

11. Übungsblatt zur Vorlesung “Partielle Differentialgleichungen” (Numerische Lösungsansätze, Maximumprinzip für parabolische Operatoren)

1. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. Betrachten Sie das Dirichletproblem

$$(P) \quad \Delta u = -1 \quad \text{mit} \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Bilden Sie die schwache Formulierung (F) von (P) .

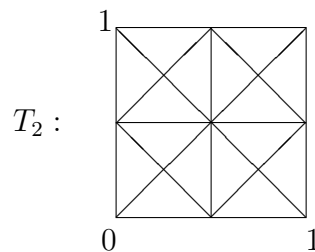
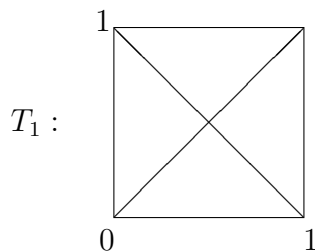
Lösen Sie (F) auf dem Teilraum $\Pi = \text{span}\{v_1, \dots, v_4\}$ mit

$$\begin{aligned} v_1 &= \sin(\pi x) \sin(\pi y), & v_2 &= \sin(3\pi x) \sin(\pi y), \\ v_3 &= \sin(\pi x) \sin(3\pi y), & v_4 &= \sin(3\pi x) \sin(3\pi y). \end{aligned}$$

Geben Sie den Wert von u_Π im Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ an.

2. Aufgabe (6 Punkte)

Lösen Sie (F) auf dem Teilraum der linearen Finiten Elemente zu den skizzierten Triangulierungen T_1, T_2 .



Geben Sie die Werte von u_{T_i} im Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ an.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Seien $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $f \in C^1(\mathbb{R})$ eine monoton fallende Funktion und $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ mit $u_0|_{\partial\Omega} = 0$. Zeigen Sie, dass die nichtlineare Gleichung

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u + f(u) && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) &= 0, && (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, t=0) &= u_0(x), && x \in \Omega, \end{aligned}$$

höchstens eine Lösung in $\Omega \times (0, T)$ hat.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Für die eindeutige Lösung von

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} - a(x)u && \text{auf } (0, 1) \times (0, \infty), \\u(0, t) &= u(1, t) = 0, && t > 0, \\u(x, 0) &= u_0(x) \geq 0, && u_0 \in L^\infty(0, 1), \\ \text{mit } a(x) &\geq \alpha > 0, && a \in L^\infty(0, 1)\end{aligned}$$

leite man a-priori Abschätzungen von $\|u(t)\|_{L^p(0,1)}$, $2 \leq p \leq \infty$ her.

Hinweise:

- Das Vorzeichen der Lösung folgt aus dem parabolischen Maximumprinzip;
- Man verwende die folgende Gronwall-Ungleichung für $p \in [0, \infty)$;
*Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $v \in C^1([0, T])$, $\beta \in C([0, T])$ nichtnegative Funktionen mit $v(0) \leq v_0$,
und $v'(t) \leq \alpha v(t) + \beta(t)$, $\forall t \in [0, T]$. Dann folgt*

$$v(t) \leq v_0 e^{\alpha t} + \int_0^t e^{\alpha(t-s)} \beta(s) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

- Es gilt: $\|u(t)\|_{L^\infty(0,1)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|u(t)\|_{L^p(0,1)}$ (ohne Beweis).

Abgabe der Lösungen am Di, 13.1.2004 bis 12 Uhr in den Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters.