

13. Übungsblatt zur VL “Nichtlineare partielle Differentialgleichungen”
(Nichtlineare Wellengleichungen II)

Die Bearbeitung der folgenden Aufgaben ist freiwillig!
Die erreichten Punkte zählen als Bonuspunkte.

1. Aufgabe (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass aus der stetigen Einbettung $H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ für

- $n \geq 3, \quad 2 \leq q \leq \frac{2n}{n-2};$
- $n = 2, \quad 2 \leq q < \infty;$
- $n = 1, \quad 2 \leq q \leq \infty,$

die *Sobolev*-Ungleichung

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C(q, n) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1-\alpha} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^\alpha \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{n}{2} \left(1 - \frac{2}{q}\right)$$

folgt.

Hinweis. Skalieren Sie $x \mapsto \lambda x$ um, und minimieren Sie in λ .

2. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und $R > 0$. Zeigen Sie, dass

$$Y := \{f \in H^1(\Omega) \mid \|f\|_{H^1(\Omega)} \leq R\}$$

eine (bzgl. der L^2 -Norm) abgeschlossene Teilmenge von $L^2(\Omega)$ ist.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die *Schrödinger-Poisson*-Gleichung

$$\begin{aligned} i\psi_t + \Delta\psi + f(\psi) &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ \psi(t=0) &= \psi_0 \in H^1(\mathbb{R}^3), \end{aligned}$$

mit $f(\psi) = \frac{1}{4\pi} \left(|\psi|^2 * \frac{1}{|x|}\right) \psi$, eine eindeutige Lösung $\psi \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^3))$ besitzt.

Bemerkung. $V[\psi] := \frac{1}{4\pi} \left(|\psi|^2 * \frac{1}{|x|}\right)$ löst die *Poisson*-Gleichung $\Delta V = |\psi|^2$.

Hinweis. Zeigen Sie zunächst mit Hilfe der *verallgemeinerten Young*-Ungleichung (siehe VL-Skript) und der Sobolev-Einbettung $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_B(\mathbb{R}^n)$ für $p > n$, dass $f : H^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^3)$ eine lokal Lipschitz-stetige Funktion ist. Benutzen Sie anschliessend folgenden Satz 6.1.4 aus A. PAZY, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer, 1983:

Let X be a Banach space and $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ be continuous in t for $t \geq 0$ and locally Lipschitz continuous in u , uniformly in t on bounded intervals. If $-A$ is the infinitesimal generator of a strongly continuous semigroup $T(t)$ on X then for every $u_0 \in X$ there is a $t_{\max} \leq \infty$ such that the initial value problem

$$\begin{aligned} u_t(t) + Au(t) &= f(t, u(t)), \quad t \geq 0 \\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

has a unique mild solution u on $[0, t_{\max})$. Moreover, if $t_{\max} < \infty$ then

$$\lim_{t \uparrow t_{\max}} \|u(t)\|_X = \infty.$$

Die Erhaltungen von $\|\psi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ und

$$E(\psi(t)) = \|\nabla \psi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla V(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$$

liefern dann die a-priori-Abschätzungen.

Abgabe der Lösungen am Do, 29.07. vor Vorlesungsbeginn in den Briefkasten des Übungsleiters.