

7. Übungsblatt zur Vorlesung “Partielle Differentialgleichungen” (Der Laplace-Operator, Maximumprinzip)

1. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\omega > 0$. Berechnen Sie die Lösungen u_ξ von $u'' - \omega^2 u = \delta_\xi$ in \mathbb{R} .

Gibt es beschränkte Lösungen? Kann man eine Green'sche Funktion für $\Omega = \mathbb{R}$ aus den Lösungen gewinnen?

Hinweis: Lösen Sie zunächst $u'' - \omega^2 u = \delta_0$ unter der Annahme, dass u von $|x|$ abhängt, d.h. eine gerade Funktion ist. Bestimmen Sie auftretenden Konstanten mit Hilfe der distributionellen Formulierung.

2. Aufgabe (6 Punkte)

Zeigen Sie mittels Fouriertransformation, dass für die Helmholtz-Gleichung

$$(-\Delta + k^2)u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n,$$

mit $k > 0$, und $f \in L^2(\mathbb{R})$:

- a) im Falle $n = 1$ eine eindeutige Lösung $u \in L^2(\mathbb{R})$ existiert.
- b) für alle $n \geq 4$ keine Fundamentallösung $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit Pol in 0 existiert.

Hinweis:

Benutzen Sie $(\mathcal{F}(\nabla^\alpha u))(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha (\mathcal{F}u)(\xi)$ und die Plancherel-Gleichung $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{F}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, wobei $\mathcal{F}u$ die Fouriertransformierte von u bezeichnet. Weiters gilt $\mathcal{F}\delta_0 \equiv (2\pi)^{-n/2}$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Gibt es eine nichttriviale stationäre Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta_x u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

die in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt? (Mit Begründung)

Hinweis: Maximumprinzip

4. Aufgabe (5 Punkte)

Man beweise folgendes Maximumprinzip:

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und $f \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. f genüge in Ω der Differentialgleichung

$$Lf := (\Delta + a \cdot \nabla)f \geq 0,$$

wobei $a \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor ist. Dann nimmt f ihr Maximum auf dem Rand $\partial\Omega$ an.

Hinweis: Betrachten Sie $L(f + \varepsilon g)$, $\varepsilon > 0$, wobei g die Form $g(x) = e^{ca \cdot x}$ mit einer geeigneten Konstanten $c \in \mathbb{R}$ hat.

Abgabe der Lösungen am Di, 02.12. bis 12 Uhr in den Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters.