

**9. Übungsblatt zur Vorlesung “Partielle Differentialgleichungen”**  
(Elliptische Operatoren, schwache Lösungen, Sobolev-Räume)

---

**1. Aufgabe** (4 Punkte)

Welche der folgenden linearen Abbildungen  $F_k : L^2(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sind stetig? Geben Sie ggf.  $\|F_k\|_{L^2(0, \infty)}$  und die zugehörigen Riesz-Repräsentanten  $f_k \in L^2(0, \infty)$  an.

$$\begin{aligned} F_1(\varphi) &= \int_0^\infty \varphi(x) dx, & F_2(\varphi) &= \int_{-\infty}^\infty \varphi(e^x) dx, \\ F_3(\varphi) &= \int_0^\infty \varphi(e^x - 1) dx, & F_4(\varphi) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\tan(x)) dx, \end{aligned}$$

für alle  $\varphi \in L^2(0, \infty)$ .

**2. Aufgabe** (4 Punkte)

Sei  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ , sei  $f \in L^2(\Omega)$  und  $b \in C(\Omega)$  mit  $\sup_{x \in \Omega} |b(x)| = C < \infty$ .

Bilden Sie die schwache Formulierung des Problems

$$\Delta u - b(x)u = f(x) \quad \text{in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

**3. Aufgabe** (5 Punkte (1,5 + 3,5))

Man zeige:

a)  $\delta \in H^1(\mathbb{R})' =: H^{-1}(\mathbb{R})$ .

Hinweis: Die Norm in  $H^{-1}(\mathbb{R})$  ist definiert durch

$$\|f\|_{H^{-1}(\mathbb{R})} = \sup_{g \in H^1(\mathbb{R}), g \neq 0} \frac{|\langle f, g \rangle|}{\|g\|_{H^1(\mathbb{R})}}.$$

b)

$$u(x, y) = \ln \left( \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \in H^1(K_{\frac{1}{2}}),$$

wobei  $K_{\frac{1}{2}}$  die Kugel mit Radius  $\frac{1}{2}$  um den Ursprung bezeichnet.

Hinweis: siehe Hinweis von Aufgabe 4

**4. Aufgabe** (3 Punkte)

Seien  $u, v \in H^1(\mathbb{R})$ . Zeigen Sie, dass das Produkt  $uv$  auch in  $H^1(\mathbb{R})$  ist.

Hinweis: Für  $s > m/2$  gilt die stetige Einbettung

$$H^s(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow C_b(\mathbb{R}^m).$$

Dabei bezeichnet  $C_b(\mathbb{R}^m)$  den Raum der beschränkten stetigen Funktionen auf  $\mathbb{R}^m$ .

**5. Aufgabe** (4 Punkte)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet. Dann gilt für  $1 \leq p \leq q \leq \infty$  :

$$L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega),$$

mit stetigen Einbettungen. Begründen Sie das!

**Abgabe** der Lösungen am Di, 16.12. bis 12 Uhr in den Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters.