

4. Übungsblatt zur Vorlesung “Partielle Differentialgleichungen” (Distributionen)

1. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi \geq 0$ fast überall und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$. Die Folge $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ mit

$$\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

heißt *Diracfolge*. Zeigen Sie: $\varphi_\varepsilon \rightarrow \delta_0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Sei nun speziell $\varphi(x) = \chi_{[0,1]} \in L^1(\mathbb{R})$. Entscheiden Sie, ob auch die Folgen $(\varphi_\varepsilon^2)_{\varepsilon>0}$ bzw. $(\varphi_\varepsilon^2 - \varepsilon^{-1}\delta_0)_{\varepsilon>0}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ konvergieren und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Betrachten Sie $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit der Familie von Seminormen $p_k(\varphi) := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi^{(k)}(x)|$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Zeigen Sie: Durch

$$d(\varphi, \psi) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_k(\varphi - \psi)}{1 + p_k(\varphi - \psi)}$$

kann man eine Metrik auf $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ definieren.

Sei $\varphi \in C_0^\infty$ -Funktion mit kompaktem Träger in $[0, 1]$ und $\varphi(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ist

$$\varphi_n(x) := \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(x-k)}{k^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

eine Cauchy-Folge bezüglich der Metrik $d(\cdot, \cdot)$?

Ist $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$?

Hinweis: Es gilt, dass die Konvergenz $\lim_{n \rightarrow \infty} p_k(f_n) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, für eine Folge $(f_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$, äquivalent ist zur Konvergenz $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, 0) = 0$.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Seien $M > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $(c_\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}}$ eine Folge in \mathbb{C} mit $|c_\nu| \leq M|\nu|^k$ für alle $\nu \in \mathbb{Z}$.

Zeigen Sie: Die Reihe

$$f(x) := \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_\nu e^{i\nu x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

konvergiert in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, d.h. f ist eine Distribution.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Man prüfe, ob die folgenden Funktionale f in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ liegen (mit Beweis):

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \langle f, \varphi \rangle := \sum_{k=0}^n \varphi^{(k)}(0), \\ \text{b)} & \langle f, \varphi \rangle := \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(0), \\ \text{c)} & \langle f, \varphi \rangle := \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(k), \\ \text{d)} & \langle f, \varphi \rangle := \sum_{k=0}^n |\varphi^{(k)}(0)|^2, \end{array}$$

wobei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ eine beliebige Testfunktion ist, und $n \in \mathbb{N}$ fest.

Abgabe der Lösungen am Di, 11.11. bis 12 Uhr in den Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters.