

**6. Übungsblatt zur Vorlesung “Partielle Differentialgleichungen”**  
(Der Laplace-Operator, Green’sche Funktionen)

---

**1. Aufgabe** (5 Punkte)

Transformieren Sie  $\Delta u$  in Kreiskoordinaten und in Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \vartheta \\ r \cos \varphi \sin \vartheta \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

**2. Aufgabe** (5 Punkte)

Man löse das Dirichlet-Problem für die Laplacegleichung auf einem Kreisring.

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad \text{in } \Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 16\}, \\ u &= u_D = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 = 1 \\ 0, & x^2 + y^2 = 16 \end{cases}. \end{aligned}$$

Hinweis: Transformieren Sie die Gleichung auf Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  und machen Sie einen Separationsansatz  $u(r, \varphi) = \Psi(r)\Phi(\varphi)$ .

**3. Aufgabe** (5 Punkte)

- a) Sei  $E(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ , und sei  $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ , mit  $\Psi \equiv 1$  für  $\sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ . Man zeige,  $f := \Delta(\Psi E) - \delta_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ .
- b) Sei  $E(x, y) = \frac{1}{8\pi}(x^2 + y^2) \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ .  
Man zeige:  $E$  ist Fundamentallösung für  $\Delta^2$  mit Pol an  $(0, 0)$  in  $\mathbb{R}^2$ .

**4. Aufgabe** (5 Punkte)

Man berechne die Green’sche Funktion  $G(x, y, \xi, \eta)$  für  $\Delta$  auf  $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  (Viertel Ebene) mit Hilfe der Spiegelungsmethode. Mit diesem  $G$  stelle man die Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 & \text{in } \Omega, \\ u(x, 0) &= f(x), & x > 0, \\ u(0, y) &= g(y), & y > 0 \end{cases}$$

dar.

**Abgabe** der Lösungen am Di, 25.11. bis 12 Uhr in den Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters.