

2. Übungsblatt zur VL “Nichtlineare partielle Differentialgleichungen”
(Charakteristiken, obere/untere Schranken, Existenz schwacher Lösungen)

1. Aufgabe (5 Punkte)

Berechnen Sie die klassische Lösung von

$$\begin{aligned} S_t - c |\nabla S| &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ S(\mathbf{x}, 0) &= S_0(|\mathbf{x}|), \end{aligned}$$

wobei $c > 0$ konstant ist, und $S_0 \in C^1([0, \infty))$, mit $S'_0 \leq 0$ und $S'_0(0) = 0$.

Darüber hinaus sollte für ein festes $r_0 > 0$ gelten: $S_0|_{[0, r_0)} > 0$ und $S_0|_{(r_0, \infty)} < 0$. Zeigen Sie, dass sich die Wellenfront $S(\mathbf{x}, t) = 0$ unabhängig von der “Form” der Anfangsbedingung S_0 ausbreitet.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, und $f \in C(\overline{\Omega})$. Finden Sie konstante untere und obere (a-priori) Schranken für eine klassische Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta u - F(u) &= f(x) \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine bijektive monoton wachsende Funktion ist, mit $F \in C^1(\mathbb{R})$.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Gegeben sei das nichtlineare Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u + b(\nabla u) &= f(x) \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand ist. Zeigen Sie mit Hilfe des Banach’schen Fixpunktsatzes, dass eine eindeutig bestimmte schwache Lösung $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ existiert, vorausgesetzt: $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine Lipschitz-stetige Abbildung mit einer hinreichend kleinen Lipschitz-Konstante.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Seien \bar{u} , \underline{u} obere und untere Lösungen der nichtlinearen *Poisson*-Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(u) \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei $f \in C^1(\mathbb{R})$ ist, mit $|f'| \leq C$. Zeigen Sie mit Hilfe des Maximumprinzipes, dass man für ein geeignetes $\lambda > 0$ eine Folge (u_k) von schwachen Lösungen zum linearen Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u_{k+1} + \lambda u_{k+1} &= f(u_k) + \lambda u_k & \text{in } \Omega, \\ u_{k+1} &= 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

definieren kann, mit

$$\underline{u} = u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_k \leq \cdots \leq \bar{u}.$$

Bemerkung. Es stellt sich heraus, dass der Limes $u := \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$ im $L^2(\Omega)$ -Sinn schwache Lösung der nichtlinearen *Poisson*-Gleichung ist.

Abgabe der Lösungen am Do, 06.05. vor Vorlesungsbeginn in den Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters.