

## 10. Übungsblatt zur Vorlesung “Partielle Differentialgleichungen” (Elliptische Operatoren, schwache Formulierungen, Regularität)

---

### 1. Aufgabe (5 Punkte)

Lösen Sie das Problem: Gesucht ist  $u \in H_0^1(0, 1)$  mit

$$\int_0^1 (a(x)u'v' + uv)dx = \int_0^1 f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(0, 1),$$

wobei

$$a(x) = \begin{cases} 1, & x \leq x_0 \\ 2, & x > x_0 \end{cases} \quad \text{mit } x_0 \in (0, 1),$$

und  $f \in H^1(0, 1)$  gilt.

Hinweis: Suchen Sie „eine klassische Formulierung“; verwenden Sie  $v^\varepsilon(x) = \max(0, 1 - \frac{|x-x_0|}{\varepsilon})$  und dann  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### 2. Aufgabe (5 Punkte)

Ermitteln Sie die schwache Formulierung von

$$\Delta u - b(x)u + f(x) = 0, \quad x \in \Omega; \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0,$$

wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet,  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $f \in L^2(\Omega)$  und  $b \in L^\infty(\Omega)$ ,  $b(x) \geq \beta > 0$  fast überall in  $\Omega$  ist. Beweisen Sie die Existenz und Eindeutigkeit der schwachen Lösung und leiten Sie eine Abschätzung für die Lösung her.

Hinweis: Die Randbedingung läßt sich nicht in  $H^1(\Omega)$  einbauen. Sie dient lediglich der Integraltransformation (Divergenzsatz).

### 3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, \sqrt[5]{x} < y < 1\}$ .

Finden Sie eine Funktion  $u \in H^2(\Omega)$  mit  $u \notin C(\overline{\Omega})$ . (Warum ist das hier möglich?)

Hinweis:  $u(x, y) = y^\alpha$ .

### 4. Aufgabe (5 Punkte)

Sei  $\Omega = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \mid 0 \leq r < 1, 0 < \varphi < \frac{3}{2}\pi\}$  eine  $\frac{3}{4}$ -Kreisscheibe. Finden Sie eine Lösung des Problems

$$\Delta u = 0 \quad \text{für } (x, y) \in \Omega \quad \text{mit} \quad u|_{\partial \Omega} = \sin \frac{2}{3}\varphi.$$

In welchen Räumen  $C^k(\overline{\Omega})$  bzw.  $H^k(\Omega)$  liegt die Lösung?

Hinweis: Transformieren Sie zunächst den Laplace-Operator in Polarkoordinaten, und machen Sie dann den Ansatz  $u = r^\alpha \sin \omega \varphi$ .

### Freiwillige Aufgabe (10 Punkte)

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$  entstehe aus dem Einheitsquadrat  $(0, 1) \times (0, 1)$  durch „Abschleifen der Ecken“. Sei  $0 < r < \frac{1}{2}$  und ein Teil des unteren Randes beschrieben durch

$$y(x) = \begin{cases} r - (r^\beta - (r - x)^\beta)^{\frac{1}{\beta}} & \text{für } 0 \leq x \leq r \\ 0 & \text{für } r \leq x \leq 1 - r. \end{cases}$$

Die restlichen Teile des Randes werden analog beschrieben.

Das sieht komplizierter aus als es ist: Bei  $\beta = 1$  entsteht ein Achteck und bei  $\beta = 2$  werden die Ecken durch Kreisbögen ersetzt.

Betrachten Sie nun das Problem

$$\Delta u = f \quad \text{für } (x, y) \in \Omega \quad \text{mit} \quad u|_{\partial\Omega} = x^2 \quad \text{und} \quad f(x, y) = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Für welche  $k \in \mathbb{N}_0$  liegt die Lösung  $u$  sicherlich in  $H^k(\Omega)$ ?

Für welche  $k \in \mathbb{N}_0$  ist die Lösung  $u$  (wo?) sicherlich eine  $C^k$ -Funktion?

Untersuchen Sie diese Fragen für  $\beta = 1, 2, 3$ .

**Abgabe** der Lösungen am Di, 6.1.2004 bis 12 Uhr in den Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters.