

8. Übungsblatt zur VL “Nichtlineare partielle Differentialgleichungen” (Parabolische Sobolevräume)

1. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\xi \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie mit dem Satz 15.1 aus der Vorlesung, dass für $n = 1$ $\delta_\xi \in H^{-1}(\Omega)$ gilt. Zeigen Sie durch Gegenbeispiele, dass im Allgemeinen $\delta_\xi \notin H^{-1}(\Omega)$ für $n \geq 2$.

Hinweis. $H_0^1(\Omega) \not\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ für $n \geq 2$.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und $f \in L^2(\Omega)$. Sei $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine ON-Basis von $H_0^1(\Omega)$ und $u_m = \sum_{k=1}^m d_m^k w_k$ die Lösung von

$$\int_{\Omega} \nabla u_m \cdot \nabla w_k \, dx = \int_{\Omega} f w_k \, dx$$

für alle $k = 1, \dots, m$ (vgl. Galerkin-Methode aus der VL, Kap. 14.1). Zeigen Sie, dass eine Teilfolge von $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ existiert, die in $H_0^1(\Omega)$ gegen die schwache Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega, \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

schwach konvergiert. Konvergiert die ganze Folge dann auch schwach dagegen?

3. Aufgabe (5 Punkte)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, und $T > 0$. Es gelte für die Folge (u_k) :

$$\begin{aligned} u_k &\rightharpoonup u & \text{in } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ u'_k &\rightharpoonup v & \text{in } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $v = u'$.

Hinweis. Sei $\varphi \in C_0^1(0, T)$, $w \in H_0^1(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_0^T \langle u'_k(t), \varphi(t)w \rangle \, dt = - \int_0^T \langle u_k(t), \varphi'(t)w \rangle \, dt,$$

wobei das Symbol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ entsprechend zu interpretieren ist.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, $m \geq 0$, $1 < p < \infty$, $V := W_0^{m,p}(\Omega)$, und $f \in L^q(\Omega \times (0, T))$ mit $T > 0$ und $q = p/(p-1)$. Das Funktional b sei definiert durch

$$\langle b(t), v \rangle := \int_{\Omega} f(x, t) v(x) \, dx, \quad \forall v \in V, \quad t \in (0, T).$$

Zeigen Sie: $b \in L^q(0, T; V')$.

Hinweis. Prüfen Sie die Meßbarkeit von $t \mapsto \langle b(t), v \rangle$.

Abgabe der Lösungen am Do, 24.06. vor Vorlesungsbeginn in den Briefkasten des Übungsleiters.