

11. Übungsblatt zur VL “Nichtlineare partielle Differentialgleichungen” (Parabolische Evolutionsgleichungen III)

1. Aufgabe (5 Punkte)

Beweisen Sie das Lemma 15.3 (ii) aus der Vorlesung.
Hinweis. Benutzen Sie dabei den Punkt (i) des Lemmas.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, $T > 0$ und der Operator $A : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ definiert durch

$$A(u) := -\operatorname{div}(a(u)\nabla u),$$

mit $a \in C(\mathbb{R})$, $0 < \delta_1 \leq a(u) \leq \delta_2$. Zeigen Sie:

- a) $A(u(\cdot)) : [0, T] \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ ist meßbar für alle $u \in X = L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$;
- b) $A : X \longrightarrow X'$;
- c) $A : X \longrightarrow X'$ ist beschränkt;
- d) $A : X \longrightarrow X'$ ist koerziv.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Gegeben sei die *poröse Medium* - Gleichung

$$u_t - \Delta(u^m) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad m > 1. \quad (1)$$

(i) Zeigen Sie, dass die *Barenblatt* - Lösung

$$U(x, t) = t^{-\lambda} \left[C - k \frac{|x|^2}{t^{2\mu}} \right]_+^{\frac{1}{m-1}}$$

mit $[s]_+ = \max\{s, 0\}$, $C > 0$ und

$$\lambda = \frac{n}{n(m-1)+2}, \quad \mu = \frac{\lambda}{n}, \quad k = \frac{\lambda(m-1)}{2mn}$$

Fundamentallösung der Gleichung (1) ist.

Hinweis. Formale Rechnung. Es gilt $U(x, t) \rightarrow M(C, n, m)\delta(x)$ für $t \rightarrow 0$.

- (ii) Sei nun die Gleichung (1) auf $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ gegeben. Zeigen Sie, dass $U(x, t + \tau)$, für ein festes $\tau > 0$, eine schwache Lösung dieser Gleichung ist (im Sinne von Def. 15.10). Begründen Sie, warum sie keine klassische Lösung sein kann.

4. Aufgabe (6 Punkte)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, $2 \leq p < \infty$, und $T > 0$. Gegeben sei die Gleichung

$$\begin{aligned} u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u(t) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times [0, T], \\ u(t=0) &= u_0 && \text{in } \Omega, \end{aligned}$$

mit $u_0 \in L^2(\Omega)$. Zeigen Sie, dass sie eine eindeutige schwache Lösung $u \in C(0, T; L^2(\Omega))$ besitzt.

Abgabe der Lösungen am Fr, 16.07. vor Übungsbeginn in den Briefkasten des Übungsleiters.