

## 9. Übungsblatt zur VL “Nichtlineare partielle Differentialgleichungen” (Parabolische Evolutionsgleichungen)

---

### 1. Aufgabe (4 Punkte)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Gegeben sei die Gleichung

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f(x, t) && \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u(t) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \ t \geq 0, \\ u(t=0) &= u_0 && \text{in } \Omega, \end{aligned}$$

mit  $u_0 \in L^2(\Omega)$ . Die Funktion  $f \in L^\infty(\Omega \times [0, T])$ ,  $\forall T > 0$ , sei für ein  $\tau > 0$   $\tau$ -periodisch in  $t$ , d.h.  $f(x, t) = f(x, t + \tau)$  ( $x \in \Omega, t \geq 0$ ). Zeigen Sie, dass es einen eindeutigen Anfangswert  $u_0 \in L^2(\Omega)$  gibt, so dass die zugehörige Lösung  $u$   $\tau$ -periodisch ist.

Hinweis. Betrachten Sie die Fixpunktabbildung  $A(u_0) = u(\tau)$ .

### 2. Aufgabe (4 Punkte)

Gegeben sei die Gleichung

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= u^2, && (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ u(0, t) &= u(1, t), && t \geq 0, \\ u_x(0, t) &= u_x(1, t), && t \geq 0, \\ u(x, t=0) &= u_0(x), && x \in (0, 1). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für jedes  $T > 0$  ein  $u_0 \in L^2(0, 1)$  existiert, so dass für die zugehörige Lösung das maximale Zeitintervall  $t_{\max} = T < \infty$  ist. Verwenden Sie dabei, dass die Gleichung eine eindeutige Lösung  $u \in C(0, t_{\max}, L^2(\Omega))$  hat.

Hinweis. Wählen Sie  $u_0 \equiv \text{const.}$

### 3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}$  beschränkt. Zeigen Sie für  $u_0 \in L^2(\Omega)$ , dass die Gleichung

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= \arctan(u)u_x && \text{in } \Omega \times (0, T], \\ u(t) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \ t \in [0, T], \\ u(t=0) &= u_0 && \text{in } \Omega \end{aligned}$$

eine eindeutige zeitglobale schwache Lösung  $u \in C(0, \infty, L^2(\Omega))$  besitzt.

Hinweis. Verwenden Sie den Satz 15.7. aus der Vorlesung.

#### 4. Aufgabe (7 Punkte)

Seien  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand,  $T > 0$ , und  $c \in C(0, T, L^p(\Omega))$ , wobei  $\frac{n}{2} < p \leq \infty$ ,  $1 \leq p$ . Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u - c(x, t)u &= 0 & \text{in } \Omega \times (0, T], \\ u(t) &= 0 & \text{auf } \partial\Omega, t \geq 0, \\ u(t=0) &= u_0 & \text{in } \Omega \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung  $u \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T, H^{-1}(\Omega)) \cap C(0, T, L^2(\Omega))$  besitzt. Hinweis. Benutzen Sie die *Gagliardo-Nirenberg*-Ungleichung ( $1 \leq p, r, q \leq \infty$ )

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^r(\Omega)}^\alpha \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha}, \quad \frac{1}{p} = \alpha \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{n} \right) + (1-\alpha) \frac{1}{q}, \quad \alpha \in [0, 1],$$

und folgende Sobolev-Einbettungen:

- $n = 1$ :  $H_{(0)}^1(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ ;
- $n = 2$ :  $H_{(0)}^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ ;
- $n > 2$ :  $H_{(0)}^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \frac{2n}{n-2}$ .

**Abgabe** der Lösungen am Do, 01.07. vor Vorlesungsbeginn in den Briefkasten des Übungsleiters.