Eine Einführung in die Halbgruppentheorie

Wintersemester 2001

Prof. Dr. Ansgar Jüngel

Fachbereich Mathematik und Statistik
Universität Konstanz

unkorrigiertes Vorlesungsskript

Inhaltsverzeichnis

1 Halbgruppen und Differentialgleichungen: Motivation und Beispiele

Die Halbgruppentheorie kann als eine Verallgemeinerung der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen aufgefaßt werden. Sie vereint Techniken aus der Funktionalanalysis und der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen. Eines ihrer Ziele ist die Untersuchung von linearen und nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen und der Existenz, Eindeutigkeit und Regularität von deren Lösungen.

Wir beginnen mit einem Beispiel.

Beispiel 1.1 *Wärmeleitungsgleichung*
Wir wollen die zeitliche Entwicklung der Temperatur in einem schlecht isolierten Kühlschrank untersuchen. Der Kühlschrank sei durch einen zweidimensionalen Schnitt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ repräsentiert (siehe Abbildung 1.1). Wir nehmen an, daß die

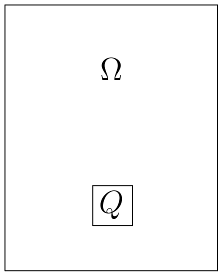

Abbildung 1.1: Schematischer Schnitt durch einen Kühlschrank.

Summe aus der zeitlichen Änderung der Temperatur $u = u(x,t)$ und der Divergenz des Wärmeflusses J gleich dem Quellterm f ist:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div} J = f,$$

wobei

$$f(x) = \begin{cases} q & : \quad x \in Q \\ 0 & : \quad x \in \Omega \backslash Q, \end{cases}$$

das Kühlaggregat modelliere und $Q \subset \Omega,\ q \in \mathbb{R}$ seien. Der Wärmefluß ist gegeben durch den (negativen) Gradienten der Temperatur (beachte, daß der Gradient in die Richtung des größten Anstiegs zeigt):

$$J = -\nabla u.$$

Daher erhalten wir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, \quad x \in \Omega,\ t > 0. \tag{1.1}$$

Diese Gleichung ist eine partielle Differentialgleichung. Wir nehmen an, daß die Temperatur an den Kühlschrankwänden $\partial\Omega$ konstant ist:

$$u = u_D, \quad x \in \partial\Omega,\ t > 0, \tag{1.2}$$

d.h., durch $\partial\Omega$ geht "Kälte verloren", der Kühlschrank isoliert schlecht. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Temperatur im Innern des Kühlschranks bekannt:

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad x \in \Omega. \tag{1.3}$$

Wir nennen (1.1)-(1.3) ein Anfangsrandwertproblem.

Definieren wir formal den Operator $A := \Delta$, so können wir die Gleichung (1.1) schreiben als

$$\frac{du}{dt} - Au = f, \quad t > 0, \tag{1.4}$$

$$u(0) = u_0. \tag{1.5}$$

Dies sieht wie eine gewöhnliche Differentialgleichung aus. Können die Lösungsformeln aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen verwendet werden?

Wir wiederholen kurz die Lösungsformeln für das Anfangswertproblem (1.4)-(1.5), wenn A eine $\mathbb{R}^{n\times n}$-Matrix ist. Es seien außerdem $f \in C^0([0,\infty))$ und $u_0 \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$. Aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen folgt, daß (1.4)-(1.5) eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in C^1([0,\infty))$ besitzt. Im Falle $f = 0$ lautet sie

$$u(t) = e^{At}u_0, \quad t \geq 0,$$

wobei

$$e^{At} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j$$

für alle $t \geq 0$ konvergiert. Im allgemeinen Fall ist u durch die Formel der Variation der Konstanten gegeben:

$$u(t) = e^{At}u_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)\, ds, \quad t \geq 0.$$

Es liegt nun nahe, wegen der Definition $A = \Delta$ die Lösung von (1.1)-(1.3) in der Form

$$u(t) = e^{\Delta t}u_0 + \int_0^t e^{\Delta(t-s)} f(s)\, ds \tag{1.6}$$

zu schreiben (wobei hier $u = u(x,t)$, da u_0 und f im allgemeinen von $x \in \Omega$ abhängen). Diese Schreibweise wirft einige Fragen auf:

- Wie ist $e^{\Delta t}$ definiert?
- Wird die Randbedingung (1.2) erfüllt?
- Ist die Funktion u aus (1.6) eine Lösung von (1.1)-(1.3) und wenn ja, in welchem Sinne?

Mit Hilfe der Halbgruppentheorie können wir die obigen Fragen beantworten.

Die Halbgruppentheorie hat zwei Vorteile: Ihre Resultate sind (meistens) sehr elegant – vergleiche etwa die Lösungsformel (1.6) –, und sie kann auf eine Vielzahl von partiellen Differentialgleichungen angewendet werden. Den letzten Punkt illustrieren wir durch mehrere Beispiele, die im Verlauf der Vorlesung genauer analysiert werden:

Beispiel 1.2 *Wellengleichung*
Die Ausbreitung einer Schallwelle wird durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0, & \qquad x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) = u_1, & \qquad x \in \mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

wobei $u = u(x,t)$ die Luftdruckdifferenz gegenüber Normaldruck bedeutet und $c > 0$ die Schallgeschwindigkeit. Für spezielle Anfangswerte u_0 und u_1 hat diese Gleichung explizite Lösungen: Ist nämlich

$$u_0(x) = \sin(k \cdot x), \quad u_1(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

mit dem gegebenen Vektor $k \in \mathbb{R}^d$ (der sogenannte Wellenvektor), so lautet die Lösung

$$u(x,t) = \sin(k \cdot x - \omega t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty),$$

wobei $\omega = c|k|$ die Wellenfrequenz ist, denn

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = (-\omega^2 + c^2 |k|^2) u = 0.$$

Die Ausbreitung der Welle $u(x,t)$ ist in Abbildung 1.2 dargestellt.

Wir schreiben die Wellengleichung in der Form (1.4). Dazu setzen wir $v = \partial u / \partial t$ und

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ c^2 \Delta & 0 \end{pmatrix}.$$

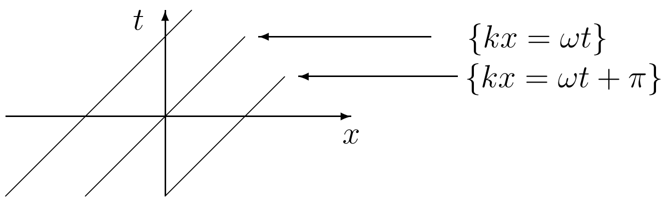

Abbildung 1.2: Darstellung der Wellentäler $\{(x,t):\ u(x,t)=0\}$.

(I ist die Identität.) Dann ist das obige Anfangswertproblem formal äquivalent zu

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} - AU &= 0, \quad t > 0, \\ U(0) &= \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Lösung lautet *formal*

$$U(t) = e^{At}U(0), \quad t > 0.$$

Beispiel 1.3 *Schrödingergleichung*
Die zeitliche Entwicklung eines freien Elektrons wird durch die Schrödingergleichung für die sogenannte Wellenfunktion $u = u(x,t) \in \mathbb{C}$ beschrieben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - i\Delta u &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0, \\ u(\cdot, 0) &= u_0, \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Die Elektronendichte ist durch $|u(x,t)|^2$ gegeben. Das Integral

$$\int_\Omega |u(x,t)|^2\, dx$$

ist die Wahrscheinlichkeit, das Elektron im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ anzutreffen. Ist $u_0(x) = \sin(k \cdot x)$, so ist

$$u(x,t) = \sin(k \cdot x)e^{-i\omega t}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty),$$

mit $\omega = |k|^2$ eine spezielle Lösung der Schrödingergleichung. Diese erfüllt die Relation

$$\int_\Omega |u(x,t)|^2\, dx = \int_\Omega \sin^2(k \cdot x)\, dx = \int_\Omega |u_0|^2\, dx, \tag{1.7}$$

wenn das Integral über $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ existiert. Formal können wir die Lösung der Schrödingergleichung schreiben als

$$u(t) = e^{i\Delta t} u_0, \quad t \geq 0.$$

Definieren wir die Norm

$$\|u\| := \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

so lautet (1.7):

$$\|e^{i\Delta t} u_0\| = \|u(t)\| = \|u_0\|,$$

und wir können vermuten, daß

$$\|e^{i\Delta t}\| = 1$$

gilt. Diese Vermutung präzisieren und beweisen wir später (Satz 5.20).

Intermezzo 1: Etwas Funktionalanalysis

In diesem Abschnitt stellen wir einige funktionalanalytische Grundlagen und Resultate zusammen, die in den folgenden Kapiteln benötigt werden.

Sei X ein normierter Raum. Wir nennen X einen *Banachraum*, wenn er vollständig ist, d.h., wenn jede Cauchy-Folge gegen ein Element aus X konvergiert. Im folgenden sei X stets ein Banachraum.

Es gelten die folgenden Ungleichungen:

Satz 1.4 (Youngsche Ungleichung) *Seien $a, b \geq 0$. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$ und $1 < p, q < \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$:*

$$a \cdot b \leq \varepsilon \frac{a^p}{p} + \varepsilon^{-q/p} \frac{b^q}{q}.$$

Beweis: Siehe [4, Seite 56, (4)].

Satz 1.5 (Hölder-Ungleichung) *Seien $a_n, b_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, so daß die unendlichen Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q$ konvergieren. Seien weiter $1 < p, q < \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$. Dann gilt:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q \right)^{1/q}.$$

Beweis: Ähnlich wie in [4, Théorème IV.6, Seite 56].

Sei $B : X \to X$ ein linearer Operator. Wir nennen B *beschränkt*, wenn es eine Konstante $K > 0$ gibt, so daß

$$\|Bx\| \leq K\|x\| \quad \forall x \in X.$$

Satz 1.6 *Sei B: $X \to X$ linear. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) B ist beschränkt.

(2) B ist stetig in X.

(3) $\exists x_0 \in X :$ B ist stetig in x_0.

(4) $\|B\| := \sup\{\|Bx\| : \|x\| \leq 1\} < \infty$.

Beweis: siehe [1, Lemma 3.1].

Wir nennen $\|B\|$ die *Norm* von B. Definieren wir

$$L(X) = \{B : X \to X : \; B \text{ linear, beschränkt}\},$$

so wird $L(X)$ mit $\|\cdot\|$ ein normierter Raum. Da X ein Banachraum ist, ist auch $L(X)$ ein Banachraum.

Satz 1.7 (Banach-Steinhaus) *Seien X ein Banachraum und $Z \subset L(X)$ mit*

$$\sup_{B \in Z} \|Bx\| < \infty \qquad \forall x \in X.$$

Dann gilt:

$$\sup_{B \in Z} \|B\| < \infty.$$

Der Satz von Banach-Steinhaus gilt auch für Mengen von linearen, stetigen Operatoren $B : X \to Y$ mit normiertem Raum Y (siehe [1, Satz 5.3]).

Im folgenden interessieren wir uns für Operatoren, die nicht auf ganz X definiert sind und die nicht beschränkt zu sein brauchen. Sei also $D(A) \subset X$ ein Unterraum und $A : D(A) \to X$ ein linearer Operator.

Beispiel 1.8 Seien $X = C^0(\mathbb{R}^d)$ und $D(A) = C^2(\mathbb{R}^d)$. Dann ist der Operator $A : D(A) \to X$, definiert durch

$$Au = \Delta u = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad u \in D(A),$$

wohldefiniert und linear.

Definition 1.9 *Sei $A : D(A) \to X$ ein Operator. Dann heißt A* abgeschlossen *genau dann, wenn der Graph von A in $X \times X$ abgeschlossen ist, d.h., wenn für alle $(x_n) \subset D(A)$ mit $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ aus $Ax_n \to y$ $(n \to \infty)$ folgt, daß $x \in D(A)$ und $Ax = y$.*

Beispiele für abgeschlossene Operatoren sind etwa Operatoren aus $L(X)$ (denn die Stetigkeit impliziert aus $x_n \to x$ sofort $Ax_n \to Ax = y$).

Definition 1.10 *Sei $A : D(A) \to X$ ein abgeschlossener linearer Operator. Dann heißt*

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda I - A \text{ besitzt eine beschränkte Inverse in } X\}$$

die Resolventenmenge *von A. Die Menge*

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

heißt das Spektrum *von A. Ist $\lambda \in \rho(A)$, so heißt die Abbildung*

$$R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1} \in L(X)$$

die Resolvente *von A.*

Bemerkung 1.11 Sei $A : D(A) \to X$ linear. Gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$, so daß $(\lambda I - A)^{-1}$ existiert und beschränkt ist, so ist A abgeschlossen. Sei nämlich $(x_n) \subset D(A)$ mit $x_n \to x$ und $Ax_n \to y$ $(n \to \infty)$. Dann folgt aus der Stetigkeit von $(\lambda I - A)^{-1}$:

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)x_n \\ &= (\lambda I - A)^{-1} \lim_{n\to\infty} (\lambda I - A)x_n = (\lambda I - A)^{-1}(\lambda x - y) \in D(A), \end{aligned}$$

also

$$(\lambda I - A)x = (\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1}(\lambda x - y) = \lambda x - y$$

und damit $Ax = y$. Die Begriffe Resolventenmenge und Spektrum machen also nur für abgeschlossene Operatoren Sinn.

Beispiel 1.12 Seien $X = C^0([0,1])$, versehen mit der Supremumsnorm $\|u\|_\infty = \sup\{|u(x)| : \ 0 < x < 1\}$, $A = d/dx$ und $D(A) = \{u \in C^1([0,1]) : \ u(0) = 0\}$. Wir behaupten:

$$\sigma(A) = \emptyset, \qquad \rho(A) = \mathbb{C}.$$

Sei nämlich $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann besitzt $0 = (\lambda I - A)u = \lambda u - u'$ die allgemeine Lösung $u(x) = ce^{\lambda x}$ für $c \in \mathbb{C}$. Wegen $u(0) = 0$ muß aber $c = 0$, also $u = 0$ gelten, d.h., $\lambda I - A$ ist injektiv. Sei nun $f \in X$. Wir müssen die Differentialgleichung

$$f = (\lambda I - A)u = \lambda u - u' \quad \text{in } [0,1], \qquad u(0) = 0,$$

lösen. Nach der Formel der Variation der Konstanten folgt

$$u(x) = \int_0^x f(s)e^{\lambda(x-s)}\,ds, \quad x \in [0,1].$$

Wegen $u \in D(A)$ ist also $\lambda I - A$ surjektiv. Dies bedeutet, daß $(\lambda I - A)^{-1}$ existiert. Nun ist aber für $\lambda \neq 0$

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - A)^{-1} f\|_\infty &= \|u\|_\infty \leq \sup_{0<x<1} \int_0^x e^{\lambda(x-s)}\,ds \|f\|_\infty \\ &= \sup_{0<x<1} \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda x} - 1)\|f\|_\infty \\ &\leq \lambda^{-1}(e^\lambda - 1)\|f\|_\infty, \end{aligned}$$

und für $\lambda = 0$ gilt:

$$\|(\lambda I - A)^{-1} f\|_\infty \leq \|f\|_\infty,$$

d.h., $(\lambda I - A)^{-1} : X \to X$ ist beschränkt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Dies impliziert $\rho(A) = \mathbb{C}$.

Satz 1.13 *Sei $A : D(A) \to X$ ein abgeschlossener linearer Operator. Dann ist die Resolventenmenge $\rho(A)$ offen.*

Beweis: siehe [7, §23, 5.6, Seite 670].

Ein weiterer wichtiger Begriff ist der Dualraum.

Definition 1.14 *Wir nennen $X' := L(X)$ den* Dualraum *von X und $X'' = (X')'$ den Bidualraum von X.*

Wir schreiben für $x' \in X'$

$$\langle x', x\rangle := x'(x) \quad \forall x \in X.$$

Wegen $\|x'\| = \sup\{|\langle x', x\rangle| : \|x\| \leq 1\}$ folgt dann

$$|\langle x', x\rangle| \leq \|x'\| \cdot \|x\| \quad \forall x' \in X', x \in X.$$

Wir definieren nun die folgende Abbildung. Sei $J : X \to X''$ definiert durch $(J(x))(x') := \langle x', x\rangle$ für $x' \in X'$, $x \in X$. Dann ist J linear und isometrisch (d.h. $\|J\| = 1$), also insbesondere injektiv.

Definition 1.15 *Ein Banachraum X heißt* reflexiv *genau dann, wenn J surjektiv ist, d.h., wenn J ein isometrischer Isomorphismus ist.*

In reflexiven Banachräumen können wir also X und X'' miteinander identifizieren.

Sei nun A: $D(A) \to X$ ein linearer Operator mit $\overline{D(A)} = X$. Dann ist die *Adjungierte* A': $D(A') \to X'$ definiert durch

$$\begin{array}{rcl} D(A') & = & \{x' \in X' : \ \exists y' \in X' : \ \forall x \in D(A) : \ \langle x', Ax \rangle = \langle y', x \rangle\}, \\ A'x' & = & y' \qquad \forall x' \in D(A'). \end{array}$$

Das Element y' ist eindeutig bestimmt. (Genauer gesagt, spricht man in Banachräumen von dualen Operatoren A' und in Hilberträumen von Adjungierten. Wir machen diese Unterscheidung nicht.)

Definition 1.16 *Ein Banachraum X heißt* separabel *genau dann, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge von X gibt.*

Definition 1.17 *Seien $x_n \in X$, $x'_n \in X'$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann heißt*

(1) (x_n) schwach konvergent *gegen $x \in X$ ($x_n \rightharpoonup x$ $(n \to \infty)$) genau dann, wenn*

$$\langle x', x_n \rangle \to \langle x', x \rangle \qquad \forall x' \in X'.$$

(2) (x'_n) schwach* konvergent *gegen $x' \in X'$ ($x'_n \overset{*}{\rightharpoonup} x'$ $(n \to \infty)$) genau dann, wenn*

$$\langle x'_n, x \rangle \to \langle x', x \rangle \qquad \forall x \in X.$$

Satz 1.18 *(1) Jede beschränkte Folge in einem reflexiven Banachraum besitzt eine schwach konvergente Teilfolge.*

(2) Sei X ein separabler Banachraum. Dann besitzt jede beschränkte Folge aus X' eine schwach konvergente Teilfolge.*

Beweis: Siehe [13, Theorem 21.D, Theorem 21.E].

In Hilberträumen H (d.h. vollständigen normierten Räumen mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$) kann man H und seinen Dualraum miteinander identifizieren:

Satz 1.19 (Darstellungssatz von Fréchet-Riesz) *Sei H ein Hilbertraum. Dann existiert zu $x' \in H'$ genau ein $x \in H$ mit*

$$\langle x', y \rangle = (x, y) \quad \forall y \in H,$$

und es gilt $\|x'\| = \|x\|$.

Beweis: Siehe [4, Théorème V.5, Seite 81].

Definiere die Abbildung J: $H' \to H$ durch $x' \mapsto x$, wobei $\langle x', y\rangle = (x, y)$ für $y \in H$. Dann zeigt Satz 1.19, daß J wohldefiniert, linear und isometrisch ist. Wir können also Jx' mit x' identifizieren. In diesem Sinne ist $H = H'$. Dies impliziert übrigens $H = H''$, d.h., Hilberträume sind stets reflexiv.

Eine Folgerung des Darstellungssatzes von Fréchet-Riesz ist das Lemma von Lax-Milgram. Für die Formulierung dieses Lemmas benötigen wir einige Definitionen.

Definition 1.20 *Seien H ein Hilbertraum und $a: H \times H \to K$ (mit $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$) eine Abbildung.*

(1) *Die Abbildung a ist eine* Sesquilinearform *genau dann, wenn für alle $y \in H$ die Abbildung $x \mapsto a(x, y)$ linear und für alle $x \in H$ die Abbildung $y \mapsto a(x, y)$ konjugiert linear ist (d.h. $a(x, \alpha y) = \overline{\alpha} a(x, y)$ für $\alpha \in K$).*

(2) *Eine Sesquilinearform a heißt* beschränkt *genau dann, wenn es ein $M \geq 0$ gibt, so daß $|a(x, y)| \leq M\|x\| \cdot \|y\|$ für alle $x, y \in H$.*

(3) *Eine Sesquilinearform a heißt* koerziv *(oder koerzitiv) genau dann, wenn es ein $m > 0$ gibt, so daß $\operatorname{Re} a(x, x) \geq m\|x\|^2$ für alle $x \in H$.*

Satz 1.21 (Lemma von Lax-Milgram) *Seien H ein Hilbertraum, a eine beschränkte und koerzive Sesquilinearform und $F \in H'$. Dann existiert genau ein $x \in H$, so daß*

$$a(y, x) = F(y) \quad \forall y \in H.$$

Beweis: Siehe [4, Corollaire V.8, Seite 84].

Das Lemma von Lax-Milgram kann zur Lösung von gewissen Differentialgleichungen verwendet werden (siehe Beispiel 1.29).

Wir definieren nun Lebesgue- und Sobolev-Räume. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ im folgenden eine offene Menge und sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Die Räume

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) &= \{u : \Omega \to K \text{ meßbar: } |u|^p \text{ Lebesgue-integrierbar}\}, \quad 1 \leq p < \infty, \\ L^\infty(\Omega) &= \{u : \Omega \to K \text{ meßbar: } u \text{ essentiell beschränkt}\}, \quad p = \infty, \end{aligned}$$

heißen *Lebesgue-Räume.* Wir nennen eine Funktion $u : \Omega \to K$ *essentiell beschränkt* genau dann, wenn

$$\operatorname{ess\,sup}_\Omega |u| := \inf\{C > 0 : \ |u(x)| \leq C \text{ für fast alle } x \in \Omega\} < \infty.$$

Zwei Funktionen $u, v \in L^p(\Omega)$ sind gleich ($u = v$ in $L^p(\Omega)$) genau dann, wenn $u(x) = v(x)$ für fast alle $x \in \Omega$.

Satz 1.22 *Die Lebesgue-Räume $L^p(\Omega)$, versehen mit den Normen*

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p} &:= \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty, \\ \|u\|_{L^\infty} &:= \text{ess sup}_\Omega |u|, \quad p = \infty, \end{aligned}$$

sind Banachräume. Der Raum $L^2(\Omega)$, versehen mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{L^2} := \int_\Omega u(x)\overline{v(x)} \, dx,$$

ist ein Hilbertraum.

Beweis: Siehe [1, Lemma 1.11, Satz 1.14].

Satz 1.23 (Hölder-Ungleichung für Lebesgue-Integrale) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \ge 1)$ offen. Seien $1 \le p, q \le \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$ (wobei $1/0 := \infty$, $1/\infty := 0$) und $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^p(\Omega)$. Dann ist $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ und*

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \le \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Beweis: Siehe [1, Lemma 1.12].

Wir definieren weiter den *Träger* einer Funktion $u : \Omega \to K$ durch

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega : \; u(x) \ne 0\}}.$$

Der Raum

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) : \; \operatorname{supp} u \text{ kompakt}\}$$

heißt *Raum der Testfunktionen.* Er ist nichtleer; Beispiele für Testfunktionen sind

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}\right) & : \; |x| < \varepsilon \\ 0 & : \; \text{sonst} \end{cases}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Wir schreiben partielle Ableitungen von $u \in C^k(\Omega)$ in der Form

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

wobei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ ein Multiindex und $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ ist.

Definition 1.24 *Sei $u \in L^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, und sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ ein Multiindex. Die Funktion u besitzt die* schwache Ableitung *$D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ genau dann, wenn*

$$(D^\alpha u, v)_{L^2} = (-1)^{|\alpha|}(u, D^\alpha v)_{L^2} \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Für Funktionen $u \in L^p(\Omega) \cap C^{|\alpha|}(\overline{\Omega})$ stimmen die schwache und klassische Ableitung überein.

Beispiel 1.25 Seien $\Omega = (-1, 1)$ und $u(x) = |x|$, $x \in \Omega$. Dann besitzt u die schwache Ableitung

$$u'(x) = \begin{cases} -1 & : \quad -1 < x < 0 \\ 1 & : \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

und $u' \in L^p(\Omega)$ für alle $1 \leq p \leq \infty$, denn für $v \in C_0^\infty(\Omega)$ folgt

$$\begin{aligned} (u, v')_{L^2} &= -\int_{-1}^{0} xv'(x)\, dx + \int_{0}^{1} xv'(x)\, dx \\ &= \int_{-1}^{0} v(x)\, dx - \int_{0}^{1} v(x)\, dx \\ &= -(u', v)_{L^2}. \end{aligned}$$

Wir können nun die Sobolev-Räume definieren.

Definition 1.26 *Seien $m \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p \leq \infty$. Dann heißt der Raum*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \ D^\alpha u \in L^p(\Omega) \ \forall |\alpha| \leq m\}$$

Sobolev-Raum.

Satz 1.27 *(1) Der Sobolev-Raum $W^{m,p}(\Omega)$, versehen mit der Norm*

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{m,p}} &= \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \Big)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{W^{m,p}} &= \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, \quad p = \infty, \end{aligned}$$

ist ein Banachraum.

(2) Der Sobolev-Raum $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$, versehen mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2},$$

ist ein Hilbertraum.

Beweis: Siehe [1, 1.15].

Funktionen aus Sobolev-Räumen müssen nicht stetig sein. Ein Beispiel ist die Funktion $u(x) = \ln |x|$, $x \in \Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$. Es gilt $u \in W^{1,1}(\Omega)$, aber $u \notin C^0(\Omega)$.

Für Lösungen von Differentialgleichungen aus einem Sobolev-Raum benötigen wir gelegentlich die Aussage "$u = 0$ auf $\partial\Omega$". Wie ist diese Aussage gemeint? Da $u \in W^{m,p}(\Omega)$ nicht stetig sein muß und $\partial\Omega$ im allgemeinen eine Nullmenge ist, ist möglicherweise $u = 0$ auf $\partial\Omega$ nicht definiert. Dafür definieren wir:

Definition 1.28 *(1) Seien $m \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$. Definiere den Sobolev-Raum*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \textit{Vervollständigung von } C_0^\infty(\Omega) \textit{ in } \|\cdot\|_{W^{m,p}}.$$

(2) Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. Wir schreiben $u = 0$ auf $\partial\Omega$ genau dann, wenn $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Der Raum $W_0^{m,p}(\Omega)$, versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$, ist ein Banachraum. Der Raum $H_0^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, versehen mit dem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_{H^m}$, ist ein Hilbertraum. Für alle $u \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$ gilt $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, wenn Ω beschränkt ist.

Beispiel 1.29 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \ge 1$) ein beschränktes Gebiet. Wir wollen das Randwertproblem

$$-\Delta u + u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \tag{1.8}$$

für $f \in L^2(\Omega)$ lösen. Da f nicht stetig ist, können wir keine klassische Lösungen $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ erwarten. Wir suchen stattdessen sogenannte *schwache Lösungen.* Sei dazu $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ eine klassische Lösung von (1.8), multipliziere (1.8) mit $v \in C_0^\infty(\Omega)$ und integriere über Ω. Mit dem Divergenzsatz folgt

$$\int_\Omega fv\, dx = \int_\Omega (-\Delta u + u)v\, dx = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\, dx.$$

Definiere

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\, dx, \\ F(v) &= \int_\Omega fv\, dx, \qquad u, v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Man kann zeigen, daß a bilinear (d.h. sesquilinear in $K = \mathbb{R}$) und beschränkt und daß $F \in (H_0^1(\Omega))'$ ist. Außerdem ist a wegen

$$a(u,u) = \int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2)\, dx = \|u\|_{H^1}^2$$

koerziv. Nach Satz 1.21 von Lax-Milgram existiert genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.9}$$

Wir nennen die Funktion u eine *schwache Lösung* von (1.8) genau dann, wenn $u \in H_0^1(\Omega)$ und u erfüllt (1.9). Ist $\partial\Omega$ "glatt" (etwa $\partial\Omega \in C^2$, d.h. lokal durch C^2-Funktionen darstellbar), so folgt sogar $u \in H^2(\Omega)$.

2 Gleichmäßig stetige Halbgruppen linearer beschränkter Operatoren

In Kapitel 1 haben wir gesehen, daß Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{du}{dt} - Au = 0, \quad t > 0, \tag{2.1}$$
$$u(0) = u_0, \tag{2.2}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in der Form

$$u(t) = T(t)u_0, \quad T(t) = e^{At},$$

geschrieben werden können. Die Matrix $T(t)$ erfüllt die Beziehungen

$$T(0) = I, \tag{2.3}$$
$$T(t+s) = T(t)T(s) \quad \forall t, s \geq 0, \tag{2.4}$$

wobei I die Einheitsmatrix ist. Die Familie $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, bildet eine sogenannte *Halbgruppe*. Umgekehrt gilt: Ist $T : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die (2.3)-(2.4) erfüllt, so existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit $T(t) = e^{at}$, $t \geq 0$. (Für einen Beweis siehe [9, Theorem 2.1].) Ist nun A ein Operator auf einem unendlichdimensionalen Raum, liegt es nahe, den Operator e^{At} über die Beziehungen (2.3) und (2.4) zu definieren.

Definition 2.1 *Seien X ein Banachraum und $T(t) : X \to X$, $0 \leq t < \infty$, eine Familie linearer beschränkter Operatoren.*

(1) $T(t)$ ist eine Halbgruppe linearer beschränkter Operatoren *auf X genau dann, wenn (2.3) und (2.4) gelten. Hierbei ist I die Identität auf X.*

(2) Eine Halbgruppe linearer beschränkter Operatoren $T(t)$ heißt gleichmäßig stetig, *wenn*

$$\lim_{t\to 0+} \|T(t) - I\| = 0.$$

(3) Der lineare Operator $A : D(A) \to X$, definiert durch

$$D(A) = \{x \in X : \lim_{t\to 0+} \tfrac{1}{t}(T(t)x - x) \textit{ existiert}\},$$
$$Ax = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}(T(t)x - x) = \frac{d^+T(t)x}{dt}\Big|_{t=0}$$

für $x \in D(A)$, heißt der infinitesimale Generator *der Halbgruppe $T(t)$.*

Der Grenzwert $t \to 0+$ bedeutet, daß $t \geq 0$ und $t \to 0$. Die Menge $D(A)$ heißt der Definitionsbereich von A.

Bemerkung 2.2 Aus der Definition folgt, daß für gleichmäßig stetige Halbgruppen beschränkter linearer Operatoren $T(t)$ mit $\|T(t)\| \leq C$ gilt:

$$\lim_{t \to s} \|T(t) - T(s)\| = 0, \quad s > 0,$$

denn für $0 \leq s \leq t$ folgt

$$\|T(t) - T(s)\| \leq \|T(s)\| \cdot \|I - T(t-s)\| \to 0 \quad \text{für } t \to s+.$$

Für $0 \leq t \leq s$ mit $t \to s-$ folgt $s - t \to 0+$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \|T(t) - T(s)\| &\leq \|T(t)\| \cdot \|T(0) - T(s-t)\| \\ &\leq C\|I - T(s-t)\| \\ &\to 0 \qquad \text{für } t \to s-. \end{aligned}$$

Ziel dieses Kapitel ist es, den Zusammenhang zwischen gleichmäßig stetigen Halbgruppen und ihren infinitesimalen Generatoren herzustellen. Insbesondere zeigen wir, daß gilt

$$\frac{dT(t)}{dt} = A\,T(t),$$

d.h., $u(t) = T(t)u_0$ löst die Differentialgleichung (2.1)-(2.2) im Falle von Operatoren A in *unendlichdimensionalen* Banachräumen X.

Satz 2.3 *Ein linearer Operator $A : D(A) \to X$ ist der infinitesimale Generator einer gleichmäßig stetigen Halbgruppe genau dann, wenn $A : X \to X$ ein linearer beschränkter Operator ist. Insbesondere gilt $D(A) = X$.*

Beweis: Sei $A : \ X \to X$ ein linearer beschränkter Operator und setze

$$T(t) = e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n, \quad t \geq 0.$$

Die rechte Seite konvergiert in der Norm von $L(X) = \{T : X \to X : T \text{ linear beschränkt}\}$, und $T(t)$ ist linear und beschränkt (Übungsaufgabe). Außerdem gilt $T(0) = I$ und $T(t+s) = T(t)T(s)$ für $t, s \geq 0$ (Übungsaufgabe). Aus

$$\begin{aligned} \|T(t) - I\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \right\| = \left\| tA \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{t^n}{n!} A^n \right\| \\ &\leq t\|A\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \|A\|^n = t\|A\| e^{t\|A\|} \to 0 \quad (t \to 0+) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{T(t)-I}{t} - A \right\| &= \left\| \frac{1}{t}\Big(tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \cdots \Big) - A \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{2!}tA^2 + \frac{1}{3!}t^2A^3 + \cdots \right\| \\
&= \left\| tA^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+2)!} A^n \right\| \\
&\leq t\|A\|^2 e^{t\|A\|} \to 0 \quad (t \to 0+)
\end{aligned}$$

folgt, daß $T(t)$ eine gleichmäßig stetige Halbgruppe und A ein infinitesimaler Generator von $T(t)$ ist.

Sei umgekehrt $T(t)$ eine gleichmäßig stetige Halbgruppe. Sei $\rho > 0$ so klein, daß

$$\left\| I - \frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(s)\, ds \right\| = \left\| \frac{1}{\rho} \int_0^\rho (T(s) - I)\, ds \right\| \leq \max_{0 \leq s \leq \rho} \|T(s) - I\| < 1.$$

Nach dem Satz über die Neumann-Reihe (siehe Übungsaufgabe) ist $\rho^{-1} \int_0^\rho T(s)\, ds$ und damit auch $\int_0^\rho T(s)\, ds$ invertierbar. Aus

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}(T(h) - I) \int_0^\rho T(s)\, ds &= \frac{1}{h} \left(\int_0^\rho T(s+h)\, ds - \int_0^\rho T(s)\, ds \right) \\
&= \frac{1}{h} \left(\int_h^{\rho+h} T(s)\, ds - \int_0^\rho T(s)\, ds \right) \\
&= \frac{1}{h} \left(\int_\rho^{\rho+h} T(s)\, ds - \int_0^h T(s)\, ds \right)
\end{aligned}$$

folgt für $h \to 0+$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\left(T(h) - I\right) &= \left(\frac{1}{h} \int_\rho^{\rho+h} T(s)\, ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)\, ds \right) \left(\int_0^\rho T(s)\, ds \right)^{-1}. \\
&\to (T(\rho) - T(0)) \left(\int_0^\rho T(s)\, ds \right)^{-1},
\end{aligned}$$

wobei die Konvergenz in $L(X)$ ist. Dies bedeutet, daß

$$Ax = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h}(T(h)x - x)$$

für alle $x \in X$ existiert und damit $D(A) = X$. Der Operator

$$A = (T(\rho) - I) \left(\int_0^\rho T(s)\, ds \right)^{-1}$$

ist außerdem linear und beschränkt. $\square$

Der infinitesimale Generator A ist durch die Halbgruppe nach Definition eindeutig definiert. Umgekehrt definiert ein linearer beschränkter Operator A nach Satz 2.3 eine gleichmäßig stetige Halbgruppe. Ist diese Halbgruppe eindeutig definiert? Die Antwort lautet ja:

Satz 2.4 *Seien $T(t)$ und $S(t)$ gleichmäßig stetige Halbgruppen mit*

$$\lim_{t \to 0+} \frac{T(t) - I}{t} = A = \lim_{t \to 0+} \frac{S(t) - I}{t}. \tag{2.5}$$

Dann gilt $T(t) = S(t)$ für $t \geq 0$.

Beweis: Sei $T > 0$. Da $t \mapsto \|T(t)\|$ und $s \mapsto \|S(s)\|$ stetige Abbildungen sind, existiert ein $C > 0$, so daß $\|T(t)\| \cdot \|S(s)\| \leq C$ für alle $0 \leq s, t \leq T$. Sei ferner $\varepsilon > 0$. Aus (2.5) folgt die Existenz von $\delta > 0$, so daß

$$\frac{1}{h}\|T(h) - S(h)\| = \left\| \frac{1}{h}(T(h) - I) - \frac{1}{h}(S(h) - I) \right\| < \frac{\varepsilon}{TC} \tag{2.6}$$

für alle $0 \leq h \leq \delta$. Sei nun $0 \leq t \leq T$ und wähle $n \in \mathbb{N}$, so daß $t/n < \delta$. Dann folgt aus der Halbgruppeneigenschaft (2.4) und der Abschätzung (2.6):

$$\begin{aligned}
\|T(t) - S(t)\| &= \left\| T\left(n\frac{t}{n}\right) - S\left(n\frac{t}{n}\right) \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{kt}{n}\right) - T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{(k+1)t}{n}\right) \right\| \\
&\quad \text{(Teleskopsumme)} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) \right\| \cdot \left\| T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \cdot \left\| S\left(\frac{kt}{n}\right) \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} C \cdot \frac{t}{n}\frac{\varepsilon}{TC} \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $T(t) = S(t)$ für alle $0 \leq t \leq T$. Da $T > 0$ beliebig war, folgt $T(t) = S(t)$ für alle $0 \leq t < \infty$. $\square$

Korollar 2.5 *Sei $T(t)$ eine gleichmäßig stetige Halbgruppe von linearen beschränkten Operatoren. Dann gilt:*

(1) Es existiert $\omega \geq 0$, so daß $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$, $t \geq 0$.

(2) Es existiert ein eindeutiger linearer beschränkter Operator $A : X \to X$ mit $T(t) = e^{At}$.

(3) Der Operator A aus (2) ist der infinitesimale Operator von $T(t)$.

(4) Die Abbildung $t \mapsto T(t)$ ist differenzierbar in $L(X)$ und

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A, \quad t \geq 0.$$

Beweis: (2) und (3) folgen aus dem Beweis von Satz 2.3 und Satz 2.4. (1) folgt aus

$$\|T(t)\| \leq e^{\|A\|t}$$

mit $\omega = \|A\|$. Die Aussage (4) für $t = 0$ ist im Beweis von Satz 2.3 gezeigt worden. Die Halbgruppeneigenschaft (2.4) impliziert (4) für $t > 0$. $\square$

Beispiel 2.6 Wir definieren den Folgenraum

$$X = \ell^2 = \Big\{ x = (x_n)_n \subset \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \Big\}$$

und die Norm

$$\|x\| = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \Big)^{1/2} \qquad \text{für } x \in X.$$

Mit dieser Norm ist X ein Banachraum. Seien $a_{n,m} \in \mathbb{C}$ mit

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} |a_{n,m}|^2 < \infty.$$

Wir definieren die "unendliche Matrix" $A: \ \ell^2 \to \ell^2$ durch

$$(Ax)_n = \Big(\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} x_m \Big)_n \qquad \text{für } x = (x_m)_m \in \ell^2.$$

Dann ist A wohldefiniert, linear und beschränkt, denn mit der Hölder-Ungleichung (Satz 1.5) folgt

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} x_m \Big|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{n,m}|^2 \sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^2 \\ &= \sum_{n,m=1}^{\infty} |a_{n,m}|^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

Nach Satz 2.3 ist A der infinitesimale Generator der gleichmäßig stetigen Halbgruppe $T(t) = e^{At}$, $t \geq 0$. Insbesondere gilt nach Korollar 2.5(4) $\frac{d}{dt}T(t) = AT(t)$. Daraus folgt, daß für $x^0 \in \ell^2$ die Abbildung $t \mapsto x(t) = T(t)x^0$ die eindeutige Lösung des unendlichen Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} x_n' &= \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} x_m, \quad t > 0, \\ x_n(0) &= x_n^0, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

ist. Es gilt $x \in C^1([0,\infty); \ell^2)$.

Beispiel 2.7 Seien $\phi_1, \dots, \phi_N \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ und setze $X = \operatorname{span}(\phi_1, \dots, \phi_N)$, versehen mit der Supremumsnorm. Definiere $T(t) \in L(X)$ durch $T(t)f(x) = f(x+t)$, $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\forall \varepsilon > 0: \ \exists \delta > 0: \ \forall i = 1, \dots, N: \ \forall\ |y - z| < \delta: \ |\phi_i(y) - \phi_i(z)| < \varepsilon,$$

also

$$\forall \varepsilon > 0: \ \exists \delta > 0: \ \forall f \in X: \ \forall\ |y - z| < \delta: \ |f(y) - f(z)| < \varepsilon.$$

Daher ist für $0 \leq t < \delta$

$$\|T(t) - I\| = \sup_{f \in X,\, \|f\|=1} \|T(t)f - f\| = \sup_{\|f\|=1} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon,$$

folglich $\|T(t) - I\| \to 0$ für $t \to 0+$, und $T(t)$ ist eine gleichmäßig stetige Halbgruppe. Wegen

$$\frac{1}{t}\left(T(t) - I\right) f(x) = \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \to f'(x) \qquad \text{für } t \to 0+$$

lautet der infinitesimale Generator von $T(t)$ gerade $A = \frac{d}{dx}$, definiert auf X.

Ist X der Raum aller $C_0^\infty(\mathbb{R})$-Funktionen, so folgt nur

$$\forall f \in X: \ \|T(t)f - f\| \to 0 \qquad \text{für } t \to 0+. \tag{2.7}$$

Die Definition gleichmäßig stetiger Halbgruppen ist also zu eng; dies führt zu der Definition stark stetiger Halbgruppen, die nur (2.7) erfüllen – siehe Kapitel 3.

3 Stark stetige Halbgruppen linearer beschränkter Operatoren

Wir wollen die Klasse gleichmäßig stetiger Halbgruppen erweitern. Sei X im folgenden ein Banachraum.

Definition 3.1 *Eine Halbgruppe $T(t)$, $0 \le t < \infty$, linearer beschränkter Operatoren auf X heißt* stark stetig *genau dann, wenn*

$$\lim_{t\to 0+} T(t)x = x \quad \forall x \in X. \tag{3.1}$$

Wir nennen eine stark stetige Halbgruppe linearer beschränkter Operatoren auch eine C_0-Halbgruppe. Wir beweisen im folgenden einige Eigenschaften von C_0-Halbgruppen und deren infinitesimalen Generatoren.

Satz 3.2 *Sei $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe. Dann existieren $\omega \ge 0$ und $M \ge 1$, so daß für alle $0 \le t < \infty$ gilt:*

$$\|T(t)\| \le Me^{\omega t}.$$

Beweis: Wir zeigen zuerst: $\exists \eta > 0$, $M \ge 1$: $\forall 0 \le t \le \eta$: $\|T(t)\| \le M$. Angenommen, dies wäre falsch. Dann existieren $t_n \ge 0$ mit $t_n \to 0$ $(n \to \infty)$ und $\|T(t_n)\| \ge n$. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus (Satz 1.7) existiert ein $x \in X$, so daß $\|T(t_n)x\| \to \infty$ $(n \to \infty)$; Widerspruch zu (3.1). Also gilt $\|T(t)\| \le M$ für $0 \le t \le \eta$. Wegen $\|T(0)\| = \|I\| = 1$ ist $M \ge 1$.

Sei nun $t > 0$ beliebig und setze $\omega = (\log M)/\eta$. Es existieren $n \in \mathbb{N}$ und $0 \le \delta < \eta$, so daß $t = n\eta + \delta$. Aus der Halbgruppeneigenschaft (2.4) folgt

$$\|T(t)\| = \|T(\delta)T(\eta)^n\| \le M^{n+1} = M^{1-\delta/\nu}M^{t/\nu} \le MM^{t/\eta} = Me^{\omega t}.$$

□

Korollar 3.3 *Es sei $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe und sei $x \in X$. Dann ist die Abbildung $[0,\infty) \to X$, $t \mapsto T(t)x$, stetig.*

Beweis: Der Beweis ist ähnlich wie in Bemerkung 2.2. Seien $t, h \ge 0$. Dann ist

$$\|T(t+h)x - T(t)x\| \le \|T(t)\| \cdot \|T(h)x - x\| \le Me^{\omega t}\|T(h)x - x\|.$$

Für $t \ge h \ge 0$ folgt

$$\|T(t-h)x - T(t)x\| \le \|T(t-h)\| \cdot \|x - T(h)x\| \le Me^{\omega t}\|x - T(h)x\|,$$

also für $t \ge 0$ mit $t \pm h \ge 0$

$$\|T(t \pm h)x - T(t)x\| \le Me^{\omega t}\|T(h)x - x\| \to 0 \quad \text{für } h \to 0$$

wegen (3.1). □

Satz 3.4 *Sei $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe und A ihr infinitesimaler Generator. Dann gilt*

(1) für alle $x \in X$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x\, ds = T(t)x. \tag{3.2}$$

(2) für alle $x \in X$:

$$\int_0^t T(s)x\, ds \in D(A) \quad \textit{und} \quad A\left(\int_0^t T(s)x\, ds\right) = T(t)x - x. \tag{3.3}$$

(3) für alle $x \in D(A)$:

$$T(t)x \in D(A) \quad \textit{und} \quad \frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax. \tag{3.4}$$

(4) für alle $x \in D(A)$:

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax\, d\tau = \int_s^t AT(\tau)x\, d\tau. \tag{3.5}$$

Beweis:

(1) folgt aus der Stetigkeit der Abbildung $t \mapsto T(t)x$ (siehe Korollar 3.3).

(2) Seien $x \in X$ und $h > 0$. Dann gilt wegen (1)

$$\begin{aligned}\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)x\, ds &= \frac{1}{h}\int_0^t (T(s+h)x - T(s)x)\; dx \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\, ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\, ds \\ &\to T(t)x - x \quad (h \to 0+),\end{aligned}$$

also

$$\int_0^t T(s)\, ds \in D(A)$$

und

$$A\left(\int_0^t T(s)x\, ds\right) = \lim_{h\to 0+} \frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)x\, ds = T(t)x - x.$$

(3) Seien $x \in D(A)$ und $h > 0$. Dann folgt

$$\frac{T(h)-I}{h}T(t)x = T(t)\frac{T(h)-I}{h}x \to T(t)Ax \quad (h \to 0+)$$

und damit $T(t)x \in D(A)$ und $AT(t)x = T(t)Ax$. Außerdem folgt

$$\frac{d^+}{dt} T(t)x = T(t)Ax.$$

Um (3.4) zu beweisen, untersuchen wir den linksseitigen Grenzwert für $t > 0$:

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{h}\left(T(t)x - T(t-h)x\right) - T(t)Ax \right\| \\
&\quad \leq \quad \left\| T(t-h)\left(\frac{1}{h}\left(T(h)x - x\right) - Ax\right)\right\| + \|T(t-h)Ax - T(t)Ax\| \\
&\quad \leq \quad Me^{\omega t}\left\|\frac{1}{h}\left(T(h)x - x\right) - Ax\right\| + \|T(t-h)Ax - T(t)Ax\| \\
&\quad \to \quad 0 \quad (h \to 0+),
\end{aligned}$$

wobei wir Satz 3.2, $x \in D(A)$ und Korollar 3.3 verwendet haben. Daher gilt

$$\frac{d}{dt} T(t)x = \frac{d^-}{dt} T(t)x = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\left(T(t)x - T(t-h)x\right) = T(t)Ax = AT(t)x.$$

(4) folgt aus (3) durch Integration. □

Korollar 3.5 *Sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$. Dann ist A linear, abgeschlossen und $\overline{D(A)} = X$.*

Beweis: Sei $x \in X$ und setze

$$x_t = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\, ds, \quad t > 0.$$

Nach Satz 3.4(2) gilt $x_t \in D(A)$ und nach Satz 3.4(1) ist $x_t \to x$ für $t \to 0+$. Dies bedeutet, daß $D(A)$ dicht in X ist, d.h. $\overline{D(A)} = X$. Um die Abgeschlossenheit von A zu zeigen, seien $x_n \in D(A)$ mit $x_n \to x$ und $Ax_n \to y$ $(n \to \infty)$. Aus Satz 3.4(4) folgt

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n\, ds \to \int_0^t T(s)y\, ds \quad (n \to \infty),$$

denn $T(s)Ax_n \to T(s)y$ gleichmäßig in $s \in (0,t)$. Wegen $T(t)x_n \to T(t)x$ gilt also

$$\frac{1}{t}(T(t)x - x) = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)y\, ds \to T(0)y = y \quad (t \to 0+)$$

gemäß Satz 3.4(1) und daher $x \in D(A)$ und $Ax = y$. □

Für C_0-Halbgruppen gilt ein Eindeutigkeitsresultat analog zu Satz 3.2.

Satz 3.6 *Seien $T(t)$ bzw. $S(t)$ C_0-Halbgruppen mit infinitesimalen Generatoren A bzw. B. Gilt $A = B$, so folgt $T(t) = S(t)$ für alle $t \geq 0$.*

Beweis: Der Ausdruck $A = B$ bedeutet, daß $D(A) = D(B)$ und $Ax = Bx$ für alle $x \in D(A)$. Sei $x \in D(A)$. Wie für Satz 3.4(3) zeigt man, daß $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ differenzierbar ist und daß gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)AS(s)x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Folglich ist $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ konstant und

$$T(t)x = T(t-0)S(0)x = \text{const.} = T(t-t)S(t)x = S(t)x$$

für alle $x \in D(A)$. Sei nun $x \in X$ und seien $x_n \in D(A)$ mit $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ (existiert, weil $\overline{D(A)} = X$ nach Korollar 3.5). Aus der Stetigkeit von $T(t)$ und $S(t)$ folgt dann für $n \to \infty$

$$T(t)x \leftarrow T(t)x_n = S(t)x_n \to S(t)x.$$

Daher ist $T(t)x = S(t)x$ für alle $x \in X$, d.h. $T(t) = S(t)$ für $t \geq 0$. □

Wir fassen die Unterschiede zwischen gleichmäßig stetigen und stark stetigen Halbgruppen linearer beschränkter Operatoren in der folgenden Tabelle zusammen.

	gleichmäßig stetige Halbgruppen	stark stetige Halbgruppen
Definition	$\lim_{t\to 0+} \|T(t) - I\| = 0$	$\forall x \in X: \lim_{t\to 0+}(T(t) - I)x = 0$
Normabschätzung	$\|T(t)\| \leq e^{\omega t},\ \omega \geq 0$	$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t},\ M \geq 1,\ \omega \geq 0$
infinit. Generator	$A : X \to X$ linear beschränkt	$A : D(A) \to X$ linear, abgeschlossen, $\overline{D(A)} = X$
Differentialgl.	$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t)$ in X	$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t)$ in $D(A)$
Existenz	$A:\ X \to X$ linear beschränkt $\Rightarrow T(t) = e^{At}$	A erfüllt Voraussetzungen des Satzes von Hille-Yosida (siehe unten) $\Rightarrow \exists$ C_0-Halbgruppe $T(t)$

Beispiel 3.7 Wir greifen das Beispiel 2.7 auf: Sei X der Banachraum der beschränkten, gleichmäßig stetigen Funktion auf $\mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$ und definiere

$$T(t)f(s) = f(t+s), \quad f \in X,\ t \geq 0,\ s \in \mathbb{R}.$$

Im Beispiel 2.7 haben wir bereits gezeigt, daß $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe ist. Ferner gilt $\|T(t)f\|_\infty = \|f\|_\infty$, also $\|T(t)\| = \sup_{\|f\|_\infty=1} \|T(t)f\|_\infty = 1$. Der infinitesimale Generator ist (siehe Beispiel 2.7)

$$Af = f' \quad \text{für } f \in D(A) = \{f \in X : f' \text{ existiert und } f' \in X\}.$$

Wir benutzen nun:

Lemma 3.8 *Sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$ mit $\|T(t)\| \leq M$ für $t \geq 0$. Dann gilt*

$$\|Ax\|^2 \leq 4M^2\|A^2x\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in D(A^2).$$

Beweis: Übungsaufgabe.

Wegen $A^2 f = f''$ folgt aus Lemma 3.8

$$\|f'\|_\infty \leq 2\|f''\|_\infty^{1/2}\|f\|_\infty^{1/2} \qquad \forall f \in X \text{ mit } f', f'' \in X.$$

Diese Ungleichung heißt *Landaus Ungleichung.*

Beispiel 3.9 Wir wollen das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{3.6}$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.7}$$

lösen. Sei dafür wie in Beispiel 3.7 $X = C_b(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ beschränkt, gleichmäßig stetig}\}$. Sei $T(t)$ die C_0-Halbgruppe aus Beispiel 3.7, definiert durch $(T(t)f)(x) = f(t+x)$, und $A = d/dx$ der entsprechende infinitesimale Generator, definiert auf $D(A) = \{f \in C_b(\mathbb{R}) : f' \in C_b(\mathbb{R})\}$. In Operatorform können wir das Problem (3.6)-(3.7) wie folgt schreiben:

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad t > 0, \qquad u(0) = u_0.$$

Nach Satz 3.4(3) ist $u(t) = T(t)u_0$ für $u_0 \in D(A)$ eine Lösung von (3.6)-(3.7); insbesondere gilt $u \in C^1([0,\infty); C_b(\mathbb{R}))$, $u(t) \in D(A)$, $t > 0$.

Nun könnte man die Frage stellen, ob auch $u(t) = T(t)u_0$ für $u_0 \in X$ eine Lösung von (3.6)-(3.7) ist. Wegen $u(x,t) = (T(t)u_0)(x) = u_0(x+t)$ gilt dies sicherlich nur, wenn u_0 differenzierbar ist. Man kann den Lösungsbegriff allerdings erweitern, so daß auch $u(x,t) = u_0(x+t)$ als "Lösung" interpretiert werden kann.

Wir wollen nun die Frage nach der Existenz einer C_0-Halbgruppe $T(t)$ bei gegebenem Operator A beantworten und ein Resultat analog zu Satz 2.3 formulieren und beweisen. Die führt zu dem wichtigen Satz von Hille-Yosida. Zuerst eine Definition.

Definition 3.10 *Sei $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe mit $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $M \geq 1$, $\omega \geq 0$.*

(1) $T(t)$ heißt gleichmäßig beschränkt*, wenn $\omega = 0$, d.h. $\|T(t)\| \leq M$.*

(2) $T(t)$ heißt C_0-Halbgruppe von Kontraktionen*, wenn $M = 1$ und $\omega = 0$, d.h. $\|T(t)\| \leq 1$.*

Die C_0-Halbgruppe aus Beispiel 3.7 ist eine C_0-Halbgruppe von Kontraktionen.

Satz 3.11 (Hille-Yosida für Halbgruppen von Kontraktionen) *Ein linearer Operator A ist der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe von Kontraktionen $T(t)$, $t \geq 0$, genau dann, wenn*

(1) A ist abgeschlossen, $\overline{D(A)} = X$ und

(2) $\mathbb{R}^+ = (0, \infty) \subset \rho(A)$ und für alle $\lambda > 0$:

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}. \tag{3.8}$$

Wir erinnern, daß $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ linear und beschränkt in } X\}$ die Resolventenmenge und $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ die Resolvente ist.

Beweis: Der Beweis von Satz 3.11 gliedert sich in mehrere Schritte.

1. Schritt: Sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe von Kontraktionen. Nach Korollar 3.5 ist A abgeschlossen und $\overline{D(A)} = X$. Wir definieren für $\lambda > 0$ und $x \in X$

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt.$$

Da $t \mapsto T(t)x$ stetig und gleichmäßig beschränkt ist, existiert das uneigentliche Integral und $R(\lambda) : X \to X$ ist wohldefiniert. Der Operator $R(\lambda)$ ist linear und beschränkt, denn

$$\|R(\lambda)x\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|T(t)x\| \, dt \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|x\| \, dt = \frac{1}{\lambda} \|x\|,$$

also $\|R(\lambda)\| \leq 1/\lambda$. Wir zeigen nun, daß $R(\lambda) = R(\lambda, A)$ gilt, was $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$ und damit (2) beweist.

Für $h > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}R(\lambda)x &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}(T(t+h)x - T(t)x)\,dt \\
&= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(t-h)}T(t)x\,dt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt \\
&= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)x\,dt \\
&= \frac{1}{h}(e^{\lambda h}-1)R(\lambda)x - e^{\lambda h}\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)x\,dt \\
&\to \lambda R(\lambda)x - x \quad (h \to 0+).
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß $R(\lambda)x \in D(A)$ für alle $\lambda > 0,\ x \in X$ und $AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda) - I$ bzw.

$$(\lambda I - A)R(\lambda) = I. \tag{3.9}$$

Für $x \in D(A)$ gilt nach Satz 3.4(3)

$$\begin{aligned}
R(\lambda)Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Ax\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}AT(t)x\,dt \\
&= A\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt\right) \quad \text{(da } A \text{ abgeschlossen)} \\
&= AR(\lambda)x.
\end{aligned}$$

Hieraus und aus (3.9) folgt

$$R(\lambda)(\lambda I - A) = (\lambda I - A)R(\lambda) = I \qquad \text{in } D(A),$$

d.h. $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$.

2. Schritt: Sei A ein linearer Operator, der die Eigenschaften (1) und (2) erfüllt. Wir beweisen zuerst einige technische Lemmata.

Lemma 3.12 *Der lineare Operator A erfülle (1) und (2). Dann gilt*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x \quad \forall x \in X.$$

Beweis: Sei zuerst $x \in D(A)$. Dann ist $I = R(\lambda, A)(\lambda I - A) = \lambda R(\lambda, A) - R(\lambda, A)A$ in $D(A)$ und

$$\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| = \|R(\lambda, A)Ax\| \le \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \to 0 \quad (\lambda \to \infty).$$

Sei nun $x \in X$. Da $D(A)$ dicht in X ist, existieren $x_n \in D(A)$ mit $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ und

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \lim_{\lambda\to\infty} (\lambda R(\lambda, A)x_n - x_n) = \lim_{\lambda\to\infty} \lim_{n\to\infty} (\lambda R(\lambda, A)x_n - x_n) \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} (\lambda R(\lambda, A)x - x). \end{aligned}$$

Die beiden Grenzwerte dürfen vertauscht werden, da

$$\|\lambda R(\lambda, A)x_n - x_n\| \leq \|\lambda R(\lambda, A)\| \cdot \|x_n\| + \|x_n\| \leq 2\|x_n\| \leq C$$

und C hängt weder von λ noch von n ab. □

Definition 3.13 *Die* Yosida-Approximation *von A ist definiert durch*

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I.$$

Die erste Gleichung definiert A_λ, die zweite Gleichung folgt aus (3.9). Folglich ist A_λ ein auf X definierter linearer Operator.

Bemerkung 3.14 Die Yosida-Approximation kann leicht motiviert werden, wenn A etwa eine (komplexe) Zahl ist; dann ist nämlich

$$\begin{aligned} A_\lambda &= \lambda^2(\lambda - A)^{-1} - \lambda = (\lambda - A)^{-1}[\lambda^2 - (\lambda - A)\lambda] = (\lambda - A)^{-1}\lambda A \\ &= \frac{A}{1 - \lambda^{-1}A} \to A \quad (\lambda \to \infty). \end{aligned}$$

Das folgende Lemma zeigt, daß A_λ tatsächlich eine Approximation von A ist.

Lemma 3.15 *Der lineare Operator A erfülle (1) und (2). Dann gilt*

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax \quad \forall x \in D(A).$$

Beweis: Sei $x \in D(A)$. Mit Lemma 3.12 folgt

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda A R(\lambda, A)x = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax.$$

□

Lemma 3.16 *Der lineare Operator A erfülle (1) und (2). Dann ist die Yosida-Approximation A_λ der infinitesimale Generator einer gleichmäßig stetigen Halbgruppe von Kontraktionen $e^{A_\lambda t}$, und es gilt*

$$\|e^{A_\lambda t}x - e^{A_\mu t}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \quad \forall x \in X,\ \lambda, \mu > 0.$$

Beweis: Aus der Definition von $A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$ folgt, daß A_λ linear und beschränkt ist. Nach Satz 2.3 ist daher A_λ der infinitesimale Generator einer gleichmäßig stetigen Halbgruppe $e^{A_\lambda t}$. Wegen

$$\|e^{A_\lambda t}\| = e^{-\lambda t}\|e^{\lambda^2 R(\lambda,A)t}\| \leq e^{-\lambda t}e^{\lambda^2\|R(\lambda,A)\|t} \leq e^{-\lambda t}e^{\lambda t} = 1$$

ist $e^{A_\lambda t}$ eine C_0-Halbgruppe von Kontraktionen. Aus der Definition folgt, daß $e^{A_\lambda t}$, $e^{A_\mu t}$, A_λ und A_μ miteinander kommutieren. Folglich ist

$$\begin{aligned}
\|e^{A_\lambda t}x - e^{A_\mu t}x\| &= \left\|\int_0^1 \frac{d}{ds}\left(e^{A_\lambda ts}e^{A_\mu t(1-s)}x\right)\, ds\right\| \\
&= \left\|\int_0^1 te^{A_\lambda ts}e^{A_\mu t(1-s)}(A_\lambda x - A_\mu x)\, ds\right\| \\
&\leq \int_0^1 t\|e^{A_\lambda ts}\| \cdot \|e^{A_\mu t(1-s)}\| \cdot \|A_\lambda x - A_\mu x\|\, ds \\
&\leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|.
\end{aligned}$$

Dies beweist das Lemma. □

3. Schritt: Sei nun A ein linearer Operator, der (1) und (2) erfüllt. Sei ferner $x \in D(A)$. Dann ist nach Lemma 3.16 und Lemma 3.15

$$\|e^{A_\lambda t}x - e^{A_\mu t}x\| \leq t\|A_\lambda x - Ax\| + t\|Ax - A_\mu x\| \to 0 \quad (\lambda, \mu \to \infty),$$

d.h., $(e^{A_\lambda t}x)_\lambda$ ist eine Cauchyfolge in X und damit konvergent. Die Konvergenz ist gleichmäßig in $t \in [0, T]$ für jedes $T > 0$. Da $D(A)$ dicht in X ist und $\|e^{A_\lambda t}\| \leq 1$, folgt die Konvergenz für jedes $x \in X$ (siehe den Beweis von Lemma 3.12 für ein ähnliches Argument):

$$T(t)x := \lim_{\lambda\to\infty} e^{A_\lambda t}x \quad \forall x \in X. \tag{3.10}$$

Die Konvergenz ist gleichmäßig für $t \in [0, T]$ für jedes (feste) $T > 0$. Aus den Eigenschaften von $e^{A_\lambda t}$ folgt, daß $T(t)$ eine Halbgruppe ist, $T(0) = I$ und $\|T(t)\| \leq 1$. Die Abbildung $t \mapsto T(t)x$ ist stetig für alle $t \geq 0$ als gleichmäßiger Grenzwert der stetigen Funktionen $t \mapsto e^{A_\lambda t}x$. Daher ist $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe von Kontraktionen.

Es bleibt zu zeigen, daß A der infinitesimale Generator von $T(t)$ ist. Sei $x \in D(A)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}(T(t)x - x) &= \frac{1}{t}\lim_{\lambda\to\infty}(e^{A_\lambda t}x - x) \qquad \text{(nach (3.10))} \\
&= \frac{1}{t}\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t e^{A_\lambda s}A_\lambda x\, ds \qquad \text{(nach Satz 3.4(4))} \\
&= \frac{1}{t}\int_0^t \lim_{\lambda\to\infty} e^{A_\lambda s}A_\lambda x\, ds \qquad \text{(da Grenzwert gleichmäßig)} \\
&= \frac{1}{t}\int_0^t T(s)Ax\, ds \qquad \text{(nach (3.10))} \\
&\to Ax \quad (t \to 0+).
\end{aligned}$$

Sei B der infinitesimale Generator von $T(t)$ und sei $x \in D(A)$. Die obige Rechnung zeigt, daß $x \in D(B)$ und $Bx = Ax$. Wir müssen $D(B) \subset D(A)$ zeigen. Aus dem 1. Schritt folgt, daß $\mathbb{R}^+ \subset \rho(B)$, insbesondere $1 \in \rho(B)$. Nach Voraussetzung (2) ist $1 \in \rho(A)$. Wegen $D(A) \subset D(B)$ und $B = A$ auf $D(A)$ folgt

$$(I - B)D(A) = (I - A)D(A) = X,$$

also

$$D(B) = (I - B)^{-1}X = D(A)$$

und daher $A = B$. Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Im folgenden beweisen wir einige Folgerungen aus dem Satz von Hille-Yoshida.

Korollar 3.17 *Sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe von Kontraktionen $T(t)$ und sei A_λ die Yosida-Approximation von A. Dann gilt*

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{A_\lambda t}x \quad \forall x \in X. \tag{3.11}$$

Beweis: Im Beweis von Satz 3.11 haben wir gezeigt, daß die rechte Seite von (3.11) eine C_0-Halbgruppe von Kontraktionen $S(t)$ definiert, deren infinitesimaler Generator gerade A ist. Die Eindeutigkeit von C_0-Halbgruppen (Satz 3.6) impliziert dann $S(t) = T(t)$. □

Korollar 3.18 *Sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe von Kontraktionen $T(t)$. Dann gilt*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subset \rho(A)$$

und für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$ ist

$$\|R(\lambda, A)\| \le \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}.$$

Beweis: Der Operator $R(\lambda)\ X :\to X$, definiert durch

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\, dt$$

(siehe den 1. Schritt des Beweises von Satz 3.11), ist wohldefiniert für $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Im 1. Schritt des Beweises von Satz 3.11 haben wir bereits $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ gezeigt, d.h. $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subset \rho(A)$. Die Abschätzung folgt aus

$$\|R(\lambda, A)x\| \leq \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}\lambda t}\|T(t)x\|\, dt \leq \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}\lambda t}\|x\|\, dt = \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}.$$

$\square$

Bemerkung 3.19 Wir zeigen, daß $\rho(A)$ nicht notwendigerweise mehr als die rechte Halbebene $\{\operatorname{Re}\lambda > 0\}$ enthalten muß, d.h., Korollar 3.20 kann i.a. nicht verschärft werden.

Seien $X \in C_b(\mathbb{R}^+)$, $T(t)f(x) = f(x+t)$ für $f \in X$ und $A = d/dx$ in $D(A) = \{f \in C_b(\mathbb{R}^+) : f' \in C_b(\mathbb{R}^+)\}$ wie in Beispiel 3.7. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und betrachte die Gleichung

$$0 = (\lambda I - A)\phi = \lambda\phi - \frac{d\phi}{dx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Lösungen lauten $\phi(x) = ce^{\lambda x}$ für $c \in \mathbb{C}$. Ist $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$, so gilt $\phi \in X$. Dies bedeutet, daß $\lambda \in \sigma(A)$, wenn $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$, wobei $\sigma(A)$ das Spektrum von A ist. Daher $\{\lambda \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re}\lambda \leq 0\} \subset \sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A)$ und

$$\rho(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re}\lambda > 0\}.$$

Aus Korollar 3.18 folgt

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re}\lambda > 0\}.$$

Korollar 3.20 *Ein linearer Operator A ist der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$ mit $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$ $(\omega \geq 0)$ genau dann, wenn*

(1) A ist abgeschlossen, $\overline{D(A)} = X$ und

(2) $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ und für alle $\lambda > \omega$

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}.$$

Beweis: Sei $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe mit $\|T(t)\| \le e^{\omega t}$. Definiere $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$. Dann ist $S(t)$ eine C_0-Halbgruppe von Kontraktionen mit infinitesimalem Generator $A - \omega I$, denn

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}(e^{-\omega t}T(t) - I) &= \frac{1}{t}(e^{-\omega t} - 1)T(t) + \frac{1}{t}(T(t) - I) \\ &\to -\omega I + A \quad (t \to 0+). \end{aligned}$$

Wegen $\lambda I - A = (\lambda - \omega)I - (A - \omega I)$ folgt (2). Ist umgekehrt A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe von Kontraktionen $S(t)$, dann ist $A + \omega I$ der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$ mit $\|T(t)\| \le e^{\omega t}$ und $T(t) = e^{\omega t}S(t)$. Das Korollar folgt also aus Satz 3.11. $\square$

Beispiel 3.21 Seien $X = C_b(\mathbb{R})$, $T(t)f = f(t + \cdot)$ und $A = d/dx$ wie in Beispiel 3.7. Wir zeigen, daß $A : \ D(A) \to X$ die Voraussetzungen (1)-(2) des Satzes 3.11 erfüllt. Sei $f \in X$ und definiere

$$f_h(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(s)\, ds, \quad x \in \mathbb{R},\ h \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $f_h \in D(A)$ und $\|f_h - f\|_\infty \to 0$ $(h \to 0)$, d.h., $f_h \to f$ in X $(h \to 0)$ und $D(A)$ ist dicht in X.

Seien $f_h \in D(A)$ mit $f_h \to f$ in X und $f_h' = Af_h \to g$ in X. Dann konvergieren $f_h \to f$ und $f_h' \to g$ gleichmäßig auf beschränkten Intervallen. Daher ist $f' = g$ auf jedem beschränkten Intervall nach einem Standardresultat. Insbesondere folgt $f \in D(A)$ und $Af = f' = g$, und A ist abgeschlossen.

Sei nun $\lambda > 0$ und betrachte die Gleichung

$$g = (\lambda I - A)f = \lambda f - f'$$

für $g \in X$. Wir suchen eine Lösung $f \in D(A)$. Integrieren führt auf

$$f(x) = \int_x^\infty e^{\lambda(x-y)}g(y)\, dy, \ x \in \mathbb{R}.$$

Man kann zeigen, daß f die obige Gleichung löst und daß $f \in D(A)$. Dies bedeutet

$$R(\lambda, A)g(x) = (\lambda I - A)^{-1}g(x) = f(x) = \int_x^\infty e^{\lambda(x-y)}g(y)\, dy$$

und $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$. Ferner ist

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, A)g\|_\infty &\le \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^\infty e^{\lambda(x-y)}\|g\|_\infty\, dy \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \|g\|_\infty \left[-\frac{1}{\lambda}e^{\lambda(x-y)}\right]_{y=x}^{y=\infty} \\ &= \frac{1}{\lambda}\|g\|_\infty, \end{aligned}$$

also $\|R(\lambda, A)\| \le 1/\lambda$ für $\lambda > 0$.

Wir präsentieren ein größeres Beispiel im Intermezzo 2. Im folgenden geben wir eine andere Charakterisierung von infinitesimalen Generatoren von Halbgruppen von Kontraktionen. Dies führt auf den Satz von Lumer-Phillips, der den Begriff "dissipativer Operator" benötigt.

Sei X ein Banachraum und X' dessen Dualraum. Wir definieren die *Dualitätsmenge* $F(x) \subset X'$ durch

$$F(x) = \{x' \in X' : \langle x', x \rangle = \|x\|^2 = \|x'\|^2\}.$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach gilt $F(x) \neq \emptyset$ für alle $x \in X$. (Eine Version des Satzes von Hahn-Banach lautet gerade: Sei X ein normierter Raum und $x \in X$. Dann gilt $F(x) \neq \emptyset$. Siehe [1, Kapitel 4].)

Definition 3.22 *Sei $A : D(A) \to X$ ein linearer Operator. A heißt* dissipativ*, wenn*

$$\forall x \in D(A) : \exists x' \in F(x) : \operatorname{Re}\langle x', Ax \rangle \leq 0.$$

Beispiel 3.23 Sei $X = L^2(0,1) = \{f : (0,1) \to \mathbb{R}$ meßbar: $\|f\|_{L^2} < \infty\}$, wobei

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}, \quad f \in L^2(0,1).$$

Der Raum $L^2(0,1)$ ist mit dem Skalarprodukt

$$(f,g)_{L^2} = \int_0^1 f(x) g(x) \, dx, \quad f, g \in L^2(0,1),$$

ein Hilbertraum. Der Dualraum X' kann wieder mit $L^2(0,1)$ identifiziert werden und

$$\langle f', g \rangle = (f,g)_{L^2} \quad \text{für } f' \in X',\ g \in X$$

mit der Identifikation $f' = f \in X$ (siehe Satz 1.19 und die nachfolgende Bemerkung). Definiere den Operator $A : D(A) \to X$ durch

$$\begin{aligned} D(A) &= \{f \in C^\infty([0,1]) : f(0) = f(1) = 0\} \\ Af &= f'', \quad f \in D(A). \end{aligned}$$

Man kann zeigen, daß $D(A)$ dicht in X liegt (siehe z.B. [4, Corollaire IV.23]). Für alle $f \in D(A)$ gilt

$$\begin{aligned} (f, Af)_{L^2} &= \int_0^1 f(x) f''(x) \, dx \\ &= -\int_0^1 f'(x)^2 \, dx + [f(x) f'(x)]_0^1 \\ &= -\|f'\|_{L^2}^2 \leq 0, \end{aligned}$$

d.h., A ist dissipativ.

Beispiel 3.24 Betrachte ein Teilchen der Masse $m > 0$, das sich mit der Geschwindigkeit $u = u(t)$ bewegt und das einer Kraft $F = -ku$ mit $k > 0$ ausgesetzt ist. Nach dem Newtonschen Gesetz erfüllt u die Differentialgleichung

$$m\frac{du}{dt} = F = -ku, \quad t > 0. \tag{3.12}$$

Sei $X = \mathbb{R}$ mit dem Skalarprodukt $(u, v) = uv$ für $u, v \in \mathbb{R}$ versehen. Dann ist X ein Hilbertraum. Definiere den Operator

$$Au = -\alpha u \quad \text{für } u \in D(A) = X$$

und $\alpha = k/m > 0$. Da X ein Hilbertraum ist, kann man X' mit X identifizieren und A ist dissipativ genau dann, wenn $\operatorname{Re}(u, Au) \leq 0$ für alle $u \in D(A)$. Wegen

$$(u, Au) = -\alpha u^2 \leq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

ist also A dissipativ. Multipliziert man (3.12) mit u, so folgt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}u^2\right) = -ku^2 \leq 0,$$

d.h., die kinetische Energie des Teilchens ist monoton fallend bzw. wird durch die viskose Kraft F "zerstreut" (engl. "dissipated").

Die obige Definition hat den Nachteil, daß ihr Nachweis Informationen über den Dualraum erfordert. Die folgende Charakterisierung vermeidet dies.

Satz 3.25 *Ein linearer Operator $A : D(A) \to X$ ist dissipativ genau dann, wenn*

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda\|x\| \quad \forall x \in D(A),\ \lambda > 0. \tag{3.13}$$

Beweis: Seien A dissipativ, $\lambda > 0$ und $x \in D(A)$. Sei weiter $x' \in F(x)$ mit $\operatorname{Re}\langle x', Ax\rangle \leq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}\lambda\|x\|^2 &= \operatorname{Re}\langle x', \lambda x\rangle \leq \operatorname{Re}\langle x', \lambda x - Ax\rangle \leq |\langle x', \lambda x - Ax\rangle| \\ &\leq \|x'\| \cdot \|\lambda x - Ax\| = \|x\| \cdot \|(\lambda I - A)x\|,\end{aligned}$$

was (3.13) beweist.

Die umgekehrte Implikation beweisen wir nur für den Fall, daß der Banachraum X separabel ist. Der Grund liegt darin, daß wir Satz 1.18(2) verwenden wollen. Die Implikation gilt auch für allgemeine Banachräume, doch wird für den Beweis ein Resultat über schwach* überdeckungskompakte Mengen (Satz von Alaoglu) benötigt (siehe [10] für den allgemeinen Beweis von Satz 3.25 und [1, 6.7(3)] für den Satz von Alaoglu). Wir werden nur die bereits bewiesene Implikation von Satz 3.25 verwenden.

Sei also $x \in D(A)$ und setze voraus, daß (3.13) für alle $\lambda > 0$ gilt. Sei $y'_\lambda \in F(\lambda x - Ax)$ und setze $z'_\lambda = y'_\lambda / \|y'_\lambda\|$. Dann ist $\|z'_\lambda\| = 1$ und wegen (3.13)

$$\lambda^2 \|x\|^2 \leq \|\lambda x - Ax\|^2 = \langle y'_\lambda, \lambda x - Ax \rangle.$$

Die obige Gleichung impliziert wegen $\|\lambda x - Ax\| = \|y'_\lambda\|$:

$$\|\lambda x - Ax\| = \langle z'_\lambda, \lambda x - Ax \rangle.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \lambda \|x\| &\leq \|\lambda x - Ax\| = \langle z'_\lambda, \lambda x - Ax \rangle = \operatorname{Re} \langle z'_\lambda, \lambda x - Ax \rangle \\ &= \lambda \operatorname{Re} \langle z'_\lambda, x \rangle - \operatorname{Re} \langle z'_\lambda, Ax \rangle \\ &\leq \lambda \|z'_\lambda\| \cdot \|x\| - \operatorname{Re} \langle z'_\lambda, Ax \rangle = \lambda \|x\| - \operatorname{Re} \langle z'_\lambda, Ax \rangle. \end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\operatorname{Re} \langle z'_\lambda, Ax \rangle \leq 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Re} \langle z'_\lambda, x \rangle = \|x\| + \lambda^{-1} \operatorname{Re} \langle z'_\lambda, Ax \rangle \geq \|x\| - \lambda^{-1} \|Ax\|. \tag{3.14}$$

Da (z'_λ) wegen $\|z'_\lambda\| = 1$ für alle $\lambda > 0$ beschränkt und X nach Voraussetzung separabel ist, existiert nach Satz 1.18(2)eine Teilfolge (w'_λ) von (z'_λ), so daß $w'_\lambda \overset{*}{\rightharpoonup} z'$ $(\lambda \to \infty)$ in X', d.h. $\langle w'_\lambda, x \rangle \to \langle z', x \rangle$ $(\lambda \to \infty)$ für alle $x \in X$, und $\|z'\| \leq 1$. Der Grenzwert für die Teilfolge $\lambda \to \infty$ in (3.14) ergibt dann

$$\operatorname{Re} \langle z', Ax \rangle \leq 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Re} \langle z', x \rangle \geq \|x\|. \tag{3.15}$$

Wegen $\operatorname{Re} \langle z', x \rangle \leq |\langle z', x \rangle| \leq \|z'\| \cdot \|x\| \leq \|x\|$ folgt $\operatorname{Re} \langle z', x \rangle = \|x\|$ und wegen

$$\|x\|^2 \geq |\langle z', x \rangle|^2 = (\operatorname{Re} \langle z', x \rangle)^2 + (\operatorname{Im} \langle z', x \rangle)^2 = \|x\|^2 + (\operatorname{Im} \langle z', x \rangle)^2$$

erhalten wir $\operatorname{Im} \langle z', x \rangle = 0$, also $\langle z', x \rangle = \|x\|$. Setze $x' := \|x\| z'$. Wir behaupten, daß $x' \in F(x)$. Dies folgt aus

$$\begin{aligned} \|x'\| &= \|x\| \cdot \|z'\| \geq \langle z', x \rangle = \|x\|, \\ \|x'\| &= \|x\| \cdot \|z'\| \leq \|x\| \end{aligned}$$

(wegen $\|z'\| \leq 1$), was

$$\|x'\|^2 = \|x\|^2 = \|x\| \langle z', x \rangle = \langle x', x \rangle$$

impliziert. Mit (3.15) erhalten wir

$$\operatorname{Re} \langle x', Ax \rangle \leq 0.$$

Dies beweist Satz 3.25. □

Wir bezeichnen das Bild einer Abbildung $A: \ D(A) \to X$ mit $R(A)$, d.h.

$$R(A) = \{ y \in X : \ \exists x \in D(A) : \ Ax = y \}.$$

Satz 3.26 (Lumer-Phillips) *Sei* $A: D(A) \to X$ *ein linearer Operator mit* $\overline{D(A)} = X$.

(1) *Sei* A *dissipativ und es gebe* $\lambda_0 > 0$ *mit* $R(\lambda_0 I - A) = X$. *Dann ist* A *der infinitesimale Generator einer* C_0*-Halbgruppe von Kontraktionen.*

(2) *Sei* A *der infinitesimale Generator einer* C_0*-Halbgruppe von Kontraktionen. Dann ist* A *dissipativ und* $R(\lambda I - A) = X$ *für alle* $\lambda > 0$.

Beweis: (1) Sei A dissipativ und $R(\lambda_0 I - A) = X$ für ein $\lambda_0 > 0$. Die Ungleichung (3.13) impliziert, daß $\lambda_0 I - A$ injektiv ist. Wegen $R(\lambda_0 I - A) = X$ ist $\lambda_0 I - A$ dann bijektiv. Die Ungleichung (3.13), formuliert als

$$\|y\| \geq \lambda_0 \|(\lambda_0 I - A)^{-1} y\| \quad \forall y \in X,$$

bedeutet, daß $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ ein (linearer und) beschränkter Operator mit $\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\| \leq 1/\lambda_0$ ist. Folglich ist $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ abgeschlossen. Also sind auch $\lambda_0 I - A$ und damit A abgeschlossen. Wir zeigen, daß $R(\lambda I - A) = X$ für alle $\lambda > 0$ gilt. Dann folgt nämlich (mit (3.13)) $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$ und $\|R(\lambda, A)\| \leq \lambda^{-1}$, und die Behauptung des Satzes ergibt sich aus dem Satz 3.11 von Hille-Yosida.

Um $R(\lambda I - A) = X$ für alle $\lambda > 0$ zu zeigen, definieren wir

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty) : \; R(\lambda I - A) = X\}.$$

Wegen $\lambda_0 \in \Lambda$ ist $\Lambda \neq \emptyset$. Die Ungleichung (3.13) impliziert die Injektivität von $\lambda I - A$ und (wegen $R(\lambda I - A) = X$) die Beschränktheit von $(\lambda I - A)^{-1}$, d.h. $\lambda \in \rho(A)$. Da $\rho(A)$ nach Satz 1.13 offen ist, existiert eine offene Umgebung U von λ, so daß $U \subset \rho(A)$. Wegen $\rho(A) \cap \mathbb{R}^+ \subset \Lambda$ folgt

$$U \cap \mathbb{R}^+ \subset \rho(A) \cap \mathbb{R}^+ \subset \Lambda,$$

d.h., Λ ist offen.

Seien $\lambda_n \in \Lambda$ mit $\lambda_n \to \lambda > 0$. Wir zeigen, daß $\lambda \in \Lambda$ (denn dann ist Λ auch abgeschlossen). Die Definition von Λ impliziert, daß zu gegebenem $y \in X$ ein $x_n \in D(A)$ existiert, so daß

$$(\lambda_n I - A) x_n = y. \tag{3.16}$$

Aus (3.13) folgt dann

$$\|x_n\| \leq \lambda_n^{-1} \|(\lambda_n I - A) x_n\| = \lambda_n^{-1} \|y\| \leq C \tag{3.17}$$

für ein von n unabhängiges $C > 0$ (denn (λ_n^{-1}) konvergiert gegen $\lambda^{-1} > 0$ und ist damit beschränkt). Die Folge (x_n) ist eine Cauchy-Folge, denn aus (3.16) folgt durch Subtraktion:

$$\lambda_n x_n - \lambda_m x_m = A(x_n - x_m) \tag{3.18}$$

und daher

$$\begin{aligned}
\lambda_m \|x_n - x_m\| &\leq \|(\lambda_m I - A)(x_n - x_m)\| \qquad \text{(wegen Satz 3.25)} \\
&= \|\lambda_m(x_n - x_m) - \lambda_n x_n - \lambda_m x_m)\| \qquad \text{(wegen (3.18))} \\
&= |\lambda_m - \lambda_n| \cdot \|x_n\| \\
&\leq C|\lambda_m - \lambda_n| \to 0 \quad (n, m \to \infty) \qquad \text{(wegen (3.17))}.
\end{aligned}$$

Da X vollständig, ist (x_n) konvergent. Sei $x_n \to x$ $(n \to \infty)$. Aus (3.16) folgt $Ax_n = \lambda_n x_n - y \to \lambda x - y$ $(n \to \infty)$. Da A abgeschlossen ist, folgt $x \in D(A)$ und $Ax = \lambda x - y$ oder $(\lambda I - A)x = y$.

Wir haben gezeigt:

$$\forall y \in X : \ \exists x \in D(A) : \ (\lambda I - A)x = y.$$

Dies bedeutet $R(\lambda I - A) = X$ und damit $\lambda \in \Lambda$. Also ist Λ abgeschlossen. Wir haben bewiesen, daß Λ (in $(0, \infty)$) nichtleer, offen und abgeschlossen ist. Daher muß $\Lambda = (0, \infty)$ gelten. Dies beweist (1).

(2) Sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe von Kontraktionen $T(t)$. Nach dem Satz 3.11 von Hille-Yosida gilt $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$ und insbesondere $R(\lambda I - A) = X$ für alle $\lambda > 0$. Um zu zeigen, daß A dissipativ ist, seien $x \in D(A)$ und $x' \in F(x)$. Dann ist

$$\mathrm{Re}\langle x', T(t)x\rangle \leq |\langle x', T(t)x\rangle| \leq \|x'\| \cdot \|T(t)x\| \leq \|x'\| \cdot \|x\| = \|x\|^2$$

und daher

$$\mathrm{Re}\left\langle x', \frac{1}{t}(T(t)x - x)\right\rangle = \frac{1}{t}\,\mathrm{Re}\,\langle x', T(t)x\rangle - \frac{1}{t}\|x\|^2 \leq 0.$$

Der Grenzwert $t \to 0$ ergibt wegen $x \in D(A)$

$$\mathrm{Re}\,\langle x', Ax\rangle \leq 0.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung 3.27 Teil (2) des obigen Beweises impliziert sogar, daß für infinitesimale Generatoren A einer C_0-Halbgruppe von Kontraktionen mit $\overline{D(A)} = X$ gilt:

$$\forall x \in D(A) : \ \forall x' \in F(x) : \ \mathrm{Re}\,\langle x', Ax\rangle \leq 0.$$

Korollar 3.28 *Sei $A : D(A) \to X$ linear, abgeschlossen und $\overline{D(A)} = X$. Sind A und A' (der duale Operator) dissipativ, dann ist A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe von Kontraktionen.*

Beweis: Nach Satz 3.26(1) müssen wir nur $R(I-A)=X$ zeigen. Da A dissipativ und abgeschlossen, ist $R(I-A)$ ein abgeschlossener Unterraum (Übungsaufgabe). Angenommen, $R(I-A)\neq X$. Dann können wir die folgende Version des Satzes von Hahn-Banach verwenden:

Sei X normiert und $F\subset X$ ein Unterraum mit $\overline{F}\neq X$. Dann existiert $x'\in X',\ x'\neq 0$, so daß $\langle x',x\rangle=0$ für alle $x\in F$.

Wenden wir dieses Resultat auf $F=R(I-A)=\overline{R(I-A)}\neq X$ an, erhalten wir:

$$\exists x'\in X',\ x'\neq 0:\ \forall x\in D(A):\ 0=\langle x',x-Ax\rangle=\langle x'-A'x',x\rangle,$$

und wegen der Dichtheit von $D(A)$ in X:

$$\forall x\in X:\ \langle x'-A'x',x\rangle=0.$$

Dies bedeutet $x'-A'x'=0$. Da A' dissipativ ist, folgt aus Satz 3.25

$$\|x'\|\leq\|(I-A')x'\|=0,$$

also $x'=0$; Widerspruch zu $x'\neq 0$. □

Satz 3.29 *Sei $A:\ D(A)\to X$ dissipativ.*

(1) $\exists\lambda_0>0:\ R(\lambda_0 I-A)=X\Rightarrow\forall\lambda>0:\ R(\lambda I-A)=X$.

(2) $R(I-A)=X$ und X reflexiv $\Rightarrow\overline{D(A)}=X$.

Beweis: (1) wurde bereits in Teil (1) des Beweises von Satz 3.26 gezeigt.

(2) Übungsaufgabe. □

Intermezzo 2: Homogene Wärmeleitungsgleichung

Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der Wärmegleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=0 \qquad \text{in } \Omega\times(0,\infty), \tag{3.19}$$

$$u=0 \qquad \text{auf } \partial\Omega\times(0,\infty), \tag{3.20}$$

$$u(\cdot,0)=u_0 \qquad \text{in } \Omega, \tag{3.21}$$

wobei $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ $(d\geq 1)$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega\in C^{0,1}$ sei.

Satz 3.30 *Sei $u_0\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. Dann existiert genau eine Lösung $u\in C^1([0,\infty);L^2(\Omega))\cap C^0([0,\infty);H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$ von (3.19)-(3.21) mit*

$$\|u(t)\|_{L^2}\leq\|u_0\|_{L^2}\qquad\forall t\geq 0.$$

Beweis: Wir wollen den Satz 3.11 von Hille-Yosida in $X = L^2(\Omega)$ auf $A = \Delta$, definiert in $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, anwenden. Wir zeigen nacheinander:

(1) $\overline{D(A)} = X$,

(2) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$: $R(\lambda I - A) = X$,

(3) $\forall \lambda > 0: \ \|R(\lambda, A)\| \leq \lambda^{-1}$,

(4) A ist abgeschlossen.

Da $C_0^\infty(\Omega) \subset D(A) \subset X$ und $\overline{C_0^\infty(\Omega)} = X$, folgt auch $\overline{D(A)} = X$. (Der Abschluß ist in der Norm von X zu verstehen.) Dies beweist (1).

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Wir müssen die Differentialgleichung

$$-\Delta u + \lambda u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{3.22}$$

für $f \in X$ lösen. Dafür wenden wir das Lemma von Lax-Milgram auf

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega (\nabla u \cdot \overline{\nabla v} + \lambda u \overline{v})\, dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega), \\ F(v) &= \int_\Omega f\overline{v}\, dx \quad v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

an. Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2} + |\lambda|\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq (1 + |\lambda|)\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}, \\ |F(v)| &\leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1}, \end{aligned}$$

d.h., a und F sind (bi-)linear. Wegen

$$\operatorname{Re} a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \operatorname{Re}\lambda \int_\Omega |u|^2\, dx \geq \min(1, \operatorname{Re}\lambda)\|u\|_{H^1}$$

ist a auch koerziv. Daher existiert genau eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Man kann zeigen, daß sogar $u \in H^2(\Omega)$ gilt (siehe z.B. [12]), aber der Beweis ist recht aufwendig. Dies impliziert $u \in D(A)$ und (2).

Sei $\lambda > 0$. Mit der Youngschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} \int_\Omega (|\nabla u|^2 + \lambda |u|^2)\, dx &= a(u,u) = F(u) = \int_\Omega f\overline{u}\, dx \\ &\leq \frac{1}{2\lambda}\int_\Omega |f|^2\, dx + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2\, dx, \end{aligned}$$

also

$$\frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2\,dx \le \frac{1}{2\lambda}\int_\Omega |f|^2\,dx$$

oder

$$\|u\|_{L^2} \le \lambda^{-1}\|f\|_{L^2}. \tag{3.23}$$

Sind $u_1, u_2 \in D(A)$ zwei Lösungen von (3.22), so implizieren die Differenz

$$-\Delta(u_1 - u_2) + \lambda(u_1 - u_2) = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad u_1 - u_2 = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

und (3.23): $\|u_1 - u_2\|_{L^2} \le 0$, also $u_1 = u_2$ in Ω. Dies zeigt, daß $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ existiert. Eine weitere Anwendung von (3.23) impliziert

$$\|R(\lambda, A)f\| \le \lambda^{-1}\|f\|, \tag{3.24}$$

d.h., $R(\lambda, A)$ ist beschränkt und (3) gilt.

Um (4) zu zeigen, seien $x_n \in D(A)$ mit $x_n \to x$ in X und $Ax_n \to y$ in X $(n \to \infty)$. Nach (2) existiert zu $\lambda x - y \in X$ ein $z \in D(A)$ mit $(\lambda I - A)z = \lambda x - y$. Mit (3) folgt

$$\begin{aligned} \|x_n - z\| &\le \lambda^{-1}\|(\lambda I - A)(x_n - z)\| \\ &= \lambda^{-1}\|\lambda x_n - Ax_n - (\lambda x - y)\| \\ &\le \|x_n - x\| + \lambda^{-1}\|Ax_n - y\| \\ &\to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

und folglich ist $x = z$. Mithin ist $\lambda x - y = (\lambda I - A)z = (\lambda I - A)x$ und $Ax = y$.

Nach Satz 3.11 von Hille-Yosida existiert eine C_0-Halbgruppe von Kontraktionen $T(t)$, so daß $u(t) = T(t)u_0$ eine Lösung von

$$\frac{du}{dt} - Au = 0 \quad \text{in } (0, \infty), \qquad u(0) = u_0$$

ist. Da $t \mapsto T(t)u_0 \in D(A)$ stetig ist (siehe Korollar 3.3 und Satz 3.4(3)), folgt $u \in C^0([0,\infty); D(A))$. Außerdem ist $t \mapsto u'(t) = AT(t)u_0 = T(t)Au_0 \in X$ stetig, so daß insgesamt $u \in C^1([0,\infty); X) \cap C^0([0,\infty); D(A))$ folgt. □

Bemerkung 3.31 Man kann zeigen, daß u sogar die folgende Regularität besitzt [4, Théorème X.2, Seite 207]:

$$u \in L^2(0,\infty; H^3(\Omega)), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,\infty; H^1(\Omega)).$$

Mehr Regularität kann man im allgemeinen nicht erwarten: Angenommen, es wäre $u \in C^1([0,\infty); C^0(\overline{\Omega}))$. Dann ist

$$\Delta u_0 = \frac{\partial u}{\partial t}(0) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

da $u(0) = 0$ auf $\partial\Omega$, was einen Widerspruch ergäbe, wenn $\Delta u_0 \neq 0$ auf $\partial\Omega$. Gilt nun $u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit $\Delta^n u_0 = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, so folgt $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0, \infty))$ [4, Théorème X.2]. Ist andererseits nur $u_0 \in L^2(\Omega)$, so erhalten wir

$$u \in C^0((0, \infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1((0, \infty); L^2(\Omega)),$$

da $u_0 \neq 0$ auf $\partial\Omega$ möglich ist und damit $u(0) \notin H_0^1(\Omega)$. Von $t = 0$ weg ist die Funktion u dagegen regulär:

$$u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [\varepsilon, \infty)) \quad \varepsilon > 0.$$

Dies zeigt, daß die Wärmeleitungsgleichung stark regularisierend ist:

$$u_0 \in L^2(\Omega) \quad \Rightarrow \quad \forall t > 0 : \ u(t) \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Bemerkung 3.32 Im Beweis von Satz 3.30 haben wir gezeigt (siehe (3.24)), daß

$$\|u\| \leq \lambda^{-1} \|(\lambda I - A)u\| \quad \forall u \in D(A), \ \lambda > 0.$$

Nach Satz 3.25 folgt, daß $A = \Delta$ dissipativ ist. Nach Teil 2 des Beweises von Satz 3.30 gilt $R(I - A) = X$. Also können wir Satz 3.26 von Lumer-Phillips anwenden, der (noch einmal) zeigt, daß A der infinitesimale Generator einer Halbgruppe von Kontraktionen ist.

4 Charakterisierung infinitesimaler Generatoren von C_0-Halbgruppen

Im vorigen Kapitel haben wir eine Charakterisierung infinitesimaler Generatoren von C_0-Halbgruppen $T(t)$ mit

$$\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$$

bewiesen (Korollar 3.20). Ziel dieses Kapitels ist die Charakterisierung infinitesimaler Generatoren von *allgemeinen* C_0-Halbgruppen $T(t)$, die nach Satz 3.2

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$$

erfüllen. Um die Konstante $M \geq 1$ in den Griff zu bekommen, werden wir den Banachraum X mit einer neuen Norm $|\cdot|$ versehen, so daß in der neuen Norm

$$|T(t)| \leq e^{\omega t}$$

gilt. Dazu benötigen wir das folgende Lemma. Im gesamten Kapitel sei X ein Banachraum.

Lemma 4.1 *Seien $M \geq 1$ und A: $D(A) \to X$ ein linearer Operator mit $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$ und*

$$\|\lambda^n R(\lambda, A)^n\| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \lambda > 0.$$

Dann existiert eine Norm $|\cdot|$ in X, die äquivalent zu der ursprünglichen Norm $\|\cdot\|$ in X ist und die Ungleichungen

$$\|x\| \leq |x| \leq M\|x\| \qquad \forall x \in X, \tag{4.1}$$
$$|\lambda R(\lambda, A)x| \leq |x| \qquad \forall x \in X,\ \lambda > 0, \tag{4.2}$$

erfüllt.

Beweis: Sei $\mu > 0$ und setze

$$\|x\|_\mu = \sup_{n \geq 0} \|\mu^n R(\mu, A)^n x\|, \quad x \in X.$$

Wir zeigen, daß die Folge $(\|x\|_\mu)_\mu$ monoton wachsend und beschränkt ist und daher einen Grenzwert, mit $|x|$ bezeichnet, besitzt. Die gesuchte Norm wird dann $|\cdot|$ sein. Nach Voraussetzung gilt

$$\|x\| \leq \|x\|_\mu \leq M\|x\| \tag{4.3}$$

und

$$\begin{aligned} \|\mu R(\mu, A)x\|_\mu &= \sup_{n \geq 0} \|\mu^{n+1} R(\mu, A)^{n+1} x\| \\ &\leq \sup_{n \geq 0} \|\mu^n R(\mu, A)^n x\| \\ &= \|x\|_\mu, \end{aligned}$$

also $\|\mu R(\mu, A)\|_\mu \leq 1$. Wir behaupten, daß sogar gilt:

$$\|\lambda R(\lambda, A)\|_\mu \leq 1 \quad \forall 0 < \lambda \leq \mu.$$

Seien nämlich $x \in X$ und $y = R(\lambda, A)x$. Dann ist

$$(\mu I - A)y = (\lambda I - A)y + (\mu - \lambda)y$$

oder

$$y = R(\mu, A)[(\lambda I - A)y + (\mu - \lambda)y] = R(\mu, A)[x + (\mu - \lambda)y],$$

und damit für $\lambda \leq \mu$

$$\begin{aligned} \|y\|_\mu &\leq \frac{1}{\mu}\|\mu R(\mu, A)x\|_\mu + \Big(1 - \frac{\lambda}{\mu}\Big)\|\mu R(\mu, A)y\|_\mu \\ &\leq \frac{1}{\mu}\|x\|_\mu + \Big(1 - \frac{\lambda}{\mu}\Big)\|y\|_\mu \end{aligned}$$

oder

$$\|\lambda R(\lambda, A)x\|_\mu = \lambda \|y\|_\mu \le \|x\|_\mu \quad \forall 0 < \lambda \le \mu.$$

Aus dieser Ungleichung und (4.3) folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$\|\lambda^n R(\lambda, A)^n x\| \le \|\lambda^n R(\lambda, A)^n x\|_\mu \le \|x\|_\mu \quad \forall 0 < \lambda \le \mu. \tag{4.4}$$

Daher ist

$$\|x\|_\lambda = \sup_{n\ge 0} \|\lambda^n R(\lambda, A)^n x\| \le \|x\|_\mu \quad \forall 0 < \lambda \le \mu.$$

Die Folge $(\|x\|_\mu)_\mu$ ist also monoton wachsend und durch $M\|x\|$ nach oben beschränkt. Wir definieren

$$|x| := \lim_{\mu\to\infty} \|x\|_\mu, \quad x \in X.$$

Dann folgt (4.1) aus (4.3) im Grenzwert $\mu \to \infty$ und (4.2) aus (4.4) für $n = 1$ und $\mu \to \infty$:

$$|\lambda R(\lambda, A)x| = \lim_{\mu\to\infty} \|\lambda R(\lambda, A)x\|_\mu \le \lim_{\mu\to\infty} \|x\|_\mu = |x|.$$

□

Satz 4.2 *Ein linearer Operator $A: D(A) \to X$ ist der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$ mit $\|T(t)\| \le M$ $(M \ge 1)$ genau dann, wenn*

(1) A ist abgeschlossen, $\overline{D(A)} = X$ und

(2) $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$ und

$$\|R(\lambda, A)^n\| \le \frac{M}{\lambda^n} \quad \forall \lambda > 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$ in X mit $\|T(t)\| \le M$. Wenn wir die Norm in X durch eine äquivalente Norm ersetzen, ist $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe mit der neuen Norm und A ändert sich nicht. Außerdem ist A abgeschlossen und $D(A)$ ist dicht in X bezüglich der neuen Norm (siehe Korollar 3.5). Definiere die neue Norm

$$|x| = \sup_{t\ge 0} \|T(t)x\|, \quad x \in X.$$

Dann gilt $\|x\| \le |x| \le M\|x\|$, d.h., $|\cdot|$ ist eine zu $\|\cdot\|$ äquivalente Norm. Wegen

$$|T(t)x| = \sup_{s\ge 0} \|T(s)T(t)x\| \le \sup_{s\ge 0} \|T(s)x\| = |x|$$

ist $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe von Kontraktionen in $(X, |\cdot|)$. Aus Satz 3.11 von Hille-Yosida folgt, daß $|R(\lambda, A)| \leq \lambda^{-1}$ für $\lambda > 0$ und daher

$$\|R(\lambda, A)^n x\| \leq |R(\lambda, A)^n x| \leq \lambda^{-1}|R(\lambda, A)^{n-1}x| \leq \lambda^{-n}|x| \leq \lambda^{-n}M\|x\|.$$

Dies impliziert (2).

Seien umgekehrt die Voraussetzungen (1) und (2) erfüllt. Sei $|\cdot|$ die Norm in X aus Lemma 4.1. In dieser Norm ist A abgeschlossen, $\overline{D(A)} = X$, $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$ und $|R(\lambda, A)| \leq \lambda^{-1}$ für $\lambda > 0$. Daher können wir wieder Satz 3.11 von Hille-Yosida anwenden, und A ist der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe von Kontraktionen in $(X, |\cdot|)$. In der ursprünglichen Norm ist A noch immer der infinitesimale Generator von $T(t)$ und

$$\|T(t)x\| \leq |T(t)x| \leq |x| \leq M\|x\|,$$

also $\|T(t)\| \leq M$. □

Satz 4.3 (Hille-Yosida für allgemeine C_0-Halbgruppen) *Ein linearer Operator $A\colon D(A) \to X$ ist der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$ mit $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ genau dann, wenn*

(1) A ist abgeschlossen, $\overline{D(A)} = X$ und

(2) $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ und

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \lambda > \omega. \tag{4.5}$$

Beweis: Definiere die C_0-Halbgruppe $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$. Dann gilt $\|S(t)\| \leq M$ und A ist der infinitesimale Generator von $T(t)$ genau dann, wenn $A - \omega I$ der infinitesimale Generator von $S(t)$ ist (siehe den Beweis von Korollar 3.20). Die Behauptung folgt nun aus Satz 4.2. □

Satz 4.4 *Es gelten die Voraussetzungen (1) und (2) aus Satz 4.3. Dann gilt $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \omega\} \subset \rho(A)$ und*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \operatorname{Re}\lambda > \omega.$$

Beweis: Wie im Beweis von Satz 3.11 zeigt man:

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\, dt \quad \forall x \in X,\ \operatorname{Re}\lambda > \omega.$$

Wegen $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ folgt, daß das uneigentliche Integral auf der rechten Seite konvergiert. Sei nun $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > \omega$. Dann ist

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda, A)x = \int_0^\infty \frac{d}{d\lambda}e^{-\lambda t}T(t)x\, dt = -\int_0^\infty te^{-\lambda t}T(t)x\, dt.$$

Mit vollständiger Induktion ergibt sich

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda, A)x = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} T(t)x \, dt. \tag{4.6}$$

Wir erhalten aus der Gleichung

$$R(\lambda, A)[(\mu I - A) - (\lambda I - A)]R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$$

die sogenannte *Resolventenidentität*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A),$$

aus der folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}R(\lambda, A) &= \lim_{\mu\to\lambda} \frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{\lambda - \mu} = \lim_{\mu\to\lambda} R(\lambda, A)R(\mu, A) \\ &= -R(\lambda, A)^2. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ analytisch für $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, und mittels vollständiger Induktion erhalten wir

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1}. \tag{4.7}$$

Aus (4.6) und (4.7) folgt

$$R(\lambda, A)^n x = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t} T(t)x \, dt.$$

Folglich ist (Übungsaufgabe)

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, A)^n x\| &\leq \frac{M}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1} e^{(\omega - \operatorname{Re}\lambda)t}\|x\| \, dt \\ &= \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}\|x\|, \end{aligned}$$

also die Behauptung des Satzes. □

Der folgende Satz verallgemeinert Korollar 3.17 für allgemeine C_0-Halbgruppen.

Satz 4.5 *Sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$ und sei $A_\lambda = \lambda A R(\lambda, A)$ die Yosida-Approximation von A. Dann gilt*

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{A_\lambda t}x \quad \forall x \in X.$$

Beweis: Sei zuerst $\|T(t)\| \leq M$. Im Beweis von Satz 4.2 haben wir eine Norm $|\cdot|$ in X konstruiert, in der $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe von Kontraktionen ist. Aus Korollar 3.17 folgt dann für ein $c > 0$

$$\|e^{A_\lambda t}x - T(t)x\| \leq c|e^{A_\lambda t}x - T(t)x| \to 0 \quad (\lambda \to \infty) \quad \forall x \in X.$$

Gilt nun $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ mit $\omega \leq 0$, so ist $\|T(t)\| \leq M$, und es ist nichts zu zeigen. Sei also $\omega > 0$. Wegen $A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$ folgt für $\lambda > 2\omega$

$$\begin{aligned}
\|e^{A_\lambda t}\| &= e^{-\lambda t}\|e^{\lambda^2 R(\lambda,A)t}\| \\
&= e^{-\lambda t}\Big\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\lambda^2 t)^k R(\lambda,A)^k\Big\| \qquad \text{(da } R(\lambda,A) \text{ beschränkt)} \\
&\leq e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda^{2k}t^k\|R(\lambda,A)^k\| \\
&\leq Me^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda^{2k}t^k(\lambda-\omega)^{-k} \qquad \text{(nach (4.6))} \\
&= M\exp\left(-\lambda t + \frac{\lambda^2 t}{\lambda-\omega}\right) \\
&= Me^{\lambda\omega t/(\lambda-\omega)} \\
&\leq Me^{2\omega t},
\end{aligned} \tag{4.8}$$

da $\lambda > 2\omega$ die Ungleichung $\lambda\omega/(\lambda-\omega) \leq 2\omega$ impliziert. Definiere nun eine C_0-Halbgruppe $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$ mit infinitesimalen Generator $A - \omega I$. Dann ist $\|S(t)\| \leq M$, und wir können den ersten Teil des Beweises verwenden, um zu schließen:

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{(A-\omega I)_\lambda t + \omega t}x \qquad \forall x \in X, \tag{4.9}$$

wobei $(A-\omega I)_\lambda = \lambda(A-\omega I)R(\lambda, A-\omega I)$. Wir behaupten nun:

$$(A-\omega I)_\lambda + \omega I = A_{\lambda+\omega} + H(\lambda) \tag{4.10}$$

mit

$$H(\lambda) = \omega^2 R(\lambda+\omega, A) - 2\omega AR(\lambda+\omega, A).$$

Um dies zu beweisen, benutzen wir die Identitäten

$$R(\lambda, A-\omega I) = (\lambda I - (A-\omega I))^{-1} = ((\lambda+\omega)I - A)^{-1} = R(\lambda+\omega, A) \tag{4.11}$$

und

$$\begin{aligned}
0 &= I - ((\lambda+\omega)I - A)R(\lambda+\omega, A) \\
&= I - (\lambda+\omega)R(\lambda+\omega, A) + AR(\lambda+\omega, A).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
(A-\omega I)_\lambda + \omega I &= \lambda(A-\omega I)R(\lambda, A-\omega I) + \omega I \\
&= \lambda(A-\omega I)R(\lambda+\omega, A) + \omega I \qquad \text{(nach (4.11))} \\
&= (\lambda+\omega)AR(\lambda+\omega, A) + \omega^2 R(\lambda+\omega, A) \\
&\quad - 2\omega AR(\lambda+\omega, A) \\
&\quad + \omega[I + AR(\lambda+\omega, A) - \lambda R(\lambda+\omega, A) - \omega R(\lambda+\omega, A)] \\
&= A_{\lambda+\omega} + \omega^2 R(\lambda+\omega, A) - 2\omega AR(\lambda+\omega, A) \qquad \text{(nach (4.12))} \\
&= A_{\lambda+\omega} + H(\lambda).
\end{aligned}$$

Dies beweist (4.10). Aus (4.9) folgt nun

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{A_{\lambda+\omega}t + H(\lambda)t}x \qquad \forall x \in X. \tag{4.13}$$

Für alle $x \in D(A)$ gilt wegen (4.5)

$$\begin{aligned}
\|H(\lambda)x\| &\leq \omega^2\|R(\lambda+\omega, A)x\| + 2\omega\|R(\lambda+\omega, A)Ax\| \\
&\leq \frac{M}{\lambda}(\omega^2\|x\| + 2\omega\|Ax\|) \\
&\to 0 \quad (\lambda\to\infty).
\end{aligned}$$

Aus der Dichtheit von $D(A)$ in X folgt, daß $H(\lambda)x \to 0$ für $\lambda \to \infty$ für alle $x \in X$. Wegen

$$\begin{aligned}
\|e^{H(\lambda)t}x - x\| &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n H(\lambda)^n x\right\| = \left\|t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(n+1)n!}H(\lambda)^n H(\lambda)x\right\| \\
&\leq te^{\|H(\lambda)\|t}\|H(\lambda)x\| \to 0 \quad (\lambda\to\infty) \quad \forall x \in X
\end{aligned}$$

und (4.8) sowie (4.13) folgt für alle $x \in X$

$$\begin{aligned}
\|e^{A_\lambda t}x - T(t)x\| &\leq \|e^{A_\lambda t + H(\lambda-\omega)t}x - T(t)x\| \\
&\quad + \|e^{A_\lambda t}x\| \cdot \|e^{H(\lambda-\omega)t}x - x\| \\
&\leq \|e^{A_\lambda t + H(\lambda-\omega)t}x - T(t)x\| \\
&\quad + Me^{2\omega t}\|e^{H(\lambda-\omega)t}x - x\| \\
&\to 0 \quad (\lambda\to\infty).
\end{aligned}$$

Damit ist Satz 4.5 bewiesen. □

Im folgenden geben wir noch zwei andere Resultate, in welchem Sinne $T(t)$ als "e^{At}" interpretiert werden kann.

Satz 4.6 *Sei $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe und definiere*

$$A(h)x = \frac{1}{h}(T(h)x - x), \quad x \in X.$$

Dann gilt

$$T(t)x = \lim_{h \to 0+} e^{A(h)t}x, \quad x \in X,$$

und der Grenzwert ist gleichmäßig in t auf jedem beschränkten Intervall $[0,T]$.

Beweis: Sei $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ mit $\omega \geq 0$ und sei A der infinitesimale Generator von $T(t)$. Da $T(t)$ beschränkt ist, ist dies auch $A(h)$, und $e^{A(h)t}$ ist wohldefiniert. Die Operatoren $A(h)$ und $T(t)$ kommutieren, also auch $e^{A(h)t}$ und $T(t)$. Wir benutzen nun

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(a+b)^n = e^{a+b} = e^a e^b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Dann folgt für $0 < h \leq 1$

$$\begin{aligned}
\|e^{A(h)t}\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{t}{h}\right)^n (T(h) - I)^n \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{t}{h}\right)^n (-I)^n \right\| \cdot \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{t}{h}\right)^n T(h)^n \right\| \\
&\leq e^{-t/h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{t}{h}\right)^n \|T(nh)\| \\
&\leq e^{-t/h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{t}{h}\right)^n M(e^{\omega h})^n \\
&= M \exp\left(\frac{t}{h}\left(e^{\omega h} - 1\right)\right) \\
&\leq M \exp\left(t(e^{\omega} - 1)\right),
\end{aligned}$$

denn $h^{-1}(e^{\omega h} - 1) \leq e^{\omega} - 1$ für $0 < h \leq 1$ und $\omega \geq 0$ (Übungsaufgabe). Sei $x \in D(A)$. Ähnlich wie in Satz 3.4(2) kann man zeigen, daß die Abbildung $s \mapsto e^{A(h)(t-s)}T(s)x$ differenzierbar ist und daß gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left(e^{A(h)(t-s)}T(s)x\right) &= -A(h)e^{A(h)(t-s)}T(s)x + e^{A(h)(t-s)}AT(s)x \\
&= e^{A(h)(t-s)}T(s)(Ax - A(h)x).
\end{aligned}$$

Daher erhalten wir für $x \in D(A)$ und $0 < h \leq 1$:

$$\begin{aligned}
\|T(t)x - e^{A(h)t}x\| &= \left\| \int_0^t \frac{d}{ds} \left(e^{A(h)(t-s)} T(s)x \right) \, ds \right\| \\
&\leq \int_0^t \left\| e^{A(h)(t-s)} \right\| \cdot \|T(s)\| \cdot \|Ax - A(h)x\| \, ds \\
&\leq tM^2 \exp\left(t(e^\omega + \omega - 1)\right) \|Ax - A(h)x\| \\
&\to 0 \quad (h \to 0+).
\end{aligned}$$

Da $D(A)$ dicht in X ist und außerdem $\|e^{A(h)t}\|$ und $\|T(t)\|$ gleichmäßig auf jedem Intervall $[0, T],\ T < \infty$, beschränkt sind, folgt der Satz für alle $x \in X$. $\square$

Der Satz 4.6 ist eher von theoretischem Interesse, da die Formel zur Berechnung von $T(t)$ die Kenntnis von $A(h)$ und damit von $T(h)$ zumindest für "kleine" $h > 0$ benötigt.

Beispiel 4.7 Seien wie in Beispiel 3.9 $X = C_b(\mathbb{R}),\ T(t)f(x) = f(x+t)$ für $f \in X$ und $A = d/dx$. Für diese Halbgruppe haben wir

$$(A(h)f)(x) = \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) =: (\Delta_h f)(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

und (Übungsaufgabe)

$$(A(h)^k f)(x) = \frac{1}{h^k} \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} \binom{k}{m} f(x + mh) =: (\Delta_h^k f)(x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Man kann zeigen, daß

$$\lim_{h \to 0+} (\Delta_h^k f)(x) = f^{(k)}(x),$$

wenn $f \in C^k(\mathbb{R})$. Zum Beispiel gilt für $k = 2$:

$$(\Delta_h^2 f)(x) = \frac{1}{h^2}(f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)) \to f''(x) \quad (h \to 0+).$$

Aus Satz 4.6 folgt dann für $f \in X$

$$f(x+t) = (T(t)f)(x) = \lim_{h \to 0+} (e^{A(h)t} f)(x) = \lim_{h \to 0+} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\Delta_h^k f)(x),$$

und der Grenzwert ist gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}$ und $t \in [0, T],\ T < \infty$. Diese Gleichung ist eine Verallgemeinerung der Taylorformel, da f nur als stetig vorausgesetzt wurde.

Satz 4.8 *Sei $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe und A der infinitesimale Generator von $T(t)$. Dann gilt*

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty} \Big(I - \frac{t}{n}A\Big)^{-n} x = \lim_{n\to\infty} \Big[\frac{n}{t} R\Big(\frac{n}{t}, A\Big)\Big]^n x, \quad x \in X,$$

und der Grenzwert ist gleichmäßig in $t \in [0, T]$, $T < \infty$.

Beweis: Sei $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$. Wir wissen (siehe den Beweis von Satz 4.4), daß $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ analytisch ist für $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ und daß die Beziehungen

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x \, ds, \quad x \in X,$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{d\lambda^n} R\Big(\frac{n}{t}, A\Big)x &= (-1)^n \int_0^\infty s^n e^{-ns/t} T(s)x \, ds \\ &= (-1)^n t^{n+1} \int_0^\infty (ve^{-v})^n T(tv)x \, dv \end{aligned}$$

(nach der Substitution $s = vt$) gelten. Wegen (4.7), also

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1},$$

folgt

$$\Big[\frac{n}{t} R\Big(\frac{n}{t}, A\Big)\Big]^{n+1} x = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^\infty (ve^{-v})^n T(tv)x \, dv.$$

Aus der Relation

$$\frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^\infty (ve^{-v})^n \, dv = 1 \tag{4.14}$$

(Übungsaufgabe) ergibt sich dann

$$\Big[\frac{n}{t} R\Big(\frac{n}{t}, A\Big)\Big]^{n+1} x - T(t)x = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^\infty (ve^{-v})^n (T(tv)x - T(t)x) \, dv.$$

Seien $\varepsilon > 0$ und $t_0 > 0$. Wähle dann $0 < a < 1 < b < \infty$, so daß

$$\forall t \in [0, t_0] : \ \forall v \in [a, b] : \ \|T(tv)x - T(t)x\| < \varepsilon. \tag{4.15}$$

Dies geht wegen der starken Stetigkeit von $t \mapsto T(t)x$. Wir zerlegen das Integral auf der rechten Seite in drei Integrale über $[0, a]$, $[a, b]$ und $[b, \infty)$ und schätzen diese Integrale einzeln ab. Für das erste Integral erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^a (ve^{-v})^n (T(tv)x - T(t)x)\, dv \right\| \\
\leq\ & \frac{n^{n+1}}{n!} (ae^{-a})^n \int_0^a \|T(tv)x - T(t)x\|\, dv \\
& (\text{denn } v \mapsto ve^{-v} \text{ ist monoton wachsend für } 0 \leq v \leq a < 1) \\
\leq\ & \frac{n^{n+1}}{n!} (ae^{-a})^n \cdot 2Me^{\omega t} \|x\| \\
\to\ & 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

gleichmäßig in $t \in [0, t_0]$, denn mit der Stirling-Ungleichung [6, Kapitel II.9]

$$n! > \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}$$

und der Abschätzung $1 - a + \ln a < 0$ für alle $a < 1$ folgt

$$\begin{aligned}
\frac{n^{n+1}}{n!} (ae^{-a})^n &< \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} e^n a^n e^{-an} \\
&= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} e^{n(1-a+\ln a)} \\
&\to 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

Wegen (4.14) und (4.15) ergibt sich

$$\left\| \frac{n^{n+1}}{n!} \int_a^b (ve^{-v})^n (T(tv)x - T(t)x)\, dv \right\| \leq \frac{n^{n+1}}{n!} \int_a^b (ve^{-v})^n\, dv \cdot \varepsilon \leq \varepsilon.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{n^{n+1}}{n!} \int_b^\infty (ve^{-v})^n (T(tv)x - T(t)x)\, dv \right\| \\
\leq\ & M \frac{n^{n+1}}{n!} \int_b^\infty v^n e^{-vn} \left(e^{\omega tv} + e^{\omega t} \right) \|x\|\, dv \\
\leq\ & 2M \frac{n^{n+1}}{n!} \int_b^\infty v^n e^{-v(n-\omega t)} \|x\|\, dv.
\end{aligned}$$

Für $n > \omega t$ konvergiert das uneigentliche Integral, und es gilt

$$\left\| \frac{n^{n+1}}{n!} \int_b^\infty (ve^{-v})^n (T(tv)x - T(t)x)\, dv \right\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

gleichmäßig in $t \in [0, t_0]$. Mithin ist

$$\forall \varepsilon > 0 : \limsup_{n \to \infty} \left\| \left[\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}, A \right) \right]^{n+1} x - T(t)x \right\| \leq \varepsilon$$

und daher
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t},A\right)\right]^{n+1}x = T(t)x.$$
Die Aussage aus Lemma 3.12
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t},A\right)x = x$$
gilt auch für allgemeine C_0-Halbgruppen. Daraus folgt
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t},A\right)\right]^{n}x = T(t)x$$
und damit die Behauptung des Satzes. □

Bemerkung 4.9 Sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$. Betrachte das Anfangswertproblem
$$\frac{du}{dt} = Au, \quad t>0, \qquad u(0)=x. \tag{4.16}$$
Um dieses Problem *numerisch* zu lösen, kann man den Differentialquotienten durch den Differenzenquotienten ersetzen und erhält
$$\frac{u_n\left(\frac{jt}{n}\right)-u_n\left(\frac{(j-1)t}{n}\right)}{\frac{t}{n}} = Au_n\left(\frac{jt}{n}\right), \qquad u_n(0)=x$$
und $u_0(t)=x,\ t\geq 0$. Dies ist gerade das implizite Euler-Verfahren. Eine Umformulierung ergibt
$$u_n\left(\frac{(j-1)t}{n}\right) = \left(I-\frac{t}{n}A\right)u_n\left(\frac{jt}{n}\right)$$
oder
$$\begin{aligned} u_n\left(\frac{jt}{n}\right) &= \left(I-\frac{t}{n}A\right)^{-1}u_n\left(\frac{(j-1)t}{n}\right) = \left(I-\frac{t}{n}A\right)^{-j}u_n(0) \\ &= \left(I-\frac{t}{n}A\right)^{-j}x \end{aligned}$$
für alle $j\in\mathbb{N}$. Für $j=n$ ist also
$$u_n(t) = \left(I-\frac{t}{n}A\right)^{-n}x$$
eine Approximation von der Lösung $u(t)$ von (4.16). Nach Satz 4.8 folgt
$$\lim_{n\to\infty}u_n(t) = T(t)x,$$
und wir wissen bereits (siehe Satz 3.4(3)), daß $u(t)=T(t)x$ eine Lösung von (4.16) ist, wenn $x\in D(A)$. Wenn $x\notin D(A)$, muß (4.16) keine Lösung besitzen (genauer: keine in t differenzierbare Lösung), doch nach Satz 4.8 konvergiert $u_n(t)$ dennoch gegen $T(t)x$. In diesem Fall kann man $T(t)x$ als verallgemeinerte Lösung von (4.16) ansehen.

5 Gruppen und duale Halbgruppen

Das zentrale Resultat dieses Kapitels ist der Satz von Stone, der eine Charakterisierung infinitesimaler Generatoren von C_0-Gruppen liefert. Auch in diesem Kapitel ist X stets ein Banachraum.

Definition 5.1 *Die Familie $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$, beschränkter linearer Operatoren auf X ist eine C_0*-Gruppe beschränkter Operatoren *genau dann, wenn gilt:*

(1) $T(0) = I$,

(2) $T(t+s) = T(t)T(s) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$,

(3) $T(t)x \to x$ *für* $t \to 0 \quad \forall x \in X$.

Der infinitesimale Generator A einer C_0-Gruppe $T(t)$ ist definiert wie bei einer Halbgruppe, nur der Grenzwert $t \to 0+$ ist durch $t \to 0$ zu ersetzen.

Bemerkung 5.2 Sei $T(t)$ eine C_0-Gruppe beschränkter Operatoren. Dann ist $T(t)$, $t \geq 0$, eine C_0-Halbgruppe mit infinitesimalem Generator A. Auch $S(t) = T(-t)$, $t \geq 0$, ist eine C_0-Halbgruppe mit infinitesimalem Generator $-A$. Die Operatoren A und $-A$ sind dann infinitesimale Generatoren der C_0-Halbgruppen $T_+(t)$ und $T_-(t)$ und A ist der infinitesimale Generator der C_0-Gruppe $T(t)$ (siehe den Beweis von Satz 5.3), definiert durch

$$T(t) = \begin{cases} T_+(t) & : \quad t \geq 0 \\ T_-(-t) & : \quad t \leq 0. \end{cases}$$

Satz 5.3 (Hille-Yosida für C_0-Gruppen) *Der Operator $A : D(A) \to X$ ist der infinitesimale Generator einer C_0-Gruppe $T(t)$ mit $\|T(t)\| \leq Me^{\omega|t|}$ genau dann, wenn*

(1) A ist abgeschlossen, $\overline{D(A)} = X$ und

(2) $\{\lambda \in \mathbb{R} : \ |\lambda| > \omega\} \subset \rho(A)$ und

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(|\lambda| - \omega)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ |\lambda| > \omega. \tag{5.1}$$

Beweis: Sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Gruppe $T(t)$. Nach Bemerkung 5.2 sind A und $-A$ infinitesimale Generatoren von C_0-Halbgruppen. Nach Satz 4.3 von Hille-Yosida ist A abgeschlossen und $\overline{D(A)} = X$. Außerdem gilt (5.1) für $\lambda > \omega$. Nun gilt (5.1) auch für $-A$, d.h.

$$\|R(\lambda, A)^n\| = \|(-1)^n R(-\lambda, -A)^n\| = \|R(-\lambda, -A)^n\| \leq \frac{M}{(-\lambda - \omega)^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $-\lambda > \omega$. Dies bedeutet $\{-\lambda > \omega\} \subset \rho(A)$, also $\{|\lambda| > \omega\} = \{\lambda > \omega\} \cup \{-\lambda > \omega\} \subset \rho(A)$, woraus (2) folgt.

Seien umgekehrt die Bedingungen (1) und (2) erfüllt. Nach Satz 4.3 von Hille-Yosida sind dann A bzw. $-A$ infinitesimale Generatoren von C_0-Halbgruppen $T_+(t)$ bzw. $T_-(t)$ mit $\|T_\pm(t)\| \leq Me^{\omega t}$. Nach Satz 4.5 gilt

$$T_\pm(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{\pm A_\lambda t}x,$$

wobei A_λ die Yosida-Approximation von A ist. Da die Operatoren $e^{A_\lambda t}$ und $e^{-A_\mu t}$ kommutieren, kommutieren also auch $T_+(t)$ und $T_-(t)$. Sei $W(t) = T_+(t)T_-(t)$, $t \geq 0$. Dann ist $W(t)$ eine C_0-Halbgruppe und für $x \in D(A) = D(-A)$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{W(t)x - x}{t} &= T_-(t)\frac{T_+(t)x - x}{t} + \frac{T_-(t)x - x}{t} \\ &\to T_-(0)Ax + (-A)x = 0 \qquad (t \to 0+). \end{aligned}$$

Folglich ist $W(t)x = x$ für alle $t \geq 0$ und $x \in D(A)$ (denn $A = 0$ ist der infinitesimale Generator von $T(t) = I$). Da $D(A)$ dicht ist in X und $W(t)$ beschränkt, gilt $W(t) = I$ oder $T_-(t) = T_+(t)^{-1}$. Definiere

$$T(t) = \begin{cases} T_+(t) & : \ t \geq 0 \\ T_-(-t) & : \ t \leq 0. \end{cases}$$

Dann ist $T(t)$ eine C_0-Gruppe mit $\|T(t)\| \leq Me^{\omega|t|}$: Für $t \geq 0$ und $s \leq 0$ mit $t + s \geq 0$ gilt etwa

$$\begin{aligned} T(t)T(s) &= T_+(t)T_+(-s)^{-1} = (T_+(t+s)T_+(-s))T_+(-s)^{-1} = T_+(t+s) \\ &= T(t+s) \end{aligned}$$

und für die anderen Kombinationen positiver und negativer s, t analog. $\square$

Lemma 5.4 *Sei $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe, so daß $T(t)^{-1}$ existiert und beschränkt ist. Dann ist $S(t) = T(t)^{-1}$ eine C_0-Halbgruppe mit infinitesimalem Generator $-A$ und*

$$U(t) = \begin{cases} T(t) & : \ t \geq 0 \\ T(-t)^{-1} & : \ t < 0. \end{cases}$$

ist eine C_0-Gruppe.

Beweis: Der Operator $S(t)$ erfüllt die Halbgruppeneigenschaft, da

$$S(t+s) = T(t+s)^{-1} = (T(t)T(s))^{-1} = T(s)^{-1}T(t)^{-1} = S(s)S(t) = S(t)S(s).$$

Um die starke Stetigkeit von $S(t)$ zu zeigen, sei $x \in X$ und $s > 1$. Da $T(s)^{-1}$ existiert, gibt es ein $y \in X$ mit $T(s)y = x$. Für $t < 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\|S(t)x - x\| &= \|T(t)^{-1}x - x\| \\
&= \|T(t)^{-1}T(t)T(s-t)y - T(s)y\| \\
&= \|T(s-t)y - T(s)y\| \\
&\to 0 \quad (t \to 0+).
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}(S(t)x - x) &= \frac{1}{t}T(t)^{-1}T(t)(T(t)^{-1}x - x) \\
&= T(t)^{-1}\frac{1}{t}(x - T(t)x) \\
&\to T(0)^{-1}(-A)x = -Ax \quad (t \to 0+)
\end{aligned}$$

ist $-A$ der infinitesimale Generator von $S(t)$. Die Gruppeneigenschaft von $U(t)$ folgt wie im Beweis von Satz 5.3, etwa für $t \geq 0$ und $s \leq 0$ mit $t + s \geq 0$:

$$U(t)U(s) = T(t)T(-s)^{-1} = T(t+s)T(-s)T(-s)^{-1} = U(t+s).$$

□

Satz 5.5 *Sei $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe und es gebe ein $t_0 > 0$, so daß $0 \in \rho(T(t_0))$. Dann gilt $0 \in \rho(T(t))$ für alle $t > 0$ und $T(t)$ kann zu einer C_0-Gruppe erweitert werden.*

Beweis: Wir müssen nur $0 \in \rho(T(t))$ für alle $t > 0$ zeigen, da daraus die Existenz und Beschränktheit von $T(t)^{-1}$ folgt und nach Lemma 5.4 eine Gruppe $U(t)$ definiert werden kann, die $T(t)$ erweitert. Dafür benutzen wir eine Folgerung aus dem Satz von der offenen Abbildung:

Satz von der beschränkten Inversen: Seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$ linear, beschränkt und bijektiv. Dann ist auch T^{-1} beschränkt, d.h. $0 \in \rho(T)$.

Ein Beweis dieses Resultates findet sich beispielsweise in [4, Corollaire II.6]. Nach diesem Satz genügt es zu zeigen, daß $T(t)$ bijektiv für alle $t > 0$ ist.

Wegen $0 \in \rho(T(t_0))$ ist $T(t_0)^n = T(nt_0)$ injektiv für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $T(t)x = 0$. Dann folgt für $nt_0 > t$

$$T(nt_0)x = T(nt_0 - t)T(t)x = 0,$$

also $x = 0$. Folglich ist $T(t)$ injektiv für alle $t > 0$. Aus der Halbgruppeneigenschaft folgt $R(T(t)) = X$ für $t \leq t_0$, denn zu $y \in X$ gibt es ein $z \in X$ mit $T(t_0)z = y$, also für $x := T(t_0 - t)z$:

$$T(t)x = T(t)T(t_0 - t)z = T(t_0)z = y.$$

Für $t > t_0$ sei $t = kt_0 + t_1$ mit $0 \leq t_1 < t_0$. Dann ist $T(t) = T(t_0)^k T(t_1)$ und daher – analog zu obiger Argumentation – $R(T(t)) = X$. Damit ist $T(t)$ bijektiv für $t > 0$, und der Satz ist bewiesen. $\square$

Beispiel 5.6 Seien wie in Beispiel 3.9 $X = C_b(\mathbb{R})$, $T(t)f = f(\cdot + t)$, $t \geq 0$, und $A = d/dx$. Dann ist

$$(T(t)^{-1}f)(x) = f(x-t), \quad f \in X,$$

die Inverse von $T(t)$ und $\|T(t)^{-1}\| \leq 1$. Also gilt $0 \in \rho(T(t))$ für alle $t \geq 0$ und nach Satz 5.5 kann $T(t)$ zu einer C_0-Gruppe erweitert werden. Diese lautet nach Lemma 5.4

$$U(t) = \left\{ \begin{array}{lcl} T(t) & : & t \geq 0 \\ T(-t)^{-1} & : & t \leq 0. \end{array} \right\} = T(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Wir erinnern, daß die *Adjungierte* $S' : D(S') \subset X' \to X'$ eines linearen Operators $S : D(S) \subset X \to X$ mit $\overline{D(S)} = X$ wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} D(S') &= \{x' \in X' : \exists y' \in X' : \forall x \in D(S) : \langle x', Sx\rangle = \langle y', x\rangle\}, \\ S'x' &= y' \quad \forall x' \in D(S'). \end{aligned}$$

Das Element y' ist eindeutig definiert; ansonsten ergäbe $\langle x', Sx\rangle = \langle y_i', x\rangle$, $i = 1, 2$, die Gleichung $\langle y_1' - y_2', x\rangle = 0$ für alle $x \in D(S)$, also für alle $x \in X$ (da $D(S)$ dicht in X), und dies impliziert $y_1' - y_2' = 0$. Der Operator S' erfüllt folgende einprägsame Gleichung:

$$\langle x', Sx\rangle = \langle S'x', x\rangle \quad \forall x \in D(S),\ x' \in D(S').$$

Lemma 5.7 *Sei $S : X \to X$ linear, beschränkt. Dann ist $S' : X' \to X'$ linear, beschränkt und $\|S\| = \|S'\|$.*

Beweis: Sei $x' \in X'$ und definiere $Fx = \langle x', Sx\rangle$ für $x \in X$. Dann ist F wegen

$$\|Fx\| \leq \|x'\| \cdot \|S\| \cdot \|x\|$$

beschränkt, d.h. $F \in X'$. Setzen wir $y' := F$, so können wir

$$\langle y', x\rangle = \langle x', Sx\rangle \quad \forall x \in X$$

schreiben, d.h. $D(S') = X'$. Außerdem ist

$$\begin{aligned} \|S'\| &= \sup_{\|x'\| \leq 1} \|S'x'\| = \sup_{\|x'\| \leq 1} \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle S'x', x\rangle| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|x'\| \leq 1} |\langle S'x', x\rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|x'\| \leq 1} |\langle x', Sx\rangle| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Sx\| = \|S\|. \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung 5.8 Es gilt sogar die folgende Verschärfung von Lemma 5.7. Sei $S : D(S) \to X$ ein abgeschlossener Operator mit $\overline{D(S)} = X$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) $D(S) = X$,

(2) S ist beschränkt,

(3) $D(S') = X'$,

(4) S' ist beschränkt.

Zum Beweis siehe [4, Théorème II.21, Seite 31].

Der Definitionsbereich $D(S')$ von S' muß *nicht* dicht in X' liegen. Es gilt allerdings folgendes Resultat in *reflexiven* Banachräumen [4, Théorème III.21, Seite 46]: Sei $S : D(S) \to X$ abgeschlossen und $\overline{D(S)} = X$. Dann gilt $\overline{D(S')} = X'$. Wir erinnern, daß ein Banachraum X *reflexiv* genau dann ist, wenn X und der Bidualraum $X'' = (X')'$ miteinander identifiziert werden können (siehe Definition 1.15).

Lemma 5.9 *Sei* $A : D(A) \to X$ *linear mit* $\overline{D(A)} = X$ *und sei* $\lambda \in \rho(A)$. *Dann gilt* $\lambda \in \rho(A')$ *und* $R(\lambda, A') = R(\lambda, A)'$.

Beweis: Aus der Definition der Adjungierten folgt, daß $(\lambda I - A)' = \lambda I' - A'$, wobei I' die Identität in X' ist. Da nach Definition $R(\lambda, A)$ ein beschränkter Operator ist, ist $R(\lambda, A)'$ wegen Lemma 5.7 beschränkt auf X'. Wir müssen also zeigen, daß $R(\lambda, A')$ existiert und daß $R(\lambda, A') = R(\lambda, A)'$ gilt. Wir zeigen zuerst, daß $(\lambda I - A)'$ injektiv ist. Sei $(\lambda I' - A')x' = 0$. Dann gilt für alle $x \in D(A)$:

$$0 = \langle (\lambda I' - A')x', x\rangle = \langle x', (\lambda I - A)x\rangle.$$

Wegen $\lambda \in \rho(A)$ ist aber $R(\lambda I - A) = X$, also folgt $0 = \langle x', y\rangle$ für alle $y \in X$, d.h. $x' = 0$. Mithin ist $\lambda I' - A'$ injektiv.

Seien nun $x \in X$ und $x' \in D(A')$. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle x', x\rangle &= \langle x', (\lambda I - A)R(\lambda, A)x\rangle \\ &= \langle (\lambda I' - A')x', R(\lambda, A)x\rangle \\ &= \langle R(\lambda, A)'(\lambda I' - A')x', x\rangle \end{aligned}$$

und daher

$$R(\lambda, A)'(\lambda I' - A')x' = x' \quad \forall x' \in D(A').$$

Sind dagegen $x' \in X'$ und $x \in D(A)$, so folgt

$$\begin{aligned}
\langle x', x\rangle &= \langle x', R(\lambda, A)(\lambda I - A)x\rangle \\
&= \langle R(\lambda, A)'x', (\lambda I - A)x\rangle \\
&= \langle (\lambda I' - A')R(\lambda, A)'x', x\rangle,
\end{aligned}$$

also

$$(\lambda I' - A')R(\lambda, A)'x' = x' \quad \forall x' \in X'.$$

Aus diesen Beziehungen folgt, daß $\lambda I' - A'$ surjektiv ist und daß $\lambda \in \rho(A')$ und $R(\lambda, A') = R(\lambda, A)'$ gelten. $\square$

Sei $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe in X. Sei $T(t)'$ die Adjungierte von $T(t)$. Nach Lemma 5.7 ist $T(t)'$ beschränkt in X. Außerdem erfüllt $T(t)'$ die Halbgruppeneigenschaften:

$$\langle T(t+s)'x', x\rangle = \langle x', T(t+s)x\rangle = \langle x', T(t)T(s)x\rangle = \langle T(s)'T(t)'x', x\rangle$$

für alle $x' \in X$, $x \in X$. Wir nennen $T(t)'$ die *adjungierte Halbgruppe.* Diese muß keine C_0-Halbgruppe sein. Ist der Banachraum reflexiv, gilt dies aber:

Satz 5.10 *Seien X ein reflexiver Banachraum und $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe mit infinitesimalem Generator A. Dann ist $T(t)'$ eine C_0-Halbgruppe mit infinitesimalem Generator A'.*

Beweis: siehe [10, Corollary 10.6, Chapter 1].

In Hilberträumen gibt es eine elegante Charakterisierung infinitesimaler Generatoren von C_0-Gruppen. Zuerst eine Definition.

Definition 5.11 *Seien H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ und $A : D(A) \to H$ ein Operator mit $\overline{D(A)} = H$.*

(1) A heißt symmetrisch *genau dann, wenn $A \subset A'$, d.h. $D(A) \subset D(A')$ und*

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \forall x, y \in D(A).$$

(2) A heißt selbstadjungiert *genau dann, wenn $A = A'$, d.h. $D(A) = D(A')$ und*

$$Ax = A'x \quad \forall x \in D(A).$$

(3) Ein beschränkter Operator $U : H \to H$ heißt unitär *genau dann, wenn $U' = U^{-1}$.*

Bemerkung 5.12 Da $D(A) \subset H$ und $D(A') \subset H'$, machen die Aussagen $D(A) \subset D(A')$ und $D(A) = D(A')$ eigentlich keinen Sinn. Wie sind sie zu verstehen? Nach dem Satz von Riesz (Satz 1.19) können wir den Hilbertraum H und seinen Dualraum H' miteinander identifizieren. Im Sinne der Identifikation können wir für $x' \in H' = H$ auch schreiben:

$$\langle x', z \rangle = (x', z) \quad \forall z \in H.$$

Der folgende Satz gibt ein Kriterium, unter dem symmetrische Operatoren sogar selbstadjungiert sind.

Satz 5.13 *Seien H ein Hilbertraum und $A : D(A) \to H$ ein linearer Operator mit $\overline{D(A)} = H$. Es gebe ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $R(\lambda I + A) = R(\overline{\lambda} I + A) = H$. Dann gilt:*

$$A \text{ symmetrisch} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ selbstadjungiert.}$$

Beweis: Selbstadjungierte Operatoren sind immer symmetrisch. Sei daher umgekehrt A symmetrisch. Dann gilt nach Definition $D(A) \subset D(A')$. Wir zeigen $D(A') \subset D(A)$, woraus $D(A) = D(A')$ folgt, d.h., A ist selbstadjungiert.

Zuerst beweisen wir, daß die Operatoren $\lambda I + A$ und $\overline{\lambda} I + A$ invertierbar sind. Sei $x \in D(A)$ mit $(\lambda I + A)x = 0$. Dann gilt für alle $y \in D(A)$ wegen der Symmetrie von A:

$$0 = ((\lambda I + A)x, y) = (x, (\overline{\lambda} I + A)y).$$

Weil $R(\overline{\lambda} I + A) = H$, gilt $(x, z) = 0$ für alle $z \in H$. Es folgt $x = 0$ und die Injektivität von $\lambda I + A$. Da nach Voraussetzung $R(\lambda I + A) = H$, ist $\lambda I + A$ bijektiv. Daraus folgt, daß auch $\overline{\lambda} I + A$ bijektiv ist. Setze $R = (\lambda I + A)^{-1} : H \to D(A)$ und $\overline{R} = (\overline{\lambda} I + A)^{-1} : H \to D(A)$.

Wir behaupten nun, daß

$$(Rx, y) = (x, \overline{R}, y) \qquad \forall x, y \in H. \tag{5.2}$$

Die Symmetrie von A impliziert für alle $x, y \in H$:

$$(Rx, A\overline{R}y) = (ARx, \overline{R}y),$$

wobei wir Rx, $\overline{R}y \in D(A)$ verwendet haben. Addieren wir diese Gleichung und

$$(Rx, \overline{\lambda}\,\overline{R}y) = (\lambda Rx, \overline{R}y),$$

so erhalten wir

$$(Rx, y) = (Rx, (\overline{\lambda} I + A)\overline{R}y) = ((\lambda I + A)Rx, \overline{R}y) = (x, \overline{R}y),$$

also die Behauptung.

Sei $x \in D(A')$. Wir zeigen $x \in D(A)$, woraus die Selbstadjungiertheit von A folgt. Setze $y = (\lambda I + A')x$. Dann gilt für alle $z \in H$ nach (5.2) und nach der Definition der Adjungierten:

$$(Ry, z) = (y, \overline{R}z) = (x, (\overline{\lambda}I + A)\overline{R}z) = (x, z).$$

Dies impliziert $x = Ry \in D(A)$. □

Ein einfaches Kriterium für unitäre Operatoren gibt das folgende Resultat.

Satz 5.14 *Seien H ein Hilbertraum und $U : H \to H$ beschränkt. Dann gilt:*

$$U \textit{ unitär} \quad \Leftrightarrow \quad R(U) = H \textit{ und } U \textit{ ist Isometrie.}$$

Beweis: Sei U unitär. Wegen $U' = U^{-1}$ gilt natürlich $R(U) = H$ und wegen

$$\|Ux\|^2 = (Ux, Ux) = (x, U^{-1}Ux) = (x, x) = \|x\|^2 \quad \forall x \in H$$

auch $\|U\| = 1$. Es gelte umgekehrt $R(U) = H$ und $\|U\| = 1$. Dann folgt

$$(Ux, Ux) = \|Ux\|^2 = \|x\|^2 = (x, x) \quad \forall x \in H.$$

Der Operator ist also injektiv und U^{-1} existiert in H. Wir zeigen nun:

$$(Ux, Uy) = (x, y) \quad \forall x, y \in H. \tag{5.3}$$

Aus $R(U) = H$ folgt dann

$$(Ux, z) = (x, U^{-1}z) \quad \forall x, z \in H,$$

d.h., U ist unitär. Seien also $x, y \in H$ und setze $w := \frac{1}{2}(x + y)$, $z := \frac{1}{2}(x - y)$. Dann ist $x = w + z$ und $y = w - z$, und es folgt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(Ux, Uy) &= \operatorname{Re}(U(w+z), U(w-z)) \\
&= \operatorname{Re}\left[(Uw, Uw) - (Uz, Uz) + 2i \operatorname{Im}(Uz, Uw)\right] \\
&= (Uw, Uw) - (Uz, Uz) \\
&= (w, w) - (z, z) \\
&= \operatorname{Re}\left[(w, w) - (z, z) + 2i(z, w)\right] \\
&= \operatorname{Re}(w + z, w - z) \\
&= \operatorname{Re}(x, y).
\end{aligned}$$

Ist andererseits $w := \frac{1}{2}(x - iy)$, $z := \frac{1}{2}(-ix + y)$, so folgt $x = w + iz$ und $y = iw + z$ und

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(Ux, Uy) &= \operatorname{Im}\left[-i(Uw, Uw) + i(Uz, Uz) + 2\operatorname{Re}(Uw, Uz)\right] \\
&= \operatorname{Im}\left[-i(w, w) + i(z, z) + 2\operatorname{Re}(w, z)\right] \\
&= \operatorname{Im}(w + iz, iw + z) \\
&= \operatorname{Im}(x, y).
\end{aligned}$$

Dies beweist (5.3). □

Beispiel 5.15 Sei $H = L^2(\mathbb{R}^d)$ $(d \geq 1)$ mit dem Skalarprodukr

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^d} u\overline{v}\, dx, \quad u, v \in H,$$

gegeben. Definiere den Operator $A : D(A) \to H$ durch $D(A) = H^2(\mathbb{R}^d)$ und $A = \Delta$. Wegen $H^2(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ folgt einerseits $\overline{H^2(\mathbb{R}^d)} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ (in der Norm von $L^2(\mathbb{R}^d)$); andererseits ist $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset H^2(\mathbb{R}^d)$, also

$$L^2(\mathbb{R}^d) = \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^d)} \subset \overline{H^2(\mathbb{R}^d)},$$

d.h., $D(A)$ ist dicht in H. Mit partieller Integration folgt für $u, v \in D(A)$

$$\begin{aligned}(Au, v) &= \int_{\mathbb{R}^d} \Delta u\overline{v}\, dx = -\int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot \nabla \overline{v}\, dx \\ &= \int_{R^d} u\Delta\overline{v}\, dx = (u, Av).\end{aligned}$$

Mithin ist A symmetrisch. Man kann zeigen (siehe Intermezzo 3, Lemma 5.18), daß es zu $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ genau eine Lösung $u \in H^2(\mathbb{R}^d)$ von

$$\Delta u - u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^d$$

gibt. Dies impliziert $R(-I + A) = H$. Nach Satz 5.13 ist A selbstadjungiert.

Beispiel 5.16 Seien $H = \mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ und $U \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Wegen

$$(Ux, y) = (Ux)^T y = x^T U^T y = (x, U^T y) \quad \forall x, y \in H$$

sind die unitären Matrizen gerade durch $U^T = U^{-1}$ charakterisiert.

Satz 5.17 (Stone) *Sei H ein Hilbertraum. Ein linearer Operator $A : D(A) \to H$ ist genau dann der infinitesimale Generator einer C_0-Gruppe unitärer Operatoren, wenn iA selbstadjungiert ist.*

Beweis: Sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Gruppe von unitären Operatoren $U(t)$. Dann ist $D(A)$ dicht in H (nach Korollar 3.5). Für $x \in D(A)$ gilt

$$\begin{aligned}-Ax &= -\lim_{t\to 0+} \frac{1}{-t}(U(-t)x - x) \\ &= \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}(U(t)^{-1}x - x) \\ &\quad \text{(denn } I = U(t-t) = U(t)U(-t) = U(-t)U(t) \Rightarrow U(-t) = U(t)^{-1}) \\ &= \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}(U(t)'x - x) \qquad \text{(da } U(t) \text{ unitär)} \\ &= A'x \qquad \text{(nach Satz 5.10).}\end{aligned}$$

Daraus folgt $A = -A'$ und $iA = -iA' = \bar{i}A' = (iA)'$ in $D(A)$, d.h., iA ist selbstadjungiert.

Sei umgekehrt iA selbstadjungiert. Nach Definition ist $D(A)$ dicht in H und $A = -A'$. Für alle $x \in D(A)$ gilt

$$(Ax, x) = (x, A'x) = -(x, Ax) = -\overline{(Ax, x)}$$

und damit $\mathrm{Re}(Ax, x) = 0$, d.h., A ist dissipativ (siehe Definition 3.22). Wegen $A' = -A$ gilt auch $\mathrm{Re}(A'x, x) = 0$ für alle $x \in D(A') = D(A)$, d.h., auch A' ist dissipativ. Adjungierte Operatoren sind immer abgeschlossen (Übungsaufgabe), d.h., A und A' sind abgeschlossen. Man kann zeigen, daß $A = A'' = (A')'$ (siehe etwa [4, Théorème III.21, Seite 46]). Also sind die Voraussetzungen von Korollar 3.28 sowohl für A als auch für A' erfüllt, d.h., A bzw. A' sind die infinitesimalen Generatoren von C_0-Halbgruppen von Kontraktionen $U_+(t)$ bzw. $U_-(t)$. Definiere nun

$$U(t) = \begin{cases} U_+(t) & : \quad t \geq 0 \\ u_-(-t) & : \quad t \leq 0. \end{cases}$$

Nach Bemerkung 5.2 ist $U(t)$ eine C_0-Gruppe. Für $t > 0$ gilt wegen

$$I = U(t-t) = U(t)U(-t) = U(-t)U(t),$$

daß $U(t)^{-1} = U(-t)$, also insbesondere $R(U(t)) = H$. Da $U_\pm(t)$ C_0-Halbgruppen von Kontraktionen sind, folgt

$$\|x\| = \|U(t-t)x\| \leq \|U(-t)\| \cdot \|U(t)x\| \leq \|U(t)x\| \leq \|x\|,$$

also $\|U(t)x\| = \|x\|$ für $x \in H$ und $t \in \mathbb{R}$, d.h., $U(t)$ ist eine Isometrie. Nach Satz 5.14 ist dann $U(t)$ eine C_0-Gruppe unitärer Operatoren. $\square$

Intermezzo 3: Schrödingergleichung

Wir wollen die Schrödingergleichung in $H^2(\mathbb{R}^d)$ lösen. Dafür geben wir zuerst eine Charakterisierung der Sobolevräume $H^k(\mathbb{R}^d)$ mittels der Fouriertransformation an. Für $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ist die *Fouriertransformierte* $\widehat{f}$ definiert durch

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Dann folgt $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und die Parseval-Gleichung (Übungsaufgabe)

$$\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}. \tag{5.4}$$

Die Fourier-Transformation ist also eine Abbildung $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$, $f \mapsto \widehat{f}$ [13, Seite 1059, (74c)]. Sie hat die wichtige Eigenschaft, daß partielle Ableitungen in Multiplikationen mit ξ transformiert werden:

$$\begin{aligned}\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_k}}(\xi) &= (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} \frac{\partial u}{\partial x_k}(x)\, dx \\ &= -(2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(e^{-ix\cdot\xi}\right) u(x)\, dx \\ &= i\xi_k (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} u(x)\, dx \\ &= i\xi_k \widehat{u}(\xi).\end{aligned}$$

Insbesondere gilt $|\widehat{D^\alpha u}| = |\xi^\alpha| |\widehat{u}|$. Dies motiviert die folgende Definition:

$$H^k(\mathbb{R}^d) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) :\ (1+|\xi|^2)^{k/2}\widehat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)\}, \quad k \geq 0,$$

mit der Norm

$$\|u\|_{H^k} = (2\pi)^{-d/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^k |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi \right)^{1/2}.$$

Man kann zeigen, daß diese Sobolev-Räume mit den Sobolev-Räumen aus dem Intermezzo 1 für $\Omega = \mathbb{R}^d$ übereinstimmen [13, Seite 1059, (74d)].

Die Inverse der Fouriertransformation lautet

$$\check{f}(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} f(\xi)\, d\xi$$

und $(\widehat{f})\check{} = (\check{f})\widehat{} = f$ für $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Mit Hilfe der Fouriertransformation können wir gewisse partielle Differentialgleichungen in $H^k(\mathbb{R}^d)$ lösen und damit ein in Beispiel 5.15 benutztes Resultat nachträglich beweisen.

Lemma 5.18 *Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\lambda \notin [0,\infty)$ und sei $f \in H^k(\mathbb{R}^d)$, $k \geq 0$. Dann existiert genau eine Lösung $u \in H^{k+2}(\mathbb{R}^d)$ von*

$$\lambda u + \Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^d. \tag{5.5}$$

Beweis: Die Beweisidee ist, die Gleichung (5.5) im Fourierraum zu betrachten. Wegen $\widehat{\Delta u} = (i|\xi|)^2 \widehat{u} = -|\xi|^2 \widehat{u}$ folgt

$$\lambda \widehat{u} - |\xi|^2 \widehat{u} = \widehat{f},$$

also

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{\lambda - |\xi|^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

(Beachte, daß $\lambda \notin [0,\infty)$.) Wir erwarten also, daß die Funktion

$$u(x) = \Big(\frac{\widehat{f}(\xi)}{\lambda - |\xi|^2}\Big)\check{}\,(x)$$

eine Lösung von (5.5) ist.

Definiere $\bar{u}(\xi) := (\lambda - |\xi|^2)^{-1}\widehat{f}(\xi)$. Wegen $f \in H^k(\mathbb{R}^d)$ ist nach Definition $(1+|\xi|^2)^{k/2}\widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und daher (beachte $|\lambda - |\xi|^2| \neq 0$)

$$(1+|\xi|^2)^{(k+2)/2}\bar{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Definiere nun

$$u(x) := (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}\bar{u}(\xi)\,d\xi.$$

Wegen $\widehat{u} = \bar{u}$ folgt $u \in H^{k+2}(\mathbb{R}^d)$. Außerdem ist u nach Konstruktion eine Lösung von (5.5).

Die Eindeutigkeit der Lösung von (5.5) folgt ebenfalls aus der Konstruktion von u. Ist nämlich v eine weitere Lösung von (5.5), so gilt nach Fouriertransformation von (5.5): $\widehat{v}(\xi) = (\lambda - |\xi|^2)^{-1}\widehat{f}(\xi)$, also $\widehat{v} = \widehat{u}$ und damit $u = v$ in $\mathbb{R}^d$.
□

Wir wollen nun die Schrödingergleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^d,\ t \in \mathbb{R}, \tag{5.6}$$

$$u(\cdot,0) = u_0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{5.7}$$

lösen. Dazu wählen wir den Hilbertraum $H = L^2(\mathbb{R}^d)$ und definieren den Operator $A : D(A) \to H$ durch $D(A) = H^2(\mathbb{R}^d)$ und $A = i\Delta$.

Lemma 5.19 *Der Operator $iA = -\Delta$ ist selbstadjungiert in H.*

Das Lemma wurde bereits in Beispiel 5.15 bewiesen.

Satz 5.20 *Sei $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^d)$. Dann besitzt (5.6)-(5.7) eine Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^d)) \cap C^0(\mathbb{R}; H^2(\mathbb{R}^d))$ mit*

$$\|u(t)\| = \|u_0\| \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Nach dem Satz 5.17 von Stone ist A der infinitesimale Generator einer C_0-Gruppe unitärer Operatoren $U(t)$. Nach Satz 3.4(3) ist also $u(t) = U(t)u_0$ eine Lösung von (5.6)-(5.7). Da $U(t)$ nach Satz 5.14 isometrisch ist, folgt $\|u(t)\| = \|u_0\|$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

□

Bemerkung 5.21 Im Intermezzo 2 haben wir bemerkt, daß die Wärmeleitungsgleichung regularisiert, d.h., wenn $u_0 \in L^2(\Omega)$, dann ist $u(t) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ für $t > 0$. Dies gilt *nicht* für die Schrödingergleichung. Ist $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, so kann man zeigen, daß $u \in C^0(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^d))$ [5, Chapter 2.5]. Die Schrödingergleichung regularisiert nur schwach. Es gilt [5, Theorem 3.2.5]: Sei $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und seien $r, q \geq 2$ gegeben durch

$$\begin{aligned} &2 \leq r < \frac{2d}{d-2} \quad (r < \infty, \text{ wenn } d = 2, \text{ und } r \leq \infty, \text{ wenn } d = 1), \\ &q = \frac{4r}{d(r-2)} \in (2, \infty]. \end{aligned}$$

Dann gilt $u \in L^q(\mathbb{R}; L^r(\mathbb{R}^d))$. Insbesondere folgt, wenn $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, daß $u(t) \in L^r(\mathbb{R}^d)$ für alle $r < 2d/(d-2)$ und für *fast alle* $t \in \mathbb{R}$. Die Einschränkung "für fast alle $t \in \mathbb{R}$" kann im allgemeinen *nicht* durch "für alle $t \neq 0$" ersetzt werden.

Intermezzo 4: Wellengleichung

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \qquad x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0, \tag{5.8}$$

$$u(\cdot, 0) = w_1, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) = w_2 \qquad \text{in } \mathbb{R}^d, \tag{5.9}$$

mit $w_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. Wir schreiben dieses Problem als eine Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0, \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}(\cdot, 0) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \text{ in } \mathbb{R}^d.$$

Definiere den Hilbertraum $H = H^1(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d)$ mit Skalarprodukt

$$(U, V) = ((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + u_1 v_1 + u_2 v_2)\ dx. \tag{5.10}$$

Der Operator $A : D(A) \to H$ sei definiert durch $D(A) = H^2(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$ und

$$AU = A(u_1, u_2) = (u_2, \Delta u_1), \quad U \in D(A).$$

Wir behaupten, daß A der infinitesimale Generator einer C_0-Gruppe ist, und möchten dazu Satz 5.3 anwenden. Dazu müssen wir die Resolvente von A abschätzen.

Lemma 5.22 *Seien $F = (f_1, f_2) \in H$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| > 1$. Dann existiert genau eine Lösung $U \in D(A)$ von*

$$\lambda U - AU = F$$

und

$$\|U\| \leq \frac{\|F\|}{|\lambda| - 1}.$$

Die Norm $\|\cdot\|$ in H ist hierbei wie gewohnt die durch das Skalarprodukt (5.10) induzierte.

Beweis: Sei zuerst $(f_1, f_2) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Nach Lemma 5.18 existiert genau ein Paar $(w_1, w_2) \in H^k(\mathbb{R}^d) \times H^k(\mathbb{R}^d)$ für alle $k \geq 0$, so daß

$$\lambda^2 w_i - \Delta w_i = f_i, \quad i = 1, 2.$$

Setze $u_1 = \lambda w_1 + w_2$, $u_2 = \lambda w_2 + \Delta w_1$. Dann erfüllt $U = (u_1, u_2) \in H^k(\mathbb{R}^d) \times H^{k-2}(\mathbb{R}^d)$ für alle $k \geq 2$ die Gleichung

$$\lambda U - AU = \begin{pmatrix} \lambda(\lambda w_1 + w_2) - (\lambda w_2 + \Delta w_1) \\ \lambda(\lambda w_2 + \Delta w_1) - \Delta(\lambda w_1 + w_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 w_1 - \Delta w_1 \\ \lambda^2 w_2 - \Delta w_2 \end{pmatrix} = F.$$

Außerdem folgt mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}
\|F\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} (|\nabla f_1|^2 + f_1^2 + f_2^2)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} [(f_1 - \Delta f_1) f_1 + f_2^2]\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} [(\lambda^2 w_1 - \Delta w_1 - \lambda^2 \Delta w_1 + \Delta^2 w_1)(\lambda^2 w_1 - \Delta w_1) \\
&\quad + (\lambda^2 w_2 - \Delta w_2)^2]\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} [(\lambda u_1 - u_2 - \lambda \Delta u_1 + \Delta u_2)(\lambda u_1 - u_2) + (\lambda u_2 - \Delta u_1)^2]\, dx \\
&\quad \text{(wegen } \lambda^2 w_1 - \Delta w_1 = \lambda u_1 - u_2,\ \lambda^2 w_2 - \Delta w_2 = \lambda u_2 - \Delta u_1) \\
&= \int_{R^d} [(\lambda^2 u_1^2 - 2\lambda u_1 u_2 + \lambda^2 |\nabla u_1|^2 - 2\lambda \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + u_2^2 + |\nabla u_2|^2) \\
&\quad + (\lambda^2 u_2^2 + |\Delta u_1|^2 + 2\lambda \nabla u_1 \cdot \nabla u_2)]\, dx \\
&\geq \lambda^2 \|(u_1, u_2)\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^d} (u_1^2 + u_2^2)\, dx \\
&\quad \text{(mit Youngscher Ungleichung)} \\
&\geq (\lambda^2 - \lambda)\|U\|^2.
\end{aligned}$$

Aus $|\lambda| > 1$ folgt

$$\lambda^2 - \lambda \geq \lambda^2 - \lambda - |\lambda| + 1 \geq \lambda^2 - 2|\lambda| + 1 = (|\lambda| - 1)^2$$

und daher mit

$$\|U\|^2 \leq \frac{\|F\|^2}{(\lambda^2 - 1)} \leq \frac{\|F\|^2}{(|\lambda| - 1)^2}$$

die Behauptung des Lemmas für $F \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Sei nun $F = (f_1, f_2) \in H$. Dann existieren $F_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $F_n \to F$ in H $(n \to \infty)$. Wegen

$$\lambda(U_n - U_m) - A(U_n - U_m) = F_n - F_m \tag{5.11}$$

folgt

$$\|U_n - U_m\| \leq \frac{\|F_n - F_m\|}{|\lambda| - 1} \to 0 \quad (n, m \to \infty),$$

d.h., (U_n) ist eine Cauchy-Folge in H, also existiert ein $U \in H$ mit $U_n \to U$ in H. Aus (5.11) folgt, daß auch (AU_n) eine Cauchy-Folge und folglich in H konvergent ist. Man kann zeigen, daß der Operator A abgeschlossen ist. Daher folgt $AU_n \to AU$ $(n \to \infty)$, also insbesondere $U \in D(A)$. Aus

$$\lambda U_n - AU_n = F_n$$

folgt im Grenzwert $n \to \infty$

$$\lambda U - AU = F$$

und

$$\|U\| \leq \frac{\|F\|}{|\lambda| - 1}.$$

Die Eindeutigkeit der Lösung U folgt aus dieser Ungleichung. Sind nämlich U_1 und U_2 Lösungen, so erfüllt die Differenz die Gleichung $\lambda(U_1 - U_2) - A(U_1 - U_2) = 0$ und daher die Abschätzung $\|U_1 - U_2\| \leq \|0\|/(|\lambda| - 1) = 0$. □

Satz 5.23 *Seien $w_1 \in H^2(\mathbb{R}^d)$ und $w_2 \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Dann existiert genau eine Lösung u von (5.8)-(5.9) mit*

$$u \in \bigcap_{k=0}^{2} C^k(\mathbb{R}; H^{2-k}(\mathbb{R}^d))$$

und

$$\|u(t)\|_{H^1}^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right\|_{L^2}^2 \leq e^{2|t|} \left(\|w_1\|_{H^1}^2 + \|w_2\|_{L^2}^2\right), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.12}$$

Beweis: Der Raum $D(A) = H^2(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$ ist dicht in $H = H^1(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d)$ (dies folgt aus

$$\begin{aligned} H^1(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d) &= \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^d)} \\ &\subset \overline{H^2(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\subset H^1(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d), \end{aligned}$$

wobei der Abschluß in der Norm von H zu nehmen ist). Nach Lemma 5.22 gilt

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{|\lambda| - 1} \quad \forall |\lambda| > 1,$$

also $\|R(\lambda, A)^n\| \leq (|\lambda| - 1)^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher können wir Satz 5.3 von Hille-Yosida anwenden. Mithin ist A der infinitesimale Generator einer C_0-Gruppe $T(t)$ in H mit $\|T(t)\| \leq e^{|t|}$. Setzen wir

$$(u_1(t), u_2(t)) = T(t)(w_1, w_2),$$

so gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ \Delta u_1 \end{pmatrix},$$

also

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_1 = \frac{\partial}{\partial t} u_2 = \Delta u_1,$$

und $u := u_1$ ist die gewünschte Lösung. Die Regularität von u folgt aus

$$T(t)(w_1, w_2) \in D(A), \quad \frac{\partial}{\partial t}(u_1, u_2) = A(u_1, u_2) \in H,$$

und die Abschätzung (5.12) folgt aus

$$\|(u_1(t), u_2(t))\|^2 = \|T(t)(w_1, w_2)\|^2 \leq e^{2|t|} \|(w_1, w_2)\|^2.$$

□

Bemerkung 5.24 Die Abschätzung (5.12) kann verbessert werden. Multipliziere dafür (5.8) mit $\partial u / \partial t$ und integriere über $\mathbb{R}^d \times (0, t)$. Wegen

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} \, dx \, dt &= \int_0^t \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx \, dt \\ &= \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \|w_2\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \int_{R^d} \Delta u \frac{\partial u}{\partial t}\, dx\, dt &= -\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla u\, dx\, dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2\, dx\, dt \\
&= -\frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla w_1\|_{L^2}^2
\end{aligned}
$$

folgt

$$
\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_{L^2}^2 = \|\nabla w_1\|_{L^2}^2 + \|w_2\|_{L^2}^2.
$$

Bemerkung 5.25 Die Wellengleichung ist *nicht* regularisierend. Dies kann man im Falle $d = 1$ leicht einsehen. Das Problem (5.8)-(5.9) besitzt die explizite Lösung

$$
u(x,t) = \frac{1}{2}(w_1(x+t) + w_1(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} w_2(s)\, ds, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.
$$

Ist also etwa $w_2 = 0 \in C^\infty(\mathbb{R})$, so kann $u(x,t)$ nicht regulärer sein als w_1. Wenn w_1 singulär etwa bei $x = x_0$ ist, so ist $u(x,t)$ singulär entlang der Geraden $x + t = x_0$ und $x - t = x_0$, d.h., die Singularität wird entlang dieser Geraden (die man hier Charakteristiken nennt) ausgebreitet (siehe Abbildung 5.1).

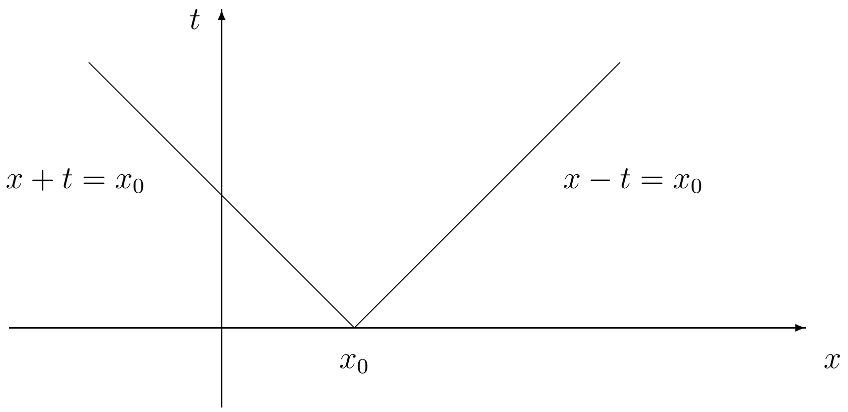

Abbildung 5.1: Ausbreitung einer Singularität bei der Wellengleichung.

6 Differenzierbare und analytische Halbgruppe

In diesem Kapitel werden wir Kriterien für lineare Operatoren A angeben, unter denen die entsprechende Halbgruppe (unendlich oft) differenzierbar oder sogar analytisch ist. Im folgenden sei X stets ein Banachraum.

Definition 6.1 *Sei $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe. Sie heißt* differenzierbar für $t > t_0$ *genau dann, wenn für jedes $x \in X$ die Abbildung $t \mapsto T(t)x$ für $t > t_0$ differenzierbar ist. Die Halbgruppe $T(t)$ heißt* differenzierbar *genau dann, wenn $T(t)$ differenzierbar für $t > 0$ ist.*

Bemerkung 6.2 Sei $F : X \to X$ eine Abbildung. Wir nennen F (Fréchet-) differenzierbar an $u \in X$, wenn eine offene Menge $U \subset X$ mit $u \in U$ und eine lineare stetige Abbbildung $B : X \to X$ existieren, so daß

$$F(u+h) = F(u) + Bh + R(u,h)$$

für alle $h \in X$ mit $u + h \in U$, und es gilt

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|R(u,h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Bemerkung 6.3 Sei $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe mit infinitesimalem Generator A. Sei $x \in X$ und sei $t \mapsto T(t)x$ an $t = 0$ differenzierbar. Dann ist $T'(0)x = AT(0)x = Ax$, d.h. $x \in D(A)$ und $D(A) = X$. Da A außerdem nach Korollar 3.5 abgeschlossen ist, folgt für $x_n \to x$ in X auch $Ax_n \to Ax$ für alle $x \in X$, d.h., A ist beschränkt. Nun sind die in den Beispielen betrachteten Operatoren A meist unbeschränkt, d.h., wir erwarten, daß $t \mapsto T(t)x$ für $x \in X$ im allgemeinen nur für $t > 0$ differenzierbar ist.

Lemma 6.4 *Sei $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe mit infinitesimalem Generator A und sei $T(t)$ differenzierbar für $t > t_0$. Seien ferner $n \in \mathbb{N}$ und $t > nt_0$. Dann gilt: $T(t) : X \to D(A^n)$ ist n-mal (Fréchet-) differenzierbar, $T^{(n)}(t) = A^n T(t) : X \to X$ ist linear, beschränkt, und $t \mapsto T^{(n-1)}(t)$ ist stetig in $L(X) = \{F : X \to X : F \text{ linear, beschränkt}\}$.*

Beweis: Sei zuerst $n = 1$. Da $t \mapsto T(t)x$ differenzierbar für $t > t_0$ und $x \in X$, ist $T(t)x \in D(A)$ und $T'(t) = AT(t)x$ (siehe Satz 3.4(3)). Nach Korollar 3.5 ist A abgeschlossen, also, da $T(t)$ beschränkt, ist $AT(t)$ abgeschlossen. Die Abbildung $AT(t) : X \to X$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes vom abgeschlossenen Graphen:

Satz vom abgeschlossenen Graphen: Seien X, Y Banachräume und $F : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Ist F abgeschlossen, so ist F beschränkt.

Folglich ist $T'(t) = AT(t)$ beschränkt. Um zu zeigen, daß $T(t)$ stetig in $L(X)$ ist, seien $\|T(t)\| \le M_1$ für $0 \le t \le 1$ und $t_0 < t_1 \le t_2 \le t_1 + 1$. Dann ist nach Satz 3.4(4) für $x \in D(A)$

$$\begin{aligned} \|T(t_2)x - T(t_1)x\| &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} AT(s)x \, ds \right\| \\ &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} T(s-t_1)AT(t_1)x \, ds \right\| \\ &\le (t_2 - t_1) M_1 \|AT(t_1)\| \cdot \|x\| \end{aligned}$$

und daher wegen der Dichtheit von $D(A)$ in X

$$\|T(t_2) - T(t_1)\| \leq (t_2 - t_1)M_1\|AT(t_1)\| \to 0 \quad (t_2 \to t_1+).$$

Seien $0 \leq t_0 \leq t_2 \leq t_1$ und $x \in X$. Für $t_2 \to t_1-$ folgt $t_1 - t_2 \to 0+$, und wir erhalten wie in Bemerkung 2.2

$$\begin{aligned}\|T(t_2) - T(t_1)\| &\leq \|T(t_2)\| \cdot \|T(0) - T(t_1 - t_2)\| \\ &\leq Me^{|\omega|t_1}\|I - T(t_1 - t_2)\| \\ &\to 0 \quad (t_2 \to t_1-).\end{aligned}$$

Folglich ist $t \mapsto T(t)$ stetig, und das Lemma ist für $n = 1$ bewiesen.

Wir beweisen die Aussage des Lemmas für $n > 1$ durch vollständige Induktion. Sei also das Lemma bewiesen für ein $n \in \mathbb{N}$ und sei $t > (n+1)t_0$. Wähle $s > nt_0$ mit $t - s > t_0$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt

$$T^{(n)}(t)x = A^nT(t)x = T(t-s)A^nT(s)x \quad \forall x \in X.$$

nach Voraussetzung ist $t \mapsto T(t-s)A^nT(s)x$ differenzierbar für $t - s > t_0$, also ist $t \mapsto T^{(n)}(t)x$ differenzierbar für $t > (n+1)t_0$ und

$$\begin{aligned}T^{(n+1)}(t)x &= T'(t-s)A^nT(s)x = AT(t-s)A^nT(s)x \\ &= A^{n+1}T(t)x \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$

Außerdem gilt $T(t) : X \to D(A^{n+1})$, und wie im Falle $n = 1$ zeigt man, daß $A^{n+1}T(t)$ beschränkt ist für $t > (n+1)t_0$. Die Stetigkeit von $t \mapsto T^{(n)}(t)$ folgt schließlich aus

$$\begin{aligned}\|T^{(n)}(t_2) - T^{(n)}(t_1)\| &= \left\|\int_{t_1}^{t_2} T^{(n)}(s-t_1)AT^{(n)}(t_1)x\,ds\right\| \\ &\leq (t_2 - t_1)\|A^nT(s-t_1)\| \cdot \|AT^{(n)}(t_1)\| \cdot \|x\|\end{aligned}$$

für $t_2 \geq t_1$ wie im Fall $n = 1$, da $\|A^nT(s-t_1)\|$ für $0 \leq s - t_1 \leq 1$ beschränkt ist.

$\square$

Korollar 6.5 *Sei $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe, die für $t > t_0$ differenzierbar ist, und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $t \mapsto T(t)$ n-mal differenzierbar für $t > (n+1)t_0$.*

Beweis: Sei $t > (n+1)t_0$. Dann ist nach Lemma 6.4 für $h > 0$ und $1 \leq k \leq n$ (siehe auch Satz 3.4(4))

$$\begin{aligned}&h^{-1}\|A^{k-1}T(t+h) - A^{k-1}T(t) - A^kT(t)h\| \\ &= h^{-1}\left\|\int_t^{t+h}(A^kT(s) - A^kT(t))\,ds\right\| \\ &\leq \sup_{t<s<t+h}\|A^kT(s) - A^kT(t)\| \\ &= \sup_{t<s<t+h}\|T^{(k)}(s) - T^{(k)}(t)\| \\ &\to 0 \quad (h \to 0).\end{aligned}$$

Ein analoges Resultat folgt für beliebiges $h \in \mathbb{R}$. Also ist $t \mapsto A^{k-1}T(t)$ differenzierbar für $t > (n+1)t_0$ (siehe Bemerkung 6.2) und

$$\frac{d}{dt}A^{k-1}T(t) = A^kT(t), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Dies impliziert, daß $T^{(k)}(t) = A^kT(t)$ für $1 \leq k \leq n$ und $t > (n+1)t_0$. □

Korollar 6.6 *Sei $T(t)$ eine differenzierbare C_0-Halbgruppe. Dann ist $t \mapsto T(t)$ unendlich oft differenzierbar für $t > 0$.*

Beweis: Folgt aus Korollar 6.5 für $t_0 = 0$. □

Beispiel 6.7 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Definiere $X = L^2(\Omega)$ und $A = \Delta$ mit $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ wie im Intermezzo 2. Dort haben wir bewiesen, daß A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe von Kontraktionen $T(t)$ ist. Außerdem bemerkten wir, daß für $x \in L^2(\Omega)$ die Abbildung $t \mapsto T(t)x$ differenzierbar für $t > 0$ ist (Bemerkung 3.31). Im Korollar 3.18 und Bemerkung 3.19 haben wir gezeigt, daß $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geq 0\} \subset \rho(A)$ gilt und daß die Resolventenmenge von A nicht größer als die rechte komplexe Halbebene sein muß, wenn A der infinitesimale Generator einer Halbgruppe von Kontraktionen ist. In diesem Beispiel wollen wir motivieren, daß im Falle *differenzierbarer* Halbgruppen die Resolventenmenge des entsprechenden infinitesimalen Generators *größer* als die rechte Halbebene ist.

Betrachte die Gleichung

$$(\lambda I - A)u = \lambda u - \Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

wobei $f \in X$. Dann folgt mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2} &\geq \operatorname{Re}\int_\Omega f\bar{u}\,dx \\ &= \operatorname{Re}\int_\Omega (\lambda u - \Delta u)\bar{u}\,dx \\ &= \operatorname{Re}\lambda\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \\ &\geq \operatorname{Re}\lambda\|u\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

also

$$\|R(\lambda, A)f\|_{L^2} = \|u\|_{L^2} \leq \frac{\|f\|_{L^2}}{\operatorname{Re}\lambda}, \quad \forall \operatorname{Re}\lambda > 0$$

und $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subset \rho(A)$. Nun haben wir in der letzten Abschätzung etwas verschenkt. Um den Term $\|\nabla u\|_{L^2}^2$ auszunutzen, verwenden wir die Ungleichung von Poincaré:

Ungleichung von Poincaré: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ ein beschränktes Gebiet und sei $u \in H_0^1(\Omega)$. Dann existiert eine nur von Ω abhängige Konstante $C > 0$, so daß

$$\|u\|_{L^2} \leq C\|\nabla u\|_{L^2}.$$

Zum Beweis siehe etwa [4, Corollaire IX.19, Seite 174]. Setze $c_0 = C^{-2}$. Wir erhalten

$$\|f\|_{L^2} \geq (\operatorname{Re}\lambda + c_0)\|u\|_{L^2}.$$

Folglich ist

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > -c_0\} \subset \rho(A).$$

Für allgemeine differenzierbare Halbgruppen gilt das folgende Resultat.

Satz 6.8 *Sei $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe mit infinitesimalem Generator A und $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent (siehe Abbildung 6.1):*

(1) $\exists t_0 > 0$: $T(t)$ ist differenzierbar für $t > t_0$.

(2) $\exists\, a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $C > 0$:

$$\Sigma := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geq a - b\log|\operatorname{Im}\lambda|\} \subset \rho(A) \quad \textit{und}$$

$$\|R(\lambda, A)\| \leq C|\operatorname{Im}\lambda| \quad \forall \lambda \in \Sigma,\ \operatorname{Re}\lambda \leq \omega.$$

Der Beweis ist recht umfangreich; wir geben daher nur eine Beweisskizze. Der vollständige Beweis findet sich in [10, Seiten 54-57]. In dem Beweis wird die Umkehrung der folgenden Beziehung benötigt (siehe den 1. Schritt des Beweises von Satz 3.11):

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\, dt \quad \forall x \in X,\ \operatorname{Re}\lambda > \omega,$$

wobei $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe mit infinitesimalem Generator A und $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ ist.

Satz 6.9 *(1) Seien $A : X \to X$ ein linearer, beschränkter Operator, $T(t) = e^{At}$ und $\gamma > \|A\|$. Dann gilt*

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \to \infty} \int_{\gamma - i\tau}^{\gamma + i\tau} e^{\lambda t} R(\lambda, A)\, d\lambda,$$

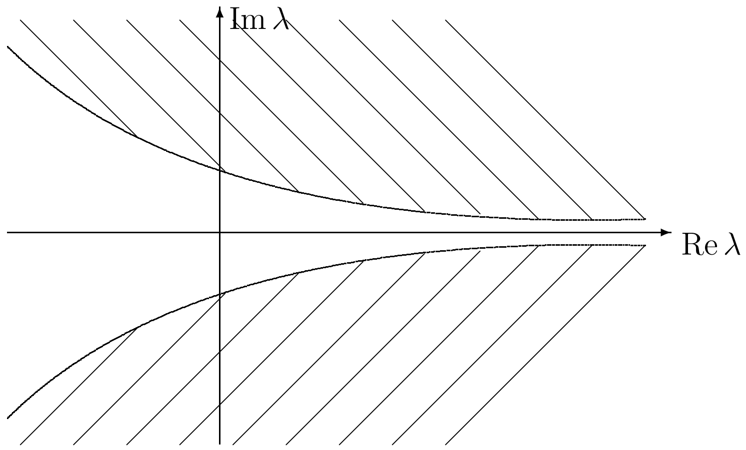

Abbildung 6.1: Die schraffierte Menge stellt Σ dar.

und die Konvergenz ist gleichmäßig in $t \in I$ für beschränkte Intervalle I.

(2) Sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$ mit $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ und sei $\gamma > \max(0, \omega)$. Dann gilt:

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau\to\infty} \int_{\gamma - i\tau}^{\gamma + i\tau} e^{\lambda t} R(\lambda, A)x \, d\lambda \qquad \forall x \in D(A^2),$$

und die Konvergenz ist gleichmäßig in $t \in [\delta, 1/\delta]$ für jedes $\delta > 0$.

Beweis: Wir beweisen nur den ersten Teil des Satzes und geben die Beweisidee für den zweiten Teil. Der vollständige Beweis findet sich in [10, Chapter 1, Corollary 7.5].

(1) Seien $\|A\| < r < \gamma$ und $\Gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$. Für $|\gamma| \geq r$ gilt $\|A/\gamma\| < 1$, und nach dem Satz über die Neumann-Reihe folgt:

$$R(\lambda, A) = \lambda^{-1}(I - A/\lambda)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}.$$

Die Konvergenz der Reihe ist gleichmäßig für $|\lambda| \geq r$ in der Operatornorm. Multiplizieren wir diese Gleichung mit $e^{\lambda t}/2\pi i$ und integtrieren wir über Γ_r, so erhalten wir wegen der gleichmäßigen Konvergenz:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} e^{\lambda t} R(\lambda, A) \, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} A^k \int_{\Gamma_r} e^{\lambda t} \lambda^{-(k+1)} \, d\lambda. \tag{6.1}$$

Das Integral auf der rechten Seite berechnen wir mit Hilfe der Beziehungen $\int_{\Gamma_r} \lambda^{-1}\, d\lambda = 2\pi i$ und $\int_{\Gamma_r} \lambda^j\, d\lambda = 0$ für alle $j \neq -1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} e^{\lambda t}\lambda^{-(k+1)}\, d\lambda &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!}\lambda^{-(k+1)}\, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!}\int_{\Gamma_r} \lambda^{j-(k+1)}\, d\lambda \\ &= \frac{t^k}{k!}.\end{aligned}$$

Da $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ analytisch in $\{|\lambda| > r\}$ ist, können wir nach dem Cauchyschen Integralsatz den Integrationsweg auf der linken Seite von (6.1) ändern zu $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \gamma\}$, was

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\{\operatorname{Re} z=\gamma\}} e^{\lambda t}R(\lambda, A)\, d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k = e^{At} = T(t)$$

und damit die Behauptung ergibt.

(2) Nach dem ersten Teil des Beweises gilt für die Yoshida-Approximation A_λ von A (siehe Definition 3.13):

$$e^{A_\lambda t}x = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\tau\to\infty}\int_{\gamma-i\tau}^{\gamma+i\tau} e^{\lambda t}R(\lambda, A_\lambda)x\, d\tau \qquad \forall x \in X.$$

Nach Satz 4.5 ist $e^{A_\lambda t}$ eine Approximation von $T(t)$. Man kann nun zeigen, daß der Grenzwert $\lambda \to \infty$ die Behauptung des Satzes liefert. $\square$

Beweisskizze von Satz 6.8: Man kann zeigen, daß das uneigentliche Integral

$$S(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}R(\lambda, A)\, d\lambda \quad \forall t > 2/b$$

in der Norm von $L(X)$ konvergiert, wobei $\Gamma \subset \Sigma$ ein geeignet gewählter Weg in Σ ist, so daß $\operatorname{Im}\lambda$ entlang Γ wächst. Der Operator $S(t)$ ist differenzierbar für $t > 3/b$, und das Integral

$$S'(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \lambda e^{\lambda t}R(\lambda, A)\, d\lambda \quad \forall t > 3/b$$

konvergiert in der Norm von $L(X)$. Man kann weiter zeigen, daß der Integrationsweg Γ in

$$S(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}R(\lambda, A)x\, d\lambda \quad \forall x \in D(A^2),\ t > 2/b$$

durch den Weg $\{\gamma + i\tau : \gamma > \max(0, \omega),\, \tau \in \mathbb{R}\}$ ersetzt werden kann. Wegen Satz 6.9 folgt dann

$$S(t)x = T(t)x \quad \forall x \in D(A^2),\ t > 2/b.$$

Weil $D(A^2)$ dicht in X ist und die Operatoren $S(t)$ und $T(t)$ beschränkt sind, gilt sogar

$$S(t)x = T(t)x \quad \forall x \in X,\ t > 2/b.$$

Da ferner $S(t)$ differenzierbar für $t > 3/b$ ist, folgt die Behauptung (1) für $t_0 = 3/b$.

Es gelte die Aussage (1). Zeige zuerst, daß für $t_1 > t_0$

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e^{\lambda t_1} \in \sigma(AT(t_1))\}$$

gilt. (Für lineare, beschränkte Operatoren $A : X \to X$ ist diese Aussage plausibel, da $AT(t_1) = Ae^{At_1}$ gilt und $\lambda \in \sigma(A)$ dann $\lambda e^{\lambda t_1} \in \sigma(Ae^{At_1})$ impliziert.) Es folgt für $M_1 = \|AT(t_1)\|$

$$\begin{aligned} \lambda e^{\lambda t_1} \in \sigma(AT(t_1)) \quad &\Rightarrow \quad (\lambda e^{\lambda t_1} I - AT(t_1))^{-1} \text{ existiert nicht} \\ &\Rightarrow \quad |\lambda e^{\lambda t_1}| \le \|AT(t_1)\| = M_1 \\ &\Rightarrow \quad |\operatorname{Im}\lambda| e^{\operatorname{Re}\lambda t_1} \le |\lambda| \cdot |e^{\lambda t_1}| \le M_1 \\ &\Rightarrow \quad t_1 \operatorname{Re}\lambda \le \log M_1 - \log|\operatorname{Im}\lambda|, \end{aligned}$$

also

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \le t_1^{-1}\log M_1 - t_1^{-1}\log|\operatorname{Im}\lambda|\}.$$

Für $\delta > 0$ gilt daher

$$\begin{aligned} \Sigma \quad &:= \quad \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > t_1^{-1}\log((1+\delta)M_1) - t_1^{-1}\log|\operatorname{Im}\lambda|\} \\ &\subset \quad \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > t_1^{-1}\log M_1 - t_1^{-1}\log|\operatorname{Im}\lambda|\} \\ &\subset \quad \mathbb{C}\backslash\sigma(A) = \rho(A), \end{aligned}$$

was den ersten Teil von (2) mit $a = t_1^{-1}\log((1+\delta)M_1)$, $b = t_1^{-1}$ beweist. Für den Beweis des zweiten Teils von (2) zeige

$$\|R(\lambda, A)x\| \le \frac{M(1+t_1)e^{\omega t_1}}{\delta\|AT(t_1)\|}|\operatorname{Im}\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X,\ \lambda \in \Sigma,\ \operatorname{Re}\lambda \le \omega,$$

und setze $C = M(1+t_1)e^{\omega t_1}/(\delta M_1)$. (Diese Abschätzung zeigt, warum wir die Zahl $\delta > 0$ eingeführt haben.) $\square$

Im folgenden wollen wir Halbgruppen $T(t)$ untersuchen, die zu einer analytichen Abbildung $z \mapsto T(z)$ für gewisse $z \in \mathbb{C}$ fortgesetzt werden können. Solche *analytischen* Halbgruppen liefern starke Regularitätsaussagen für Lösungen gewisser Anfangswertprobleme.

Definition 6.10 *Seien* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \phi_1 < \arg z < \phi_2\}$ *für* $\phi_1 < 0 < \phi_2$ *(siehe Abbildung 6.2) und* $T(z) : X \to X$ *linear, beschränkt für* $z \in \Delta$*. Die Familie* $T(z)$*,* $z \in \Delta$*, heißt* analytische Halbgruppe in Δ *genau dann, wenn*

(1) $z \mapsto T(z)$ *ist analytisch in* Δ*,*

(2) $T(0) = I$ *und*

$$\lim_{z \to 0,\ z \in \Delta} T(z)x = x \quad \forall x \in X,$$

(3) $\forall z_1, z_2 \in \Delta :\ T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$.

Eine Halbgruppe $T(z)$ *heißt* analytisch *genau dann, wenn sie analytisch ist in einem Gebiet* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \phi < \arg z < \phi_2\}$ *für zwei* $\phi_1 < 0 < \phi_2$.

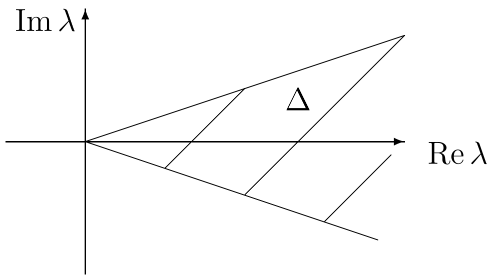

Abbildung 6.2: Die Menge Δ.

Der infinitesimale Generator A einer analytischen Halbgruppe ist wie in Kapitel 2 definiert.

Bemerkung 6.11 (1) Ist $A : X \to X$ ein linearer, beschränkter Operator, so existiert nach Satz 2.3 eine gleichmäßig stetige Halbgruppe $T(t) = e^{At}$. Diese ist in $\mathbb{C}$ analytisch fortsetzbar, da $T(z) = e^{Az}$ in $\mathbb{C}$ analytisch ist. Ist umgekehrt $T(z)$ analytisch in $\mathbb{C}$, so ist $t \mapsto T(t)x$ differenzierbar für alle $t \geq 0$ und $x \in X$. Nach Bemerkung 6.3 ist dann der infinitesimale Generator A beschränkt. Es gilt also

$$T(z) \text{ analytisch in } \mathbb{C} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ ist beschränkt.}$$

(2) Ist $T(z)$ eine analytische Halbgruppe in Δ, so ist die Einschränkung $T(z)|_{z \in [0,\infty)}$ eine C_0-Halbgruppe.

(3) Es genügt, gleichmäßig beschränkte C_0-Halbgruppen $T(t)$ mit $\|T(t)\| \leq M$ zu betrachten, da die Multiplikation mit $e^{-\omega t}$ die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der analytischen Fortsetzbarkeit nicht berührt.

(4) Wir können ohne Beschränkung annehmen, daß $0 \in \rho(A)$ gilt. Sei nämlich $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe $T(t)$ mit $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ und mit infinitesimalem Generator A. Dann ist nach Satz 4.3 von Hille-Yosida $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$. Definieren wir

also $S(t) = e^{\varepsilon t} T(t)$ mit $\varepsilon > \omega$, so erfüllt der dazugehörige infinitesimale Generator B die Beziehung $(\omega - \varepsilon, \infty) \subset \rho(B)$, also $0 \in \rho(B)$. Nach (3) ist die Multiplikation mit $e^{\varepsilon t}$ aber unschädlich, so daß wir gleich $0 \in \rho(A)$ voraussetzen können.

Das Hauptresultat ist der folgende Satz.

Satz 6.12 *Sei $T(t)$ eine gleichmäßig beschränkte C_0-Halbgruppe mit infinitesimalem Generator A und sei $0 \in \rho(A)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) $\exists 0 < \delta < \pi/2$*: $T(t)$ kann zu einer analytischen Halbgruppe in* $\Delta_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \delta\}$ *fortgesetzt werden und* $\forall 0 < \delta' < \delta$*: $\|T(t)\|$ ist gleichmäßig beschränkt in* $\overline{\Delta_{\delta'}}$.

(2) $\exists C > 0 : \forall \operatorname{Re} \lambda > 0,\ \operatorname{Im} \lambda \neq 0$:

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{C}{|\operatorname{Im} \lambda|}.$$

(3) $\exists 0 < \delta < \pi/2,\ M > 0$:

$$\Sigma := \{\lambda \in \mathbb{C} :\ |\arg \lambda| < \tfrac{\pi}{2} + \delta\} \cup \{0\} \subset \rho(A),$$
$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in \Sigma,\ \lambda \neq 0.$$

(4) $T(t)$ ist differenzierbar für $t > 0$ und es existiert ein $C > 0$, so daß

$$\|AT(t)\| \leq \frac{C}{t} \quad \forall t > 0.$$

Beispiel 6.13 Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, $\partial\Omega \in C^\infty$, $X = L^2(\Omega)$ und $A = \Delta$, definiert in $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Nach dem Satz 3.11 von Hille-Yoshida folgt

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} \lambda|} \quad \forall \operatorname{Re} \lambda \geq 0,\ \operatorname{Im} \lambda \neq 0.$$

Nach Intermezzo 2 existiert zu A eine C_0-Halbgruppe von Kontraktionen $T(t)$, so daß $u(t) = T(t)u_0$ für $u_0 \in D(A)$ die Wärmegleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) &= u_0 \quad \text{in } \Omega, \end{aligned}$$

in dem in Satz 3.30 spezifizierten Sinne löst. Nach Satz 6.12(1) kann also $T(t)$ zu einer analytischen Halbgruppe in einem Sektor Δ_δ fortgesetzt werden. Außerdem gilt (siehe Abbildung 6.3)

$$\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg z| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup \{0\} \subset \rho(A)$$

und nach Satz 6.12(4) wegen $T'(t)u_0 = AT(t)u_0$

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_{L^2} = \|AT(t)u_0\|_{L^2} \leq \frac{C}{t} \quad \forall t > 0.$$

Für $t \to \infty$ folgt also

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_{L^2} \to 0.$$

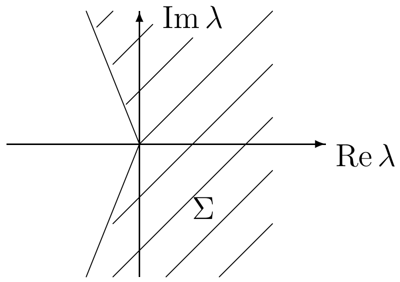

Abbildung 6.3: Die Menge Σ.

Nach Korollar 6.6 ist die Einschränkung $T(t)$ von $T(z)$ auf $z \in [0, \infty)$ unendlich oft differenzierbar für $t > 0$, d.h. $t \mapsto u(t) = T(t)u_0$ ist unendlich oft differenzierbar in $L^2\Omega)$ und $u \in C^\infty((0,\infty); L^2(\Omega))$. Dies impliziert wegen $\partial^n u/\partial^n t = \Delta^n u \in C^\infty((0,\infty); L^2(\Omega))$ auch $u \in C^\infty((0,\infty); H^{2n}(\Omega))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und aus der Sobolev-Einbettung

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H^n(\Omega) \subset C^\infty(\overline{\Omega})$$

folgt dann

$$u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times (0, \infty)).$$

Beweis von Satz 6.12:

1. Schritt: (1) $\Rightarrow$ (2). Seien $0 < \delta' < \delta$, so daß $\|T(z)\| \leq M_1$ für $z \in \overline{\Delta_{\delta'}} = \{|\arg z| \leq \delta'\}$. Wir wissen aus dem Beweis von Satz 3.11, daß für $x \in X$, $\sigma > 0$ und $\tau \neq 0$

$$R(\sigma + i\tau, A)x = \int_0^\infty e^{-(\sigma+i\tau)t} T(t)x \, dt \tag{6.2}$$

gilt. Genau genommen haben wir dies in Satz 3.11 nur für $\sigma > 0$ und $\tau = 0$ bewiesen. Der Beweis ist aber im wesentlichen derselbe für $\sigma > 0$ und $\tau \neq 0$. Da $T(z)$ in $\overline{\Delta_{\delta'}}$ analytisch und gleichmäßig beschränkt ist, können wir nach dem Cauchyschen Integralsatz den Integrationsweg in (6.2) von $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\lambda = 0,\ 0 < \operatorname{Re}\lambda < \infty\}$ ändern zu $\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = \rho e^{i\theta},\ 0 < \rho < \infty\}$ für $|\theta| \leq \delta'$. Seien $\sigma, \tau > 0$. Mit $\theta = -\delta'$ folgt

$$\begin{aligned}
\|R(\sigma + i\tau, A)x\| &= \left\| \int_\Gamma e^{-(\sigma+i\tau)z} T(z)x\, dz \right\| \\
&= \left\| \int_0^\infty e^{-(\sigma+i\tau)\rho(\cos\delta' - i\sin\delta')} T(\rho e^{-i\delta'}) x e^{-i\delta'}\, d\rho \right\| \\
&\leq \int_0^\infty e^{-\rho(\sigma\cos\delta' + \tau\sin\delta')} M_1 \|x\|\, d\rho \\
&= \left[\frac{-1}{\sigma\cos\delta' + \tau\sin\delta'} e^{-\rho(\sigma\cos\delta' + \tau\sin\delta')} \right]_{\rho=0}^{\rho=\infty} M_1\|x\| \\
&= \frac{M_1\|x\|}{\sigma\cos\delta' + \tau\sin\delta'} \\
&\leq \frac{C}{\tau}\|x\|
\end{aligned}$$

mit $C := M_1/\sin\delta'$. Hier haben wir benutzt, daß $\delta' < \delta < \pi/2$, also $\cos\delta' > 0$. Für $\tau < 0$ wählen wir $\theta = \delta'$ und erhalten nach ähnlicher Rechnung wie oben

$$\|R(\sigma + i\tau, A)x\| \leq \frac{C}{-\tau}\|x\|,$$

also

$$\|R(\sigma + i\tau, A)x\| \leq \frac{C}{|\tau|}\|x\| \quad \forall x \in X,\ \sigma > 0,\ \tau \neq 0.$$

Dies beweist (2).

2. Schritt: (2) $\Rightarrow$ (3). Nach Satz 4.4 gilt wegen $\|T(t)\| \leq M_1$

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{C_0}{\operatorname{Re}\lambda} \quad \forall \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

Aus (2) folgt $\|R(\lambda, A)\| \leq C/|\operatorname{Im}\lambda|$, also

$$\begin{aligned}
|\lambda|^2\|R(\lambda, A)\|^2 &= ((\operatorname{Re}\lambda)^2 + (\operatorname{Im}\lambda)^2)\|R(\lambda, A)\|^2 \\
&\leq C_0^2 + C^2 =: C_1^2
\end{aligned}$$

und damit $\|R(\lambda, A)\| \leq C_1/|\lambda|$ für $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Insbesondere ist $\Sigma_1 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subset \rho(A)$.

Wir zeigen nun, daß die Resolventenmenge von A mehr als die rechte Halbebene enthält. Da $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ analytisch für $\operatorname{Re}\lambda > 0$ ist (siehe Beweis von

Satz 4.4), können wir $R(\lambda, A)$ um $\lambda_0 = \sigma + i\tau$ für $\sigma > 0$ durch eine Taylorreihe darstellen:

$$\begin{aligned} R(\lambda, A) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} R(\sigma + i\tau, A)(\lambda - (\sigma + i\tau))^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} R(\sigma + i\tau, A)^{n+1} (\sigma + i\tau - \lambda)^n, \end{aligned}$$

wobei wir (4.7) benutzt haben. Diese Reihe konvergiert in $L(X)$, sofern

$$\|R(\sigma + i\tau, A)\| \cdot |\sigma + i\tau - \lambda| \leq k < 1$$

erfüllt ist. Wähle $\lambda \in \Sigma_2 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq 0,\ |\operatorname{Re}\lambda|/|\operatorname{Im}\lambda| < 1/C\}$. Sei $\varepsilon = 1 - C|\operatorname{Re}\lambda|/|\operatorname{Im}\lambda| > 0$ und wähle $\tau = \operatorname{Im}\lambda$, $0 < \sigma \leq \varepsilon|\tau|/2C$ und $k = 1 - \varepsilon/2 < 1$. Dann ist $\lambda = \operatorname{Re}\lambda + i\tau$, und aus Voraussetzung (2) folgt

$$\begin{aligned} \|R(\sigma + i\tau, A)\| \cdot |\sigma + i\tau - \lambda| &\leq \frac{C}{|\tau|} |\sigma - \operatorname{Re}\lambda| \\ &\leq C \frac{|\operatorname{Re}\lambda|}{|\operatorname{Im}\lambda|} + C \frac{\sigma}{|\operatorname{Im}\lambda|} \\ &\leq 1 - \varepsilon + \frac{C\sigma}{|\tau|} \\ &\leq 1 - \varepsilon/2 = k. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Wir erhalten also Konvergenz der obigen Taylorreihe für alle $\lambda \in \Sigma_2$ und daher $\Sigma_2 \subset \rho(A)$ oder wegen $\tan|\theta| = |\operatorname{Re}\lambda|/|\operatorname{Im}\lambda| < 1/C$ (siehe Abbildung 6.4):

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \{\lambda = \rho e^{i\alpha} \in \mathbb{C} : 0 < \rho < \infty,\ \alpha = \pm(\theta + \pi/2),\ 0 < \theta < \arctan(1/C)\} \\ &\subset \rho(A). \end{aligned}$$

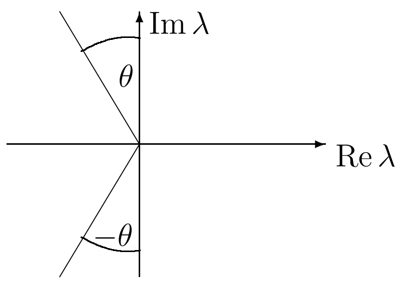

Abbildung 6.4: Illustration von $0 < \theta < \arctan(1/C)$.

Mit $\delta := k \arctan(1/C)$, $0 < k < 1$, folgt also

$$\{\lambda : |\arg\lambda| \leq \frac{\pi}{2} + \delta\} \subset \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \subset \rho(A).$$

Sei $\lambda = \operatorname{Re}\lambda + i\tau \in \mathbb{C}$ mit $\pi/2 \leq |\arg\lambda| \leq \pi/2 + \delta$ und sei $\sigma > 0$. Für $\theta = |\arg\lambda| - \pi/2 \geq 0$ gilt $\cos\theta = |\operatorname{Im}\lambda|/|\lambda| = |\tau|/|\lambda|$ und daher:

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda, A)\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|R(\sigma + i\tau, A)\|^{n+1} |\sigma + i\tau - \lambda|^n \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|R(\sigma + i\tau, A)\| k^n \qquad \text{(nach (6.3))} \\
&\leq \frac{C}{|\tau|} \frac{1}{1-k} \qquad \text{(nach Voraussetzung (2))} \\
&\leq \frac{C}{|\lambda| \cos\theta \cdot (1-k)} \\
&\leq \frac{C}{(1-k)\cos\delta} \, \frac{1}{|\lambda|} \qquad (\text{da } \theta \leq \delta) \\
&\leq \frac{M}{|\lambda|}
\end{aligned}$$

mit $M = C/((1-k)\cos\delta) > 0$. Dies beweist (3).

3. Schritt: (3) $\Rightarrow$ (4). Aus Satz 6.9 folgt

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau\to\infty} \int_{\gamma - i\tau}^{\gamma + i\tau} e^{\lambda t} R(\lambda, A)x \, d\lambda \quad \forall x \in D(A^2),$$

wobei $\gamma > 0$. Da $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ analytisch in Σ ist, können wir den Integrationsweg ändern zu $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ mit $\Gamma_\pm = \{\rho e^{\pm i\theta} \colon 0 < \rho < \infty\}$ und $\pi/2 < \theta < \pi/2 + \delta$. Die Kurve Γ sei so orientiert, daß $\operatorname{Im}\lambda$ entlang Γ monoton wächst. Das obige Integral konvergiert in $L(X)$. Da $D(A^2)$ dicht ist in X (Übungsaufgabe) und $\int_\Gamma e^{\lambda t} R(\lambda, A) \, d\lambda$ in der Norm von $L(X)$ konvergiert, folgt

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} R(\lambda, A) \, d\lambda \quad \text{ in } X. \tag{6.4}$$

Differenzieren wir (6.4) formal nach t, erhalten wir

$$T'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda e^{\lambda t} R(\lambda, A) \, d\lambda. \tag{6.5}$$

Wegen Voraussetzung (3) und $\cos\theta < 0$ folgt

$$\begin{aligned}
\|T'(t)\| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \rho e^{\rho\cos\theta \cdot t} \|R(\rho e^{i\theta}, A)\| \, d\rho \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\infty M e^{\rho\cos\theta \cdot t} \, d\rho \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{M}{(-\cos\theta)t}.
\end{aligned}$$

Also konvergiert das Integral (6.5), und die formale Differentiation ist gerechtfertigt. Damit ist $T(t)$ differenzierbar für $t > 0$ und

$$\|AT(t)\| = \|T'(t)\| \leq \frac{C}{t} \quad \forall t > 0$$

mit $C = M/(-\pi \cos\theta) > 0$.

4. Schritt: (4) $\Rightarrow$ (1). Da $T(t)$ differenzierbar, gilt (Übungsaufgabe)

$$T^{(n)}(t) = \Big(AT\Big(\frac{t}{n}\Big)\Big)^n = \Big(T'\Big(\frac{t}{n}\Big)\Big)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aus Voraussetzung (4) und $e^n = \sum_{m=0}^{\infty} n^m/n! \geq n^n/n!$ folgt dann für $t > 0$

$$\frac{1}{n!}\|T^{(n)}(t)\| \leq \frac{1}{n!}\Big\|T'\Big(\frac{t}{n}\Big)\Big\|^n \leq \frac{C^n}{n!(t/n)^n} \leq \Big(\frac{Ce}{t}\Big)^n.$$

Betrachte nun die Potenzreihe

$$T(z) = T(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} T^{(n)}(t)(z-t)^n. \tag{6.6}$$

Diese Reihe konvergiert in $L(X)$, wenn $|z-t| \leq k(t/Ce)$ für $0 < k < 1$. Folglich ist $T(z)$ analytisch in $\Delta := \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \arctan(1/Ce)\} \subset B := \bigcup_{t>0}\{z \in \mathbb{C} :\ |z-t| < t/Ce\}$ (siehe Abbildung 6.5). Klarerweise ist $T(z) = T(t)$ für $z = t$, d.h., $T(z)$ erweitert $T(t)$ auf den Sektor Δ. Aus (6.6) folgt, daß $T(z)x \to x$ für $z \to 0$, $z \in \Delta$, denn

$$T(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} T^{(n)}(t) t^n = T(0) = I.$$

Die Halbgruppeneigenschaft von $T(z)$ folgt aus der Analytizität. Außerdem ist $\|T(z)\|$ gleichmäßig beschränkt in $\overline{\Delta_\varepsilon} = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \arctan(1/Ce) - \varepsilon\}$, da $\|T(z)\|$ wegen (6.6) allenfalls in der Nähe des Randes von $\{|\arg z| < \arctan(1/Ce)\}$ über alle Maßen wächst.

Damit ist der Beweis von Satz 6.12 vollständig. $\square$

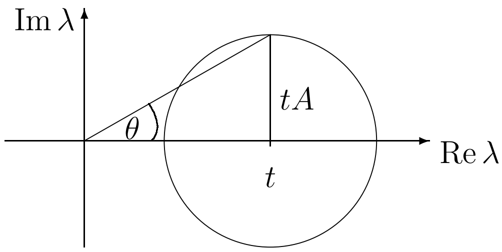

Abbildung 6.5: Die Kreisscheibe stellt die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z - t| < t/Ce\}$ mit $A = 1/Ce$ dar. Es gilt $\theta = \arctan(tA/t) = \arctan(1/Ce)$.

7 Störungen von Halbgruppen

Sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe. In diesem Kapitel wollen wir Bedingungen an einen Operator B formulieren, so daß auch $A + B$ der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe ist. Sei im folgenden X stets ein Banachraum.

Wir untersuchen zuerst beschränkte Störungen.

Satz 7.1 *Sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$ mit $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ und sei $B : X \to X$ ein linearer, beschränkter Operator. Dann ist $A + B$ der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $S(t)$ mit $\|S(t)\| \leq Me^{(\omega + M\|B\|)t}$.*

Beweis: Aus Lemma 4.1 und dem Beweis von Satz 4.2 folgt die Existenz einer Norm $|\cdot|$ in X, so daß $\|x\| \leq |x| \leq M\|x\|$ für $x \in X$ $(M \geq 1)$ und

$$|T(t)| \leq e^{\omega t}, \quad |R(\lambda, A)| \leq (\lambda - \omega)^{-1} \quad \forall t > 0,\ \lambda > \omega.$$

Für $x \in X$ und $\lambda > \omega + |B|$ folgt

$$|BR(\lambda, A)x| \leq |B| \cdot |R(\lambda, A)x| \leq \frac{|B|}{\lambda - \omega} < \frac{|B|}{\omega + |B| - \omega} = 1,$$

also $|BR(\lambda, A)| < 1$. Dies impliziert, daß $I - BR(\lambda, A)$ invertierbar ist (Neumann-Reihe). Wir behaupten, daß

$$R := R(\lambda, A)(I - BR(\lambda, A))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} R(\lambda, A)[BR(\lambda, A)]^k \tag{7.1}$$

die Resolvente $R(\lambda, A + B)$ ist. Es folgt einerseits

$$\begin{aligned}
(\lambda - A - B) \cdot R &= [(\lambda I - A)R(\lambda, A) - BR(\lambda, A)](I - BR(\lambda, A))^{-1} \\
&= [I - BR(\lambda, A)](I - BR(\lambda, A))^{-1} \\
&= I,
\end{aligned}$$

andererseits für alle $x \in D(A)$

$$\begin{aligned}
R \cdot (\lambda I - A - B)x &= \sum_{k=0}^{\infty} R(\lambda, A)[BR(\lambda, A)]^k (\lambda I - A - B)x \\
&= R(\lambda, A)((\lambda I - A) - B)x \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} [R(\lambda, A)B]^k R(\lambda, A)((\lambda I - A) - B)x \\
&\quad (\text{denn } R(\lambda, A)[BR(\lambda, A)]^k = [R(\lambda, A)B]^k R(\lambda, A)) \\
&= x - R(\lambda, A)Bx \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} [R(\lambda, A)B]^k x - \sum_{k=1}^{\infty} [R(\lambda, A)B]^{k+1} x \\
&= x + \sum_{k=1}^{\infty} [R(\lambda, A)B]^k x - \sum_{k=0}^{\infty} [R(\lambda, A)B]^{k+1} x \\
&= x.
\end{aligned}$$

Folglich existiert $R(\lambda, A+B)$ für alle $\lambda > \omega + |B|$ und $R(\lambda, A+B) = R$. Außerdem ist nach (7.1)

$$\begin{aligned}
|R(\lambda, A+B)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} R(\lambda, A)[BR(\lambda, A)]^k \right| \\
&\leq |R(\lambda, A)| \sum_{k=0}^{\infty} |BR(\lambda, A)|^k \\
&\leq (\lambda - \omega)^{-1} (1 - |BR(\lambda, A)|)^{-1} \\
&\leq [(\lambda - \omega)(1 - |B|(\lambda - \omega)^{-1})]^{-1} \\
&= (\lambda - \omega - |B|)^{-1}.
\end{aligned}$$

Aus Korollar 3.20 folgt, daß $A+B$ der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $S(t)$ mit $|S(t)| \leq \exp((\omega + |B|)t)$ ist. Daraus ergibt sich

$$\|S(t)x\| \leq |S(t)x| \leq e^{(\omega + M\|B\|)t} |x| \leq M e^{(\omega + M\|B\|)t} \|x\|,$$

also die Behauptung. □

Bemerkung 7.2 Man kann zeigen, daß die C_0-Halbgruppe $S(t)$ folgendermaßen durch $T(t)$ ausgedrückt werden kann [10, Seite 78]:

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t),$$

wobei $S_0(t) = T(t)$ und

$$S_{n+1}(t)x = \int_0^t T(t-s)BS_n(s)x\,ds \qquad \forall x \in X,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Die Konvergenz der obigen Reihe ist in $L(X)$.

Die Differenz der beiden C_0-Halbgruppen $T(t)$ und $S(t)$ kann wie folgt abgeschätzt werden.

Korollar 7.3 *Seien A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$ mit $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $B : X \to X$ ein linearer, beschränkter Operator und $S(t)$ die durch $A+B$ erzeugte C_0-Halbgruppe. Dann gilt für $t \geq 0$:*

$$\|T(t) - S(t)\| \leq Me^{\omega t}\left(e^{M\|B\|t} - 1\right).$$

Beweis: Betrachte den Operator $H(s) := T(t-s)S(s)$. Für $x \in D(A) = D(A+B)$ ist die Abbildung $s \mapsto H(s)x$ differenzierbar und nach Satz 3.4(3) folgt

$$\begin{aligned} H'(s)x &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)(A+B)S(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)(A+B)S(s)x \\ &= T(t-s)BS(s)x. \end{aligned}$$

Integrieren wir $H'(s)x$ von $s = 0$ bis $s = t$, so erhalten wir nach Satz 3.4(4):

$$\begin{aligned} S(t)x - T(t)x &= H(t)x - H(0)x \\ &= \int_0^t H'(s)x\,ds \\ &= \int_0^t T(t-s)BS(s)x\,ds. \end{aligned}$$

Dies impliziert für $x \in D(A)$ nach Satz 7.1

$$\begin{aligned} \|S(t)x - T(t)x\| &\leq \int_0^t \|T(t-s)\| \cdot \|B\| \cdot \|S(s)\| \cdot \|x\|\,ds \\ &\leq \int_0^t Me^{\omega(t-s)}\|B\|Me^{(\omega+M\|B\|)s}\|x\|\,ds \\ &= M^2\|B\|e^{\omega t}\int_0^t e^{M\|B\|s}\|x\|\,ds \\ &= Me^{\omega t}\left(e^{M\|B\|t} - 1\right)\|x\|. \end{aligned}$$

Da $D(A)$ dicht in X ist, folgt die Behauptung. $\square$

Ist die Störung B nicht beschränkt, kann folgendes Resultat für analytische C_0-Halbgruppen bewiesen werden.

Satz 7.4 *Sei A der infinitesimale Generator einer analytischen Halbgruppe. Sei weiter $B : D(B) \to X$ ein linearer, abgeschlossener Operator mit $D(A) \subset D(B)$ und*

$$\|Bx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\| \quad \forall x \in D(A), \tag{7.2}$$

wobei $a, b \geq 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so daß, falls $0 \leq a \leq \delta$, $A + B$ der infinitesimale Generator einer analytischen Halbgruppe ist.

Beweis: Sei zunächst die durch A erzeugte Halbgruppe $T(t)$ gleichmäßig beschränkt. Nach Satz 6.12 existieren $0 < \omega < \pi/2$ und $M > 0$, so daß

$$\begin{aligned}
&\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \omega\} \subset \rho(A) \text{ und} \\
&\|R(\lambda, A)\| \leq M|\lambda|^{-1} \quad \forall \lambda \in \Sigma, \ \lambda \neq 0.
\end{aligned}$$

Aus (7.2) folgt für $x \in X$ und $\lambda \in \Sigma$, $\lambda \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\|BR(\lambda, A)x\| &\leq a\|AR(\lambda, A)x\| + b\|R(\lambda, A)x\| \\
&\leq a\| - (\lambda I - A)R(\lambda, A)x\| + a\|\lambda R(\lambda, A)\| + b\|R(\lambda, A)x\| \\
&\leq a\|x\| + a|\lambda| \cdot M|\lambda|^{-1}\|x\| + bM|\lambda|^{-1}\|x\| \\
&= a(M + 1)\|x\| + bM|\lambda|^{-1}\|x\|. \qquad (7.3)
\end{aligned}$$

Wähle $\delta = 1/(2(1 + M))$, $0 \leq a \leq \delta$ und $|\lambda| > 2bM$. Dann ist

$$\|BR(\lambda, A)x\| < \frac{M + 1}{2(M + 1)}\|x\| + \frac{bM}{2bM}\|x\| = \|x\|.$$

Wegen $\|BR(\lambda, A)\| < 1$ ist also $I - BR(\lambda, A)$ invertierbar. Eine Rechnung wie im Beweis von Satz 7.1 zeigt, daß

$$R(\lambda, A + B) = (\lambda I - A - B)^{-1} = R(\lambda, A)(I - BR(\lambda, A))^{-1}$$

gilt. Daraus folgt für alle $|\lambda| > 2bM$, $|\arg \lambda| \leq \pi/2 + \omega$ wegen (7.3)

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda, A + B)\| &\leq \|R(\lambda, A)\| \cdot \|(I - BR(\lambda, A))^{-1}\| \\
&\leq \frac{M}{|\lambda|} \, \frac{1}{1 - \|BR(\lambda, A)\|} \\
&\leq \frac{M}{|\lambda|(1/2 - bM|\lambda|^{-1})} \\
&= \frac{2M}{|\lambda| - 2bM}.
\end{aligned}$$

Eine Variante von Satz 6.12 zeigt, daß $A + B$ der infinitesimale Generator einer analytischen Halbgruppe ist.

Sei nun $T(t)$ eine analytische Halbgruppe mit $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ (mit $\omega > 0$). Betrachte die von $A_0 = A - \omega I$ erzeugte Halbgruppe $e^{-\omega t}T(t)$. Aus (7.2) folgt für $x \in D(A)$

$$\|Bx\| \leq a\|A_0 x + \omega x\| + b\|x\| \leq a\|A_0 x\| + (a\omega + b)\|x\|.$$

Ist $0 \leq a \leq \delta$, so können wir den ersten Teil des Beweises auf A_0 anwenden, und $A_0 + B = A + B - \omega I$ ist der infinitesimale Generator einer analytischen Halbgruppe. Dann ist auch $A + B$ der infinitesimale Generator einer analytischen Halbgruppe. $\square$

Bemerkung 7.5 Im Falle $a = 0$ erhalten wir aus Satz 7.4 eine Variante von Satz 7.1: Sei A der infinitesimale Generator einer analytischen Halbgruppe und sei B ein linearer, beschränkter Operator. Dann ist $A + B$ der infinitesimale Generator einer analytischen Halbgruppe.

Die Voraussetzung "$a \geq 0$ hinreichend klein" in Satz 7.4 kann durch "$0 \leq a < 1$" ersetzt werden, wenn der Operator B zusätzlich dissipativ ist und wenn Halbgruppen von Kontraktionen betrachtet werden. Dazu benötigen wir einige Vorbereitungen.

Definition 7.6 *Ein linearer Operator $A : D(A) \to X$ heißt m-*dissipativ *genau dann, wenn A dissipativ ist und $R(I - A) = X$ gilt.*

Wir erinnern, daß A dissipativ heißt, wenn es für jedes $x \in D(A)$ ein $x' \in X'$ mit $\|x'\|^2 = \|x\| = \langle x', x\rangle$ gibt, so daß $\mathrm{Re}\langle x', Ax\rangle \leq 0$.

Es gilt: Wenn A m-dissipativ ist, dann auch μA für alle $\mu > 0$. Dies sieht man folgendermaßen: Ist A m-dissipativ, so ist A auch dissipativ und $\lambda^{-1}A$ ist dissipativ für alle $\lambda > 0$. Wie im Beweis von Satz 3.26 von Lumer-Phillips zeigt man, daß $R(I - A) = X$ impliziert: $X = R(\lambda I - A) = R(I - \lambda^{-1}A)$ für alle $\lambda > 0$. Insbesondere ist μA m-dissipativ für alle $\mu > 0$.

Der Begriff der m-Dissipativität erlaubt es, den Satz von Lumer-Phillips elegant wie folgt zu formulieren: Sei $A : D(A) \to X$ ein linearer Operator mit $\overline{D(A)} = X$. Dann ist A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe von Kontraktionen genau dann, wenn A m-dissipativ ist.

Satz 7.7 *Seien $A : D(A) \to X$, $B : D(B) \to X$ lineare Operatoren mit $D(A) \subset D(B)$. Die Operatoren $A + tB$ seien dissipativ für alle $0 \leq t \leq 1$, es gebe ein $t_0 \in [0,1]$, so daß $A + t_0 B$ m-dissipativ ist, und es gebe $0 \leq \alpha < 1$, $\beta \geq 0$, so daß*

$$\|Bx\| \leq \alpha\|Ax\| + \beta\|x\| \quad \forall x \in D(A). \tag{7.4}$$

Dann ist $A + tB$ m-dissipativ für alle $t \in [0,1]$.

Beweis: Wir zeigen, daß es ein $\delta > 0$ gibt, so daß, wenn $A + t_0 B$ m-dissipativ ist, auch $A+tB$ für alle $t \in [0,1]$ mit $|t-t_0| \leq \delta$ m-dissipativ ist. Dies impliziert nach einer endlichen Zahl von Schritten, daß $A+tB$ für alle $t \in [0,1]$ m-dissipativ ist. Sei also $A + t_0 B$ m-dissipativ. Nach Definition ist $I - (A + t_0 B)$ surjektiv und nach Satz 3.25 injektiv. Also ist $I - (A + t_0 B) : D(A) \to X$ invertierbar. Setze $R(t_0) = (I - (A + t_0 B))^{-1}$. Nach Satz 3.25 folgt

$$\|(I - (A + t_0 B))x\| \geq \|x\| \quad \forall x \in D(A),$$

also

$$\|R(t_0)\| \leq 1. \tag{7.5}$$

Wir zeigen nun, daß der Operator $BR(t_0)$ beschränkt ist. Aus der Voraussetzung (7.4) folgt für $x \in D(A)$

$$\begin{aligned} \|Bx\| &\leq \alpha\|(A + t_0 B)x\| + \alpha t_0 \|Bx\| + \beta\|x\| \\ &\leq \alpha\|(A + t_0 B)x\| + \alpha\|Bx\| + \beta\|x\| \end{aligned}$$

und daher nach Subtraktion von $\alpha\|Bx\|$

$$\|Bx\| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\|(A + t_0 B)x\| + \frac{\beta}{1-\alpha}\|x\|.$$

Wir wählen nun $x = R(t_0)y \in D(A)$ für beliebiges $y \in X$ und verwenden die Relation

$$(A + t_0 B)R(t_0) = R(t_0) - (I - (A + t_0 B))R(t_0) = R(t_0) - I,$$

um zu schließen:

$$\begin{aligned} \|BR(t_0)y\| &\leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\|(A + t_0 B)R(t_0)y\| + \frac{\beta}{1-\alpha}\|R(t_0)y\| \\ &= \frac{\alpha}{1-\alpha}\|(R(t_0) - I)y\| + \frac{\beta}{1-\alpha}\|R(t_0)y\| \\ &\leq \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha}\|R(t_0)y\| + \frac{\alpha}{1-\alpha}\|y\| \\ &\leq \frac{2\alpha+\beta}{1-\alpha}\|y\|, \end{aligned} \tag{7.6}$$

wobei wir im letzten Schritt (7.5) verwendet haben. Folglich ist $BR(t_0)$ beschränkt.

Wir zeigen, daß $A + tB$ m-dissipativ für $t \in [0,1]$ in einer Umgebung von t_0 ist. Dazu beweisen wir, daß $I - (A + tB)$ invertierbar ist, denn dies impliziert $R(I - (A + tB)) = X$. Wegen

$$\begin{aligned} I - (A + tB) &= I - (A + t_0 B) + (t_0 - t)B \\ &= I - (A + t_0 B) + (t_0 - t)BR(t_0)(I - (A + t_0 B)) \\ &= (I + (t_0 - t)BR(t_0))(I - (A + t_0 B)) \end{aligned}$$

ist $I-(A+tB)$ invertierbar genau dann, wenn $I+(t_0-t)BR(t_0)$ invertierbar ist. Wähle nun $\delta=(1-\alpha)/(4\alpha+2\beta)$ und $t\in[0,1]$ mit $|t-t_0|\le\delta$. Dann folgt aus (7.6)

$$\|(t_0-t)BR(t_0)\|\le|t_0-t|\frac{2\alpha+\beta}{1-\alpha}\le\delta\frac{2\alpha+\beta}{1-\alpha}=\frac{1}{2}<1.$$

Dies impliziert aber die Invertierbarkeit von $I+(t_0-t)BR(t_0)$, und der Satz ist bewiesen. □

Korollar 7.8 *Sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe von Kontraktionen. Sei ferner $B:D(B)\to X$ dissipativ, $D(A)\subset D(B)$, und es gelte*

$$\exists 0\le\alpha<1,\ \beta\ge0:\ \forall x\in D(A):\ \|Bx\|\le\alpha\|Ax\|+\beta\|x\|.$$

Dann ist $A+B$ der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe von Kontraktionen.

Beweis: Nach Satz 3.26 von Lumer-Phillips ist A m-dissipativ. Wir behaupten, daß daher $A+tB$ dissipativ für alle $0\le t\le1$ ist. Da nämlich B dissipativ ist, gibt es zu jedem $x\in D(A)\subset D(B)$ ein $x_0'\in F(x)=\{x'\in X':\ \langle x',x\rangle=\|x\|^2=\|x'\|^2\}$, so daß

$$\mathrm{Re}\langle x_0',Bx\rangle\le0.$$

Nun ist A m-dissipativ, also gilt *für alle* $x'\in F(x)$: $\mathrm{Re}\langle x',Ax\rangle\le0$ (Bemerkung 3.27). Daher ist

$$\mathrm{Re}\langle x_0',Ax+tBx\rangle\le0.$$

Aus Satz 7.7 folgt (für $t_0=0$), daß $A+tB$ m-dissipativ für alle $t\in[0,1]$ ist. Insbesondere ist $A+B$ m-dissipativ. Außerdem ist $D(A+B)=D(A)$ dicht in X. Nach Satz 3.26 von Lumer-Phillips ist $A+B$ der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe von Kontraktionen. □

Intermezzo 5: Schrödingergleichung mit Potential

Ein Elektron, das sich in einem elektrischen Feld $E=-\nabla V$ mit elektrostatischem Potential $V=V(x)$ im $\mathbb{R}^d$ bewegt, wird durch die folgende Schrödingergleichung beschrieben:

$$i\frac{\partial u}{\partial t}=-\Delta u+V(x)u,\quad x\in\mathbb{R}^d,\ t\in\mathbb{R},\tag{7.7}$$

$$u(\cdot,0)=u_0,\quad x\in\mathbb{R}^d.\tag{7.8}$$

Wir wollen diese Gleichung in dem Hilbertraum $H = L^2(\mathbb{R}^d)$ lösen. In Intermezzo 3 haben wir gezeigt, daß der Operator iA_0 selbstadjungiert ist, wobei $A_0 = i\Delta$ und $D(A_0) = H^2(\mathbb{R}^d)$ (Lemma 5.19). Das Potential V behandeln wir als Störung: Definiere den Operator $B : D(B) \to H$ durch

$$\begin{aligned} D(B) &= \{u \in H : V(x) \cdot u \in H\}, \\ (Bu)(x) &= -iV(x)u(x), \quad u \in D(B). \end{aligned}$$

Sei zuerst $V \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dann folgt $D(B) = H$, und B ist linear und beschränkt mit $\|B\| \leq \|V\|_{L^\infty}$. Da iA_0 selbstadjungiert, ist $\pm A_0$ m-dissipativ (Übungsaufgabe). Dies kann man auch leicht direkt einsehen. Es gilt nämlich wegen $H = H'$ für $u \in D(A)$

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\langle u, \pm A_0 u\rangle &= \mathrm{Re}(u, \pm i\Delta u)_{L^2} = \mp \mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot \overline{(i\nabla u)}\, dx \\ &= \pm \mathrm{Re} \int_{R^d} i|\nabla u|^2 \, dx = 0 \end{aligned}$$

und $R(I \mp A_0) = H$, denn

$$if = iu \pm \Delta u = i(I \mp A_0)u \quad \text{in } \mathbb{R}^d$$

hat nach Lemma 5.18 zu jedem $f \in H$ genau eine Lösung $u \in H^2(\mathbb{R}^d) = D(A)$. Nach dem Satz 3.26 von Lumer-Phillips ist A_0 der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe von Kontraktionen. Nach Satz 7.1 ist auch $A+B$ der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$ mit $\|T(t)\| \leq \exp(\|V\|_{L^\infty} t)$. Daher ist für $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^d)$ die Funktion $u(t) := T(t)u_0$ eine Lösung von (7.7)-(7.8) mit $u \in C^1([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^d)) \cap C^0([0,\infty); H^2(\mathbb{R}^d))$.

Von einem physikalischen Standpunkt aus ist der Fall unbeschränkter Potentiale V interessanter. Sei daher

$$V \in L^p(\mathbb{R}^d) \text{ mit } p > d/2 \text{ und } p \geq 2. \tag{7.9}$$

Wir müssen beweisen, daß der oben definierte Operator B wohldefiniert ist und daß $H^2(\mathbb{R}^d) = D(A) \subset D(B)$ gilt. Dies folgt aus dem folgenden Lemma.

Lemma 7.9 *Es gelte (7.9). Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $C(\varepsilon) > 0$, so daß*

$$\|Vu\|_{L^2} \leq \varepsilon \|\Delta u\|_{L^2} + C(\varepsilon)\|u\|_{L^2} \quad \forall u \in H^2(\mathbb{R}^d).$$

Beweis: Zuerst bemerken wir, daß wegen $p > d/2$ die Abbildung $\xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{-1}$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ liegt, denn

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^{-p} \, d\xi &= \int_0^\infty \int_S (1 + \rho^2)^{-p} \rho^{d-1} \, F(\theta) d\theta \, d\rho \\ &\leq C \int_0^\infty (1 + \rho)^{-2p+d-1} \, d\rho \\ &= \frac{C}{d - 2p} \left[(1 + \rho)^{-2p+d}\right]_0^\infty < \infty \end{aligned}$$

genau dann, wenn $-2p+d<0$ oder $p>d/2$. Hierbei bezeichnen θ die Winkelvariablen, $\rho^{d-1}F(\theta)$ die Determinante der Jacobimatrix der Variablentransformation und S der Definitionsbereich der Winkelvariablen.

Sei nun $u \in H^2(\mathbb{R}^d)$. Nach Definition der Sobolev-Räume (siehe Intermezzo 3) ist dann $(1+|\xi|^2)\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Mit der Hölderungleichung und der Parseval-Gleichung (5.4) erhalten wir für $q = 2p/(2+p) \in [1,2)$ (für $p > 2$):

$$\begin{aligned}
\|\widehat{u}\|_{L^q} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^{-q}\,(1+|\xi|^2)^q\,|\widehat{u}(\xi)|^q\,d\xi\right)^{1/q} \\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^{-q\cdot 2/(2-q)}\,d\xi\right)^{(2-q)/2q} \\
&\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^{q\cdot 2/q}\,|\widehat{u}(\xi)|^{q\cdot 2/q}\,d\xi\right)^{q/2q} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^{-p}\,d\xi\right)^{1/p} \left(\int_{R^d} (1+|\xi|^2)^2\,|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2} \\
&\le C\left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^4)\,|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2} \\
&= C\left(\int_{\mathbb{R}^d} (|\widehat{u}(\xi)|^2+|\widehat{\Delta u}(\xi)|^2)\,d\xi\right)^{1/2} \\
&\le C(\|u\|_{L^2}+\|\Delta u\|_{L^2}),
\end{aligned}$$

denn

$$\widehat{\Delta u}(\xi) = \sum_{k=1}^d \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}}(\xi) = \sum_{k=1}^d (i\xi_k)^2\hat{u}(\xi) = -|\xi|^2\hat{u}(\xi).$$

In der obigen Abschätzung ist $C>0$ eine generische Konstante. Im Falle $p=2$ folgt die obige Ungleichung trivialerweise.

Wir verwenden nun die folgende Ungleichung (der Beweis ist recht aufwendig; siehe [2, 8]):

Ungleichung von Haussdorff-Young: Seien $1<q\le 2$ und $2\le r<\infty$ mit $1/q+1/r=1$ und sei $f \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Dann ist $\widehat{f} \in L^r(\mathbb{R}^d)$ und

$$\|\widehat{f}\|_{L^r} \le K\|f\|_{L^q}$$

mit $K = (q^{1/q}r^{-1/r})^{d/2} \le 1$.

Aus dieser Ungleichung folgt mit $u = \widehat{f}$ und $f(x) = \check{u}(x) = \widehat{u}(-x)$:

$$\|u\|_{L^r} \le \|\widehat{u}(-x)\|_{L^q} = \|\widehat{u}\|_{L^q},$$

wobei $r = q/(q-1) = 2p/(p-2)$ ($r < \infty$ beliebig, falls $p = 2$). Daher erhalten wir

$$\|u\|_{L^r} \leq C_p(\|u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^2}). \tag{7.10}$$

Ersetze nun $u(x)$ durch $u(\delta x)$ mit $\delta > 0$. Dann ist $\Delta(u(\delta x)) = \delta^2 \Delta u(\delta x)$ und

$$\begin{aligned}
\|\Delta(u(\delta x))\|_{L^2} &= \delta^2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\Delta u(\delta x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \\
&= \delta^2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} \delta^{-d} |\Delta u(y)|^2 \, dy \right)^{1/2} \\
&= \delta^{2-d/2} \|\Delta u\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\|u(\delta x)\|_{L^2} = \delta^{-d/2} \|u\|_{L^2}, \qquad \|u(\delta x)\|_{L^r} = \delta^{-d/r} \|u\|_{L^r}.$$

Setzen wir $u(\delta x)$ für $u(x)$ in (7.10) ein, so erhalten wir nach Multiplikation mit $\delta^{d/r}$:

$$\|u\|_{L^r} \leq C_p(\delta^{2-d(r-2)/2r} \|\Delta u\|_{L^2} + \delta^{-d(r-2)/2r} \|u\|_{L^2}).$$

Aus $p > d/2$ folgt $r > 2$ und $2 - d(r-2)/2r > 0$. Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $\delta^{2-d(r-2)/2r} = \varepsilon / C_p \|V\|_{L^p}$ und $C(\varepsilon) = C_p \|V\|_{L^p} \delta^{-d(r-2)/2r}$. Dann folgt

$$\|V\|_{L^p} \|u\|_{L^r} \leq \varepsilon \|\Delta u\|_{L^2} + C(\varepsilon) \|u\|_{L^2}.$$

Wegen $r = 2p/(p-2)$ (oder $r < \infty$, wenn $p = 2$) und

$$\begin{aligned}
\|Vu\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |V|^2 |u|^2 \, dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |V|^{2 \cdot p/2} \right)^{2/p} \left(\int_{R^d} |u|^{2 \cdot p/(p-2)} \right)^{(p-2)/p} \\
&= \|V\|_{L^p}^2 \|u\|_{L^r}^2
\end{aligned}$$

folgt die Behauptung. □

Satz 7.10 *Es gelte (7.9) und $V(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Dann ist $A_0 + B = i\Delta - iV$ der infinitesimale Generator einer C_0-Gruppe unitärer Operatoren in $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Beweis: Wir haben bereits weiter oben bemerkt, daß $\pm A_0$ m-dissipativ ist. Da $V(x)$ reell ist, ist $-iB = V$ symmetrisch, und damit ist $iA_0 + iB = -\Delta + V$ symmetrisch. Um zu zeigen, daß $iA_0 + iB$ selbstadjungiert ist, genügt es nach Satz 5.13 zu beweisen, daß $R(I \pm (A_0 + B)) = R(\pm I - (A_0 + B)) = R(\pm iI - i(A_0 + B)) = H$ gilt. Da $V(x)$ reell, ist $\pm(A_0 + tB)$ für alle $t \in [0, 1]$ dissipativ.

Wegen Lemma 7.9 sind also die Voraussetzungen von Satz 7.7 erfüllt, d.h., $\pm(A_0+B)$ ist m-dissipativ. Insbesondere ist $R(I \pm (A_0 + B)) = H$, und $i(A_0 + B)$ ist selbstadjungiert. Nach Satz 5.17 von Stone ist daher $A_0 + B$ der infinitesimale Generator einer C_0-Gruppe von unitären Operatoren. □

Korollar 7.11 *Es gelte (7.9) mit $V(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und sei $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^d)$. Das Anfangswertproblem (7.7)-(7.8) besitzt eine Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^d)) \cap C^0(\mathbb{R}; H^2(\mathbb{R}^d))$ mit*

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

8 Das abstrakte Cauchyproblem

Ziel dieses Kapitel ist die Lösung von homogenen Anfangswertproblemen

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad t > 0, \quad u(0) = x, \tag{8.1}$$

und von inhomogenen Anfangswertproblemen

$$\frac{du}{dt} = Au + f, \quad t > 0, \quad u(0) = x.$$

Wir betrachten zuerst homogene Probleme. Seien X ein Banachraum und $A : D(A) \subset X \to X$ ein linearer Operator. Wir werden die Fälle $x \in D(A)$ und $x \in X$ unterscheiden.

Definition 8.1 *Sei $x \in X$. Die Funktion $u : [0, T) \to X$, $0 < T \leq \infty$, heißt* (klassische) Lösung *von (8.1) genau dann, wenn u (8.1) löst und*

$$u \in C^0([0, T); X) \cap C^1((0, T); X), \quad u(t) \in D(A) \quad \forall t \in (0, T). \tag{8.2}$$

Sei u eine Lösung von (8.1). Wegen $u(t) \in D(A)$ für $t > 0$ und der Stetigkeit von u an $t = 0$ folgt $x = u(0) \in \overline{D(A)}$. Wir sollten daher die Bedingung $\overline{D(A)} = X$ voraussetzen, denn anderenfalls ist es für gegebenes $x \in X$, $x \notin \overline{D(A)}$ möglich, daß das Anfangswertproblem (8.1) keine Lösung besitzt.

Satz 8.2 *Sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$ und sei $x \in D(A)$. Dann besitzt (8.1) genau eine Lösung $u(t)$ für alle $0 \leq t < \infty$.*

Beweis: Die Existenz einer Lösung folgt sofort aus Satz 4.3 von Hille-Yosida und Satz 3.4(3) mit $u(t) := T(t)x$. Um die Eindeutigkeit zu zeigen, sei v eine weitere Lösung von (8.1). Wegen

$$\frac{d}{ds}(T(t-s)v(s)) = -AT(t-s)v(s) + T(t-s)Av(s) = 0$$

für alle $0 < s < t$ folgt nach Integration von $s = 0$ bis $s = t$

$$0 = T(t-t)v(t) - T(t-0)v(0) = v(t) - T(t)u(0) = v(t) - u(t),$$

also $u(t) = v(t)$ für alle $t \geq 0$. □

Bemerkung 8.3 Sei $A : D(A) \to X$ mit $\overline{D(A)} = X$ und $\rho(A) \neq \emptyset$. Besitzt (8.1) eine Lösung $u(t)$ in $[0, \infty)$ und für alle $x \in D(A)$, so ist der Operator A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe. Für den (recht umfangreichen) Beweis verweisen wir auf [10, Theorem 1.3, Chapter 4].

Satz 8.4 *Sei A der infinitesimale Generator einer differenzierbaren C_0-Halbgruppe und sei $x \in X$. Dann besitzt (8.1) genau eine Lösung $u(t)$ für alle $t > 0$.*

Beweis: Wegen der Differenzierbarkeit der Halbgruppe $T(t)$ erfüllt die Funktion $u(t) = T(t)x$ die Gleichung (8.1). Die Regularität folgt aus Lemma 6.4. □

Bemerkung 8.5 Sei A der infinitesimale Generator einer nicht differerenzierbaren C_0-Halbgruppe $T(t)$. Falls $x \notin D(A)$, besitzt das Problem (8.1) im allgemeinen *keine* Lösung. Dennoch kann man die Funktion $u(t) := T(t)x$ definieren. Dann ist $u(t)$ eine verallgemeinerte Lösung. Wir nennen sie *milde Lösung.*

Wir betrachten nun inhomogene Anfangswertprobleme

$$\frac{du}{dt} = Au + f, \quad t > 0, \quad u(0) = x, \tag{8.3}$$

wobei $f : [0, T) \to X$ und $x \in X$. Wir setzen im folgenden voraus, daß A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$ ist. Wir definieren:

Definition 8.6 *Eine Funktion $u : [0, T) \to X$ heißt* (klassische) Lösung *von (8.3) genau dann, wenn u (8.3) auf $[0, T)$ löst und*

$$u \in C^0([0, T); X) \cap C^1((0, T), X), \quad u(t) \in D(A) \quad \forall t > 0.$$

Sei nun u eine Lösung von (8.3). Dann ist $g(s) := T(t-s)u(s)$ differenzierbar für $0 < s < t$ (nach Satz 3.4(3), denn $u(s) \in D(A)$) und

$$\begin{aligned} \frac{dg}{ds}(s) &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)(Au(s) + f(s)) \\ &= T(t-s)f(s). \end{aligned}$$

Sei nun zusätzlich $f \in L^1(0, T; X)$. Dann ist $s \mapsto T(t-s)f(s)$ integrierbar, und wir erhalten

$$u(t) - T(t)u(0) = g(t) - g(0) = \int_0^t T(t-s)f(s)\, ds$$

oder

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)\, ds. \tag{8.4}$$

Ist (8.3) eine gewöhnliche Differentialgleichung und A eine Matrix, so ist (nach Satz 2.3) $T(t) = e^{At}$, und die Beziehung (8.4) ist die Formel der Variation der Konstanten.

Definition 8.7 *Sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$ und seien $x \in X$ und $f \in L^1(0,T;X)$. Dann heißt die durch (8.4) definierte Funktion $u \in C^0([0,T];X)$* milde Lösung *von (8.3).*

Satz 8.8 *Seien $f \in L^1(0,T;X)$, $x \in X$ und u eine (klassische) Lösung von (8.3) auf $[0,T)$. Dann ist u eindeutig durch (8.4) bestimmt, d.h., u ist insbesondere eine milde Lösung.*

Beweis: Daß u eine milde Lösung ist, haben wir bereits bewiesen. Sei v eine zweite Lösung von (8.3). Dann erfüllt $w := u - v$ das Problem

$$\frac{dw}{dt} = Aw, \quad t > 0, \quad w(0) = 0.$$

Nach Satz 8.2 ist dieses Problem eindeutig lösbar, nämlich durch $w(t) = 0$ für alle $t \geq 0$. Also ist $u = v$ auf $[0,T]$. □

Sind $f \in L^1(0,T;X)$ und $x \in X$, so hat das Problem (8.3) nach Definition 8.7 genau eine milde Lösung. Unter welchen Bedingungen an f ist diese Lösung, falls $x \in D(A)$, eine klassische Lösung? Die Stetigkeit von f genügt nicht. Um dies einzusehen, sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$ und sei $x \in X$, so daß $T(t_0)x \notin D(A)$ für ein $t_0 > 0$. Setze $f_1(t) = T(t)x$. Dann gilt $f_1 \in C^0([0,T);X)$, doch das Problem

$$\frac{du}{dt} = Au + f_1(t), \quad t > 0, \quad u(0) = 0 \in D(A),$$

besitzt keine Lösung. Hätte sie nämlich eine Lösung $u(t) \in D(A)$, so wäre wegen (8.4)

$$\begin{aligned} u(t) &= T(t)0 + \int_0^t T(t-s)f_1(s)x\,ds = \int_0^t T(t-s)T(s)x\,ds \\ &= tT(t)x, \end{aligned}$$

doch $u(t_0) = t_0 T(t_0)x \notin D(A)$; Widerspruch.

Wir beweisen nun folgendes Hilfsresultat:

Lemma 8.9 *Seien A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$, $f \in L^1(0,T;X) \cap C^0((0,T);X)$ und*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Dann gilt: Das Problem (8.3) hat eine Lösung u auf $[0,T)$ für alle $x \in D(A)$, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(1) $v \in C^1((0,T);X)$ *oder*

(2) $v(t) \in D(A)$ *für alle* $t \in (0,T)$ *und* $Av \in C^0((0,T);X)$.

Wenn (8.3) eine Lösung u *auf* $[0,t)$ *für ein* $x \in D(A)$ *hat, dann erfüllt* v *sowohl (1) also auch (2).*

Beweis: Sei u eine Lösung von (8.3) auf $[0,t)$ für ein $x \in D(A)$. Dann ist u gegeben durch (8.4). Da $t \mapsto u(t)$ und $t \mapsto T(t)x$ für $t > 0$ differenzierbar sind, gilt dies auch für $v(t) = u(t) - T(t)x$, und $v'(t) = u'(t) - T(t)Ax$ ist stetig für $t > 0$. Folglich ist (1) erfüllt. Des weiteren gilt $T(t)x \in D(A)$ wegen $x \in D(A)$ (siehe Satz 3.4(3)), also $v(t) = u(t) - T(t)x \in D(A)$. Schließlich ist $Av(t) = Au(t) - AT(t)x = u'(t) - f(t) - T(t)Ax$ stetig für $t > 0$, d.h., auch (2) ist erfüllt.

Umgekehrt sei die Bedingung (1) vorausgesetzt. Dann ist

$$\begin{aligned} v(t+h) &= \int_0^t T(h)T(t-s)f(s)\,ds + \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)\,ds \\ &= T(h)v(t) + \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)\,ds, \end{aligned}$$

also

$$\frac{T(h)-I}{h}v(t) = \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)\,ds. \tag{8.5}$$

Da v stetig differenzierbar und f stetig ist, folgt

$$\frac{T(h)-I}{h}v(t) \to v'(t) - f(t).$$

Dies bedeutet $v(t) \in D(A)$ für $0 < t < T$ und $Av(t) = v'(t) - f(t)$. Wegen $v(0) = 0$ folgt, daß $u(t) = T(t)x + v(t)$ eine Lösung von (8.3) ist. Insbesondere gilt (2).

Sei schließlich (2) erfüllt. Insbesondere ist $v(t) \in D(A)$, d.h., der Grenzwert $h \to 0+$ auf der linken Seite von (8.5) existiert. Der zweite Summand auf der rechten Seite von (8.5) konvergiert ebenfalls für $h \to 0+$. Also existiert die rechtsseitige Ableitung $D^+v(t)$ von $v(t)$ und

$$Av(t) = D^+v(t) - f(t).$$

Nun ist $D^+v = Av + f$ stetig in $(0,T)$ (nach Voraussetzung (2)), d.h., v ist stetig differenzierbar und $v'(t) = Av(t) + f(t)$. Die Funktion $u(t) = T(t)x + v(t)$ ist also eine Lösung von (8.3) für $x \in D(A)$. Außerdem ist (1) erfüllt. □

Bemerkung 8.10 In dem obigen Beweis haben wir sogar gezeigt, daß die Aussagen (1), (2) und "Das Problem (8.3) hat eine Lösung u auf $[0,T)$ für alle $x \in D(A)$" äquivalent sind.

Korollar 8.11 *Sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$ und sei $x \in D(A)$. Es gelte*

(1) $f \in C^1([0,T];X)$ *oder*

(2) $f \in L^1(0,T;X) \cap C^0((0,T);X)$ *und* $f(s) \in D(A),\ Af(s) \in L^1(0,T;X)$ *für alle* $0 < s < T$.

Dann besitzt das Problem (8.3) eine Lösung auf $[0,T)$.

Beweis: Es sei (1) erfüllt. Definiere

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds = \int_0^t T(s)f(t-s)\,ds, \quad 0 \le t < T. \tag{8.6}$$

Nach Voraussetzung (1) ist v differenzierbar für $t > 0$ und

$$\begin{aligned} v'(t) &= T(t)f(0) + \int_0^t T(s)f'(t-s)\,ds \\ &= T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)\,ds \end{aligned}$$

ist stetig für $t > 0$. Die Aussage folgt also aus Lemma 8.9(1).

Es gelte (2). Insbesondere gilt $T(t-s)f(s) \in D(A)$ (Satz 3.4(3)) für $0 < s < t$, und die Abbildung $s \mapsto AT(t-s)f(s) = T(t-s)Af(s)$ ist integrierbar. Damit ist die Funktion v, definiert durch (8.6), wohldefiniert und $v(t) \in D(A)$ für $t > 0$. Außerdem ist

$$Av(t) = \int_0^t AT(t-s)f(s)\,ds = \int_0^t T(t-s)Af(s)\,ds$$

stetig für $t > 0$. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 8.9(2). $\square$

Wir betrachten nun eine dritte Definition einer "Lösung" von (8.3).

Definition 8.12 *Eine Funktion $u:\ [0,T] \to X$ heißt* starke Lösung *von (8.3) genau dann, wenn u fast überall in $[0,T]$ differenzierbar ist, wenn $u' \in L^1(0,T;X)$ gilt und wenn*

$$u'(t) = Au(t) + f(t) \text{ für fast alle } t \in (0,T) \text{ und } u(0) = x.$$

Beispiel 8.13 Seien $A = 0,\ x \in X$ und $f \in L^1(0,T;X)$. Dann besitzt (8.3) im allgemeinen keine (klassische) Lösung. Allerdings besitzt (8.3) die starke Lösung

$$u(t) = x + \int_0^t f(s)\,ds, \quad t \ge 0.$$

Bemerkung 8.14 Seien $f \in L^1(0,T;X)$ und u eine starke Lösung von (8.3). Man kann zeigen, daß u durch (8.4) gegeben ist (Übungsaufgabe). Dies bedeutet, daß jede starke Lösung eine milde Lösung ist. Eine klassische Lösung muß nicht notwendigerweise auch eine starke Lösung sein (Übungsaufgabe).

Unter welchen Bedingungen sind milde Lösungen von (8.3) sogar starke Lösungen? Der folgende Satz, den man wie Korollar 8.11(1) beweist, gibt ein Kriterium.

Satz 8.15 *Sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$, sei $x \in D(A)$ und sei $f : [0,T] \to X$ fast überall differenzierbar mit $f' \in L^1(0,T;X)$. Dann besitzt das Problem (8.3) eine starke Lösung auf $[0,T]$.*

Bemerkung 8.16 Wir fassen die obigen Resultate zusammen. Sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe. Dann gilt:

- $f \in L^1(0,T;X),\ x \in X \Rightarrow$ (8.3) besitzt eine milde Lösung auf $[0,T]$;
- $f' \in L^1(0,T;X),\ x \in D(A) \Rightarrow$ (8.3) besitzt eine starke Lösung auf $[0,T]$;
- $f \in C^1([0,T];X),\ x \in D(A) \Rightarrow$ (8.3) besitzt eine klassische Lösung auf $[0,T]$.

Ist $T(t)$ eine analytische Halbgruppe, so genügen schwächere Regularitätsvoraussetzungen an f als in Korollar 8.11. Wir werden zeigen, daß für die Existenz von klassischen Lösungen die Hölder-Stetigkeit von f ausreichend ist. Zuerst zeigen wir ein Regularitätsresultat.

Satz 8.17 *Sei A der infinitesimale Generator einer analytischen Halbgruppe $T(t)$ und sei $f \in L^p(0,T;X)$ mit $1 < p < \infty$. Sei weiter u die milde Lösung von (8.3). Dann gilt für $\theta = (p-1)/p$:*

(1) $x \in X \Rightarrow u \in C^\theta([\varepsilon,T];X) \quad \forall \varepsilon > 0$;

(2) $x \in D(A) \Rightarrow u \in C^\theta([0,T];X)$.

Der Raum $C^\theta([0,T];X)$ ist die Menge aller Hölder-stetigen Funktionen $[0,T] \to X$ mit Exponent $\theta \in (0,1)$, d.h. $u \in C^\theta([0,T];X)$ genau dann, wenn

$$\exists L > 0 :\ \forall s,t \in [0,T] : \quad \|u(t) - u(s)\| \le L|t-s|^\theta. \tag{8.7}$$

Beweis: Sei $\|T(t)\| \le M$ für $t \in [0,T]$. Da $T(z)$ analytisch, existiert nach Satz 6.12(4) ein $C > 0$, so daß $\|AT(t)\| \le C/t$ für alle $0 < t \le T$. Dies impliziert nach Satz 3.4(3) für $x \in X$ (beachte, daß $t \mapsto T(t)x$ differenzierbar für $t > 0$ ist):

$$\begin{aligned}
\|T(t)x - T(s)x\| &= \left\| \int_s^t AT(\tau)x\, d\tau \right\| \\
&\le \left| \int_s^t \frac{C}{\tau}\, d\tau \right| \cdot \|x\| \\
&= C|\ln t - \ln s| \cdot \|x\| \\
&\le C_\varepsilon |t-s| \cdot \|x\|
\end{aligned}$$

für alle $0 < \varepsilon \le s, t \le T$. Mithin ist $t \mapsto T(t)x$ Lipschitz-stetig in $[\varepsilon, T]$ für alle $\varepsilon > 0$. Ist $x \in D(A)$, so gilt $(T(t)x - T(0)x)/t \to Ax$ für $t \to 0+$, also

$$\|T(t)x - T(0)x\| \le Ct \quad \forall t > 0,$$

und ähnlich wie in Bemerkung 2.2 folgert man, daß $t \mapsto T(t)x$ Lipschitz-stetig in $[0, T]$ ist, wenn $x \in D(A)$. Wegen der Darstellung (8.4) von u genügt es also zu zeigen, daß

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds$$

für $f \in L^p(0,T;X)$ Hölder-stetig mit Exponent θ auf $[0,T]$ ist.

Für $h > 0$ mit $t + h \le T$ ist

$$\begin{aligned} v(t+h) - v(t) &= \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)\,ds \\ &\quad + \int_0^t (T(t+h-s) - T(t-s))f(s)\,ds \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Um I_1 abzuschätzen, verwenden wir die Hölder-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|I_1\| &\le M \int_t^{t+h} \|f(s)\|\,ds \\ &\le M \left(\int_t^{t+h} 1^{p/(p-1)}\,ds \right)^{(p-1)/p} \left(\int_t^{t+h} \|f(s)\|^p\,ds \right)^{1/p} \\ &\le M h^{(p-1)/p} \left(\int_0^T \|f(s)\|^p\,ds \right)^{1/p} \\ &= M\|f\|_{L^p(0,T;X)} h^\theta, \end{aligned}$$

wobei $\|\cdot\|_{L^p(0,T;X)}$ die Norm in $L^p(0,T;X)$ ist. Für die Abschätzung von I_2 bemerken wir, daß

$$\begin{aligned} \|T(t+h) - T(t)\| &\le 2M \qquad \forall t, t+h \in [0,T], \\ \|T(t+h) - T(t)\| &\le C|\ln(t+h) - \ln t| \\ &= C\ln(1 + h/t) \\ &\le Ch/t \qquad \forall t, t+h \in (0,T], \end{aligned}$$

also

$$\|T(t+h) - T(t)\| \le C_1 \min(1, h/t) \quad \forall t, t+h \in [0,T],$$

wobei $C_1 = \max(2M, C)$. Diese Ungleichung und die Hölder-Ungleichung führen auf

$$\begin{aligned}
\|I_2\| &\leq C_1 \int_0^t \min(1, h/(t-s)) \|f(s)\| \, ds \\
&\leq C_1 \left(\int_0^t \min(1, h/(t-s))^{1/\theta} \, ds \right)^\theta \|f\|_{L^p(0,T;X)}.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\int_0^t \min(1, h/(t-s))^{1/\theta} \, ds &= \int_0^t \min(1, h/\tau))^{1/\theta} \, d\tau \\
&\leq \int_0^\infty \min(1, h/\tau)^{1/\theta} \, d\tau \\
&= \int_0^h 1 \, d\tau + h^{1/\theta} \int_h^\infty \tau^{-1/\theta} \, d\tau \\
&= h + h^{1/\theta} \Big(-\frac{1}{\theta} + 1 \Big)^{-1} \left[\tau^{-1/\theta+1} \right]_h^\infty \\
&= h - h^{1/\theta}(p-1) \left[-h^{-1/\theta+1} \right] \\
&= ph
\end{aligned}$$

ergibt sich

$$\|I_2\| \leq C_1 p^\theta \|f\|_{L^p(0,T;X)} h^\theta,$$

und insgesamt folgt

$$\|v(t+h) - v(t)\| \leq \|I_1\| + \|I_2\| \leq \text{const.} \cdot h^\theta,$$

also die Behauptung. □

Satz 8.18 *Seien A der infinitesimale Generator einer analytischen Halbgruppe $T(t)$, $f \in L^1(0,T;X)$, $x \in X$, und für alle $t \in (0,T)$ existieren $\delta_t > 0$ und $W_t : [0,\infty) \to [0,\infty)$, so daß*

$$\|f(t) - f(s)\| \leq W_t(|t-s|) \quad \forall 0 > s, t < T \tag{8.8}$$

und

$$\int_0^{\delta_t} \frac{W_t(s)}{s} \, ds < \infty. \tag{8.9}$$

Dann ist die milde Lösung von (8.3) eine klassische Lösung.

Ist $f \in C^\theta([0,T];X)$ mit $0 < \theta < 1$, so sind (8.8) und (8.9) mit $W_t(s) = s^\theta$ erfüllt.

Beweis: Da $T(z)$ eine analytische Halbgruppe ist, ist $t \mapsto T(t)x$ die (klassische) Lösung der homogenen Gleichung für alle $x \in X$ (insbesondere ist $T(t)x \in D(A)$ für $t > 0$). Wir zeigen nun, daß

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds$$

die Bedingung (2) von Lemma 8.9 (d.h. $v(t) \in D(A)$ für $t > 0$ und $Av \in C^0((0,T); X))$ erfüllt. Da $T(t)x \in D(A)$ für $t > 0$, können wir Lemma 8.9 anwenden, obwohl wir nur $x \in X$ fordern. Wir schreiben

$$\begin{aligned} v(t) &= v_1(t) + v_2(t) \\ &:= \int_0^t T(t-s)(f(s) - f(t))\,ds + \int_0^t T(t-s)f(t)\,ds. \end{aligned}$$

Nach Satz 3.4(2) gilt $v_2(t) \in D(A)$ und $Av_2(t) = (T(t) - I)f(t)$. Da nach Voraussetzung $f \in C^0([0,T];X)$, folgt $Av_2 \in C^0((0,T);X)$. Setze nun für $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} v_{1,\varepsilon}(t) &= \int_0^{t-\varepsilon} T(t-s)(f(s) - f(t))\,ds \qquad \forall t \geq \varepsilon, \\ v_{1,\varepsilon}(t) &= 0 \qquad \forall t < \varepsilon. \end{aligned}$$

Dann gilt $v_{1,\varepsilon}(t) \to v_1(t)$ für $\varepsilon \to 0$, $v_{1,\varepsilon}(t) \in D(A)$ (denn $T(t) : X \to D(A)$ für $t > 0$ nach Lemma 6.4) und für $t \geq \varepsilon$

$$Av_{1,\varepsilon}(t) = \int_0^{t-\varepsilon} AT(t-s)(f(s) - f(t))\,ds.$$

Aus Satz 6.12(4), (8.8) und (8.9) folgt

$$\left\| \int_{t-\varepsilon}^t AT(t-s)(f(s) - f(t))\,ds \right\| \leq \int_{t-\varepsilon}^t \frac{C}{t-s} W_t(|t-s|)\,ds < \infty.$$

Daher gilt

$$Av_{1,\varepsilon}(t) \to \int_0^t AT(t-s)(f(s) - f(t))\,ds \quad (\varepsilon \to 0).$$

Wegen $v_{1,\varepsilon}(t) \to v_1(t)$ $(\varepsilon \to 0)$ und der Abgeschlossenheit von A folgt $v_1(t) \in D(A)$ für $t > 0$ und

$$Av_1(t) = \int_0^t AT(t-s)(f(s) - f(t))\,ds.$$

Um zu zeigen, daß $t \mapsto Av_1(t)$ für $t > 0$ stetig ist, schreiben wir für $0 < \delta < t$

$$Av_1(t) = \int_0^\delta AT(t-s)(f(s) - f(t))\,ds + \int_\delta^T AT(t-s)(f(s) - f(t))\,ds. \quad (8.10)$$

Das erste Integral auf der rechten Seite von (8.10) ist in der Norm von der Größenordnung

$$C\int_0^\delta \frac{W_t(|t-s|)}{|t-s|}\,ds \qquad \text{gleichmäßig in } t.$$

Das rechte Integral ist stetig in t. Also ist $Av_1 \in C^0((0,T);X)$. □

Wir haben bewiesen:

Korollar 8.19 *Sei A der infinitesimale Generator einer analytischen Halbgruppe. Seien ferner $f \in C^\theta([0,T];X)$ für $0 < \theta < 1$ und $x \in X$. Dann besitzt das Problem (8.3) genau eine Lösung auf $[0,T)$.*

Unter den Voraussetzungen von Korollar 8.19 kann noch mehr gezeigt werden. Dazu benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 8.20 *Sei A der infinitesimale Generator einer analytischen Halbgruppe $T(t)$ und sei $f \in C^\theta([0,T];X)$ für ein $0 < \theta < 1$. Definiere*

$$v_1(t) := \int_0^t T(t-s)(f(s) - f(t))\,dt, \quad 0 \le t \le T.$$

Dann gilt $v_1(t) \in D(A)$ für alle $0 \le t \le T$ und $Av_1 \in C^\theta([0,T];X)$.

Beweis: Aus dem Beweis von Satz 8.18 folgt, daß $v_1(t) \in D(A)$ für $0 \le t \le T$. Sei $\|T(t)\| \le M$, $0 \le t \le T$. Nach Satz 6.12(4) gilt

$$\|AT(t)\| \le C/t \quad \forall 0 < t \le T.$$

Daraus folgt für $x \in X$:

$$\begin{aligned} \|A^2T(t)x\| &= \|AT(t/2)AT(t/2)x\| \le C(t/2)^{-1}\|AT(t/2)x\| \\ &\le C(t/2)^{-2}\|x\| = 4Ct^{-2}\|x\|. \end{aligned}$$

Wir haben daher für $0 < s < t \le T$

$$\begin{aligned} \|AT(t) - AT(s)\| &= \left\|\int_s^t A^2T(\tau)\,d\tau\right\| \le \int_s^t \|A^2T(\tau)\|\,d\tau \\ &\le \int_s^t \frac{4C}{\tau^2}\,d\tau = 4C(t-s)/st. \quad (8.11) \end{aligned}$$

Seien nun $t \geq 0$ und $h > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
Av_1(t+h) - Av_1(t) &= A\int_0^t (T(t+h-s) - T(t-s))(f(s) - f(t))\,ds \\
&\quad + A\int_0^t T(t+h-s)(f(t) - f(t+h))\,ds \\
&\quad + A\int_t^{t+h} T(t+h-s)(f(s) - f(t+h))\,ds \\
&=: I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

Aus der Hölder-Stetigkeit von f (siehe (8.7)) und (8.11) folgt

$$\begin{aligned}
\|I_1\| &\leq \int_0^t \|AT(t+h-s) - AT(t-s)\| \cdot \|f(s) - f(t)\|\,ds \\
&\leq 4C\int_0^t \frac{((t+h-s) - (t-s))}{(t+h-s)(t-s)} L(t-s)^\theta\,ds \\
&= 4CLh\int_0^t \frac{ds}{(t+h-s)(t-s)^{1-\theta}} \\
&= 4CLh\int_0^t \frac{dy}{(y+h)y^{1-\theta}}.
\end{aligned}$$

Sei zuerst $t > h$. Dann ist

$$\begin{aligned}
h\int_0^t \frac{dy}{(y+h)y^{1-\theta}} &\leq h\int_0^h \frac{dy}{hy^{1-\theta}} + h\int_h^t \frac{dy}{y \cdot y^{1-\theta}} \\
&= \frac{1}{\theta}h^\theta + \frac{h}{1-\theta}(h^{\theta-1} - t^{\theta-1}) \\
&\leq \frac{1}{\theta}h^\theta + \frac{1}{1-\theta}h^\theta = \frac{h^\theta}{\theta(1-\theta)}.
\end{aligned}$$

Für $t \leq h$ folgt

$$h\int_0^t \frac{dy}{(y+h)y^{1-\theta}} \leq h\int_0^h \frac{dy}{hy^{1-\theta}} = \frac{1}{\theta}h^\theta.$$

Dies impliziert

$$\|I_1\| \leq C_1 h^\theta.$$

Wir verwenden Satz 3.4(2) und noch einmal die Hölder-Stetigkeit von f, um I_2 abzuschätzen:

$$\begin{aligned}
\|I_2\| &= \left\| A\int_h^{t+h} T(\tau)(f(t)-f(t+h))\,d\tau \right\| \\
&= \left\| A\int_0^{t+h} T(\tau)(f(t)-f(t+h))\,d\tau - A\int_0^{h} T(\tau)(f(t)-f(t+h))\,d\tau \right\| \\
&= \|T(t+h)(f(t)-f(t+h)) - T(h)(f(t)-f(t+h))\| \\
&\leq (\|T(t+h)\| + \|T(h)\|)\|f(t)-f(t+h)\| \\
&\leq 2MLh^\theta.
\end{aligned}$$

Ferner ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|I_3\| &= \left\| \int_t^{t+h} AT(t+h-s)(f(s)-f(t+h))\,ds \right\| \\
&\leq \int_t^{t+h} \frac{C}{t+h-s}\cdot Lh^\theta\,ds \\
&\leq CL\int_t^{t+h} \frac{(t-s+h)^\theta}{t-s+h}\,ds \\
&= \frac{CL}{\theta}h^\theta.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\|Av_1(t+h) - Av_1(t)\| \leq \|I_1\| + \|I_2\| + \|I_3\| \leq C_2 h^\theta,$$

also die Behauptung. □

Der folgende Satz ist unser Hauptresultat für analytische Halbgruppen. Er gibt einige Regularitätseigenschaften für die Lösung von (8.3) unter den Voraussetzungen von Korollar 8.19 an.

Satz 8.21 *Seien A der infinitesimale Generator einer analytischen Halbgruppe $T(t)$, $f \in C^\theta([0,T];X)$ für ein $0 < \theta < 1$ und $x \in X$. Dann besitzt das Problem (8.3) genau eine (klassische) Lösung u auf $[0,T]$ mit den folgenden Regularitätseigenschaften:*

(1) $\forall \varepsilon > 0: \ Au,\ du/dt \in C^\theta([\varepsilon,T];X)$.

(2) $x \in D(A) \Rightarrow Au,\ du/dt \in C^0([0,T];X)$.

(3) $x = 0,\ f(0) = 0 \Rightarrow Au,\ du/dt \in C^\theta([0,T];X)$.

Beweis: Nach Korollar 8.19 (und Satz 8.18) besitzt (8.3) eine eindeutige Lösung u mit

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds =: T(t)x + v(t).$$

Nach (8.11) ist $AT(t)x$ Lipschitz-stetig auf $[\varepsilon, T]$ für alle $\varepsilon > 0$, so daß wir für den Beweis von (1) nur $Av \in C^\theta([\varepsilon, T]; X)$ zeigen müssen. Wir schreiben wie im Beweis von Satz 8.18

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) := \int_0^t T(t-s)(f(s) - f(t))\,dt + \int_0^t T(t-s)f(t)\,ds.$$

Lemma 8.20 impliziert $Av_1 \in C^\theta([0, T]; X)$. Wie im Beweis von Satz 8.18 finden wir

$$Av_2(t) = A\int_0^t T(\tau)f(t)\,d\tau = (T(t) - I)f(t).$$

Da $f \in C^\theta([0, T]; X)$, genügt es, $T(t)f(t) \in C^\theta([\varepsilon, T]; X)$ für alle $\varepsilon > 0$ zu zeigen. Seien $t \geq \varepsilon$ und $h > 0$. Dann ist, weil $T(t)$ eine analytische Halbgruppe ist,

$$\begin{aligned}
&\|T(t+h)f(t+h) - T(t)f(t)\| \\
&\quad\leq \|T(t+h)\| \cdot \|f(t+h) - f(t)\| + \|T(t+h) - T(t)\| \cdot \|f(t)\| \\
&\quad\leq M \cdot Lh^\theta + \int_t^{t+h} \|AT(\tau)\| \cdot \|f(t)\|\,d\tau \\
&\quad\leq MLh^\theta + \int_t^{t+h} \frac{C}{\tau}\,d\tau \cdot \|f\|_{L^\infty(0,T;X)} \\
&\quad\leq MLh^\theta + \|f\|_{L^\infty(0,T;X)}\frac{C}{\varepsilon}h \\
&\quad\leq C_1 h^\theta.
\end{aligned}$$

Dies beweist (1), da $du/dt = Au + f \in C^\theta([\varepsilon, T]; X)$.

Für den Beweis von (2) bemerken wir, daß $x \in D(A)$ impliziert: $AT(t)x \in C^0([0, T]; X)$. Nach Lemma 8.20 ist $Av_1 \in C^\theta([0, T]; X)$. Wegen $Av_2(t) = T(t)f(t) - f(t)$ und $f \in C^\theta([0, T]; X)$ genügt es also, $T(t)f(t) \in C^0([0, T]; X)$ zu zeigen. Der Beweis von (1) zeigt, daß $T(t)f(t) \in C^0((0, T]; X)$. Die Stetigkeit an $t = 0$ folgt nun aus

$$\begin{aligned}
\|T(t)f(t) - T(0)f(0)\| &\leq \|T(t)f(0) - f(0)\| \\
&\qquad + \|T(t)(f(t) - f(0))\| \\
&\leq \|T(t)f(0) - f(0)\| + M\|f(t) - f(0)\| \\
&\to 0 \quad (t \to 0+).
\end{aligned}$$

Damit ist (2) bewiesen.

Der Beweis von (3) ist eine Übungsaufgabe. □

Beispiel 8.22 Betrachte die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(t), \qquad x \in \Omega,\ t > 0, \tag{8.12}$$

$$u = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0, \tag{8.13}$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \qquad x \in \Omega. \tag{8.14}$$

Wir setzen voraus: Es gebe ein $\theta \in (0,1)$, so daß $f \in C^\theta([0,T]; L^2(\Omega))$, d.h.

$$\int_\Omega |f(t,x) - f(s,x)|^2\, dx \leq L|t-s|^{2\theta} \quad \forall 0 \leq s,t \leq T. \tag{8.15}$$

Wie im Intermezzo 2 ist hier $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $X = L^2(\Omega)$, $A = \Delta$ mit $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Nach Beispiel 6.13 kann die durch A erzeugte C_0-Halbgruppe $T(t)$ zu einer analytischen Halbgruppe fortgesetzt werden. Nach Satz 8.21 gilt nun für $u_0 \in L^2(\Omega)$:

$$\Delta u,\ \frac{\partial u}{\partial t} \in C^\theta([\varepsilon, T]; L^2(\Omega)) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Ist zusätzlich $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, so folgt

$$\Delta u,\ \frac{\partial u}{\partial t} \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$$

bzw. $u \in C^1([0,\infty); L^2(\Omega)) \cap C^0([0,\infty); D(A))$. Dieses Resultat erweitert Satz 3.30 auf inhomogene Probleme.

9 Asymptotisches Verhalten von Lösungen

Wir betrachten in diesem Kapitel inhomogene Cauchyprobleme

$$\frac{du}{dt} = Au + f(t), \quad t > 0, \quad u(0) = x, \tag{9.1}$$

und interessieren uns für den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} u(t)$. Wir beginnen mit dem homogenen Fall $f = 0$.

Satz 9.1 *Sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$. Es existiere ein $p \in [1,\infty)$, so daß*

$$\int_0^\infty \|T(t)x\|^p\, dt < \infty \quad \forall x \in X. \tag{9.2}$$

Dann existieren Konstanten $M \geq 1$ und $\mu > 0$, so daß $\|T(t)\| \leq Me^{-\mu t}$.

Beweis: Wir zeigen zuerst, daß $t \mapsto \|T(t)\|$ für alle $t \geq 0$ beschränkt ist. Sei $\|T(t)\| \leq M_1 e^{\omega t}$ mit $M_1 \geq 1$ und $\omega > 0$ (bei $\omega \leq 0$ ist nichts mehr zu zeigen). Diese Abschätzung und (9.2) implizieren, daß $T(t)x \to 0$ für $t \to \infty$ und für jedes $x \in X$. Wäre dies nämlich falsch, gäbe es $x_0 \in X$, $\delta > 0$ und $t_j \to \infty$, so daß $\|T(t_j)x_0\| \geq \delta$. Wir wählen ohne Einschränkung $t_{j+1} - t_j > 1/\omega$ und setzen $\Delta_j := [t_j - 1/\omega, t_j]$. Dann gilt

$$\operatorname{meas} \Delta_j = 1/\omega \quad \text{ und } \quad \Delta_j \cap \Delta_{j+1} = \emptyset \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Für $t \in \Delta_j$, d.h. $t_j - t \leq 1/\omega$, erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta &\leq \|T(t_j)x_0\| \leq \|T(t_j - t)\| \cdot \|T(t)x_0\| \leq M_1 e^{\omega(t_j - t)} \|T(t)x_0\| \\ &\leq M_1 e^{\omega \cdot (1/\omega)} \|T(t)x_0\|, \end{aligned}$$

also $\|T(t)x_0\| \geq \delta / M_1 e$ und daher

$$\int_0^\infty \|T(t)x_0\|^p \, dt \geq \sum_{j=1}^\infty \int_{\Delta_j} \|T(t)x_0\|^p \, dt \geq \left(\frac{\delta}{M_1 e}\right)^p \sum_{j=1}^\infty \operatorname{meas}(\Delta_j) = \infty,$$

Widerspruch zu (9.2). Wir haben bewiesen:

$$\forall x \in X : \quad \sup_{0<t<\infty} \|T(t)x\| < \infty,$$

denn es ist sogar $T(t)x \to 0$ für $t \to \infty$. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus 1.7 folgt

$$\sup_{0<t<\infty} \|T(t)\| < \infty$$

bzw. die Existenz von $M > 0$ mit $\|T(t)\| \leq M$ für alle $t \geq 0$.

Wir betrachten nun die Abbildung

$$S : X \to L^p(0, \infty; X), \;\; (Sx)(t) := T(t)x.$$

Wegen (9.2) ist sie wohldefiniert. Außerdem ist sie abgeschlossen: Sei $(x_n) \subset X$ eine Folge mit $x_n \to x$ und $T(\cdot)x_n = Sx_n \to y$ in $L^p(0, \infty; X)$ für $n \to \infty$. Dann folgt für fast alle $t \in (0, \infty)$, daß $T(t)x_n \to y(t)$ in X. Die Stetigkeit von $T(t)$ impliziert, daß $T(t)x_n \to T(t)x = y(t) = (Sx)(t)$. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen (siehe den Beweis von Lemma 6.4) ist S beschränkt, d.h.

$$\left(\int_0^\infty \|T(t)x\|^p \, dt\right)^{1/p} = \|Sx\|_{L^p(0,\infty;X)} \leq M_2 \|x\|.$$

Sei $0 < \rho < 1/M$. Definiere

$$t_\rho(x) := \sup\{t \geq 0; \; \forall s \in [0, t] : \; \|T(s)x\| \geq \rho \|x\|\}.$$

Wegen $T(t)x \to 0$ für $t \to \infty$ muß $t_\rho(x) < \infty$ gelten. Genauer folgt

$$t_\rho(x)\rho^p\|x\|^p \leq \int_0^{t_\rho(x)} \|T(t)x\|^p\,dt \leq \int_0^\infty \|T(t)x\|^p\,dt \leq M_2^p\|x\|^p,$$

und deshalb $t_\rho(x) \leq (M_2/\rho)^p =: t_0$. Für $t > t_0$ erhalten wir

$$\|T(t)x\| \leq \|T(t - t_\rho(x))\| \cdot \|T(t_\rho(x))x\| \leq M\rho\|x\| =: \beta\|x\|.$$

Wegen der Wahl von ρ ist $\beta = M\rho < 1$. Wähle nun ein festes $t_1 > t_0$ und sei $t \geq 0$. Dann können wir t in der Form $t = nt_1 + s$ mit $0 \leq s < t_1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ schreiben. Ferner ist

$$\|T(t)\| \leq \|T(s)\| \cdot \|T(nt_1)\| \leq M\|T(t_1)\|^n \leq M\beta^n.$$

Wir setzen $M' := M/\beta$ und $\mu := -(\log\beta)/t_1 > 0$ (da $\beta < 1$). Dann folgt

$$M'e^{-\mu t} = M\beta^{-1}\beta^{t/t_1} = M\beta^{n+s/t_1-1} \geq M\beta^n \geq \|T(t)\|,$$

denn $\beta < 1$ und $s/t_1 - 1 < 0$ implizieren $\beta^{s/t_1-1} \leq \beta^0 = 1$. Der Satz ist bewiesen. $\square$

Bemerkung 9.2 Die Aussage von Satz 9.1 ist bemerkenswert: Gilt für alle Lösungen $u : [0,\infty) \to X$ des homogenen Problems (9.1) mit $f = 0$ (herrührend aus einer C_0-Halbgruppe; siehe auch Bemerkung 8.3) die Eigenschaft

$$\int_0^\infty \|u(t)\|^p\,dt < \infty$$

für ein $p \in [1,\infty)$, so müssen die $u(t)$ *exponentiell schnell* abklingen:

$$\|u(t)\| \leq Me^{-\mu t} \to 0 \quad (t \to \infty).$$

In Satz 9.1 wird die Eigenschaft (9.2) für die Lösungen des homogenen Problems benötigt. Es ist jedoch wünschenswert, das Abklingverhalten der Lösungen über Eigenschaften des Operators A zu erhalten. In endlichdimensionalen Problemen (d.h., A ist eine Matrix) ist bekannt, daß die Eigenschaft

$$\sigma := \sup_{\lambda\in\sigma(A)} \operatorname{Re}\lambda < 0 \tag{9.3}$$

impliziert: $\|T(t)\| \leq Me^{-\mu t}$ mit $M \geq 1$, $\mu > 0$. Für unendlichdimensionale Probleme ist dies im allgemeinen nicht wahr, wie das folgende Beispiel zeigt. Wir beweisen allerdings anschließend, daß dieses Resultat für *analytische* Halbgruppen doch gültig ist.

Beispiel 9.3 Wir definieren:

$$X = \{f \in L^p(0,\infty) : \ |f|_1 := \int_0^\infty e^s |f(s)|\, ds < \infty\}, \quad 1 < p < \infty,$$

mit der Norm $\|f\| := |f|_1 + \|f\|_{L^p}$, $f \in X$. Man kann zeigen, daß X mit dieser Norm ein Banachraum ist. Wir definieren weiter:

$$T(t)f(x) := f(x+t), \quad x \in (0,\infty),\ t \geq 0.$$

Dann ist $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe mit $\|T(t)\| = 1$ (Übungsaufgabe). Definiere den Operator $A : D(A) \to X$ durch

$$Au = u' \quad \forall u \in D(A) := \{u \in W^{1,p}(0,\infty) \cap X : \ u' \in X\}.$$

Man kann zeigen, daß (Übungsaufgabe)

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > -1\} \subset \rho(A).$$

Die Bedingung (9.3) ist mit $\sigma \leq -1$ erfüllt, aber wegen $\|T(t)\| = 1$ klingt $T(t)$ *nicht* exponentiell ab.

Satz 9.4 *Sei A der infinitesimale Generator einer analytischen Halbgruppe $T(t)$. Es gelte (9.3). Dann existieren $M \geq 1$ und $\mu > 0$, so daß*

$$\|T(t)\| \leq M e^{-\mu t} \quad \forall t \geq 0.$$

Beweis: Sei $\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$ mit $\omega \geq 0$. Aus Satz 6.12(3) folgt, daß

$$\begin{aligned} \Sigma &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - \omega)| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup U \subset \rho(A), \\ \|R(\lambda, A)\| &\leq \frac{M}{|\lambda - \omega|} \quad \forall \lambda \in \Sigma,\ \lambda \neq \omega, \end{aligned} \tag{9.4}$$

wobei U eine Umgebung von $\lambda = \omega \geq 0$ ist. Beachte, daß die Voraussetzung (9.3) die Beziehung $\sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \sigma\} = \emptyset$ und damit $\{\operatorname{Re}\lambda > \sigma\} \subset \mathbb{C}\backslash\sigma(A) = \rho(A)$ impliziert. Aus dem 3. Schritt des Beweises von Satz 6.12 (siehe (6.4)) folgt, daß

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} R(\lambda, A)\, d\lambda,$$

wobei $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ und $\Gamma_\pm = \{\rho e^{\pm i\theta} + \omega : \ \rho \geq 0\}$, $\pi/2 < \theta < \pi/2 + \delta$, und Γ ist so orientiert, daß $\operatorname{Im}\lambda$ entlang Γ monoton wächst. Außerdem ist $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ analytisch in $\Delta = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \sigma_1,\ |\arg(\lambda - \omega)| \geq \theta\}$, wobei $\sigma < \sigma_1 < 0$ (siehe Abbildung 9.1). Aus dem Integralsatz von Cauchy (siehe den 1. Schritt

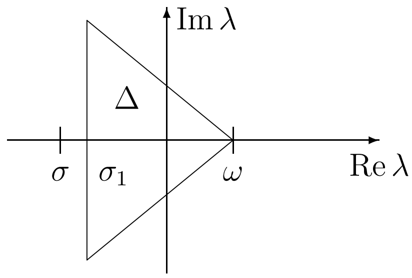

Abbildung 9.1: Die Menge Δ.

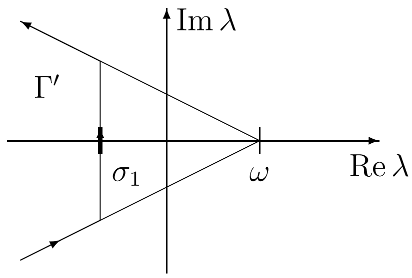

Abbildung 9.2: Der Integrationsweg Γ'.

des Beweises von Satz 6.12) folgt, daß der Integrationsweg Γ durch Γ' geändert werden kann, wobei $\Gamma' = \Gamma_1' \cup \Gamma_2' \cup \Gamma_3'$ und

$$\begin{aligned}
\Gamma_1' &= \{\rho e^{+\theta} + \omega : \ \rho \geq (\omega - \sigma_1)/|\cos\theta|\}, \\
\Gamma_2' &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda = \sigma_1, \ |\operatorname{Im}\lambda| \leq (\omega - \sigma_1)|\tan\theta|\}, \\
\Gamma_3' &= \{\rho e^{-i\theta} + \omega : \ \rho \geq (\omega - \sigma_1)/|\cos\theta|\},
\end{aligned}$$

wobei Γ' entlang wachsender $\operatorname{Im}\lambda$ orientiert sei (Abbildung 9.2). Daher folgt

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} e^{\lambda t} R(\lambda, A)\, d\lambda.$$

Wir wollen das Integral

$$I := \left\| \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2'} e^{\lambda t} R(\lambda, A)\, d\lambda \right\|$$

abschätzen. Wir parametrisieren Γ'_2 folgendermaßen. Sei $\gamma(s) := \sigma_1 + i(\omega - \sigma_1)|\tan\theta|s$, $-1 \le s \le 1$. Dann ist wegen (9.4)

$$\begin{aligned} I &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{1} e^{\gamma(s)t} R(\gamma(s), A)\gamma'(s)\, ds \right\| \\ &\le \frac{1}{2\pi} e^{\sigma_1 t} \int_{-1}^{1} \frac{M(\omega - \sigma_1)|\tan\theta| \cdot |s|}{|\sigma_1 - \omega + i(\omega - \sigma_1) \cdot |\tan\theta| \cdot s|}\, ds \\ &\le M_1 e^{\sigma_1 t}. \end{aligned}$$

Die anderen Integrale können ähnlich abgeschätzt werden, da $|e^{\lambda t}| \le e^{\sigma_1 t}$ für $\lambda \in \Gamma'$. Dies impliziert

$$\|T(t)\| \le M e^{\sigma_1 t} \quad \forall t \ge 0,$$

und der Satz ist wegen $\sigma_1 < 0$ bewiesen. □

Für inhomogene Probleme können wir das folgende Resultat zeigen.

Satz 9.5 *Sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$ mit $\|T(t)\| \le Me^{-\mu t}$ und $M \ge 1$, $\mu > 0$. Sei ferner $f \in L^\infty(0,\infty;X)$ mit $f(t) \to f_\infty$ für $t \to \infty$ und sei $u(t)$ die milde Lösung von (9.1). Dann gilt*

$$u(t) \to -A^{-1} f_\infty \quad (t \to \infty).$$

Formal folgt dieses Resultat aus $u(t) \to u_\infty$ und

$$0 = \frac{du}{dt}(t) - Au(t) - f(t) \to -Au_\infty - f_\infty \quad (t \to \infty),$$

also $Au_\infty = -f_\infty$ und $u_\infty = -A^{-1} f_\infty$.

Beweis: Die Repräsentation

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\, dt \tag{9.5}$$

und $\|T(t)\| \le Me^{-\mu t}$ implizieren, daß $R(\lambda, A)$ für $\operatorname{Re}\lambda > -\mu$ existiert, also $(-\mu, \infty) \in \rho(A)$ und insbesondere $0 \in \rho(A)$, d.h., A^{-1} existiert und ist ein beschränkter Operator. Wegen $T(t)x \to 0$ für $t \to \infty$ genügt es,

$$v(t) = \int_0^t T(t-s) f(s)\, ds \to -A^{-1} f_\infty \quad (t \to \infty)$$

zu zeigen. Wir schreiben

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) := \int_0^t T(t-s)(f(s) - f_\infty)\, ds + \int_0^t T(t-s) f_\infty\, ds.$$

Aus (9.5) folgt für $\lambda = 0$, wenn $t \to \infty$,

$$v_2(t) = \int_0^t T(\tau)\, f_\infty d\tau \to \int_0^\infty T(\tau) f_\infty \, d\tau = R(0, A) f_\infty = -A^{-1} f_\infty.$$

Es bleibt also $v_1(t) \to 0$ für $t \to \infty$ zu zeigen.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $t_0 > 0$, so daß für alle $t > t_0$

$$\|f(t) - f_\infty\| < \frac{\varepsilon\mu}{2M}$$

gilt. Dann folgt für genügend großes $t > t_0$, das $2M\|f\|_{L^\infty(0,\infty;X)} e^{-\mu(t-t_0)} < \varepsilon\mu/2$ erfüllt:

$$\begin{aligned}
\|v_1(t)\| &\leq \int_0^{t_0} \|T(t-s)\| \cdot \|f(s) - f_\infty\| \, ds \\
&\quad + \int_{t_0}^t \|T(t-s)\| \cdot \|f(s) - f_\infty\| \, ds \\
&\leq 2\|f\|_{L^\infty(0,\infty;X)} \int_0^{t_0} M e^{-\mu(t-s)} \, ds + \int_{t_0}^t M e^{-\mu(t-s)} \frac{\varepsilon\mu}{2M} \, ds \\
&= 2\|f\|_{L^\infty(0,\infty;X)} M \mu^{-1} \left(e^{-\mu(t-t_0)} - e^{-\mu t}\right) + \frac{\varepsilon}{2}(1 - e^{-\mu(t-t_0)}) \\
&\leq 2\|f\|_{L^\infty(0,\infty;X)} M \mu^{-1} \frac{\varepsilon\mu}{4M\|f\|_{L^\infty(0,T;X)}} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. $\square$

Intermezzo 6: Inhomogene Wärmeleitungsgleichung

Betrachte wie in Beispiel 8.22 das Problem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \alpha u &= f(t), \quad x \in \Omega,\ t > 0, && (9.6) \\
u &= 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t > 0 && (9.7) \\
u(\cdot, 0) &= u_0, \quad x \in \Omega, && (9.8)
\end{aligned}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $\alpha \geq 0$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ und $f \in C^\theta([0,\infty); L^2(\Omega))$, $0 < \theta < 1$, sei. Wir wissen bereits (Beispiel 8.22), daß $A : D(A) \to X$, definiert durch $X = L^2(\Omega)$, $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ und $A = \Delta - \alpha I$ der infinitesimale Generator einer analytischen Halbgruppe $T(t)$ ist und daß das Problem (9.6)-(9.8) eine eindeutige klassische Lösung $u : [0,\infty) \to L^2(\Omega)$ besitzt. Genauer gesagt haben wir dies für $\alpha = 0$ gezeigt. Nun folgt aber aus $(0,\infty) \subset \rho(\Delta)$ sofort $(-\alpha,\infty) \subset \rho(A)$, und die Folgerung aus Beispiel 6.13 kann auf den Operator A angewendet werden.

Wir setzen nun zusätzlich voraus:

$$f(t) \to f_\infty \quad \text{in } L^2(\Omega) \quad (t \to \infty), \tag{9.9}$$

d.h.

$$\|f(\cdot,t) - f_\infty\|_{L^2} \to 0 \quad (t \to \infty).$$

Wegen $(-\alpha,\infty) \subset \rho(A)$ folgt $\|T(t)\| \le Me^{-\alpha t}$ und damit nach Satz 9.5

$$\|u(t) - u_\infty\|_{L^2} \to 0 \quad (t \to \infty),$$

und $u_\infty \in H_0^1(\Omega)$ ist die Lösung von

$$-\Delta u_\infty + \alpha u_\infty = f_\infty \quad \text{in } \Omega, \qquad u_\infty = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{9.10}$$

Im Falle $f(t) \equiv 0$ erhalten wir nach Satz 9.4

$$\|u(t)\|_{L^2} \le Me^{-\alpha t} \quad \forall t \ge 0,$$

d.h., $u(t)$ klingt exponentiell ab, wenn $\alpha > 0$. Wir können dies auch für $\alpha = 0$ zeigen. Dazu multiplizieren wir (9.6) mit $\overline{u}$, multiplizieren die konjugiert komplexe Gleichung (9.6) mit u, addieren und integrieren über $\Omega \times (0,t)$:

$$\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\overline{u} + \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} u \right) \, dx \, d\tau + 2\int_0^t \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \, d\tau = 0.$$

Nun ist

$$\frac{\partial u}{\partial t}\overline{u} + \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} u = \frac{\partial}{\partial t}(u\overline{u}) = \frac{\partial}{\partial t}|u|^2,$$

also

$$\int_\Omega |u(t)|^2 \, dx - \int_\Omega |u(0)|^2 \, dx + 2\int_0^t \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \, d\tau = 0.$$

Mit der Poincaré-Ungleichung (siehe Beispiel 6.7) $\|u\|_{L^2} \le C\|\nabla u\|_{L^2}$ folgt

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + 2C^{-2} \int_0^t \|u(\tau)\|_{L^2}^2 \, d\tau \le \|u_0\|_{L^2}^2. \tag{9.11}$$

Wir verwenden das Lemma von Gronwall:

Lemma von Gronwall: Sei $\phi : [0,T] \to [0,\infty)$ stetig und erfülle

$$\phi(t) \le \phi_0 + \gamma \int_0^t \phi(\tau) \, d\tau \quad \forall 0 \le t \le T,$$

wobei $\gamma \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\phi(t) \leq \phi_0 e^{\gamma t} \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

Mithin folgt aus (9.11) mit $\phi(t) = \|u(t)\|_{L^2}^2$ und $\gamma = -2C^{-2}$:

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 \leq \|u_0\|_{L^2}^2 e^{-2C^{-2}t} \quad \forall t \geq 0,$$

d.h. $u(t)$ klingt exponentiell ab für $\alpha = 0$. Mit Satz 9.5 können wir nun das obige Resultat verschärfen:

Satz 9.6 *Sei $u : [0, \infty) \to L^2(\Omega)$ die klassische Lösung von (9.6)-(9.8) mit $\alpha \geq 0$, wobei $f \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))$, $u_0 \in L^2(\Omega)$, und es gelte (9.9). Dann folgt*

$$\|u(t) - u_\infty\|_{L^2} \to 0 \quad (t \to \infty),$$

wobei $u_\infty \in H_0^1(\Omega)$ das Problem (9.10) löst.

10 Semilineare Cauchyprobleme

Wir haben bisher nur *lineare* Probleme untersucht, d.h., A und $f(t)$ sind lineare Abbildungen. Viele interessante Differentialgleichungsprobleme sind jedoch *nichtlinear.* In diesem Kapitel wollen wir *semilineare* Probleme betrachten, d.h., f ist nichtlinear, aber A bleibt linear. Betrachte also

$$\frac{du}{dt} = Au + f(t, u), \quad t > t_0, \qquad u(t_0) = u_0. \tag{10.1}$$

Wir setzen voraus, daß A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$, $t \geq 0$, in einem Banachraum X ist und daß $f \in C^0([t_0, T] \times X; X)$ gilt. In Analogie zum Kapitel 8 definieren wir:

Definition 10.1 *Eine Funktion $u : [t_0, T) \to X$ heißt* milde Lösung *von (10.1) genau dann, wenn $u \in C^0([t_0, T); X)$ und*

$$u(t) = T(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^t T(t - s) f(s, u(s))\, ds. \tag{10.2}$$

Aus der Definition ist klar, daß Problem (10.1) nicht immer eine milde Lösung besitzen muß (im Gegensatz zu linearen Problemen!). Ist f lipschitzstetig, gibt es eine eindeutige Lösung:

Satz 10.2 *Seien A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$, $t \geq t_0$, $u_0 \in X$ und $f : [t_0, T] \times X \to X$ stetig in t und gleichmäßig lipschitzstetig in x, d.h.*

$$\exists L > 0 : \ \forall t \geq t_0 : \ \forall x, y \in X : \ \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Dann besitzt das Problem (10.1) genau eine milde Lösung $u \in C^0([t_0, T]; X)$, und es gibt ein $C(T) > 0$, so daß

$$\|u(t)\| \leq C(T)\|u_0\| \quad \forall t \in [t_0, T]. \tag{10.3}$$

Beweis: Für die Existenz einer milden Lösung wenden wir den Fixpunktsatz von Banach an. Definiere den Fixpunktoperator $F : Y \to Y$, wobei $Y := C^0([t_0, T]; X)$, durch

$$(Fu)(t) := T(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s, u(s))\, ds, \quad t_0 \leq t \leq T.$$

Sei $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ für $t_0 \leq t \leq T$. Es gilt für alle $u, v \in Y$:

$$\begin{aligned}
\|(Fu)(t) - (Fv)(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|T(t-s)\| \cdot \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|\, ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} LMe^{\omega(t-s)}\|u(s) - u(v)\|\, ds \\
&\leq LM\omega^{-1}\left(e^{\omega(t-t_0)} - 1\right) \sup_{t_0 < s < t} \|u(s) - v(s)\|.
\end{aligned}$$

Wähle nun $t_1 > t_0$ so, daß $\omega^{-1}(e^{\omega(t-t_0)} - 1) \leq 1/2LM$ für alle $t_0 \leq t \leq t_1$. Dann folgt

$$\|Fu - Fv\|_{Y_1} \leq \frac{1}{2}\|u - v\|_{Y_1} \quad \forall u, v \in Y_1,$$

wobei $Y_1 := C^0([t_0, t_1]; X)$ und $\|w\|_{Y_1} = \sup_{t_0 < s < t_1} \|w(s)\|$. Wir können also den Fixpunktsatz von Banach auf $F : Y_1 \to Y_1$ anwenden und erhalten die Existenz einer Lösung $u \in Y_1$ von $Fu = u$. Insbesondere löst u (10.2) für $t_0 \leq t \leq t_1$. Nun hängt t_1 nur von t_0, ω, M und L ab. Wir können also das Problem (10.2) mit $u_0 := u(t_1) \in X$ lösen und erhalten eine milde Lösung $v \in C^0([t_0, t_1]; X)$ von (10.1) mit $v(t_0) = u(t_1)$. Definieren wir $u(t + t_1) := v(t)$ für $t_0 \leq t \leq t_1$, so ist damit $u \in C^0([t_0, 2t_1 - t_0]; X)$ eine milde Lösung von (10.1) auf $[t_0, 2t_1]$. Nach endlich vielen Schritten erhalten wir eine milde Lösung von (10.1) auf $[t_0, T]$.

Es bleibt die Eindeutigkeit von milden Lösungen und die Ungleichung (10.3) zu zeigen. Sei v eine milde Lösung von (10.1) auf $[t_0, T]$ mit Anfangsdatum v_0.

Dann folgt

$$\begin{aligned}\|u(t)-v(t)\| &\leq \|T(t-t_0)(u_0-v_0)\| \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \|T(t-s)\| \cdot \|f(s,u(s))-f(s,v(s))\|\, ds \\ &\leq Me^{\omega T}\|u_0-v_0\| + LMe^{\omega T}\int_{t_0}^{t} \|(u-v)(s)\|\, ds.\end{aligned}$$

Mit dem Lemma von Gronwall (siehe Intermezzo 6) erhalten wir

$$\|u(t)-v(t)\| \leq Me^{\omega T}\exp(LMe^{\omega T}T)\|u_0-v_0\|,$$

also

$$\|(u-v)(t)\| \leq C(T)\|u_0-v_0\| \quad \forall t_0 \leq t \leq T.$$

Daraus folgt zum einen das Eindeutigkeitsresultat (für $u_0 = v_0$) und zum anderen die Abschätzung (10.3) (für $v(t) = v_0 = 0$). $\square$

Ist f nur *lokal* lipschitzstetig in x, so erhalten wir im allgemeinen nur zeitlich lokale Lösungen.

Satz 10.3 *Sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$ und sei $u_0 \in X$. Sei ferner $f : [0,\infty) \times X \to X$ stetig in t und lokal lipschitzstetig in x, gleichmäßig in t in beschränkten Intervallen, d.h.*

$$\begin{aligned}\forall T > 0, c > 0 : \ \exists L(T,c) : \ \forall t \in [0,T],\ x,y \in X \ \mathit{mit}\ \|x\|, \|y\| \leq c : \\ \|f(t,x)-f(t,y)\| \leq L(T,c)\|x-y\|.\end{aligned} \tag{10.4}$$

Dann existiert ein $T^* > t_0$, so daß das Problem (10.1) eine eindeutige maximal fortgesetzte milde Lösung u auf $[t_0, T^*)$ besitzt. Gilt $T^* < \infty$, dann ist

$$\lim_{t \to T^*-} \|u(t)\| = \infty.$$

Beweis: Wir wenden wieder den Fixpunktsatz von Banach an, um das Problem (10.1) in $[t_0, t_1]$ zu lösen. Setze

$$M(t_0) := \sup_{0 \leq t \leq t_0+1} \|T(t)\|, \quad N(t_0) := \sup_{0 \leq t \leq t_0+1} \|f(t,0)\|$$

und $K(t_0) := 2\|u_0\|M(t_0)$. Definiere weiter

$$\delta(t_0) := \min\left\{1, \frac{\|u_0\|}{K(t_0)L(t_0+1,K(t_0))+N(t_0)}, \frac{1}{2M(t_0)L(t_0+1,K(t_0))}\right\}$$

und $t_1 := t_0+\delta(t_0)$. Definiere schließlich $Y := \{u \in C^0([t_0,t_1];X) : \|u(t)\| \leq K(t_0)$ $\forall t_0 \leq t \leq t_1\}$ und $F : Y \to Y$ durch

$$(Fu)(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^t T(t-s)f(s,u(s))\,ds.$$

Wir müssen zeigen, daß F wohldefiniert (d.h. $Fu \in Y$) ist. Doch dies folgt aus

$$\begin{aligned}
\|(Fu)(t)\| &\leq M(t_0)\|u_0\| \\
&\quad + \int_{t_0}^t \|T(t-s)\|\{\|f(s,u(s))-f(s,0)\| + \|f(s,0)\|\}\,ds \\
&\leq M(t_0)\|u_0\| + (t-t_0)M(t_0)\{L(t_0+1,K(t_0))\cdot K(t_0) + N(t_0)\} \\
&\leq M(t_0)\|u_0\| + \delta(t_0)M(t_0)\{L(t_0+1,K(t_0))\cdot K(t_0) + N(t_0)\} \\
&\leq M(t_0)\|u_0\| + \|u_0\|M(t_0) \\
&= K(t_0).
\end{aligned}$$

Eine ähnliche Abschätzung zeigt für $u, v \in Y$

$$\begin{aligned}
\|(Fu)(t)-(Fv)(t)\| &\leq M(t_0)\delta(t_0)L(t_0+1,K(t_0))\|u-v\|_Y \\
&\leq \frac{1}{2}\|u-v\|_Y,
\end{aligned}$$

also

$$\|Fu-Fv\|_Y \leq \frac{1}{2}\|u-v\|_Y.$$

Dies impliziert die Existenz einer milden Lösung von (10.1) auf $[t_0,t_1]$.

Wir können wie im Beweis von Satz 10.2 die Lösung fortsetzen. Sei $[0,T^*)$ das maximale Existenzintervall von u. Wenn $T^* < \infty$, dann muß $\lim_{t\to T^*-}\|u(t)\| = \infty$ gelten. Anderenfalls

$$\exists C > 0 :\ \forall n \in \mathbb{N} : \exists t_n < T^* :\ t_n \to T^* -\ \ (n \to \infty) \text{ und } \|u(t_n)\| \leq C.$$

Ist $n \in \mathbb{N}$ groß genug, so können wir die Lösung $u : [0,t_n] \to X$ auf $[0,t_n+\delta]$ mit $\delta > 0$ unabhängig von n fortsetzen und $t_n + \delta > T^*$; Widerspruch.

Die Eindeutigkeit von Lösungen zeigt man wie im Beweis von Satz 10.2. □

Beispiel 10.4 Milde Lösungen von (10.1) mit nur lokal lipschitzstetiger Nichtlinearität f können im allgemeinen *nicht* global fortgesetzt werden. Als Gegenbeispiel betrachte das Problem (10.1) mit $A = 0,\ f(u) = u^2,\ u \in X = \mathbb{R}$:

$$\frac{du}{dt} = u^2, \quad t > 0, \quad u(0) = u_0 > 0.$$

Die eindeutige, maximal fortgesetzte Lösung lautet

$$u(t) = (u_0^{-1}-t)^{-1}, \quad 0 \leq t < u_0^{-1}.$$

Damit die milde Lösung von (10.1) eine klassische Lösung ist, benötigen wir zusätzliche Voraussetzungen an die Nichtlinearität f. Sei dazu A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$. Wir definieren die Norm $\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\|$ und nennen den Raum $D(A)$, versehen mit der Norm $\|\cdot\|_A$, Y. Man kann zeigen, daß Y ein Banachraum ist, und $T(t) : Y \to Y$ ist eine C_0-Halbgruppe (Übungsaufgabe).

Satz 10.5 *Sei $f : [t_0, T] \times Y \to Y$ stetig in t und gleichmäßig lipschitzstetig in $x \in Y$ und sei $u_0 \in D(A)$. Dann besitzt das Problem (10.1) genau eine klassische Lösung $u : [t_0, T] \to Y$.*

Beweis: Wir können Satz 10.2 in Y anwenden und erhalten eine Funktion $u \in C^0([t_0, T]; Y)$, die die Beziehung

$$u(t) = T(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t - s)f(s, u(s))\, ds$$

in X erfüllt. Sei $g(s) := f(s, u(s))$, $t_0 \le s \le T$. Nach Voraussetzung an f gilt $g(s) \in D(A)$ und nach Definition der Norm $\|\cdot\|_A$ ist $s \mapsto Ag(s)$ für $s \in [t_0, T]$ stetig in X, denn

$$\begin{aligned}
\|Ag(t) - Ag(s)\| &\le \|g(t) - g(s)\|_A \\
&= \|f(t, u(t)) - f(t, u(s))\|_A \\
&\quad + \|f(t, u(s)) - f(s, u(s))\|_A \\
&\le L\|u(t) - u(s)\|_A + \|f(t, u(s)) - f(s, u(s))\|_A \\
&\to 0 \quad (t \to s).
\end{aligned}$$

Betrachte nun das Problem

$$\frac{dw}{dt} = Aw + g(t), \quad t > t_0, \qquad w(t_0) = u_0. \tag{10.5}$$

Wir behaupten, daß dieses Problem eine eindeutige klassische Lösung in $[t_0, T]$ besitzt. Nach Lemma 8.9 genügt es zu zeigen, daß für die Funktion

$$v(t) := \int_{t_0}^{t} T(t - s)g(s)\, ds$$

gilt: $v(t) \in D(A)$ und $Av(t) \in C^0([t_0, T]; X)$. Da $g(s) \in D(A)$, folgt nach Satz 3.4(3) $T(t - s)g(s) \in D(A)$ und deshalb $v(t) \in D(A)$. Außerdem ist $s \mapsto Ag(s)$ stetig, also auch $s \mapsto T(t - s)Ag(s)$ und (wieder wegen Satz 3.4)

$$t \mapsto Av(t) = \int_{t_0}^{t} T(t - s)Ag(s)\, ds.$$

Die Funktion w ist auch eine milde Lösung von (10.5), d.h.

$$\begin{aligned} w(t) &= T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)g(s)\,ds \\ &= T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,u(s))\,ds \\ &= u(t), \end{aligned}$$

und $u(t)$ ist eine klassische Lösung in $[t_0, T]$. $\square$

Bemerkung 10.6 Seien die Voraussetzungen von Satz 10.5 erfüllt mit der Ausnahme, daß $f : [t_0, T] \times Y \to Y$ nur *lokal* lipschitzstetig in $x \in Y$, gleichmäßig in t ist (siehe (10.4)). Ein ähnlicher Beweis wie oben, unter Verwendung von Satz 10.3, zeigt, daß dann das Problem (10.1) eine maximal fortgesetzte klassische Lösung $u : [t_0, T^*) \to X$ besitzt und daß, sofern $T^* < \infty$ gilt,

$$\lim_{t \to T^*-} (\|u(t)\| + \|Au(t)\|) = \infty.$$

Intermezzo 7: Eine nichtlineare Schrödingergleichung

In einigen physikalischen Anwendungen (z.B. Laser) wird die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion durch die folgende nichtlineare Schrödingergleichung, die wir aus Vereinfachung nur im $\mathbb{R}^2$ betrachten, beschrieben:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\Delta u - ik|u|^2 u, \qquad x \in \mathbb{R}^2,\ t > 0, \tag{10.6}$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \qquad x \in \mathbb{R}^2, \tag{10.7}$$

wobei $k \in \mathbb{R}$. Wir können die Nichtlinearität auch so interpretieren, daß $k|u|^2$ ein dichteabhängiges Potential beschreibt. (Wir erinnern, daß $|u|^2$ als Teilchendichte gesehen werden kann.)

Sei $H = L^2(\mathbb{R}^2)$. In Intermezzo 3 haben wir gezeigt, daß der Operator $iA_0 = -\Delta$ selbstadjungiert und $D(A_0) = H^2(\mathbb{R}^2)$ ist. Nach dem Satz 5.17 von Stone ist A_0 der infinitesimale Generator einer C_0-Gruppe unitärer Operatoren $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$, in H. Für die Existenz einer lokalen Lösung von (10.6)-(10.7) werden wir Bemerkung 10.6 in $Y = D(A_0)$ anwenden. Die Norm von Y lautet

$$\|u\|_A = \|u\|_{L^2} + \|A_0 u\|_{L^2} = \|u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^2}, \quad u \in D(A_0).$$

Nun kann man zeigen, daß $\|u\|_{H^2} \le 2(\|u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^2})$ für alle $u \in H^2(\mathbb{R}^2)$ gilt.

In der Tat: Nach Intermezzo 3 ist

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^2}^2 &= (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2}(1+|\xi|^2)^2|\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi \\
&\leq 2(2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2}(1+|\xi|^4)|\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi \\
&= 2(2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2}(|u(\xi)|^2+|\widehat{\Delta u}(\xi)|^2)\,d\xi \\
&= 2(\|u\|_{L^2}^2+\|\Delta u\|_{L^2}^2) \\
&\leq 2(\|u\|_{L^2}+\|\Delta u\|_{L^2})^2.
\end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\|u\|_{H^2} \leq \sqrt{2}\|u\|_A \leq \sqrt{2}\|u\|_{H^2} \quad \forall u \in H^2(\mathbb{R}^2).$$

Also sind die Normen $\|\cdot\|_{H^2}$ und $\|\cdot\|_A$ in $H^2(\mathbb{R}^2)$ äquivalent und $Y=(D(A_0), \|\cdot\|_A)=(H^2(\mathbb{R}^2),\|\cdot\|_{H^2})$.

Wir zeigen nun, daß die Funktion $F : H^2(\mathbb{R}^2)\to H^2(\mathbb{R}^2)$, $F(u)=ik|u|^2u$, wohldefiniert und lokal lipschitzstetig ist.

Lemma 10.7 *Die oben definierte Funktion F ist wohldefiniert, und es gilt für alle $u,v\in H^2(\mathbb{R}^2)$:*

$$\begin{aligned}
\|F(u)\|_{H^2} &\leq C\|u\|_{L^\infty}^2\|u\|_{H^2}, \\
\|F(u)-F(v)\|_{H^2} &\leq C(\|u\|_{H^2}^2+\|v\|_{H^2}^2)\|u-v\|_{H^2}
\end{aligned}$$

mit einer von u,v unabhängigen Konstanten $C>0$.

Beweis: Wir benutzen zwei Resultate aus der Theorie der Sobolev-Räume. Zum einen gilt:

$$\exists C_1>0:\ \forall u\in H^2(\mathbb{R}^2):\quad \|u\|_{L^\infty}\leq C_1\|u\|_{H^2}; \tag{10.8}$$

zum anderen ist:

$$\exists C_2>0:\ \forall u\in H^2(\mathbb{R}^2):\quad \|u\|_{W^{1,4}}\leq C_2\|u\|_{L^\infty}^{1/2}\|u\|_{H^2}^{1/2}. \tag{10.9}$$

Die Ungleichung (10.8) bedeutet, daß $H^2(\mathbb{R}^2)\subset L^\infty(\mathbb{R}^2)$ und daß die Einbettung $H^2(\mathbb{R}^2)\to L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $u\mapsto u$, beschränkt ist. Die Ungleichung (10.9) ist eine Version der Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung. Die Beweise von (10.8) und (10.9) sind Übungsaufgaben. Sei $D=\partial/\partial x_i$, $i=1$ oder $i=2$, und sei $u\in H^2(\mathbb{R}^2)$. Wegen

$$\begin{aligned}
\left|D^2(|u|^2u)\right|^2 &= \left|D^2(\overline{u}u^2)\right|^2 \\
&= \left|D(D\overline{u}\,u^2+2\overline{u}uDu)\right|^2 \\
&= \left|u^2D^2\overline{u}+4uDuD\overline{u}+2\overline{u}(Du)^2+2\overline{u}uD^2u\right|^2 \\
&\leq C\left(|u|^4|D^2u|^2+|u|^2|Du|^4\right)
\end{aligned}$$

und (10.9) folgt

$$\begin{aligned}
\| |u|^2 u\|_{H^2}^2 &\leq C\left(\|u\|_{L^\infty}^4 \|u\|_{H^2}^2 + \|u\|_{L^\infty}^2 \|u\|_{W^{1,4}}^4\right) \\
&\leq C\left(\|u\|_{L^\infty}^4 \|u\|_{H^2}^2 + C_2^4 \|u\|_{L^\infty}^4 \|u\|_{H^2}^2\right) \\
&\leq C' \|u\|_{L^\infty}^4 \|u\|_{H^2}^2 .
\end{aligned}$$

Dies beweist die erste Ungleichung des Lemmas.

Der Beweis der zweiten Ungleichung ist ähnlich, denn

$$\begin{aligned}
\left| |u|^2 u - |v|^2 v \right| &= |u^2 \overline{u} - v^2 \overline{v}| \\
&= |u^2(\overline{u - v}) + u\overline{v}(u - v) + \overline{v}v(u - v)| \\
&\leq \frac{3}{2}(|u|^2 + |v|^2)|u - v| .
\end{aligned}$$

Dies beweist Lemma 10.7. □

Aus Bemerkung 10.6 folgt nun die Existenz einer *lokalen* Lösung von (10.6)-(10.7):

Satz 10.8 *Sei $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^2)$. Dann existiert ein $T^* > 0$ und eine eindeutige (klassische) Lösung u von (10.6)-(10.7) mit*

$$u \in C^1([0, T^*); L^2(\mathbb{R}^2)) \cap C^0([0, T^*); H^2(\mathbb{R}^2)).$$

Es gilt entweder $T^* = \infty$ oder $T^* < \infty$ und $\|u(t)\|_{H^2} \to \infty$ $(t \to T^*-)$.

Für die Existenz einer *globalen* Lösung im Falle $k \geq 0$ schätzen wir die $H^2(\mathbb{R}^2)$-Norm von u ab.

Lemma 10.9 *Seien $2 \leq p \leq \infty$ und $1/p + 1/q = 1$. Sei $S(t)$ die Gruppe unitärer Operatoren zum infinitesimalen Generator $i\Delta$. Dann gilt*

$$(S(t)u_0)(x) = \frac{1}{4\pi i t} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(i \frac{|x - y|^2}{4t}\right) u_0(y)\, dy, \qquad t \neq 0,$$

und

$$\|S(t)u_0\|_{L^p} \leq (4\pi t)^{1-2/q} \|u_0\|_{L^q} \qquad \forall u_0 \in L^q(R^2),\ t > 0.$$

Beweis: Übungsaufgabe.

Lemma 10.10 *Sei $u_0 \in H^2(\mathbb{R})$ und sei $u : [0, T] \to H^2(\mathbb{R}^2)$ die Lösung von (10.6)-(10.7). Es gelte $k \geq 0$. Dann existiert ein $C(T) > 0$, so daß*

$$\|u(t)\|_{H^2} \leq C(T) \quad \forall 0 \leq t < T.$$

Beweis: In diesem Beweis benötigen wir einen Sobolevschen Einbettungssatz, den wir nicht beweisen:

Einbettungssatz von Sobolev: Seien $m \in \mathbb{N}$, $d \geq 1$ und $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $1/p - m/d \leq 1/q$ wenn $q < \infty$, und $1/p - m/d < 0$, wenn $q = \infty$. Dann gilt $W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^q(\mathbb{R}^d)$ und es existiert $C > 0$, so daß für alle $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$:

$$\|u\|_{L^q} \leq C\|u\|_{W^{m,p}}. \tag{10.10}$$

Multipliziere die Gleichung (10.6) mit $\overline{u}$ bzw. die konjugiert komplexe Gleichung (10.6) mit u; integriere über $\mathbb{R}^2$ und addiere die Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\overline{u} + \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}u\right) \, dx = 0. \tag{10.11}$$

Daraus folgt

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 = \|u(0)\|_{L^2}^2 = \|u_0\|_{L^2}^2 \quad \forall 0 \leq t < T. \tag{10.12}$$

Multipliziere nun die Gleichung (10.6) mit $\partial\overline{u}/\partial t$ bzw. die konjugiert komplexe Gleichung (10.6) mit $\partial u/\partial t$, integriere über $\mathbb{R}^2$ und subtrahiere die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} - \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t}\right) \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} i \left(-\nabla u \cdot \frac{\partial}{\partial t}\nabla\overline{u} - \nabla\overline{u} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\nabla u - k|u|^2 u\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} - k|u|^2\overline{u}\frac{\partial u}{\partial t}\right) \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} i \left(-\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^2 - \frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial t}|u|^{2\cdot 2}\right) \, dx \\
&= i\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^2} \left(-|\nabla u|^2 - \frac{k}{2}|u|^4\right) \, dx.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla u(t)|^2 + \frac{k}{2}|u(t)|^4\right) \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla u_0|^2 + \frac{k}{2}|u_0|^4\right) \, dx \quad \forall 0 \leq t < T.$$

Wegen (10.12) und $k \geq 0$ erhalten wir

$$\|u(t)\|_{H^1} \leq C \quad \forall 0 \leq t > T.$$

Dann impliziert die Einbettung (10.10)

$$\|u(t)\|_{L^r} \leq C\|u(t)\|_{H^1} \leq C \quad \forall 0 \leq t < T,\ r < \infty. \tag{10.13}$$

Um $u(t)$ in der H^2-Norm abzuschätzen, schreiben wir

$$u(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-s)F(u(s))\,ds.$$

Sei $D = \partial/\partial x_1$ oder $D = \partial/\partial x_2$. Dann ist

$$Du(t) = S(t)Du_0 - \int_0^t S(t-s)DF(u(s))\,ds.$$

Sei nun $p > 2$ und setze $r = 4p/(p-2)$ und $q = p/(p-1) \in (1,2)$. Aus Lemma 10.9 folgt für $0 \le t \le T$: $\|S(t)u_0\|_{L^2} \le \|u_0\|_{L^2}$ und mithin

$$\|S(t)u_0\|_{H^m} \le \|u_0\|_{H^m}, \qquad m \ge 0.$$

Mit der Hölder-Ungleichung erhalten wir daher für $0 \le t \le T$:

$$\begin{aligned}
\|Du(t)\|_{L^p} &\le \|S(t)Du_0\|_{L^p} + \int_0^t \|S(t-s)DF(u(s))\|_{L^p}\,ds \\
&\le C\|S(t)Du_0\|_{H^1} + C\int_0^t (t-s)^{1-2/q} \|\,|u(s)|^2|Du(s)|\,\|_{L^q}\,ds \\
&\le C\|S(t)u_0\|_{H^2} + C\int_0^t (t-s)^{1-2/q} \|u(s)\|_{L^r}^2 \|Du(s)\|_{L^2}\,ds \\
&\le C\|u_0\|_{H^2} + C\int_0^t (t-s)^{1-2/q}\,ds \\
&\le C(T),
\end{aligned}$$

denn $1 - 2/q > -1$. Wegen (10.13) und (10.10) erhalten wir

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \le C\|u(t)\|_{W^{1,p}} \le C \quad \forall 0 \le t < T.$$

Daher ergibt Lemma 10.7

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{H^2} &\le \|S(t)u_0\|_{H^2} + \int_0^t \|S(t-s)F(u(s))\|_{H^2}\,ds \\
&\le \|u_0\|_{H^2} + \int_0^t \|F(u(s))\|_{H^2}\,ds \\
&\le \|u_0\|_{H^2} + C\int_0^t \|u(s)\|_{L^\infty}^2 \|u(s)\|_{H^2}\,ds \\
&\le \|u_0\|_{H^2} + C\int_0^t \|u(s)\|_{H^2}\,ds.
\end{aligned}$$

Mit dem Lemma von Gronwall (siehe Intermezzo 6) folgt

$$\|u(t)\|_{H^2} \le e^{Ct}\|u_0\|_{H^2} \quad \forall 0 \le t < T.$$

Damit ist Lemma 10.10 bewiesen. $\square$

Satz 10.11 *Seien $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^2)$ und $k \geq 0$. Dann besitzt das Problem (10.6) -(10.7) genau eine globale Lösung*

$$u \in C^0([0,\infty); H^2(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^2)).$$

Beweis: Die lokale Lösung aus Satz 10.8 kann wegen Lemma 10.10 auf $[0,\infty)$ fortgesetzt werden, da $\|u(t)\|_{H^2}$ für jedes $t \geq 0$ beschränkt ist. $\square$

Übungsaufgaben

(1) Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe in $\mathbb{C}$ mit Konvergenzradius $R > 0$. Seien ferner X ein Banachraum und $A \in L(X) = \{T : X \to X : T \text{ linear, beschränkt}\}$ mit $\|A\| < R$. Zeige

(a) Der Operator

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$$

existiert in $L(X)$.

(b) Gilt $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $\|f(A)\| \le f(\|A\|)$.

(c) $e^{At} \in L(X)$ und $e^{A(t-s)} = e^{At}e^{As}$ für alle $t, s \ge 0$.

(2) Seien X ein Banachraum und $A \in L(X)$ mit $\|A\| < 1$. Zeige: $I - A$ ist invertierbar und

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

Diese Reihe heißt *Neumann-Reihe.*

(3) Sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$ mit $\|T(t)\| \le M$ für alle $t \ge 0$. Sei weiter $x \in D(A^2)$. Zeige:

(a) $T(t)x - x = tAx + \int_0^t (t-s)T(s)A^2x\, ds$;

(b) $\|Ax\|^2 \le 4M^2\|A^2x\| \cdot \|x\|$.

(4) Sei $\ell^1 = \{x = (x_n) \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$ und sei $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$, $x \in \ell^1$, eine Norm. Sei weiter $A : D(A) \to \ell^1$ definiert durch

$$\begin{aligned} D(A) &= \{x = (x_n) \in \ell^1 : \ (nx_n) \in X\}, \\ (Ax)_n &= -nx_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Zeige:

(a) $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ ist ein Banachraum.

(b) Die Resolvente $R(\lambda, A)$ existiert für alle $\lambda > 0$ und $\|R(\lambda, A)\| \le 1/\lambda$.

(5) Seien X ein Banachraum und $A : D(A) \to X$ ein linearer, abgeschlossener, dissipativer Operator mit $\overline{D(A)} = X$. Zeige: $R(I - A)$ ist abgeschlossen.

(6) Seien X ein reflexiver Banachraum und $A : D(A) \to X$ ein dissipativer, linearer Operator mit $R(I - A) = X$. Zeige: $\overline{D(A)} = X$.

Hinweis: Zeige, daß für $x' \in X'$ mit $\langle x', x\rangle = 0$ für alle $x \in D(A)$ folgt: $x' = 0$. Benutze, daß A abgeschlossen ist (Beweis?).

(7) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^\infty$ und sei $X = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Definiere den Operator

$$\begin{aligned} D(A) &= \{u \in H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) : \ \Delta u \in H_0^1(\Omega)\}, \\ Au &= \Delta u, \quad u \in D(A). \end{aligned}$$

Der Raum X wird mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_X = \int_\Omega (uv + \Delta u \Delta v)\, dx, \quad u, v \in X,$$

versehen. Zeige:

(a) X ist ein Hilbertraum.

(b) A ist der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe von Kontraktionen.

Hinweis: Es darf das folgende Resultat verwendet werden. Sei $f \in H^k(\Omega)$, $k \geq 0$. Dann existiert genau eine Lösung $u \in H^{k+2}(\Omega)$ von

$$-\Delta u + u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

und

$$\|u\|_{H^{k+2}} \leq c\|f\|_{H^k}$$

mit einer von u und f unabhängigen Konstanten $c > 0$.

(8) Seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige:

$$\int_0^\infty t^n e^{\lambda t}\, dt = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}.$$

(9) Sei $A : D(A) \to X$ der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$ von Kontraktionen und A_λ die Yosida-Approximation ($\lambda > 0$). Zeige: $\|e^{A_\lambda t}\| \leq 1$ für alle $\lambda > 0$ und $t \geq 0$.

(10) Zeige für alle $0 < h \leq 1$ und $x \geq 0$:

$$\frac{e^{xh} - 1}{h} \leq e^x - 1.$$

(11) Seien $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig und beschränkt und

$$(A(h)f)(x) := \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)).$$

Zeige:

$$(A(h)^k f)(x) = \frac{1}{h^k} \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} \binom{k}{m} f(x+mh), \quad k \in \mathbb{N}.$$

(12) Zeige:

$$\int_0^\infty (ve^{-v})^n \, dv = \frac{n!}{n^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(13) Seien X ein Banachraum und $A : D(A) \to X$ ein Operator mit $\overline{D(A)} = X$. Zeige: Die Adjungierte A' von A ist abgeschlossen.

(14) Sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe in X. Zeige: $D(A^2)$ ist dicht in X.

(15) Sei $X = \{f \in C^0([0,1]) : f(1) = 0\}$, versehen mit der Supremumsnorm. Sei ferner $T(t): X \to X$ definiert durch

$$(T(t)f)(x) = \begin{cases} f(x+t) & : \quad x+t \leq 1 \\ 0 & : \quad x+t > 1 \end{cases}, \quad t \geq 0, \; 0 \leq x \leq 1.$$

Zeige:

(a) $T(t)$ ist eine C_0-Halbgruppe von Kontraktionen.

(b) $T(t)$ ist differenzierbar für $t > 1$. Berechne $T'(t)$.

(16) Sei $T(t)$ eine differenzierbare C_0-Halbgruppe mit infinitesimalem Generator A. Zeige:

$$T^{(n)}(t) = \left(AT\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(T'\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(17) Die Fourier-Transformierte einer Funktion $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ lautet

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x) \, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Zeige:

(a) $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$ für alle $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

(b) Die Abbildung $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d),\ f \mapsto \hat{f}$, ist wohldefiniert, linear und isometrisch.

(c) $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$ für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. (Parseval-Gleichung).

Hinweis: Es kann verwendet werden, daß für alle $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$f(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

(18) Zeige, daß Korollar 7.8 für $\alpha = 1$ im allgemeinen falsch ist.

Hinweis: Betrachte einen selbstadjungierten Operator iA in einem Hilbert-Raum.

(19) Sei H ein Hilbertraum und sei $A:\ D(A) \to H$ ein Operator mit $\overline{D(A)} = H$. Sei weiter iA selbstadjungiert. Zeige:

(a) iA und A sind abgeschlossen.

(b) A ist m-dissipativ.

(20) Betrachte das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \quad u(\cdot, 0) = u_0. \tag{10.14}$$

Zeige:

(a) Der Operator iA, wobei $A:\ D(A) \to H$ mit $D(A) = H^3(\mathbb{R}),\ H = L^2(\mathbb{R})$ und $Au = \partial^3 u/\partial x^3$, ist selbstadjungiert.

(b) Es gibt eine Lösung $u \in C^0([0,\infty); H^3(\mathbb{R})) \cap C^1([0,\infty); L^2(\mathbb{R}))$ von (10.14).

(21) Seien A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$, $f \in L^1(0, T; X)$, $x \in X$ und $u : [0,T] \to X$ eine starke Lösung von

$$\frac{du}{dt} = Au + f(t), \quad t > 0, \quad u(0) = x.$$

Zeige: Es gilt für alle $t \in [0,T]$

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s) f(s)\, ds.$$

(22) Zeige: Klassische Lösungen von

$$\frac{du}{dt} = Au + f(t), \quad t > 0, \quad u(0) = x,$$

sind nicht notwendigerweise auch starke Lösungen.

(23) Seien A der infinitesimale Generator einer analytischen Halbgruppe $T(t)$, $f \in C^\theta([0,T];X)$ für ein $0 < \theta < 1$ und sei u die (klassische) Lösung von

$$\frac{du}{dt} = Au + f(t), \quad t > 0, \quad u(0) = x.$$

Zeige: Wenn $f(0) = 0$, dann ist $Au,\ du/dt \in C^\theta([0,T];X)$.

(24) Definiere den Raum

$$\begin{aligned} X &= \Big\{ f \in L^p(0,\infty) :\ |f|_1 := \int_0^\infty e^s |f(s)| < \infty \Big\}, \quad 1 < p < \infty, \\ \|f\| &:= |f|_1 + \|f\|_{L^p}, \quad f \in X, \end{aligned}$$

und die Operatoren $T(t) : X \to X$, $A : D(A) \to X$ durch

$$\begin{gathered} (T(t)f)x := f(x+t), \quad x > 0,\ t \geq 0, \\ Au = u', \quad u \in D(A) := \{u \in W^{1,p}(0,\infty) \cap X :\ u' \in X\}. \end{gathered}$$

Zeige:

(a) $(X, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.
(b) $T(t)$ ist eine C_0-Halbgruppe und $\|T(t)\| = 1$ für $t \geq 0$.
(c) $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > -1\} \subset \rho(A)$.

(25) Sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$ in einem Banachraum X. Definiere $\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\|$ für $x \in D(A)$ und $Y := (D(A), \|\cdot\|_A)$. Zeige:

(a) $\|\cdot\|_A$ ist eine Norm auf $D(A)$.
(b) Y ist ein Banachraum.
(c) $T(t) :\ Y \to Y$ ist eine C_0-Halbgruppe.

(26) Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k > d/2$, $d \geq 1$. Zeige:

$$\exists C > 0 :\ \forall u \in H^k(\mathbb{R}^d) : \quad \|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{H^k}.$$

(27) Zeige:

$$\exists C > 0 :\ \forall u \in H^2(\mathbb{R}^2) :\ \|u\|_{W^{1,4}} \leq C\|u\|_{L^\infty}^{1/2}\|u\|_{H^2}^{1/2}.$$

Hinweis: $(uu_x^3)_x = u_x^4 + 3uu_x^2u_{xx}$.

(28) Beweise Lemma 10.9.

Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben

(1) Siehe [3, Theorem 1.86].

(2) Siehe [3, Example 1.88].

(3) Siehe [10, Chapter 1, Lemma 2.8].

(4) Siehe [3, Exercise 2.5, Seite 102].

(5) ...

(6) Trickreich, siehe [10, Chapter 1, Theorem 4.6].

(7) Verwende den Satz von Lumer-Phillips.

(8) Vollständige Induktion.

(9) Siehe [3, Exercise 2.9, Seite 103].

(10) Definiere $f(x) = h^{-1}\left(e^{xh} - 1\right) - e^x + 1$ und zeige $f(0) = 0$ und $f'(x) \leq 0$ für $x \geq 0$.

(11) ...

(12) Vollständige Induktion.

(13) Siehe [4, Proposition II.16].

(14) Siehe [10, Theorem 2.7, Chapter 1].

(15) ...

(16) Siehe [10, Lemma 4.5, Chapter 2].

(17) Siehe [11, Theorem 7.9].

(18) Siehe [10, Seite 83].

(19) (eigene Aufzeichnungen).

(20) (eigene Aufzeichnungen).

(21) Analog zur Herleitung von (8.4).

(22) Seien $X = \mathbb{R}$, $A = 0$ und wähle $f \in L^1$ mit $f \neq C^0$.

(23) Siehe [10, Chapter 4, Theorem 3.5(iii)].

(24) Siehe [10, Example 4.2, Chapter 4].

(25) Verwende, daß A abgeschlossen ist.

(26) Siehe [10, Theorem 4.7, Chapter 7].

(27) ...

(28) ...

Literatur

[1] H. W. Alt: *Lineare Funktionalanalysis.* Springer, Berlin, 1992.

[2] W. Beckner: Inequalities in Fourier analysis. *Annals of Math.* 102 (1975), Seiten 159-182.

[3] A. Bellini-Morante, A. McBride: *Applied Nonlinear Semigroups.* John Wiley and Sons, Chichester, 1998.

[4] H. Brézis: *Analyse fonctionnelle.* Masson, Paris, 1983.

[5] T. Cazenave: *An Introduction to Nonlinear Schrödinger Equations.* Textos de Metodes Mathematicos 26, Rio de Janeiro, 1996.

[6] W. Feller: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* Wiley Eastern, New Dehli, 1988.

[7] H. Fischer, H. Kaul: *Mathematik für Physiker*, Band 2. Teubner, Stuttgart, 1998.

[8] E. Lieb, M. Loss: *Analysis.* American Mathematical Society, Providence, 1997.

[9] A. McBride: *Semigroups of Linear Operators: An Introduction.* Longman, Harlow, 1987.

[10] A. Pazy: *Semigroups of Linear Operators and Applications.* Second printing. Springer, New York, 1983.

[11] W. Rudin: *Functional Analysis.* McGraw-Hill, New York, 1991.

[12] G. Troianiello: *Elliptic Differential Equations and Obstacle Problems.* Plenum Press, New York, 1987.

[13] E. Zeidler: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications,* Volume II. Springer, New York, 1990.