

**10. Übungsblatt zur VL “Nichtlineare partielle Differentialgleichungen”**  
(Parabolische Evolutionsgleichungen II)

---

**1. Aufgabe** (4 Punkte)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $C^2$ -Rand. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\begin{aligned} u_t + \Delta \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u(t) &= \frac{\partial u}{\partial \nu}(t) = 0 && \text{auf } \partial\Omega, t \in [0, T], \\ u(t=0) &= u_0 && \text{in } \Omega, \end{aligned}$$

mit  $u_0 \in L^2(\Omega)$ , eine eindeutige schwache Lösung besitzt. Wo liegt sie?

**2. Aufgabe** (6 Punkte)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Gegeben sei die Gleichung

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= -u|u| && \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u(t) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, t \geq 0, \\ u(t=0) &= u_0 && \text{in } \Omega, \end{aligned}$$

mit  $u_0 \in L^2(\Omega)$ . Zeigen Sie für  $n = 2$  und  $n = 3$ , dass sie eine eindeutige schwache Lösung  $u \in C(0, \infty, L^2(\Omega))$  besitzt.

Hinweis. Beachten Sie: für  $u \in L^2(\Omega)$  gilt i.A.  $u|u| \notin H^{-1}(\Omega)$ ! Benutzen Sie bei der Fixpunktiteration  $-|u(t)|w(t)$  als rechte Seite, und schätzen Sie dann mit Hilfe der *Gagliardo-Nirenberg*-Ungleichung ab.

**3. Aufgabe** (5 Punkte)

Beweisen Sie den Satz 15.6 aus der Vorlesung dadurch, dass Sie die Kontraktivität von  $A^n$  ab einem gewissen  $n$  bei festgehaltenem  $T > 0$  zeigen, d.h. ohne das Zeitintervall verkleinern zu müssen. Zeigen Sie dabei, dass der Fixpunkt von  $A^n$  dann auch Fixpunkt von  $A$  ist.

**4. Aufgabe** (5 Punkte)

Sei  $X$  ein reflexiver Banachraum und  $A : X \longrightarrow X'$  eine Abbildung. Beweisen Sie folgende Aussagen:

- a)  $A$  demistetig  $\implies A$  hemistetig;
- b)  $A$  hemistetig und monoton  $\implies A$  ist vom Typ  $M$ .

**Abgabe** der Lösungen am Do, 08.07. vor Vorlesungsbeginn in den Briefkasten des Übungsleiters.