

13. Übungsblatt zur Vorlesung “Partielle Differentialgleichungen” (Kompakte Operatoren, Fouriersynthese)

1. Aufgabe (7 Punkte)

Man diskutiere die Methode der Eigenfunktionsentwicklung für:

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx}, & (x, t) &\in (0, L) \times (0, \infty), \\u_x(0, t) &= u(0, t), & u(L, t) &= 0, \quad t > 0, \\u(x, 0) &= f(x), & x &\in (0, L).\end{aligned}$$

Hinweis: Entwickeln Sie nach Eigenwerten/Eigenfunktionen (wo liegen die Eigenwerte?); prüfen Sie die Voraussetzungen für den Entwicklungssatz einzeln nach: Invertierbarkeit von L ($L = \partial_x^2$ mit geeignetem Definitionsbereich!); Symmetrie; Kompaktheit von L^{-1} auf $L^2(0, L)$ (betrachten Sie dazu die Abbildung $f \mapsto L^{-1}f = v$ mit $v_{xx} = f \in L^2(0, L)$, $v_x(0) - v(0) = 0$, $v(L) = 0$. v kann dann durch zweimalige Integration explizit dargestellt werden).

2. Aufgabe (7 Punkte)

Man betrachte die *Schrödingergleichung* für die komplexwertige Wellenfunktion u :

$$(*) \quad -iu_t = u_{xx} - V(x)u =: Lu \quad \text{auf} \quad \Omega \subset \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R},$$

mit homogenen Randbedingungen und dem Anfangswert $u(t=0) = u_0 \in L^2(\Omega)$.
Das reellwertige Potential $V \in L^\infty(\Omega)$ sei gegeben.

a) Lösen Sie die Gleichung mit Hilfe des Eigenwert/-funktionen-Entwicklungssatzes.
Hinweis: Betrachten Sie zuerst $v(x, t) := u(x, t)e^{iV_{\min}t}$ mit $V_{\min} = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} V(x)$

b) Man zeige $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2$ („Massenerhaltung“) auf 2 Arten:

- (i) aus der Lösungsdarstellung;
- (ii) direkt aus der Gleichung.

Hinweis: Multiplizieren Sie die Gleichung (*) mit \bar{u} und integrieren Sie über Ω .

c) Gilt hier auch die Regularisierung von parabolischen Gleichungen, d.h.
aus $u_0 \in L^2(\Omega) \implies u(t) \in H_0^1(\Omega)$, $t > 0$?

3. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $\Omega = (0, \pi)$. Lösen Sie die Gleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad \text{mit} \quad u(x, t=0) \equiv 1, \quad u_t(x, t=0) \equiv 0,$$

zu den inhomogenen Randbedingungen

$$u(x=0, t) \equiv 0, \quad \text{mit} \quad u(x=\pi, t) = \pi \sin(t).$$

Hinweis/Vorgehensweise: Seien (λ_k, φ_k) Eigenwerte und normierte Eigenfunktionen von $-\partial_x^2$ mit homogenen Randbedingungen. Suchen Sie eine „brave“ Funktion $u_d(x, t)$, die die obigen Randbedingungen erfüllt. Lösen Sie dann die Gleichung für $v = u - u_d$ mit einem Separationsansatz $v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \varphi_k(x)$.

Schätzen Sie die $L^2(\Omega)$ -Norm von $u(., t)$ und $u_t(., t)$ ab. Was geschieht für $t \rightarrow 0$?

Abgabe der Lösungen am Di, 27.1.2004 bis 12 Uhr in den Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters.