# Interdisziplinäres Seminar: Turbulenz

Leonardo's imagery of falling water (1508-09)
[Source: http://www.visi.com/~reuteler/leonardo.html]

Jan Friedrich, Anne Pein, Christoph Berling, Benjamin Motz

Zwischenbericht am 14. Dezember 2010

# Überblick

## Hintergrund

- *turbare:* drehen, verwirbeln, umherwirbeln
- Mitte des 18. Jh. Euler stellt Grundgleichungen für reibungsfreie Flüssigkeiten auf
- Anfang des 19. Jh. Navier-Stokes Gleichung: Berücksichtigung molekularer Reibungskräfte

# Überblick

## Hintergrund

- *turbare:* drehen, verwirbeln, umherwirbeln
- Mitte des 18. Jh. Euler stellt Grundgleichungen für reibungsfreie Flüssigkeiten auf
- Anfang des 19. Jh. Navier-Stokes Gleichung: Berücksichtigung molekularer Reibungskräfte

## Ziel: Verständnis turbulenter Flüssigkeitsdynamik

- Zugang über Analyse vereinfachter Strömungsmodelle: Punktwirbeldynamik, eindimensionale Strömung
- Technische Umsetzung: Simulation gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen

# Navier-Stokes Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(\mathbf{x},t) + (\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = -\boldsymbol{\nabla} p(\mathbf{x},t) + \nu\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$$

- Partielle nichtlineare Differentialgleichung
- Inkompressibilitätsbedingung $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = 0$
- Bedingt durch Druck ergibt sich *Nichtlokalität*: Kenntnis des Strömungsverhaltens im gesamten Raum erforderlich, um Geschwindigkeitsänderung an einem Ort $\mathbf{x}$ zu bestimmen:

$$p(\mathbf{x},t) = \int \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\sum_{i,j}\frac{\partial u_i(\mathbf{x}',t)}{\partial x_j'}\frac{\partial u_j(\mathbf{x}',t)}{\partial x_i'}\,d\mathbf{x}'$$

- Bedingt durch advektiven Term ergibt sich *Nichtlinearität*: Sensitive Abhängigkeit von Anfangsbedingungen

# Wirbeltransportgleichung

- Wirbelstärke $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ charakterisiert das Auftreten von Verwirbelungen
- Rotation angewandt auf die Navier-Stokes-Gleichung liefert

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \nu\Delta\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$$

2D: *Wirbelstreckungsterm* entfällt, $\omega$ wird zum Pseudoskalar

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\nabla})\omega(\mathbf{x}, t) = \nu\Delta\omega(\mathbf{x}, t)$$

- Idealisierung: Reibungsfreie Flüssigkeit: $\nu = 0$
$\rightarrow$Wirbelstärke zeitlich konstant
- Nichtlokalität bleibt in $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ bestehen:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_{pot}(\mathbf{x}, t) + \int \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t) \times \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')d\mathbf{x}'$$

# Punktwirbelmodell

- Vereinfachtes Modell: Wirbel an einem Ort lokalisiert
- Lagrange'sche Behandlung: Beschreibung im mitbewegten Koordinatensystem
- Dynamik gegeben durch

$$\frac{d}{dt}x_j(t) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{i\neq j}\frac{\Gamma_i}{L_{ij}^2}\cdot(y_j - y_i)$$

$$\frac{d}{dt}y_j(t) = +\frac{1}{2\pi}\sum_{i\neq j}\frac{\Gamma_i}{L_{ij}^2}\cdot(x_j - x_i)$$

$L_{ij}$ : Abstand der Punktwirbel i, j

$\Gamma_j$ : Wirbelstärke

- Numerische Implementierung mit Runge-Kutta Verfahren

# Burgers Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + u(x,t)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$$

- nichtviskose Burgersgleichung ($\nu = 0$) kann Diskontinuitäten entwickeln
- Veränderung des Wellenprofils
- Numerik: Lösung mittels Pseudospektralverfahren
- Hopf-Cole Transformation führt auf Wärmeleitungsgleichung
  - kein chaotisches Verhalten
  - exakte Lösung erlaubt Überprüfung der Numerik

# Burgers Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + u(x,t)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$$

- nichtviskose Burgersgleichung ($\nu = 0$) kann Diskontinuitäten entwickeln
- Veränderung des Wellenprofils
- Numerik: Lösung mittels Pseudospektralverfahren
- Hopf-Cole Transformation führt auf Wärmeleitungsgleichung
  - kein chaotisches Verhalten
  - exakte Lösung erlaubt Überprüfung der Numerik

## Ausblick

- Lösung der 2D-Wirbeltransportgleichung mit Pseudospektralverfahren

## Danke für Eure Aufmerksamkeit!