

8. Übungsblatt zur Vorlesung “Partielle Differentialgleichungen”
(Das Maximumprinzip für elliptische Operatoren)

1. Aufgabe (4 Punkte)

Seien $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend und beschränkt mit Greenschen Funktionen $G_k : \Omega_k \times \Omega_k \rightarrow \mathbb{R}$ ($k = 1, 2$) zu einem gleichmäßig elliptischen Differentialoperator zweiter Ordnung mit $c = 0$. Zeigen Sie: $G_2(x, y) \leq G_1(x, y)$ für alle $x, y \in \Omega_1$.

Hinweis: Für $\bar{y} \in \Omega_k$ fix ist $G_k(., \bar{y}) \notin C^2(\Omega_k) \cap C(\bar{\Omega}_k)$. Tun Sie so, als wäre $G_k(., \bar{y}) \in C^2(\Omega_k) \cap C(\bar{\Omega}_k)$! Das geht allerdings auch ohne Mogeln.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend und beschränkt, und sei $f : \mathbb{R} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und im ersten Argument stetig differenzierbar mit $f_u(u, x) \geq 0$ für alle $(u, x) \in \mathbb{R} \times \Omega$. Zeigen Sie:

$$\Delta_x u = f(u, x) \quad \text{mit} \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$$

besitzt höchstens eine klassische Lösung.

Hinweis: Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

3. Aufgabe (3 Punkte)

Finden Sie ein Intervall $\Omega \subset \mathbb{R}$ und eine Funktion $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f'(u) < 0$ für alle u so, dass

$$u'' = f(u) \quad \text{mit} \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

nicht eindeutig lösbar ist.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Konstruieren Sie ein (einfaches) Beispiel, um zu zeigen, dass das schwache Maximumprinzip für Differentialoperatoren *vierter* Ordnung nicht notwendig gilt.

5. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend, beschränkt, und mit glattem Rand. Sei u eine Lösung von

$$\Delta_x u + a(x) \cdot \nabla_x u = f(x), \quad x \in \Omega, \quad \text{mit} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{in} \quad \partial\Omega.$$

Angenommen $f \geq 0$ in Ω . Zeigen Sie mit Hilfe des starken Maximumprinzips, dass dann u konstant und $f \equiv 0$ folgt.

Abgabe der Lösungen am Di, 09.12. bis 12 Uhr in den Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters.