

12. Übungsblatt zur Vorlesung “Partielle Differentialgleichungen” (Eigenwertprobleme und Fouriersynthese)

1. Aufgabe (4 Punkte)

Die Lösung des Anfangs-Randwertproblems

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} && \text{auf } (0, L) \times (0, \infty), \\u(0, t) &= u(L, t) = 0 && \text{für } t > 0, \\u(x, 0) &= u_0(x), && \text{für } x \in (0, L),\end{aligned}$$

ist gegeben durch

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} e^{\lambda_k t} \varphi_k(x), \quad u_{0k} = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \varphi_k(x) dx,$$

mit $\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$, $\varphi_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ (siehe Vorlesung).

Zeigen Sie:

- Für jedes $u_0 \in L^2(0, L)$ repräsentiert die obige Reihe eine Funktion $u(t) \in L^2(0, L)$ für alle $t \geq 0$.
- Für $t \rightarrow 0$ konvergiert diese Lösung $u(\cdot, t)$ im $L^2(0, L)$ -Sinn gegen u_0 .

2. Aufgabe (5 Punkte)

Lösen Sie das Eigenwertproblem

$$-\Delta u = \lambda u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

auf dem Rechteck $\Omega = (0, a) \times (0, b)$, $a, b > 0$.

Hinweis: Separationsansatz $u(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$

Stellen Sie für $a = b = 1$ die Lösung von $-\Delta u = 1$ durch die normierten Eigenfunktionen dar.

3. Aufgabe (2 Punkte)

Betrachten Sie das Eigenwertproblem $-\Delta u = \lambda u$ mit $u|_{\partial\Omega} = 0$ auf irgendeinem beschränkten Gebiet Ω . Was läßt sich aus dem Maximumprinzip über das Vorzeichen der Eigenwerte folgern?

4. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\Omega = (0, \pi)$ und $\mathcal{Q} = \Omega \times (0, \infty)$. Lösen Sie die Gleichung

$$(*) \quad u_t - u_{xx} = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0,$$

wobei $f(x, t) = \sin t \sin 2x$ und $u_0(x) = \sin x + \frac{1}{1000} \sin 10x$ sind.

Hinweis/Vorgehensweise: Seien (λ_k, φ_k) Eigenwerte und normierte Eigenfunktionen von $-\partial_x^2$ mit homogenen Randbedingungen. Setzen Sie $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \varphi_k(x)$ in die Gleichung ein, multiplizieren Sie dann mit $\varphi_j(x)$ und integrieren Sie über x . Das ergibt ein DGL-System für die Funktionen $a_j(t)$. Die Anfangswerte $a_j(0)$ ergeben sich entsprechend aus $u_0(x)$.

Skizzieren Sie die Lösung bei $t = 1$ und bei $t = -0.1$. Was bedeutet das für die sachgemäße Gestelltheit von $(*)$ auf $t \in (0, \infty)$ bzw. $t \in (-\infty, 0)$?

5. Aufgabe (4 Punkte)

Lösen Sie das folgende Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - u, & (x, t) &\in (0, 1) \times (0, \infty), \\ u(x, t=0) &= 2, & x &\in (0, 1), \\ u(x=0, t) &= 0 \quad \text{und} \quad u(x=1, t) &= \sin t, & t > 0. \end{aligned}$$

Hinweis: Setzen Sie $v := u - x \sin t$ (warum?!), transformieren Sie die Gleichung und entwickeln Sie nach Eigenfunktionen des Ortsoperators (analog wie in Aufgabe 4).

Abgabe der Lösungen am Di, 20.1.2004 bis 12 Uhr in den Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters.