

6. Übungsblatt zur VL “Nichtlineare partielle Differentialgleichungen” (Variationsprobleme mit Nebenbedingungen II)

1. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $M = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} \mid G(z) = c\}$ eine reguläre Hyperfläche in \mathbb{R}^{n+1} . Die geodätischen Linien auf M sind definiert als die Extrema des Funktional

$$E(u) = \frac{1}{2} \int |\dot{u}(t)|^2 dt,$$

unter der Nebenbedingung $G(u) = c$. Die kürzeste Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten auf der Fläche ist stets Teil einer geodätischen Linie.

Zeigen Sie, dass jede geodätische Linie $u(t)$, $a \leq t \leq b$, mit

$$u \in \{f \in C^2[a, b] \mid |f'(t)| \neq 0, \forall t \in [a, b]\},$$

auf der Sphäre

$$S^n = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |z| = R\}$$

mit Radius R Teil eines Großkreises auf S^n ist.

Bemerkung. Analog kann man zeigen, dass jeder Großkreis auf S^n eine geodätische Linie ist.

Hinweis. Zeigen Sie zunächst, dass $|\dot{u}(t)| \equiv \text{const}$ ist.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Auf $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi] \subset \mathbb{R}^2$ sei das Variationsproblem:

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy = \min!, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

mit der Nebenbedingung

$$\int_{\Omega} u^2 dx dy = 1,$$

gegeben. Finden Sie eine explizite Lösung in $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Ist sie eindeutig?

Hinweis. Schreiben Sie es in ein Eigenwertproblem um.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Gegeben seien $\mu \in \mathbb{R}$, g ein Polynom in \mathbb{R} , und

$$h \in U = \{f \in L^1(\mathbb{R}) \mid f > 0\} \quad \text{mit} \quad \int_{\mathbb{R}} h dx = 1.$$

Betrachten Sie das Variationsproblem für das (mathematische) Entropie-Funktional

$$\int_{\mathbb{R}} f \log \left(\frac{f}{h} \right) dx = \min! \quad \text{für } f \in U,$$

unter den zwei Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \int_{\mathbb{R}} f dx = 1 \\ (ii) \quad & \int_{\mathbb{R}} fg dx = \mu. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $E(f) \geq 0$ und konvex ist.

Hinweis. *Jensen*-Ungleichung mit $dy = f dx$.

b) Nehmen Sie an, dass es einen eindeutigen Minimierer gibt, und lösen Sie die zu den Nebenbedingungen variierte Euler-Lagrange-Gleichung.

4. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und $f \in L^2(\Omega)$. Formulieren Sie, was es für $u \in H^1(\Omega)$ heißt, schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

zu sein. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige schwache Lösung gibt.

Hinweis. Leiten Sie ein zur schwachen Formulierung entsprechendes Energiefunktional ohne Nebenbedingungen her. Verwenden Sie, dass $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ und $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}$ äquivalente Normen auf $H^1(\Omega)$ sind. Die Eindeutigkeit lässt sich direkt überprüfen.

Abgabe der Lösungen am Fr, 11.06. vor Übungsbeginn in den Briefkasten des Übungsleiters.