
Beispiele zu “Partielle Differentialgleichungen”

1.1 Aufgabe (5 Punkte)

Man betrachte das Cauchy-Problem für die Differentialgleichung

$$uu_x + u_y = 1$$

mit $\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x = y^2, y > 0\}$ und $u_{\Gamma_1} = 0$.

- a) Lösen Sie es mit Hilfe der Charakteristikenmethode und geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Lösung an. Illustrieren Sie die erhaltenen Resultate anhand einer Skizze.
- b) Zeigen Sie, dass es keine Lösung für die Cauchy-Daten

$$\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y^2 = 0, y > 0\}, \text{ und } u_{\Gamma_2} = 0$$

gibt. Woran liegt es?

- c) Zeigen Sie, dass es mehr als eine Lösung bei $u_{\Gamma_1} = y$ gibt. Warum?

1.2. Aufgabe (5 Punkte)

Seien $f, u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, $f' > 0$, $u'_0 \leq 0$, u_0 nicht konstant. Zeigen Sie, dass das Cauchy-Problem

$$\begin{aligned} u_t + f(u)u_x &= 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(t = 0, x) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

keine C^1 -Lösung besitzt, die für alle $t > 0$ definiert wäre.

Zeichnen Sie die Charakteristiken für $f(u) = u$ und $u_0(x) = 1 - x$.

1.3. Aufgabe (5 Punkte)

Gegeben sei das Cauchyproblem

$$\begin{aligned} \alpha(u)u_x + \beta(u)u_y &= 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(0, y) &= \varphi(y), & y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

mit $\alpha, \beta, \varphi \in C^1(\mathbb{R})$, $0 \notin \alpha(\varphi(\mathbb{R}))$.

Zeigen Sie: Die Lösung $u(x, y)$ dieses Problems ist lokal eindeutig bestimmt und genügt der impliziten Gleichung

$$u(x, y) = \varphi\left(y - \frac{\beta(u)}{\alpha(u)}x\right).$$

Zeigen Sie, dass diese Gleichung lokal um die Cauchydaten eindeutig nach u aufgelöst werden kann.

2.1. Aufgabe (5 Punkte)

Man ermittle die Green'sche Funktion $G(x, \xi)$ für Δ auf $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus K_R$, $n \geq 3$, mit K_R die Kugel um den Ursprung mit Radius R . Was kann man über den Fall $n = 2$ sagen?

Hinweis: Analoges Vorgehen wie in der Vorlesung / Spiegelungsmethode

2.2. Aufgabe (6 Punkte)

Betrachten Sie $\Delta u = \delta_0$ in \mathbb{R}^n für $n = 1, 2, 3$ unter der Annahme, dass u nur von $r = |x|$ abhängt. Das ergibt gewöhnliche DGLen für $u(r)$, wobei $r > 0$. Lösen Sie diese und bestimmen Sie eine der auftretenden Konstanten mit Hilfe der Bedingung $\langle \Delta u, \varphi \rangle = \varphi(0)$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Hinweis: $\Delta u = r^{1-n}(r^{n-1}u_r)_r$.

2.3. Aufgabe (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$U(x, \xi) = \begin{cases} 0, & x < \xi \\ x - \xi, & x > \xi \end{cases}$$

Fundamentallösung der Laplacegleichung in einer Dimension ist, und bestimmen Sie die Green'sche Funktion von Δu mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen auf $\Omega = (0, 1)$.

3.1. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $g(x) := \frac{1}{2} \cos(x) \cdot \chi_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$, wobei χ die charakteristische Funktion bezeichnet.

Betrachten Sie für $n \geq 2$ die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen auf \mathbb{R} :

$$a) \quad \varphi'_n = g_n(x), \quad \varphi_n(-1) = 0,$$

$$b) \quad \psi''_n = g_n(x), \quad \psi_n(-1) = \psi_n(1) = 0.$$

mit $g_n(x) = \frac{n}{2} \cos(nx) \cdot \chi_{(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n})}$.

Berechnen Sie die Lösungen $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$ und ermitteln Sie jeweils für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ den punktweisen Limes

$$\varphi_\infty(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x), \quad \psi_\infty(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x).$$

Zeigen Sie: $\varphi_\infty, \psi_\infty \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ und $\varphi'_\infty = \psi'_\infty = \delta$ im distributionellen Sinn.

3.2. Aufgabe (5 Punkte)

Man betrachte $\rho(x - y)$ auf \mathbb{R}^2 , definiert durch

$$\langle \rho(x - y), \varphi(x, y) \rangle := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, x) dx, \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2).$$

a) Man zeige: $\rho(x - y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

b) Man konstruiere eine Folge $f_l \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$, so dass $f_l \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

c) Für jedes $\sigma \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ berechne man $g(x, y) := \rho(x - y) * \sigma(x, y)$, und die distributionellen Ableitungen $\partial_x \rho(x - y)$ und $\partial_y \rho(x - y)$.

4.1. Aufgabe (5 Punkte)

Gegeben sei das parabolische ARWP:

$$\begin{aligned} -u_t + u_{xx} - \sinh(u) &= \sin|x| && \text{auf } (-2\pi, 2\pi) \times (0, T), \\ u(-2\pi, t) &= u(2\pi, t) = 0, && t \in (0, T), \\ u(x, t=0) &= \sin(x), && x \in (-2\pi, 2\pi). \end{aligned}$$

Finden Sie obere und untere Schranken/Lösungen (s. Definition unten) für eine mögliche Lösung u (mit Beweis).

Zeigen Sie die Eindeutigkeit einer möglichen Lösung des Problems.

Hinweis/Definition: Für Probleme vom Typ

$$\begin{aligned} -u_t + u_{xx} - F(u) &= f(x), && (x, t) \in G = \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) &= u_D(x), && (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, t=0) &= u_0(x), && x \in \Omega, \end{aligned}$$

heißt \bar{u} bzw. $\underline{u} \in C^2(G) \cup C(\bar{G})$ obere bzw. untere Lösung, wenn gilt:

$$\begin{aligned} -\bar{u}_t + \bar{u}_{xx} - F(\bar{u}) &\leq f(x) && \text{in } G, \\ \bar{u}(x, t) &\geq u_D(x), && (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ \bar{u}(x, t=0) &\geq u_0(x), && x \in \Omega, \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} -\underline{u}_t + \underline{u}_{xx} - F(\underline{u}) &\geq f(x) && \text{in } G, \\ \underline{u}(x, t) &\leq u_D(x), && (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ \underline{u}(x, t=0) &\leq u_0(x), && x \in \Omega. \end{aligned}$$

4.2. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, und sei $F \in C^1(\mathbb{R})$ mit $F' \geq 0$. Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung und eines Maximumprinzips, dass das Problem

$$\begin{aligned} \Delta u - F(u) &= f(x) && \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= u_D, \end{aligned}$$

höchstens eine klassische Lösung haben kann.

5.1. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$ ist eine schwache Lösung des *Neumann*-Problems

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega; \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1)$$

falls gilt

$$\int_{\Omega} \nabla_x u \cdot \nabla_x v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (2)$$

Sei nun $f \in L^2(\Omega)$. Zeigen Sie, dass (1) genau dann eine schwache Lösung besitzt, wenn

$$\int_{\Omega} f \, dx = 0 \quad (3)$$

gilt.

Hinweis: Betrachten Sie für die Rückschlussfolgerung den Quotientenraum $U := H^1(\Omega)/\mathbb{R}$, mit der Äquivalenzrelation

$$u \sim v \iff \exists c \in \mathbb{R} : u - v \equiv c,$$

d.h. die Elemente aus U sind Äquivalenzklassen von Funktionen aus $H^1(\Omega)$, die sich um eine Konstante unterscheiden. Dieser Raum bildet, mit den natürlichen Vektorraumverknüpfungen und dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_U := \langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)}, \quad u, v \in H^1(\Omega), \quad \text{mit} \quad \int_{\Omega} u = \int_{\Omega} v = 0,$$

(d.h. im ersten Term stehen Äquivalenzklassen aus U , und im zweiten sind diejenigen Repräsentanten dieser Äquivalenzklassen gemeint, die $\int_{\Omega} u = \int_{\Omega} v = 0$ haben) einen Hilbertraum.

Zeigen Sie mit Hilfe der allgemeinen Poincaré-Ungleichung (ohne Beweis verwendbar):

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{\text{Vol}(\Omega)} \left| \int_{\Omega} u(x) \, dx \right|^2 \leq C_{\Omega} \|\nabla_x u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

dass die entsprechende schwache Formulierung eine eindeutige Lösung hat. Bei der schwachen Formulierung von (1) in U ist hier auch die *Wohldefiniertheit* der Bilinearform $a(u, v)$ und des Funktionals $F(v)$ zu prüfen!

5.2. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Sei

$$V := \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid \int_{\Omega} v(x) \, dx = 0 \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass es für jedes $f \in L^2(\Omega)$ ein eindeutiges $u \in V$ existiert, so dass

$$\int_{\Omega} \nabla_x u \cdot \nabla_x v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in V. \quad (4)$$

Hinweis: Allgemeine Poincaré-Ungleichung:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Dann gilt für $u \in H^1(\Omega)$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{\text{Vol}(\Omega)} \left| \int_{\Omega} u(x) \, dx \right|^2 \leq C_{\Omega} \|\nabla_x u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

b) Welche Bedeutung hat $\int_{\Omega} f \, dx = 0$ für das *Neumann*-Problem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega; \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0? \quad (5)$$

c) Erklären Sie, warum es für $\int_{\Omega} f \, dx = 0$ Sinn macht, (4) als schwache Formulierung von (5) zu sehen.

d) Ist es auch sinnvoll, falls $\int_{\Omega} f \, dx \neq 0$, die Lösung von (4) als schwache Lösung von (5) zu sehen? (Mit Begründung)

6.1. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $u_0 \in L^2(0, l)$. Lösen Sie mit der Methode der Eigenfunktionsentwicklung folgendes Anfangs-Randwertproblem:

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} - u, & (x, t) \in (0, l) \times (0, \infty), \\u_x(0, t) &= u_x(l, t) = 0, & t > 0, \\u(x, 0) &= u_0(x), & x \in (0, l).\end{aligned}$$

Hinweis: Die Voraussetzungen für den Entwicklungssatz müssen einzeln nachgeprüft werden: Invertierbarkeit des Ortsoperators L mit geeignetem Definitionsbereich, Symmetrie, Kompaktheit von L^{-1} auf $L^2(0, l)$ etc...

6.2. Aufgabe (5 Punkte)

Lösen Sie:

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} - 3u + 1, & (x, t) \in (0, 2) \times (0, \infty), \\u(0, t) &= 2, \quad u(2, t) = e^{-t}, & t > 0, \\u(x, 0) &= 0, & x \in (0, 2).\end{aligned}$$

Hinweis: Setzen Sie $u(x, t) = v(x, t) + w(x) + \tilde{u}_D(x, t)$ an, wobei für $w(x)$ die Randbedingung genommen wird, die für $t \rightarrow \infty$ bleibt, und $\tilde{u}_D(x, t)$ den „Rest“ enthält. Transformieren Sie die Gleichung und entwickeln Sie nach Eigenfunktionen des Ortsoperators

7.1. Aufgabe (5 Punkte)

Seien $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$, $c \in \mathbb{R}$ Lösen Sie mit Hilfe der Fouriersynthese die zweidimensionale Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \quad \text{in} \quad \Omega \times (0, \infty),$$

mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen und

$$u(x, y, t = 0) = xy, \quad u_t(x, y, t = 0) = \pi \cos(x) \cos(y).$$

7.2. Aufgabe (5 Punkte)

Lösen Sie durch formale Rechnung mittels Separationsansatzes/Eigenfunktionenentwicklung die *Telegraphengleichung*:

$$\begin{aligned}u_{tt} + 3u_t &= u_{xx} - u + x(x - \pi), & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty), \\u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & t > 0, \\u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = 1, & x \in (0, \pi).\end{aligned}$$

8.1. Aufgabe (5 Punkte)

- a) Liegt $g(x) = x^\alpha$, $\alpha \leq -1$ in irgendeinem $L^p(\mathbb{R})$?
- b) Sei B die Einheitskugel in \mathbb{R}^2 . Für welche λ und p liegt $f(x, y) = r^\lambda$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ in $L^p(B)$ bzw. in $L^p(\mathbb{R}^2 \setminus B)$?

8.2. Aufgabe (5 Punkte)

Für die eindeutige Lösung von

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - ku + f(x, t) && \text{auf } (0, 1) \times (0, \infty), \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, && t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) \in L^2(0, 1), \\ \text{mit } k &\geq 0, \quad f \in C([0, \infty), L^2(0, 1)) \end{aligned} \tag{6}$$

leite man eine a-priori Abschätzung von $\|u(\cdot, t)\|_{L^1(0,1)}$ her.

Hinweis:

- Multiplizieren Sie (6) mit $\text{sgn}(u(x, t))$, und zeigen Sie für $u(\cdot, t) \in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$:

$$\int_0^1 u_{xx}(x, t) \text{sgn}(u(x, t)) dx \leq 0, \quad t > 0.$$

Idee: Zerlegen Sie dabei das Integral an den Nullstellen von $u(\cdot, t)$.

- Verwenden Sie dann die folgende Gronwall-Ungleichung:

Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $v \in C^1([0, T])$, $\beta \in C([0, T])$ nichtnegative Funktionen mit $v(0) \leq v_0$, und $v'(t) \leq \alpha v(t) + \beta(t)$, $\forall t \in [0, T]$. Dann folgt

$$v(t) \leq v_0 e^{\alpha t} + \int_0^t e^{\alpha(t-s)} \beta(s) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

- Zur Erinnerung:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$