

7. Übungsblatt zur VL “Nichtlineare partielle Differentialgleichungen”
(Variationsprobleme mit einseitigen Nebenbedingungen, Variationsungleichungen)

1. Aufgabe (7.5 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und $f \in L^2(\Omega)$.

- (i) Zeigen Sie, dass ein eindeutiger Minimierer $u \in U$ von

$$E(w) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla w|^2 - fw \, dx$$

existiert, wobei

$$U := \{ w \in H_0^1(\Omega) \mid |\nabla w| \leq 1 \text{ f. ü. in } \Omega \}.$$

- (ii) Beweisen Sie die Ungleichung

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (w - u) \, dx \geq \int_{\Omega} f(w - u) \, dx, \quad \forall w \in U.$$

2. Aufgabe (5 Punkte)

Seien $\Omega := (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ und E das folgende Energie-Funktional:

$$E(u) := \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (u')^2 - fu \, dx$$

mit

$$f(x) := \begin{cases} 1, & |x| > 0.5 \\ -2, & |x| < 0.5 \end{cases}.$$

Lösen Sie folgende Minimierungsprobleme “per Hand” und skizzieren (oder plotten) Sie das Ergebnis:

- (i) Minimieren Sie E in $H_0^1(\Omega)$,
(ii) Minimieren Sie E in $\{u \in H_0^1(\Omega) \mid u \geq 0\}$,
(iii) Lösen Sie die zugehörige *Penalty*-Approximation für $\varepsilon > 0$: schwache Lösungen von

$$\begin{aligned} -u_{\varepsilon}'' + \frac{1}{\varepsilon} u_{\varepsilon} H(-u_{\varepsilon}) &= f, \quad \text{in } (-1, 1) \\ u_{\varepsilon}(1) = u_{\varepsilon}(-1) &= 0, \end{aligned}$$

wobei H die Heaviside-Funktion ist.

Hinweis zu (ii): $u \in H^2(\Omega)$ – laut Vorlesung .

3. Aufgabe (7.5 Punkte)

Seien $\varphi, f \in L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Definiere

$$U := \{ w \in L^2(\Omega) \mid w \geq \varphi \text{ f. ü. in } \Omega \}.$$

Zeigen Sie, dass eine eindeutige Lösung $u \in U$ der Variationsungleichung

$$\int_{\Omega} u(w - u) \, dx \geq \int_{\Omega} f(w - u) \, dx, \quad \forall w \in U$$

existiert.

Abgabe der Lösungen am Do, 17.06. vor Vorlesungsbeginn in den Briefkasten des Übungsleiters.