

2. Übungsblatt zur Vorlesung “Partielle Differentialgleichungen” (Charakteristiken und Charakteristikenverfahren)

1. Aufgabe (5 Punkte (1,5+1,5+2))

Berechnen Sie (falls möglich) Charakteristiken zu

$$\begin{aligned} (i) \quad & -u_{xx} - u_{yy} = 0 \\ (ii) \quad & u_t - u_{xx} - u_{yy} = 0 \\ (iii) \quad & u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0 \end{aligned}$$

und skizzieren Sie ihre Form.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Sei die Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\Gamma = \{(t, t^2) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Bestimmen Sie lineare Differentialoperatoren erster bzw. zweiter Ordnung L_1 und L_2 , so dass Γ Charakteristik von L_1 bzw. L_2 ist. Geben Sie die Menge aller C^1 -Kurven $(x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$, an, die charakteristisch für L_1 bzw. L_2 sind.

3. Aufgabe (5 Punkte (2+1,5+1,5))

Berechnen Sie die allgemeinen Lösungen der Gleichungen

$$\begin{aligned} (i) \quad & 2u_x + 3u_y = e^{x+y} \\ (ii) \quad & yu_x + xu_y = 0 \\ (iii) \quad & xu_x + yu_y = 0 \end{aligned}$$

und skizzieren Sie die Charakteristiken.

4. Aufgabe (5 Punkte (2+3))

Man betrachte das Cauchy-Problem für die Differentialgleichung

$$u_x + u_y = u^2$$

mit

- $\Gamma = \{(x, y) \mid x + y = 0\}$ und $u_\Gamma = x$. Man löse es mit Hilfe der Charakteristikenmethode und gebe den maximalen Definitionsbereich der Lösung an. Illustrieren Sie die erhaltenen Resultate anhand einer Skizze.
- $\Gamma = \{(x, y) \mid x = y^2\}$ und $u_\Gamma \equiv 1$. Ist der Satz von Cauchy – Kowaleskaya anwendbar? (mit Begründung)
Man modifiziere die Differentialgleichung, um das Problem lösbar zu machen, und diskutiere die Lösung anhand einer Skizze.

Abgabe der Lösungen am Di, 28.10. bis 12 Uhr in den Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters.