

1. Übungsblatt zur VL “Nichtlineare partielle Differentialgleichungen”
(Separation der Variablen, Charakteristikenmethode)

1. Aufgabe (6 Punkte)

Gegeben sei die *poröse Medium* – Gleichung

$$u_t - \Delta(u^\gamma) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty),$$

wobei u nichtnegativ ($u \geq 0$) und $\gamma > 1$ eine Konstante seien. Finden Sie eine Lösung dieser Gleichung mit Hilfe des Separationsansatzes $u(\mathbf{x}, t) = v(t)w(\mathbf{x})$.

Hinweis: Machen Sie für w den Ansatz $w(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^\alpha$ für ein $\alpha > 0$.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Finden Sie mit Hilfe der Charakteristikenmethode eine Lösung für die *Eikonal* – Gleichung aus der geometrischen Optik

$$|\nabla u| = 1 \quad \text{in } \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \quad u|_{\partial\Omega} = \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Hinweis: Für die nichtlineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\begin{aligned} F(Du, u, x) &= 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u &= f \quad \text{auf } \Gamma \subseteq \partial\Omega, \end{aligned}$$

erhält man mit der Charakteristikenmethode folgendes System von gewöhnlichen DGLen:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}(s) &= -D_x F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) - D_z F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s))\mathbf{p}(s) \\ \dot{z}(s) &= D_p F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s) \\ \dot{\mathbf{x}}(s) &= D_p F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)), \end{cases}$$

wobei z, \mathbf{p} durch $z(s) := u(\mathbf{x}(s))$ und $\mathbf{p}(s) := Du(\mathbf{x}(s))$ definiert sind.

Bemerkung: Das gew. DGL-System zur *Hamilton–Jacobi* – Gleichung aus der Vorlesung ist ein Spezialfall davon.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass man aus einer stetigen schwachen Lösung der Erhaltungsgleichung

$$\begin{aligned} w_t + H(w)_x &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ w(x, t = 0) &= f(x), \end{aligned}$$

mit $f \in C(\mathbb{R})$, $H \in C(\mathbb{R})$, eine klassische Lösung der *Hamilton–Jacobi* – Gleichung

$$\begin{aligned} u_t + H(u_x) &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, t = 0) &= g(x) \end{aligned}$$

gewinnen kann. Welcher Beziehung müssen die Anfangsdaten genügen?

Bemerkung: Der Einfachheit halber nehmen Sie in der Rechnung zusätzlich an, dass das gewonnene u stetig differenzierbar in t sei.

Abgabe der Lösungen am Do, 29.04. vor Vorlesungsbeginn in den Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters.