

## 12. Übungsblatt zur VL “Nichtlineare partielle Differentialgleichungen” (Nichtlineare Wellengleichungen)

---

### 1. Aufgabe (5 Punkte)

Sei  $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ . Zeigen Sie ohne Anwendung des Interpolationssatzes 16.1 aus der Vorlesung, dass für die Lösung der *freien Schrödinger-Gleichung*

$$\begin{aligned} iu_t &= \Delta u \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\ u(t=0) &= u_0 \end{aligned}$$

die Ungleichung

$$\|u(t)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C(u_0)(4\pi t)^{\frac{n}{2}-\frac{n}{p}}, \quad \forall p \in [1, 2]$$

gilt, wobei  $p'$  den konjugierten Index zu  $p$  bezeichne.

Hinweis. Benutzen Sie das Lemma 12.2 aus dem Skript über lineare PDGLen (auch auf der Web-Seite der Vorlesung erhältlich).

### 2. Aufgabe (5 Punkte)

Für die lineare Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad n \geq 2, \\ u(t=0) &= 0, \\ u_t(t=0) &= u_1 \end{aligned}$$

gilt

$$\|u(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C t^b \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

für geeignete Paare  $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$  (näheres dazu in W.A. Strauss: Nonlinear Wave Equations,..., S. 5).

- Bestimmen Sie  $b = b(n, p, q)$  aus der Skalierung  $x \rightarrow \lambda x$ ,  $t \rightarrow \lambda t$  in der Wellengleichung.
- In welchen  $L^p$ -Räumen müsste  $u_1$  liegen, damit

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

gilt.

### 3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei

$$\mathcal{E}(u) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left[ -\frac{1}{2}(u_t)^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u) \right] dx dt,$$

gegeben, wobei  $F$  eine geeignete Funktion mit  $F(0) = 0$  ist (vgl. Beispiel 2 im Kapitel über Erhaltungsgrößen in der Vorlesung). Die entsprechende *Euler-Lagrange-Gleichung* ist die nichtlineare Wellengleichung (NLW) mit  $f(u) = F'(u)$ .

Zeigen Sie, dass die Ortsverschiebung

$$T_k(s) : u(x, t) \mapsto u(x_1, \dots, x_k + s, \dots, x_n, t), \quad k \in \{1, \dots, n\}$$

in der NLW zur Erhaltung des Impulses führt, wobei die Impulsdichte durch  $p_k(u) = u_t \frac{\partial u}{\partial x_k}$  definiert ist.

#### 4. Aufgabe (5 Punkte)

Zeigen Sie durch formale Rechnung, dass die lineare Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ u(t=0) &= u_0, \\ u_t(t=0) &= u_1 \end{aligned}$$

durch

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{4\pi t} \int_{S(t)} u_0 dS \right\} + \frac{1}{4\pi t} \int_{S(t)} u_1 dS$$

gelöst wird, wobei  $S(t)$  die Oberfläche der Kugel mit Ursprung in  $x$  und Radius  $t$  ist. Hinweis. Dabei gilt

$$\frac{1}{t} \int_{S(t)} f dS := t \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(x + t\mathcal{I}) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad \mathcal{I} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta).$$

**Abgabe** der Lösungen am Do, 22.07. vor Vorlesungsbeginn in den Briefkasten des Übungsleiters.