

1. Übungsblatt zur Vorlesung “Partielle Differentialgleichungen”
(Grundlagen, schlecht gestellte Probleme)

1. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $g \in C^3(\mathbb{R})$ und die Funktion $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genüge der Gleichung

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad \text{für } (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad u(t = 0, x) = g(x).$$

Zeigen Sie: Auf $\Gamma := \{0\} \times \mathbb{R}$ sind dann u_t , u_x , u_{xx} und u_{tx} durch g bereits festgelegt.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Betrachten Sie die lineare PDGL

$$au_x + bu_y = f(x, y) \tag{1}$$

mit konstanten Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$ und stetigem f .

Welche Gleichung ergibt sich, wenn man die Variablensubstitution $\xi = bx + ay$, $\eta = bx - ay$ vornimmt? Geben Sie die allgemeine Lösung dieser Gleichung an und leiten Sie daraus die allgemeine Lösung von (1) her.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Sei I ein offenes Intervall und seien $f, g \in C^1(\mathbb{R})$. Betrachten Sie das Cauchy–Problem

$$u_t + g(u)u_x = 0 \quad \text{in } I \times \mathbb{R}, \quad u(t = 0, x) = f(x)$$

und zeigen Sie: Unter der Annahme, dass es $(t_0, x_0, u_0) \in I \times \mathbb{R}^2$ gibt mit

$$u_0 := f(x_0 - t_0 g(u_0)) \tag{1}$$

und

$$1 + f'(x_0 - t_0 g(u_0))g'(u_0)t_0 \neq 0, \tag{2}$$

hat das Anfangswertproblem in einer Umgebung von $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung.

(Hinweis: Gewinnen Sie aus (1) einen Ansatz für u und verwenden Sie den Satz über implizite Funktionen.)

Lösen Sie damit das quasilineare Problem

$$u_t + uu_x = 0 \tag{3}$$

für $(t, x, u) \in \mathbb{R}^3$, $t \neq 1$, mit $u(t = 0, x) = -x$ und geben Sie den Definitionsbereich der Lösung an.

(Bemerkung: Die Gleichung (3) heißt *Burgersgleichung*.)

4. Aufgabe (5 Punkte)

Definition. Sei $A : D(A) \subset B_1 \rightarrow B_2$ eine lineare Abbildung, wobei $(B_i, \|\cdot\|_i)$, $i = 1, 2$, normierte Vektorräume sind. Das Problem „Für gegebenes $f \in B_2$ bestimme man $u \in D(A)$, sodass $A(u) = f$ gilt“, heißt *sachgemäß gestellt*, wenn A bijektiv und A^{-1} stetig ist, d.h. wenn das Problem eine eindeutige Lösung besitzt und eine von f unabhängige Konstante C existiert, sodass

$$\|u\|_1 \leq C\|f\|_2.$$

Gegeben sei die *Volterrasche Integralgleichung 1. Art*

$$(Au)(x) := \int_a^x k(x, y)u(y)dy = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Betrachten Sie den Spezialfall $k(x, y) \equiv 1$. Zeigen Sie, dass das Problem bei folgender Wahl der Vektorräume:

- a) $A : C[a, b] \rightarrow (\{f \in C^1[a, b] \mid f(a) = 0\}, \|\cdot\|_{C^1[a, b]})$ sachgemäß gestellt ist;
- b) $A : C[a, b] \rightarrow (\{f \in C^1[a, b] \mid f(a) = 0\}, \|\cdot\|_{C[a, b]})$ nicht sachgemäß gestellt ist.

Abgabe der Lösungen am Di, 21.10. bis 12 Uhr in den Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters.