überführe dazu mittels Vektoridentität in

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega = \nabla \times [u \times \omega] + \nu\Delta\omega$$

mit

$$u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{pmatrix}, \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

Wirbeltransportgleichung

Verwende dann

$$\begin{aligned} \omega &= \nabla \times u \\ \rightsquigarrow \quad \nabla \times \omega &= \nabla \times \nabla \times u \\ &= \nabla(\nabla \cdot u) - \Delta u \end{aligned}$$

Im Fourierraum infolgedessen

$$ik \times \hat{\omega}_k = k2\hat{u}_k, \qquad k = (k_x, k_y, 0)^t$$

$$\rightsquigarrow \hat{u}_k = \frac{ik \times \hat{\omega}_k}{k2}$$

Wirbeltransportgleichung

Verwende dann

$$\begin{aligned} \omega &= \nabla \times u \\ \rightsquigarrow \ \nabla \times \omega &= \nabla \times \nabla \times u \\ &= \nabla(\nabla \cdot u) - \ \Delta u \end{aligned}$$

Im Fourierraum infolgedessen

$$\begin{aligned} ik \times \hat{\omega}_k &= k2\hat{u}_k, \qquad\qquad k = (k_x, k_y, 0)^t \\ \rightsquigarrow \hat{u}_k &= \frac{ik \times \hat{\omega}_k}{k2} \end{aligned}$$

Wirbeltransportgleichung

Führe die Multiplikation im Ortsraum aus und transformiere zurück.

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\omega}_k = [ik \times \mathcal{F}(u \times \omega)_k] - \nu k2\hat{\omega}_k$$

detaillierter:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\omega}_k = \left[ik \times \mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{ik \times \hat{\omega}_k}{k2}\right) \times \mathcal{F}^{-1}(\hat{\omega})\right)\right] - \nu k2\hat{\omega}_k$$

Demonstration der Wirbeltransportgleichung

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!