

3. Übungsblatt zur VL “Nichtlineare partielle Differentialgleichungen” (Fixpunktsätze, Variationsprobleme)

1. Aufgabe (8 Punkte)

Seien $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, $g \in L^\infty(\Omega)$, und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine bijektive C^2 -Funktion mit $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ gegeben. Man zeige, dass die Gleichung

$$\begin{aligned}\Delta u &= f(u) + g(x) && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega,\end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung in $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ hat.

Hinweise:

- a) Benutzen Sie folgende Version des Fixpunktsatzes von Schauder:

Es sei K eine nichtleere abgeschlossene konvexe Teilmenge eines Banachraumes X . Ist eine Abbildung $F : K \rightarrow K$ stetig und kompakt, d.h. sie bildet beschränkte Mengen in präkompakte Mengen ab, so hat F einen Fixpunkt in K .

- b) Dafür schreiben Sie die rechte Seite der Gleichung in

$$f(u) + g(x) = \int_0^1 f'(tu^*(x) + (1-t)u(x))dt \cdot (u - u^*)$$

mit einem geeigneten u^* um, und benutzen Sie dann für die Definition des Fixpunkt-Operators

$$a[\varphi](x) := \int_0^1 f'(tu^*(x) + (1-t)\varphi(x))dt.$$

Wenden Sie das Vergleichsprinzip für *schwache* Lösungen anstelle vom klassischen Maximumprinzip an.

- c) Zeigen Sie anschließend, dass die Lösung eindeutig ist (z.B. mit der „Energimethode“ wie im Satz 14.5 aus der Vorlesung).

2. Aufgabe (8 Punkte)

Gegeben sei das Dirichlet–Problem

$$\begin{aligned}\Delta u &= e^u - c(x) && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega,\end{aligned}$$

wobei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand ist, und $c \in L^\infty(\Omega)$.

- a) Finden Sie eine untere Lösung $\underline{u}(x)$, und eine obere konstante Lösung \bar{u} für die obige Gleichung.
Hinweis. Benutzen Sie für die untere Lösung die Green'sche Funktion für den Laplace-Operator auf Ω .
- b) Zeigen Sie, dass die Gleichung eine Lösung u in $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ hat.
Hinweis. Ersetzen Sie die Nichtlinearität zuerst durch $h(u)$, mit

$$h(z) = \begin{cases} e^{\bar{u}}, & z \geq \bar{u} \\ e^z, & z < \bar{u}, \end{cases}$$

und benutzen Sie den Fixpunktsatz von Leray-Schrauder/Schäfer. Motivieren Sie anschließend mit dem Vergleichsprinzip, warum das Abschneiden mittels h keine Wirkung auf die gefundene Lösung hat.

- c) Zeigen Sie, dass die Lösung u eindeutig ist.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Formulieren Sie das Problem: „Finde die kürzeste Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten in \mathbb{R}^n “ in ein Variationsproblem um, und lösen Sie es.

Abgabe der Lösungen am Do, 13.05. vor Vorlesungsbeginn in den Briefkasten des Übungsleiters.