

5. Übungsblatt zur Vorlesung “Partielle Differentialgleichungen”

(Faltung, Adjungierte Operatoren, Fundamentallösungen)

1. Aufgabe (5 Punkte)

Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Der lineare Operator F_ψ ist gegeben durch

$$(F_\psi)\varphi(x) := (\psi * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y)\varphi(y)dy.$$

Zeigen Sie, dass $\psi * \varphi = \varphi * \psi$ und geben Sie zwei Formeln für $\nabla^k(\psi * \varphi)$ an.

Zeigen Sie, dass $\psi * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist. (d.h. $F_\psi : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.)

Geben Sie den adjungierten Operator F_ψ^* zu F_ψ an.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Bestimmen Sie die adjungierten Operatoren:

$$(a) \quad L\varphi = a(x, y)\varphi_x + b(x, y)\varphi_y + c(x, y)\varphi$$

$$(b) \quad L\varphi = x\varphi'' + \varphi' - 2x^2\varphi$$

$$(c) \quad L\varphi = \Delta\varphi + \langle b(x), \text{grad}\varphi \rangle, \quad \text{wobei } b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Seien $\alpha_i \in C^\infty(\mathbb{R})$, $i = 0, 1, 2$, mit $\alpha_2(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und

$$(d) \quad L\varphi = a_2\varphi'' + a_1\varphi' + a_0\varphi.$$

Berechnen Sie formal eine Funktion $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass der Operator $\tilde{L}\varphi := uL\varphi$ selbstadjungiert ist, d.h. $\tilde{L} = \tilde{L}^*$.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\omega \in \mathbb{R}$ und $f \in C(\mathbb{R})$ mit $f(x) = 0$ für $x < 0$. Eine Partikulärlösung y_p der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' - \omega y = f$$

ergibt sich durch Variation der Konstanten. Finden Sie eine (nicht notwendig stetige!) Funktion $y_\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $y_p = y_\delta * f$.

4. Aufgabe (5 Punkte)

a) Man betrachte für $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$u_t + \text{div}_x(\vec{v}(\vec{x})u) = 0, \quad \text{mit } \vec{v} \in [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^n. \quad (1)$$

Sei $\vec{x}(t, \vec{\xi})$ die Lösung von $\vec{x}_t = \vec{v}(\vec{x})$, $\vec{x}(t=0) = \vec{\xi}$.

Zeigen Sie, dass $u(\vec{x}, t) = \delta_{\vec{x}(t, \vec{\xi})}$ eine distributionelle Lösung der Gleichung (1) ist.

Hinweis: $\delta_{\vec{x}(t, \vec{\xi})}$ wirkt auf eine Funktion $\varphi \in D(\mathbb{R}^{n+1})$ wie folgt:

$$\langle \delta_{\vec{x}(t, \vec{\xi})}, \varphi(x, t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\vec{x}(t, \vec{\xi}), t) dt.$$

b) Analog zu a), berechnen Sie die distributionelle Lösung von

$$\begin{aligned}u_t + \operatorname{div}_x(\vec{v}(\vec{x})u) &= -u, \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\u(\vec{x}, 0) &= \delta_{\vec{\xi}}.\end{aligned}$$

Abgabe der Lösungen am Di, 18.11. bis 12 Uhr in den Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters.