

3. Übungsblatt zur Vorlesung “Partielle Differentialgleichungen” (Charakteristiken, partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung)

1. Aufgabe (6 Punkte)

Betrachten Sie die *viskose Burgersgleichung*

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}, \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > \mathbb{R}_+, \varepsilon > 0,$$

und untersuchen Sie sogenannte *Travelling-Waves*-Lösungen, d.h. $u(\xi)$ mit $\xi = x - ct$. Zeigen Sie: Unter der Annahme $u(-\infty) = u_- \in \mathbb{R}$ und $u'(-\infty) = 0$ genügt $u(\xi)$ der Riccati-Gleichung

$$\varepsilon u' = \frac{1}{2}(u - c)^2 - \frac{1}{2}(u_- - c)^2, \quad u(-\infty) = u_-. \quad (1)$$

Eine stationäre Lösung der Gleichung ist natürlich $u \equiv u_-$. Zeigen Sie, dass (1) i.A. eine zweite stationäre Lösung $u \equiv u_+$ besitzt und lösen Sie (1). Unter welchen Bedingungen existiert eine Lösung, die u_- mit u_+ verbindet?

2. Aufgabe (5 Punkte)

Man betrachte

$$L(u) = uu_{xy} + \frac{1}{2}u_y u_{yy} + u^2 \quad \text{in } \mathbb{R}^2,$$

mit $\Gamma : y = \sqrt{1 - x^2}, |x| < 1$.

Die Cauchy-Daten auf Γ werden durch $z = z(x, y) = \frac{1}{y}, y > 0$ induziert, d.h.:

$$u|_{\Gamma} = z|_{\Gamma}, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma} = \frac{\partial z}{\partial \nu}|_{\Gamma},$$

wobei $\frac{\partial}{\partial \nu}$ die Normalableitung bezeichnet. Für welche Teilbereiche von Γ ist der Satz von Cauchy-Kowaleskaya anwendbar?

3. Aufgabe (5 Punkte)

Bestimmen Sie für die beiden partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} (y^2 + 1)u_{xx} + 2xu_{xy} + 4u_{yy} - u^2 u_y &= x - y, \\ u_{xx} + 2xu_{xy} + yu_{yy} + xu_x &= 1, \end{aligned}$$

diejenigen Gebiete in \mathbb{R}^2 , in denen die Differentialgleichungen elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch sind.

4. Aufgabe (4 Punkte)

In der nichtlinearen Optik, speziell zur Untersuchung von Wellenausbreitungen in Glasfaserkabeln, wird die eindimensionale *nichtlineare, zeitabhängige Schrödinger*-Gleichung (NLS)

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} \pm |u|^2u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad u(x, t) \in \mathbb{C}$$

verwendet. Die NLS erwartet, für die Fokussierung(+) und Defokussierung(−) der Nichtlinearität, helle u_h und dunkle u_d Solitonen der Form

$$\begin{aligned} u_h(x, t) &= 2\nu \operatorname{sech}(z(x, t))e^{i\varphi(x, t)}, \\ u_d(x, t) &= 2\nu \tanh(z(x, t))e^{i\varphi(x, t)}, \end{aligned}$$

als Lösungen, wobei $z(x, t)$ und $\varphi(x, t)$ lineare Funktionen in t und x sind. Bestimmen Sie sie in Abhängigkeit der Anfangsdaten an $t = 0$.

(Bemerkung: $\operatorname{sech}(z) = 1/\cosh(z)$.)

Abgabe der Lösungen am Di, 04.11. bis 12 Uhr in den Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters.