Diplomarbeit

Das periodische Wigner-Poisson-Fokker-Planck-System: Analysis und Numerische Approximation mit einem Operator-Splitting-Verfahren

Elidon Dhamo

bei Herrn Prof. Dr. Anton Arnold
am Fachbereich Mathematik
der Technischen Universität Berlin

Berlin, 06.12.2001

Die selbständige und eigenhändige Anfertigung versichere ich an Eides statt.

Berlin, den 06.12.2001

Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Quantenmechanische Systeme kommen unter anderem in den Halbleitern, in der Laser-/Quantenoptik, und in der elektromagnetischen und akustischen Wellenpropagation vor ([31, 29, 22]). Um quantenmechanische Phänomene beschreiben zu können, werden als Basismodelle meistens die Schrödinger-Gleichung oder auch quantenkinetische Transportgleichungen, wie z.B. die Wigner-Gleichung ([41]) verwendet.

Die Wigner-Funktionen liefern eine kinetische Beschreibung der Quantenmechanik ([44, 41]) und sind in den letzten Jahren ein wertvolles Modellierungs- und Simulationswerkzeug in Bereichen der Halbleitermodellierung ([31, 21, 40]), in der Brownischen Quantenbewegung ([12, 17]), und der Quantenoptik ([22]) geworden. Die reellwertige Wigner-Funktion $w(x, v, t)$ ist quasi eine Wahrscheinlichkeitsverteilung des betrachteten Quantensystems im (x, v) Ort-Geschwindigkeit-Phasenraum zum Zeitpunkt t.

Gegenstand dieser Arbeit ist das eindimensionale gekoppelte nichtlineare Wigner-Poisson-Fokker-Planck-System. Im ersten Kapitel wird als typisches Beispiel eines extrem hochfrequenten Halbleitergeräts eine Quantendiode vorgestellt, in der der Ladungstransport, anhand ihrer physikalischen und geometrischen Beschaffenheit, durch dieses eindimensionale System modelliert werden kann.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich dann in drei Teilen:

i) Die Wohldefiniertheit und Analysis des WPFP-Systems mit periodischen Randbedingungen. Wir beweisen die Existenz und Eindeutigkeit einer zeit-globalen Lösung des in einen gewichteten L^2-Raum eingebetteten Systems. Dabei werden Techniken der Halbgruppentheorie von linearen Operatoren, und ihrer Anwendungen auf nichtlineare Evolutionsgleichungen verwendet ([33, 18]).

ii) Die Vorstellung des Splittingschemas für das lineare WFP-Problem, und dessen Konvergenzanalysis. Es wird gezeigt, dass dieses Schema, unter bestimmten Voraussetzungen an die Anfangsdaten, konvergent erster Ordnung ist. Der Beweis basiert auf eine Taylorentwicklung zweiter Ordnung, wobei die beteiligten Halbgruppen mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens explizit angegeben werden. Anschließend verweisen wir auf ein „genauso gutes“ alternatives Schema.

iii) Das letzte Kapitel beschäftigt sich mit der numerischen Approximation des linearen Systems. Zuerst wird der Splittingalgorithmus auf Stabilität untersucht, danach mit einem finiten Differenzenverfahren numerisch verglichen. Zum Schluss illustrieren einige numerische Beispiele das Verfahren. Die Programme wurden in FORTRAN und MATLAB geschrieben, und die Testläufe auf einer Pentium II/233 Mhz ausgeführt.

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei Herrn Prof. Dr. Anton Arnold für die hervorragende Betreuung bedanken. Ein ganz besonderer Dank gilt an meine Freundin Evi für die wichtige seelische Unterstüzung.

1 Das WPFP-Modell

Der Ladungstransport in den Halbleitern wird von der Kollision überragt, wenn der Beobachtungszeitrahmen deutlich größer als die Kollisionsrelaxationszeit. Daher ist es notwendig, dass die Simulationen von Geräten der tiefen und mittleren Frequenzbereiche auf mathematische Modelle basieren, die von der Boltzmann-Gleichung herstammen ([31]).

Jedoch sind in Geräten mit extrem hohen Frequenzen, die sehr klein sind, und unter hoher elektrischer Feldstärke arbeiten, die für Simulationen interessanten Zeitabstände sehr kurz, deshalb ist der Ladungstransport hauptsächlich ballistisch. In solchen Fällen sind Modelle der vereinfachten Kollision eher geeignet.

Das erste Bild 1.1 zeigt uns eine vereinfachte Resonanztunneldiode als typisches Beispiel. Sie besteht aus zwei AlGaAs (Aluminium-Gallium-Arsen) Quantenbarrieren der Dicke 5nm, getrennt durch einen GaAs-Quantenschacht ebenso der Dicke 5nm. Die Barrieren und der Schacht sind nicht dotiert, während die Umgebung außerhalb der Barrieren mit Donatorionen dotiert ist. Das Dotierungsprofil wird durch die Funktion $D(x)$ beschrieben. Sie ist positiv in den Bereichen außerhalb der Barrieren, und Null in den Barrieren und in dem Schacht. Die beiden Bereiche links und rechts der Barrieren sind angeschlossen.

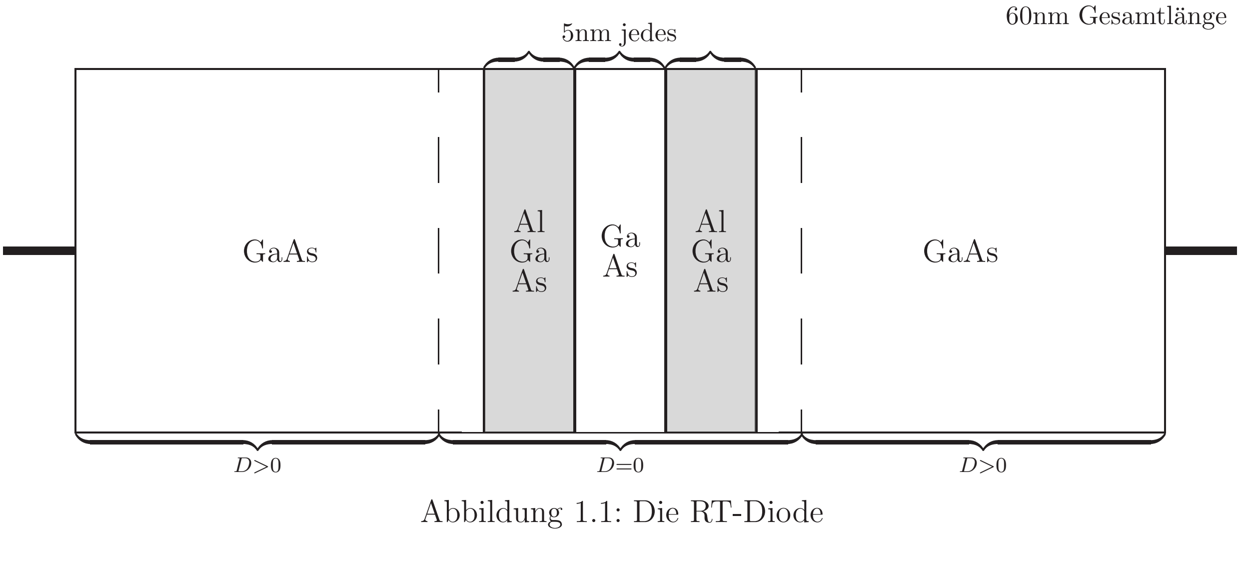


Abbildung 1.1: Die RT-Diode

Die nächste Graphik stellt die Kontaktspannung der Barrieren mit ihrer Umgebung dar.

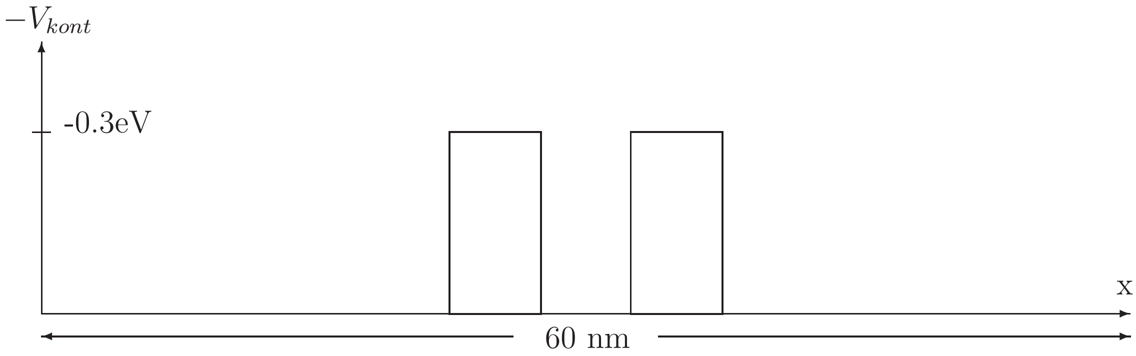


Abbildung 1.2: Die Kontaktspannung der Barrieren

Die etwas vereinfachte Gerätgeometrie der obigen RT-Diode legt ein eindimensionales quantenkinetisches Modell nahe.
Die zeitliche Evolution des Ladungstransportes kann durch die folgende Wigner-Fokker-Planck-Gleichung (WFP) modelliert werden (mehr dazu in der Bemerkung 1.1):

$$w_t + vw_x + \Theta[V]w \;=\; \underbrace{\beta(vw)_v}_{\text{Reibung}} + \underbrace{\sigma w_{vv}}_{\text{klass. Diffusion}} + \underbrace{2\gamma w_{xv} + \alpha w_{xx},}_{\text{Quantendiffusion}} \qquad t>0 \tag{1.1}$$

auf den Teilphasenraum $x \in (0, 2\pi),\ v \in \mathbb{R}$ mit periodischen Randbedingungen in x:

$$w(0,v,t) \;=\; w(2\pi,v,t), \tag{1.2}$$

und der Anfangsbedingung

$$w(x,v,t=0) \;=\; w^I(x,v). \tag{1.3}$$

Die reellwertige Wigner-Funktion $w(x,v,t)$ beschreibt die "Wahrscheinlichkeitsdichte" der Elektronen zum Zeitpunkt t im (x,v)-Phasenraum. Sie kann positiv oder negativ sein(!), die negativen Werte haben keine selbstverständliche Erklärung. An so einem Punkt nimmt man in der Praxis den Mittelwert der Funktion auf einer kleinen Umgebung von Punkten um ihn herum.

Mit einer verschwindenden rechten Seite würde (1.1) die diffusionsfreie Wigner-Gleichung darstellen, die equivalent zur Schrödinger-Gleichung, aber für Simulationen der RT-Dioden viel praktischer ist. Sie beschreibt die reversible Evolution eines Quantensystems unter der Wirkung eines (möglicherweise zeitabhängigen) elektrostatischen Potentials $V = V(x,t)$. Seine Wirkung tritt in die Gleichung mit Hilfe des Konvolutions-/Pseudodifferential-operators $\Theta[V]$ ein:

$$\begin{aligned}(\Theta[V]w)(x,v,t) \;&=\; i[V(x+\frac{1}{2i}\nabla_v,t) - V(x-\frac{1}{2i}\nabla_v,t)]w(x,v,t)\\ &=\; \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \delta V(x,\eta,t)\mathcal{F}_v w(x,\eta,t)e^{iv\eta}\,d\eta\\ &=\; \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \delta V(x,\eta,t)w(x,v',t)e^{i(v-v')\eta}\,dv'd\eta,\end{aligned} \tag{1.4}$$

wobei $\delta V(x,\eta,t) = V(x+\frac{\eta}{2},t) - V(x-\frac{\eta}{2},t)$ ist, und $\mathcal{F}_v w$ die Fouriertransformation von w in v bezeichnet:

$$\mathcal{F}_v w(x,\eta,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} w(x,v',t)e^{-iv'\eta}\,dv'.$$

Die rechte Seite von (1.1) ist ein Modell vom Fokker-Planck-Typ für die irreversible Wechselwirkung eines Quantensystems mit einer Umgebung, z.B. die Interaktion der Elektronen mit einer Phononenwaschung (cf. [21, 40]). In (1.1) ist $\beta \geq 0$ der Reibungsparameter, die anderen Parameter $\alpha,\ \gamma \geq 0$, $\sigma > 0$ bilden die Phasenraumdiffusionsmatrix des Systems. In der kinetischen Fokker-Planck-Gleichung der klassischen Mechanik (cf. [38, 14]) hätten wir $\alpha = \gamma = 0$. Für die WFP-Gleichung (1.1) nehmen wir an

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma + \frac{i}{4}\beta \\ \gamma - \frac{i}{4}\beta & \sigma \end{pmatrix} \geq 0, \tag{1.5}$$

was uns garantiert, dass das System quantenmechanisch richtig ist. Genauer heisst es, dass die entsprechende von Neumann-Gleichung in Lindblad-Form ist, und dass die Positivität des Operators in der Zeit erhalten bleibt (siehe [6] für Einzelheiten).

Insbesondere gilt

$$\alpha\sigma \geq \gamma^2 + \frac{\beta^2}{16}. \tag{1.6}$$

Für die folgende mathematische Analysis ist jedoch nur

$$\alpha\sigma \geq \gamma^2$$

relevant.

Die WFP-Gleichung (1.1) ist selbstkonsistent gekoppelt mit der Poisson-Gleichung für das reellwertige Potential $V[w](x,t)$:

$$\begin{aligned} V_{xx} &= n[w] - D, \qquad x \in (x, 2\pi),\ t > 0, &(1.7)\\ V(0,t) &= V(2\pi, t), &(1.8) \end{aligned}$$

mit der Partikeldichte

$$n[w](x,t) = \int_{\mathbb{R}} w(x,v,t)\, dv. \tag{1.9}$$

Dieses System stellt die Elektron-Elektron Interaktion als eine "Mittelfeld"-Approximation dar.

$D = D(x)$ bezeichnet das sogenannte "Dotierungsprofil" im Kontext der Halbleitermodellierung, welches als vorgegeben angenommen wird.

Die elektrische Stromdichte sei definiert durch $J(x,t) = -\int_{\mathbb{R}} vw\, dv$.

Bemerkung 1.1 *Die Gleichung (1.1) ist eigentlich eine Vereinfachung von*

$$\begin{aligned} w_t + vw_x + \Theta[V[w] + V_{kont}]w &= \beta(vw)_v + \sigma w_{vv} + 2\gamma w_{xv} + \alpha w_{xx}, &(1.10)\\ 0 \leq x \leq L, \quad v \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

V_{kont} bezeichnet das Kontaktpotential der Quantenbarrieren, und das elektrostatische Potential $V[w]$ ist die Lösung der obigen Poisson-Gleichung (1.7).

Der Einfachheit halber haben wir hier die Planckkonstante, die Partikelnmasse und die Ladung auf Eins normiert.

Die Wahl $L = 2\pi$ in (1.1) ist nur eine triviale Vereinfachung.

Aufgrund der nichtlinearen Kopplung mit der Poisson-Gleichung haben wir zunächst analytische Schwierigkeiten die Partikeldichte n zu definieren, denn typischerweise gilt: $w(x,t,.) \in L^2(\mathbb{R}_v) \not\Rightarrow w(x,t,.) \in L^1(\mathbb{R}_v)$, so dass n nicht ohne weiteres definierbar ist. Als Ausweg werden wir dieses System in einen gewichteten L^2-Raum einbetten, mehr dazu im nächsten Kapitel.

Die mathematischen Eigenschaften der Wigner-Poisson-Gleichung und der dissipativen Wigner-Systeme sind in der letzten Dekade (siehe [31, 4] und die Referenzen darin) intensiv untersucht worden. Die reibungsfreie drei-dimensionale WPFP-Gleichung wurde zuerst in [6] analysiert, und es wurden dort eindeutige zeit-lokale Lösungen konstruiert. Die größte analytische Herausforderung der Wigner-Poisson-Systeme liegt in der Kontrolle der Partikeldichte (1.9) in geeigneten L^p-Räumen. Dies wird normalerweise entweder durchs Umformen der Wigner-Gleichung ([31, 4]), oder durch die Erforschung der dissipativen Strukturen des Systems ([6]) erreicht. Die eindimensionale Wigner-Poisson-Gleichung erlaubt dagegen eine „direkte“ Analysis ([8], §5), und das ist, was uns in diesem analytischen Rahmen interessiert.

2 Existenz und Eindeutigkeit einer zeitglobalen Lösung

In diesem Kapitel werden wir das WPFP-System (1.1)-(1.9) analytisch untersuchen, und die Existenz und Eindeutigkeit einer globalen milden und klassischen Lösung zeigen. Diesem Evolutionssystem legen wir den gewichteten L^2-Raum

$$\begin{aligned} X &= L^2((0,2\pi)\times\mathbb{R};\,(1+v^2)dxdv) \\ &= \{u \in L^2((0,2\pi)\times\mathbb{R}) \mid vu \in L^2((0,2\pi)\times\mathbb{R})\}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

zugrunde, ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$< u, w >_X = \int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} uw(1+v^2)dvdx \; = < u, w >_2 + < vu, vw >_2,$$

wobei $< u, w >_2$ das Skalarprodukt in $L^2((0,2\pi)\times\mathbb{R})$ bezeichnet. Diese Wahl von X erlaubt die Definition der Partikeldichte $n[w]$ in (1.9), worauf in Bemerkung 2.1 kurz eingegangen wird, und wird insbesondere dadurch gerechtfertigt, wie wir später sehen werden (s. Lemma 2.17), dass die X-Norm der Wignerfunktion w die L^2-Norm der Partikeldichte kontrolliert:

$$\|n[w]\|_{L^2(0,2\pi)} \;\le\; C\|w\|_X. \tag{2.2}$$

Damit ist das WPFP-System wohldefiniert.
Im weiteren bezechnet C generisch erzeugte, aber nicht unbedingt gleiche Konstanten!

Bemerkung 2.1 *Im Allgemeinen gilt $w \in L^2(\mathbb{R}_v) \not\Rightarrow w \in L^1(\mathbb{R}_v)$.*
Wenn man etwas unpräzise sein darf, würde man annäherungsweise etwa folgende Relationen in Betrachtung ziehen:
$w \in L^1(\mathbb{R}_v) : w \sim |v|^{-\alpha}$, *für* $|v| \to \infty$ *mit* $\alpha > 1$;
$w \in L^2(\mathbb{R}_v) : w \sim |v|^{-\alpha}$, *für* $|v| \to \infty$ *mit* $\alpha > \frac{1}{2}$.
Nehmen wir für $w \in L^2(\mathbb{R}_v)$ zunächst an, dass $vw \in L^2(\mathbb{R}_v)$, also $vw \sim |v|^{-\alpha}$, für $|v| \to \infty$ mit $\alpha > \frac{1}{2}$.
Folglich ist $w \sim |v|^{-\alpha-1}$ bzw. $w \in L^1(\mathbb{R}_v)$, und n[w] ist definierbar.
Sicherlich ist $\sqrt{|v|}w \in L^2(\mathbb{R}_v)$ eine andere mögliche Wahl, sie wäre aber etwas unglücklich im Bezug auf die späteren Transformationen!

Die X-Norm ist entsprechend definiert durch $\|u\|_X = \sqrt{\|u\|_2^2 + \|vu\|_2^2}$ und die Vollständigkeit von X folgt aus der Lebesgue-Theorie, wenn man X als L^2 mit dem Maß $d\mu = (1+v^2)dxdv$ betrachtet.

Bemerkung 2.2 *Zur Dreiecksungleichung von $\|.\|_X$:*
Aus

$$\begin{aligned}\|u+w\|_X^2 &= \|u+w\|_2^2 + \|v(u+w)\|_2^2 \\ &\leq \|u\|_2^2 + \|w\|_2^2 + 2\|u\|_2\|w\|_2 + \|vu\|_2^2 + \|vw\|_2^2 + 2\|vu\|_2\|vw\|_2 \\ &= \|u\|_X^2 + \|w\|_X^2 + 2(\|u\|_2\|w\|_2 + \|vu\|_2\|vw\|_2)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(\|u\|_2\|w\|_2 + \|vu\|_2\|vw\|_2)^2 &\leq \|u\|_2^2\|w\|_2^2 + \|vu\|_2^2\|vw\|_2^2 + \|u\|_2^2\|vw\|_2^2 + \|vu\|_2^2\|w\|_2^2 \\ &= (\|u\|_2^2 + \|vu\|_2^2)(\|w\|_2^2 + \|vw\|_2^2)\end{aligned}$$

folgt

$$\|u+w\|_X^2 \leq \|u\|_X^2 + \|w\|_X^2 + 2\|u\|_X\|w\|_X = (\|u\|_X + \|w\|_X)^2, \ \forall u, w \in X.$$

Der folgende Beweis der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des semilinearen Systems (1.1)-(1.9) beruht auf funktionalanalytische Techniken, die aus der Halbgruppentheorie von linearen Operatoren stammen ([33, 18, 24]). Zunächst wird nur das lineare System $w_t + vw_x = \beta(vw)_v + \sigma w_{vv} + 2\gamma w_{xv} + \alpha w_{xx}$, ohne den Wigner-Potentialterm untersucht, und dabei festgestellt, dass die Lösung dieser Evolutionsgleichung eine C_0-Halbgruppe darstellt. Daraufhin wird der quadratisch nichtlineare Pseudodifferentialoperator $\Theta[V]w$ als eine „beschränkte", genauer Lipschitz-stetige Störung der kinetischen Fokker-Planck-Gleichung betrachtet.

2.1 Der Fokker-Planck-Operator

Als Erstes untersuchen wir den unbeschränkten linearen Operator $A : D(A) \longrightarrow X$,

$$Au := -v\partial_x u + \beta\partial_v(vu) + \sigma\partial_v^2 u + 2\gamma\partial_v\partial_x u + \alpha\partial_x^2 u, \tag{2.3}$$

definiert auf

$$\begin{aligned}D(A) = \{u \in X \mid vu_x, u_{vv}, vu_v, u_{xx}, u_{xv} \in X;\ u(0,v) = u(2\pi, v), \\ u_x(0,v) = u_x(2\pi, v), \forall v \in \mathbb{R}\}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Die $C^\infty(\mathbb{R}^2)$-Funktionen, die 2π-periodisch in x sind und kompakten Träger in v haben, sind offensichtlich in $D(A)$ enthalten. Damit ist $D(A)$ dicht in X. Die erforderte Periodizität in x ist eine zusätzliche Bedingung, die aber für die weiteren Ausführungen unentbehrlich ist.

Wir halten in der nächsten Bemerkung einen der für die weitere Rechnung wichtigen Vorteile der Wahl des Hilbertraumes X fest.

Bemerkung 2.3
Behauptung. *Aus $u, u_{vv} \in X$ folgt $u_v \in X$.*
Beweis. *Aus $u, u_{vv} \in L^2(\mathbb{R}_v) \Rightarrow \hat{u}, \eta^2\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}_\eta)$, wobei wir mit $\hat{u}$ die Fouriertransformierte der Funktion u in v notieren. Also existiert auch das Integral $\int_{\mathbb{R}} \eta^2|\hat{u}|^2 d\eta \leq \int_{\mathbb{R}}(1+\eta^4)|\hat{u}|^2 d\eta$, somit $\eta\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}_\eta) \Rightarrow u_v \in L^2(\mathbb{R}_v)$.*
Andererseits aus $w := vu, w_{vv} = 2u_v + vu_{vv} \in L^2(\mathbb{R}_v) \Rightarrow w_v \in L^2(\mathbb{R}_v)$ also $vu_v \in L^2(\mathbb{R}_v)$, und damit die Behauptung $u_v \in X$. □

Insbesondere für die Anwendung: $u \in D(A) \Rightarrow u_v \in X$.

Lemma 2.4 *Auf $D(A)$ ist der Hilbert-adjungierte Operator von A gegeben durch*

$$A^*w \;=\; A_1^*w + A_2^*w, \quad w \in D(A), \tag{2.5}$$

mit

$$A_1^*w \;:=\; v\partial_x w - \beta v\partial_v w + \sigma\partial_v^2 w + 2\gamma\partial_v\partial_x w + \alpha\partial_x^2 w, \tag{2.6}$$

$$A_2^*w \;:=\; \frac{1}{1+v^2}[2\sigma(w + 2v\partial_v w) - 2\beta v^2 w + 4\gamma v\partial_x w]. \tag{2.7}$$

Beweis.
Seien $u, w \in D(A)$. Wir erhalten mittels partieller Integration, der Bemerkung 2.3 und der Eigenschaften von $D(A)$:

$$\begin{aligned}
< Au, w >_X &= < Au, w >_2 + < vAu, vw >_2 \\
&= -\iint vu_x w + \beta\iint (vu)_v w + \sigma\iint u_{vv} w + 2\gamma\iint u_{xv} w + \alpha\iint u_{xx} w - \\
&\quad \iint v^3 u_x w + \beta\iint v^2(vu)_v w + \sigma\iint v^2 u_{vv} w + 2\gamma\iint v^2 u_{xv} w + \alpha\iint v^2 u_{xx} w \\
&= \iint uvw_x - \beta\iint uvw_v + \sigma\iint uw_{vv} + 2\gamma\iint uw_{xv} + \alpha\iint uw_{xx} + \\
&\quad \iint v^3 uw_x - \beta\iint (v^2 w)_v vu + \sigma\iint (v^2 w)_{vv} u + 2\gamma\iint u(v^2 w_x)_v + \alpha\iint v^2 uw_{xx} \\
&= \iint uvw_x + \beta\iint uvw_v + \sigma\iint uw_{vv} + 2\gamma\iint uw_{xv} + \alpha\iint uw_{xx} + \\
&\quad \iint v^3 uw_x - \beta\iint vuv^2 w_v + \sigma\iint v^2 uw_{vv} + 2\gamma\iint v^2 uw_{xv} + \alpha\iint v^2 uw_{xx} - \\
&\quad 2\beta\iint vuvw + 2\sigma\iint uw + 4\sigma\iint uvw_v + 4\gamma\iint vuw_x \\
&= < u, A_1^*w >_X - 2\beta\iint vuvw + 2\sigma\iint uw + 4\sigma\iint uvw_v + 4\gamma\iint vuw_x \\
&= < u, A_1^*w >_X + < u, (1+v^2)A_2^*w) >_2 \\
&= < u, A_1^*w >_X + < u, A_2^*w >_X = < u, A^*w >_X,
\end{aligned}$$

wobei $\iint f$ das Integral $\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x,v)\,dxdv$ bezeichnet. □

So haben wir die Restriktion des adjungierten Operators $A^*|_{D(A)}$ in expliziter Form erhalten. Folglich sind A^* dicht definiert auf $D(A^*) \supseteq D(A)$, und A ein abgeschlossener Operator (vgl. Theorem VIII.1.b in [35]).

Das nächste Lemma stellt uns eine zentrale Eigenschaft des unbeschränkten Operators A zur Verfügung, die Dissipativitätseigenschaft seiner Verschiebung um eine Konstante. Aufgrund der verschiedenen Definitionen der Dissipativität, die in der Literatur benutzt werden, geben wir an dieser Stelle, der Einfachheit halber, eine Definition an, an die wir uns für die weiteren Ausführungen halten werden.

Definition 2.5 *Sei X ein reeller Hilbertraum und $A : D(A) \longrightarrow X$ ein linearer Operator auf $D(A) \subset X$. A heisst dissipativ in X, wenn gilt:*

$$< Au, u >_X \leq\; 0, \quad \forall\, u \in D(A). \tag{2.8}$$

Lemma 2.6 *Es gelte für die Koeffizienten des Operators A, $\alpha\sigma \geq \gamma^2$. Dann sind $A - (\sigma + \frac{\beta}{2})I$ und sein Abschluss dissipativ in X.*

Beweis
Nach Bemerkung 2.3, den Eigenschaften von $D(A)$ und partieller Integration gilt für $u \in D(A)$:

$$\begin{aligned} < Au, u >_X &= -\iint vu_x u + \beta\iint (vu)_v u + \sigma\iint u_{vv}u + 2\gamma\iint u_{xv}u + \alpha\iint u_{xx}u - \\ &\quad \iint v^3 u_x u + \beta\iint v^2(vu)_v u + \sigma\iint v^2 u_{vv}u + 2\gamma\iint v^2 u_{xv}u + \alpha\iint v^2 u_{xx}u \\ &= -\beta\iint uvu_v - \sigma\iint u_v u_v + 2\gamma\iint u_{xv}u - \alpha\iint u_x u_x - \beta\iint (v^2u)_v vu - \\ &\quad \sigma\iint (v^2u)_v u_v + 2\gamma\iint (vu)_{xv} vu - 2\gamma\iint u_x vu - \alpha\iint v^2 u_x u_x, \end{aligned}$$

wobei mit $\iint f$ wieder mal das Integral $\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x,v)\,dxdv$ gemeint ist.
Für die beiden Integrale auf der rechten Seite, die gemischte x-v-Ableitungen enthalten, benutzen wir nun die Interpolationsungleichung

$$\iint u_{xv}u \;\leq\; \frac{\epsilon}{2}\|u_x\|_2^2 + \frac{1}{2\epsilon}\|u_v\|_2^2, \quad \epsilon > 0.$$

Diese Ungleichung wird in der folgenden Proposition 2.7 mittels Fouriertransformationen in v und Fourierreihen in x bewiesen.
Mit $\epsilon := \frac{\gamma}{\sigma}$ erhält man nun

$$\begin{aligned} < Au, u >_X &\leq \frac{\beta}{2}\|u\|_2^2 - \sigma\|u_v\|_2^2 + \epsilon\gamma\|u_x\|_2^2 + \frac{1}{\epsilon}\gamma\|u_v\|_2^2 - \alpha\|u_x\|_2^2 - 2\beta\|vu\|_2^2 - \\ &\quad \beta\iint v^3 u_v u - 2\sigma\iint vuu_v - \sigma\|vu_v\|_2^2 + \epsilon\gamma\|vu_x\|_2^2 + \frac{1}{\epsilon}\gamma\|(vu)_v\|_2^2 - \\ &\quad \alpha\|vu_x\|_2^2 \\ &= \frac{\beta}{2}\|u\|_2^2 + \frac{\gamma^2}{\sigma}\|u_x\|_2^2 - \alpha\|u_x\|_2^2 - 2\beta\|vu\|_2^2 + \frac{3}{2}\beta\|vu\|_2^2 + \sigma\|u\|_2^2 + \\ &\quad \frac{\gamma^2}{\sigma}\|vu_x\|_2^2 - \alpha\|vu_x\|_2^2 \\ &\leq (\sigma + \frac{\beta}{2})\|u\|_2^2. \end{aligned}$$

Also

$$< [A - (\sigma + \frac{\beta}{2})I]u, u >_X \;\leq\; -\sigma\|vu\|_2^2 - \frac{\beta}{2}\|vu\|_2^2 \;\leq\; 0,$$

und der Operator $A - (\sigma + \frac{\beta}{2})I$ ist dissipativ. Nach [33], Theorem 1.4.5b ist auch der Abschluss $\overline{A - (\sigma + \frac{\beta}{2})I} = \overline{A} - (\sigma + \frac{\beta}{2})I$ dissipativ in X. □

Proposition 2.7 *Für $u \in D(A)$ und $\epsilon > 0$ gilt die Ungleichung*

$$\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} u_{xv}u\,dvdx \;\leq\; \frac{\epsilon}{2}\|u_x\|_2^2 + \frac{1}{2\epsilon}\|u_v\|_2^2. \tag{2.9}$$

Beweis. Sei $u \in D(A)$. Aufgrund der Periodizität in x gilt die Fourierdarstellung

$$u(x,v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(v)e^{ikx}, \quad c_k(v) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(y,v)e^{-iky}dy. \tag{2.10}$$

Unter Benutzung der allgemeinen Ungleichung

$$|ab| \leq \frac{\epsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\epsilon}b^2, \quad a,b \in \mathbb{R},\, \epsilon > 0 \tag{2.11}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} < u_{xv}, u >_{L^2(\mathbb{R}_v)} dx &= \int_0^{2\pi} < \mathcal{F}_v(u_{xv}), \mathcal{F}_v u >_{L^2(\mathbb{R}_v)} dx \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\xi \mathcal{F}_v c_k(\xi)e^{ikx}\mathcal{F}_v u(\xi)d\xi dx \\
&\leq \int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\frac{\epsilon}{2}k^2 + \frac{1}{2\epsilon}\xi^2)\mathcal{F}_v c_k(\xi)e^{ikx}\mathcal{F}_v u(\xi)d\xi dx \\
&= -\frac{\epsilon}{2}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_v(u_{xx})(x,\xi)\mathcal{F}_v u(x,\xi)d\xi dx - \\
&\quad \frac{1}{2\epsilon}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_v(u_{vv})(x,\xi)\mathcal{F}_v u(x,\xi)d\xi dx \\
&= -\frac{\epsilon}{2}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} u_{xx}udvdx - \frac{1}{2\epsilon}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} u_{vv}udvdx \\
&= \frac{\epsilon}{2}\|u_x\|_2^2 + \frac{1}{2\epsilon}\|u_v\|_2^2.
\end{aligned}$$

□

Im nächsten Lemma untersuchen wir den adjungierten Operator A^* eingeschränkt auf $D(A)$ (s. Lemma 2.4) auf Dissipativität.

Lemma 2.8 *Es gelte für die Koeffizienten des Operators A, $\alpha\sigma \geq \gamma^2$. Dann ist der verschobene Operator $A^* - (\sigma + \frac{\beta}{2})I$ auf $D(A)$ dissipativ in X.*

Beweis.
Analog zum Lemma 2.6 erhalten wir unter Benutzung von (2.9) mit $\epsilon = \frac{\gamma}{\sigma}$ und partieller Integration

$$\begin{aligned}
< A^*u, u >_X &= < A_1^*u, u >_X + < A_2^*u, u >_X \\
&= \iint vu_xu - \beta\iint vu_vu + \sigma\iint u_{vv}u + 2\gamma\iint u_{xv}u + \alpha\iint u_{xx}u + \iint v^3u_xu - \\
&\quad \beta\iint v^3u_vu + \sigma\iint v^2u_{vv}u + 2\gamma\iint v^2u_{xv}u + \alpha\iint v^2u_{xx}u + 2\sigma\iint u^2 + \\
&\quad 4\sigma\iint uvu_v - 2\beta\iint uv^2u + 4\gamma\iint vu_xu \\
&= \beta\iint u(vu)_v - \sigma\|u_v\|_2^2 - 2\gamma\iint u_xu_v - \alpha\|u_x\|_2^2 + \beta\iint u(v^3u)_v - \\
&\quad \sigma\iint (v^2u)_vu_v - 2\gamma\iint v^2u_vu_x - \alpha\|vu_x\|_2^2 + 2\sigma\|u\|_2^2 -
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& 4\sigma\iint u(vu)_v - 2\beta\|vu\|_2^2 \\
\leq\ & \frac{\beta}{2}\|u\|_2^2 - \sigma\|u_v\|_2^2 + \epsilon\gamma\|u_x\|_2^2 + \frac{1}{\epsilon}\gamma\|u_v\|_2^2 - \alpha\|u_x\|_2^2 + \frac{3}{2}\beta\|vu\|_2^2 + \\
& \sigma\|u\|_2^2 - \sigma\|vu_v\|_2^2 + \epsilon\gamma\|vu_x\|_2^2 + \frac{1}{\epsilon}\gamma\|vu_v\|_2^2 - \alpha\|vu_x\|_2^2 - 2\beta\|vu\|_2^2 \\
=\ & \frac{\beta}{2}\|u\|_2^2 + \frac{\gamma^2}{\sigma}\|u_x\|_2^2 - \alpha\|u_x\|_2^2 - \frac{\beta}{2}\|vu\|_2^2 + \sigma\|u\|_2^2 + \frac{\gamma^2}{\sigma}\|vu_x\|_2^2 - \alpha\|vu_x\|_2^2 \\
\leq\ & \frac{\beta}{2}\|u\|_2^2 - \frac{\beta}{2}\|vu\|_2^2 + \sigma\|u\|_2^2 \\
\leq\ & (\sigma + \frac{\beta}{2})\|u\|_2^2, \quad \forall u \in D(A).
\end{aligned}
$$

Also ist der auf $D(A)$ eingeschränkte Operator $A^* - (\sigma + \frac{\beta}{2})I = [A - (\sigma + \frac{\beta}{2})I]^*$ dissipativ in X. □

Bemerkung. Nach der Bedingung (1.6) ist die Voraussetzung an die Koeffizienten von A in den Lemmata 2.6 und 2.8 erfüllt.

Definition 2.9 *Mit $\mathfrak{P}_n(X)$ definieren wir den Raum der linearen Operatoren auf X, die wie Polynome n-ter Ordnung in der Variable v, und den partiellen Ableitungen ∂_x, ∂_v wirken.*

$$
\mathfrak{P}_n(X) \ := \ \{p(v, \partial_x, \partial_v) \in \mathcal{L}(X) \,|\, p \text{ Polynom } n\text{-ter Ordnung}\}, \tag{2.12}
$$

mit $\mathcal{L}(X) = \{P : D(P) \longrightarrow X \,|\, D(P) \subset X, P \text{ linearer Operator}\}$.
Insbesondere sind die Operatoren A und A^* und deren Störungen um Konstanten in $\mathfrak{P}_2$. Für solche Operatoren gilt der folgende wichtige Satz.

Satz 2.10 *Sei $P \in \mathfrak{P}_2(X)$ ein linearer abschließbarer Operator auf X mit $D(P) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \,|\, 2\pi-$periodisch in $\mathbb{R}_x$, mit kompaktem Träger in $\mathbb{R}_v\}$. Dann ist $\overline{P}$ die maximale Erweiterung von P mit $D(\overline{P}) = \{f \in X \,|\, Pf \in X\}$, wobei Pf für alle $f \in X$ als Distribution eindeutig erklärt ist.*

Beweis. Den Beweis dazu entnehme man [3].

Wir wenden diesen Satz auf den Operator $A^* - (\sigma + \frac{\beta}{2})I$ an. Dieser ist auf $D(A)$, und damit insbesondere auf der Menge der $C^\infty(\mathbb{R}^2)$-Funktionen, die 2π-periodisch in x sind und kompakten Träger in v haben, dissipativ in X und nach [33], Theorem 1.4.5 sein Abschluss bzgl. dieser Definitionsmenge auch. Sein Abschluss ist aber gerade die maximale Erweiterung, sodass auch $A^* - (\sigma + \frac{\beta}{2})I$ auf seinem eigenen „natürlichen“ Definitionsbereich im Bezug auf $D(A)$ dissipativ in X ist.
Eigentlich wissen wir aus der Funktionalanalysis ([35],[2],[28]), dass der adjungierte Operator immer abgeschlossen ist, aber bzgl. seines eigenen Definitionsbereiches. Wir müssten einen solchen Umweg machen, denn wir kannten A^* als dissipativ eigentlich nur auf $D(A)$ bzw. der obengenannten $C^\infty(\mathbb{R}^2)$-Funktionenmenge.

Nach Anwendung des Korollars 1.4.4, [33] generiert $\overline{A} - (\sigma + \frac{\beta}{2})I$ eine C_0-Kontraktionshalbgruppe in X. Dabei gilt im Allgemeinen, nach [35], Theorem VIII.1.c, $(\overline{A})^* = A^*$. Folglich ([33], Theorem 3.1.1) ist $\overline{A}$ der infinitessimale Generator einer C_0-Halbgruppe, die folgender Abschätzung genügt

$$
\|e^{t\overline{A}}u\|_X \ \leq \ e^{(\sigma + \frac{\beta}{2})t}\|u\|_X, \ u \in X, t \geq 0. \tag{2.13}
$$

Schließlich, nach [33], hat das folgende System

$$\begin{aligned} u_t &= \overline{A}u, \\ u(t=0) &= u_0 \in X, \\ u(t,0,v) &= u(t,2\pi,v) \end{aligned} \tag{2.14}$$

eine eindeutige milde Lösung (oder klassische Lösung für $u_0 \in D(\overline{A})$) gegeben durch $u(t) = e^{t\overline{A}}u_0, t > 0$.

2.2 Der nichtlineare Wigner-Operator

Nun wenden wir uns den quadratisch nichtlinearen Pseudodifferentialoperator $\Theta[V]$ an, und wollen ihn, als Störungsoperator von $\overline{A}$, auf Eigenschaften untersuchen, die uns mit Hilfe der bekannten Resultate aus der Halbgruppentheorie der Operatoren zum Beweis des Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung für das WPFP-System verhelfen könnten.

Als Erstes werden wir einige allgemeine Eigenschaften von dem linearen Wigner-Term (vgl. dazu auch [30], [8]), d.h. bei vorgegebener Potentialfunktion V, feststellen, von denen wir beim Beweis der Lipschitz-Stetigkeit Gebrauch machen werden.

Die Definition des Operators $\Theta[V]$: $L^2((0,2\pi)\times\mathbb{R}_v) \longrightarrow L^2((0,2\pi)\times\mathbb{R}_v)$ in (1.4) lässt sich für beliebiges zeitunabhängiges $V \in L^\infty(\mathbb{R})$ verallgemeinern. Beachte, dass $\Theta[V]$ nur in v-Richtung wirkt.
Solange unser System abgekoppelt von der Poisson-Gleichung (1.7)-(1.8) ist, und V vorgegeben wird, ist $\Theta[V]$ offensichtlich linear in X. So spricht man vom linearen WFP-System.

Proposition 2.11 *Der Operator* $\Theta[V]$ *mit* $V \in L^\infty(\mathbb{R})$ *hat die folgenden Eigenschaften:*
(i) $\Theta[V]$ *ist schiefsymmetrisch bezüglich* $< .,. >_{L^2(\mathbb{R}_v)}$.
(ii) $\mathcal{F}_v\Theta[V]u(x,\eta) = i\delta V(x,\eta)\mathcal{F}_v u(x,\eta)$.
(iii) $\Theta[V]$ *bildet* $L^2((0,2\pi)\times\mathbb{R}_v)$ *in sich selbst ab, und genügt der Abschätzung*

$$\|\Theta[V]\|_{\mathcal{B}(L^2((0,2\pi)\times\mathbb{R}_v))} \leq 2\|V\|_\infty. \tag{2.15}$$

Beweis.
(i) Seien $u, w \in L^2((0,2\pi)\times\mathbb{R}_v)$. Für fixes $x \in (0,2\pi)$ gilt

$$\begin{aligned} < \Theta[V]u, w >_{L^2(\mathbb{R}_v)} &= \int_{\mathbb{R}} u\Theta[V]w dv \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}_v}\int_{\mathbb{R}_\eta} \delta V(x,\eta)\mathcal{F}_v u(x,\eta)w(x,v)e^{iv\eta}\, d\eta dv \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}_\eta}\int_{\mathbb{R}_\xi} \delta V(x,\eta)u(x,\xi)\mathcal{F}_v w(x,-\eta)e^{-i\xi\eta}\, d\xi d\eta \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}_\eta}\int_{\mathbb{R}_\xi} \delta V(x,\eta)u(x,\xi)\mathcal{F}_v w(x,\eta)e^{i\xi\eta}\, d\xi d\eta \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}_v}\int_{\mathbb{R}_\eta} \delta V(x,\eta)u(x,v)\mathcal{F}_v w(x,\eta)e^{iv\eta}\, d\eta dv \\ &= < u, \Theta[V]w >_{L^2(\mathbb{R}_v)} . \end{aligned}$$

(ii) Gemäß seiner Definition ist der Pseudodifferentialoperator $\Theta[V]$ der Form

$$\Theta[V]u(x,v) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} i\delta V(x,\eta)\mathcal{F}_v u(x,\eta)e^{iv\eta}\,d\eta,$$

und man erhält die Behauptung mit Hilfe der inversen Fouriertransformation.
(iii) Für $u \in L^2((0,2\pi)\times\mathbb{R}_v)$ folgt

$$\begin{aligned}\|\Theta[V]u\|_{L^2((0,2\pi),\mathbb{R}_v)} &= \|i\delta V\mathcal{F}_v u\|_{L^2((0,2\pi),\mathbb{R}_v)}\\ &\le \|\delta V\|_\infty\|u\|_{L^2((0,2\pi),\mathbb{R}_v)}\\ &\le 2\|V\|_\infty\|u\|_{L^2((0,2\pi),\mathbb{R}_v)}.\end{aligned}$$

□

Definition 2.12 *Man definiere für $V \in L^\infty(\mathbb{R})$ den Pseudodifferentialoperator $\Omega[V]$ auf $L^2((0,2\pi)\times\mathbb{R}_v)$ durch*

$$\begin{aligned}(\Omega[V]u)(x,v) &= \frac{1}{2}[V(x+\frac{1}{2i}\nabla_v)+V(x-\frac{1}{2i}\nabla_v)]u(x,v)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}[V(x+\frac{\eta}{2})+V(x-\frac{\eta}{2})]\mathcal{F}_v u(x,\eta)e^{iv\eta}\,d\eta. \end{aligned}\tag{2.16}$$

Wie im Falle von $\Theta[V]$ erhält man analog

$$\|\Omega[V]\|_{\mathcal{B}(L^2((0,2\pi)\times\mathbb{R}_v))} \;\le\; 2\|V\|_\infty. \tag{2.17}$$

Lemma 2.13 *Sei $V \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$. Dann gilt für $w \in X$*

$$\Theta[V](vw) \;=\; v\Theta[V]w + \Omega[V_x]w. \tag{2.18}$$

Beweis
Es folgt nach partieller Integration

$$\begin{aligned}\Theta[V](vw) &= \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\Big(V(x+\frac{\eta}{2})-V(x-\frac{\eta}{2})\Big)\,v'w(x,v')e^{i(v-v')\eta}\,dv'd\eta\\ &= \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\Big[\Big(V(x+\frac{\eta}{2})-V(x-\frac{\eta}{2})\Big)\,w(x,v')e^{iv\eta}\Big]\,\Big[v'e^{-iv'\eta}\Big]\,d\eta dv'\\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\Big(V_x(x+\frac{\eta}{2})+V_x(x-\frac{\eta}{2})\Big)\,w(x,v')e^{i(v-v')\eta}\,d\eta dv'\\ &\quad+\frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}v\,\Big(V(x+\frac{\eta}{2})-V(x-\frac{\eta}{2})\Big)\,w(x,v')e^{i(v-v')\eta}\,d\eta dv'\\ &= \Omega[V_x]w+v\Theta[V]w.\end{aligned}$$

□

Definition 2.14 *Man definiere nun den nichtlinearen Wigner-Term auf X durch*

$$u \longmapsto Bu \;:=\; -\Theta[V[u]]u, \tag{2.19}$$

wobei $V[u]$ die 2π-periodisch fortgesetzte Lösung der Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned}V_{xx} &= n[u]-D, \quad x\in(0,2\pi),\\ V(0) &= V(2\pi),\end{aligned}\tag{2.20}$$

mit $n[u](x)=\int_{\mathbb{R}}u(x,v)dv$ ist.

Proposition 2.15 *Falls $D \in L^1(0,2\pi)$ ist, so kann man die Lösung $V[u]$ explizit angeben durch*

$$V[u](x) \;=\; \int_0^{2\pi} G(x,\xi)\,[n[u](\xi) - D(\xi)]\,d\xi, \quad x \in (0,\pi) \tag{2.21}$$

wobei G die Green's Funktion präsentiert

$$G(x,\xi) = \begin{cases} x(\frac{\xi}{2\pi} - 1) & , \quad x < \xi \\ \xi(\frac{x}{2\pi} - 1) & , \quad x > \xi. \end{cases} \tag{2.22}$$

Beweis.

$$G_x(x,\xi) = \begin{cases} \frac{\xi}{2\pi} - 1 & , \quad x < \xi \\ \frac{\xi}{2\pi} & , \quad x > \xi \end{cases}$$

Also $G_{xx} = 0$.
Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} V_x[u](x) \;&=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^x \xi\,[n[u](\xi) - D(\xi)]\,d\xi + \int_x^{2\pi} (\frac{\xi}{2\pi} - 1)\,[n[u](\xi) - D(\xi)]\,d\xi \\ &=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi\,[n[u](\xi) - D(\xi)]\,d\xi - \int_x^{2\pi} [n[u](\xi) - D(\xi)]\,d\xi \end{aligned}$$

$\Longrightarrow V_{xx}[u](x) \;=\; n[u](x) - D(x).$ □

Bemerkung 2.16 *Es gilt für $u_1, u_2 \in X$*

$$V[u_1 + u_2] = V[u_1] + V^0[u_2] = V[u_2] + V^0[u_1] \tag{2.23}$$

mit

$$V^0[u](x) := \int_0^{2\pi} G(x,\xi) n[u](\xi) d\xi, \quad \forall\, u \in X, \tag{2.24}$$

und $\Theta[.]$ ist linear. Somit erhalten wir für B:

$$B(u_1 + u_2) = Bu_1 + Bu_2 - \Theta[V^0[u_1]]u_2 - \Theta[V^0[u_2]]u_1. \tag{2.25}$$

Lemma 2.17 *Sei $D \in L^1(0,2\pi)$. Dann gilt:*
(a) B bildet X in sich ab, ist vom Typ C^∞ in X, und genügt der Abschätzung
(b)

$$\|Bu_1 - Bu_2\|_X \le C(\|u_1\|_X + \|u_2\|_X + \|D\|_{L^1(0,2\pi)})\|u_1 - u_2\|_X, \tag{2.26}$$

für $u_1, u_2 \in X$.

Beweis
(a) Dass $B : X \to X$ gilt, folgt unmittelbar aus (2.17), dem Lemma 2.13, und den Propositionen 2.11 und 2.15.
Die Frechet-Ableitung von B in $u \in X$ ist die Abbildung $\overline{u} \in X \mapsto D_u B(\overline{u})$ gegeben durch

$$\begin{aligned} D_u B(\overline{u}) \quad &= \quad -\lim_{h\to 0} \frac{\Theta[V[u + h\overline{u}]](u + h\overline{u}) - \Theta[V[u]]u}{h} \\ &\overbrace{=}^{\text{Bem. 2.16}} \quad -\lim_{h\to 0} \frac{h\Theta[V[u]]\overline{u} + h\Theta[V^0[\overline{u}]]u + h^2\Theta[V^0[\overline{u}]]\overline{u}}{h} \\ &= \quad -\Theta[V[u]]\overline{u} - \Theta[V^0[\overline{u}]]u. \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} D_u^2 B(u_1,u_2) &= \lim_{h\to 0} \frac{D_{u+hu_1}B - D_u B}{h}(u_2) \\ &= \lim_{h\to 0}\Bigg[\frac{-\Theta[V[u+hu_1]]u_2 - \Theta[V^0[u_2]](u+hu_1)}{h} \\ &\quad + \frac{\Theta[V[u]]u_2 + \Theta[V^0[u_2]]u}{h}\Bigg] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h\Theta[V^0[u_1]]u_2 - h\Theta[V^0[u_2]]u_1}{h} \\ &= \Theta[V^0[u_1]]u_2 - \Theta[V^0[u_2]]u_1 \end{aligned}$$

konstant in u, und $D^3B = 0$. Folglich ist $B \in C^\infty(X)$.

(b) Sei $u \in X$. Zunächst ist zu zeigen

$$\|n[u]\|_{L^2(0,2\pi)} \le C\|u\|_X. \tag{2.27}$$

Für ein fixes $x \in (0,2\pi)$ erhält man mit Hilfe der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} |n[u](x)| &= \int_{\mathbb{R}} |u(x,v)|\sqrt{1+|v|^2}\frac{1}{\sqrt{1+|v|^2}}dv \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x,v)|^2(1+|v|^2)dv\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dv}{1+|v|^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \tilde{C}\sqrt{\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}_v)} + \|vu\|^2_{L^2(\mathbb{R}_v)}} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \int_0^{2\pi} |n[u](x)|^2 dx \;\le\; C(\|u\|^2_{L^2((0,2\pi),\mathbb{R}_v)} + \|vu\|^2_{L^2((0,2\pi),\mathbb{R}_v)}) \;=\; C\|u\|^2_X.$$

Aus (2.21) und (2.24) folgt dann

$$\begin{aligned} \|V[u]\|_{W^{1,\infty}(0,2\pi)} &\le C\|n-D\|_{L^1(0,2\pi)} \\ &\le C(\|u\|_X + \|D\|_{L^1(0,2\pi)}), \end{aligned} \tag{2.28}$$

und

$$\|V^0[u]\|_{W^{1,\infty}(0,2\pi)} \;\le\; C\|u\|_X. \tag{2.29}$$

Mit $u_\varepsilon = \varepsilon u_1 + (1-\varepsilon)u_2$, $0 \le \varepsilon \le 1$, der Proposition 2.11, dem Lemma 2.13 und (2.27)-(2.29) kann man nun abschätzen:

$$\begin{aligned} &\|Bu_1 - Bu_2\|_X \le \sup_{\varepsilon\in[0,1]} \|D_{u_\varepsilon}B(u_1-u_2)\|_X \\ &= \sup_{\varepsilon\in[0,1]} \|\Theta[V[u_\varepsilon]](u_1-u_2) + \Theta[V^0[u_1-u_2]]u_\varepsilon\|_X \\ &\le \sup_{\varepsilon\in[0,1]} \Big[\Big((C\|V[u_\varepsilon]\|_\infty\|u_1-u_2\|_2)^2 + \|v\Theta[V[u_\varepsilon]](u_1-u_2)\|_2^2\Big)^{1/2} + \\ &\qquad \Big((C\|V^0[u_1-u_2]\|_\infty\|u_\varepsilon\|_2)^2 + \|v\Theta[V^0[u_1-u_2]]u_\varepsilon\|_2^2\Big)^{1/2}\Big] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sup_{\varepsilon\in[0,1]} \Big[\Big(C\|V[u_\varepsilon]\|_\infty^2 \|u_1-u_2\|_2^2 + (\|\Theta[V[u_\varepsilon]](v(u_1-u_2))\|_2 + \\
&\qquad \|\Omega[V_x[u_\varepsilon]](u_1-u_2)\|_2)^2 \Big)^{1/2} + \Big(C\|V^0[u_1-u_2]\|_\infty^2 \|u_\varepsilon\|_2^2 + \\
&\qquad (\|\Theta[V^0[u_1-u_2]](vu_\varepsilon)\|_2 + \|\Omega[V_x^0[u_1-u_2]]u_\varepsilon\|_2)^2 \Big)^{1/2} \Big] \\
&\leq \sup_{\varepsilon\in[0,1]} \Big[\Big(C\|V[u_\varepsilon]\|_\infty^2 \|u_1-u_2\|_2^2 + (C\|V[u_\varepsilon]\|_\infty \|v(u_1-u_2)\|_2 + \\
&\qquad C\|V_x[u_\varepsilon]\|_\infty \|u_1-u_2\|_2)^2 \Big)^{1/2} + \Big(C\|V^0[u_1-u_2]\|_\infty^2 \|u_\varepsilon\|_2^2 + \\
&\qquad (C\|V^0[u_1-u_2]\|_\infty \|vu_\varepsilon\|_2 + C\|V_x^0[u_1-u_2]\|_\infty \|u_\varepsilon\|_2)^2 \Big)^{1/2} \Big] \\
&\leq \sup_{\varepsilon\in[0,1]} \Big[\Big(C(\|u_\varepsilon\|_X + \|D\|_1)^2 \|u_1-u_2\|_2^2 + \\
&\qquad (C(\|u_\varepsilon\|_X + \|D\|_1)\|v(u_1-u_2)\|_2 + C(\|u_\varepsilon\|_X + \|D\|_1)\|u_1-u_2\|_2)^2 \Big)^{1/2} + \\
&\qquad \Big(C\|u_1-u_2\|_X^2 \|u_\varepsilon\|_2^2 + (C\|u_1-u_2\|_X \|vu_\varepsilon\|_2 + C\|u_1-u_2\|_X \|u_\varepsilon\|_2)^2 \Big)^{1/2} \Big] \\
&\leq C(\|u_1\|_X + \|u_2\|_X + \|D\|_1) \Big(\|u_1-u_2\|_2^2 + (\|u_1-u_2\|_2 + \|v(u_1-u_2)\|_2)^2 \Big)^{1/2} + \\
&\qquad C\|u_1-u_2\|_X \Big((\|u_1\|_2 + \|u_2\|_2)^2 + (\|u_1\|_2 + \|u_2\|_2 + \|vu_1\|_2 + \|vu_2\|_2)^2 \Big)^{1/2} \\
&\leq C(\|u_1\|_X + \|u_2\|_X + \|D\|_1) \Big(\|u_1-u_2\|_2^2 + (\|u_1-u_2\|_2 + \|v(u_1-u_2)\|_2)^2 \Big)^{1/2} + \\
&\qquad C\|u_1-u_2\|_X \Big(2\left[\|u_1\|_2^2 + (\|u_1\|_2 + \|vu_1\|_2)^2 \right] + 2\left[\|u_2\|_2^2 + (\|u_2\|_2 + \|vu_2\|_2)^2 \right] \Big)^{1/2} \\
&\leq C\Big(\|u_1\|_X + \|u_2\|_X + \|D\|_1 \Big) \|u_1-u_2\|_X,
\end{aligned}
$$

wobei $\Big(\|u\|_2^2 + (\|u\|_2 + \|vu\|_2)^2\Big)^{1/2} \leq C\|u\|_X$ angewandt wurde. Alle Konstanten sind hier der Einfachheit halber mit C bezeichnet. □

Bemerkung 2.18 *Wie am Anfang dieses Kapitels erwähnt (s. (2.2)), ist in dem Beweis vom Lemma 2.17 die Tatsache, dass $\|u\|_X$ die Norm von $n[u]$ in $L^2(0,2\pi)$ kontrolliert, von wesentlicher Bedeutung. Auch hier haben wir stark $vu \in L^2((0,2\pi),\mathbb{R})$ benutzt, um $n[u]$ und die Norm von $V[u]$ in $W^{1,\infty}(0,2\pi)$ nach oben abschätzen zu können!*
Ferner gilt für die Lösung der Poisson-Gleichung (2.20) $V[u] \in W^{1,\infty}(0,2\pi)$, und damit

$$\|\Theta[V[u]]\|_{\mathcal{B}(X)} \leq C\|V[u]\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R})}, \tag{2.30}$$

dabei wird $V[u]$ 2π-periodisch in $\mathbb{R}$ fortgesetzt.
Also kontrolliert die $W^{1,\infty}$-Norm von $V[u]$ die Norm von Bu in X.

2.3 Das Hauptresultat

Nun schreiben wir das WFP-System um in

$$
\begin{aligned}
w_t &= \overline{A}w + Bw, \quad t > 0, \\
w(t=0) &= w^I.
\end{aligned} \tag{2.31}
$$

Nachdem wir einige wichtige Eigenschaften, insbesondere die lokale Lipschitz-Stetigkeit von B (Lemma 2.17), ermittelt haben, können wir nun, mit Hilfe der bisherigen Resultate zum Operator A aus Abschnitt 2.1, zu dem Beweis der eindeutigen Lösbarkeit unseres Systems kommen.

Satz 2.19 *Seien $D \in L^1(0, 2\pi)$ und $w^I \in X$.*
a) Dann hat das WPFP-System (2.31) eine eindeutige milde Lösung $w \in C([0, \infty), X)$.
b) Falls zusätzlich $w^I \in D(\overline{A})$, so ist w die klassische Lösung, i.e. $w \in C^1([0, \infty), X)$, und $w(t) \in D(\overline{A})$ für $t \geq 0$.

Beweis
Wir betrachten nun B als eine Störung des Operators $\overline{A}$. Da B lokal Lipschitz-stetig in X ist, folgt aus dem Theorem 6.1.4 in [33], dass (2.31) für jedes $w^I \in X$ eine eindeutige milde Lösung auf ein Zeitintervall $[0, t_{max})$ hat. Weiterhin, falls $t_{max} = t_{max}(w^I)$ endlich ist, so gilt $\lim_{t \nearrow t_{max}} \|w\|_X = \infty$. Aus Theorem 6.1.5 in [33] folgt dann für $w^I \in D(\overline{A})$, dass mit $B \in C^\infty(X)$ w eine klassische Lösung auf $[0, t_{max})$ ist.

Um $t_{max} = \infty$ zu zeigen, leiten wir im weiteren eine a-priori Abschätzung für $\|w(t)\|_X$ ab.

1. Schritt Zunächst leiten wir die a-priori Abschätzung unter der Bedingung $w^I \in D(\overline{A})$ ab. Betrachten wir nun die Evolutionsgleichung für $u(t) = vw(t)$, wobei w die klassische Lösung auf $[0, t_{max})$ ist. Im Sinne des Satzes 2.10 heisst es $w(t) \in \{f \in X \mid Af \in X\} = D(\overline{A})$, so wenden wir im weiteren den Operator A im distributionellen Sinn an. Hierbei wird A bzgl. der $C^\infty(\mathbb{R}^2)$-Funktionen, die 2π-periodisch in x sind und kompakten Träger in v haben, abgeschlossen. Es folgt $Au(t), \Theta[V(t)]u(t) \in L^2((0, 2\pi) \times \mathbb{R})$, $\forall t \in [0, t_{max})$, und mit (2.18) und den folgenden einfachen Rechnungen

$$\begin{aligned} vw_{vv} &= (vw)_{vv} - 2w_v, \\ v(vw)_v &= (v^2 w)_v - vw, vw_{xv} = (vw)_{xv} - w_x, \end{aligned}$$

erhalten wir dann für $t \in [0, t_{max})$:

$$u_t - Au + \Theta[V(t)]u + \beta u \;=\; \Omega[V_x(t)]w - 2\sigma w_v - 2\gamma w_x, \tag{2.32}$$

wobei $V(t)$ das periodisch fortgesetzte Potential $V(t) := V[w(t)] \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ bezeichnet. Wenn wir (2.32) mit u multiplizieren und integrieren, so folgt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_2^2 + \iint v u_x u - \beta \iint (vu)_v u - \sigma \iint u_{vv} u - 2\gamma \iint u_{xv} u - \alpha \iint u_{xx} u + \\ &\qquad \iint u \Theta[V(t)]u + \beta \|u\|_2^2 \;=\; \iint u \Omega[V_x(t)]w - 2\sigma \iint w_v u - 2\gamma \iint w_x u. \end{aligned}$$

Wir integrieren nun partiell und benutzen dabei die Schiefsymmetrie des Operators $\Theta[V]$ und (2.9) mit $\epsilon = \frac{\gamma}{\sigma}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_2^2 &\leq -\frac{\beta}{2}\|u\|_2^2 - \sigma\|u_v\|_2^2 + \epsilon\gamma\|u_x\|_2^2 + \frac{1}{\epsilon}\gamma\|u_v\|_2^2 - \alpha\|u_x\|_2^2 + \\ &\quad \iint u\Omega[V_x(t)]w + \sigma\|w\|_2^2 \\ &\leq \frac{\beta}{2}\|u\|_2^2 + \iint u\Omega[V_x(t)]w + \sigma\|w\|_2^2. \end{aligned}$$

Analog ergibt sich beim Multiplizieren von (1.1) mit w und Integrieren:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_2^2 &= \beta\iint(vw)_v w + \sigma\iint w_{vv}w + 2\gamma\iint w_{xv}w + \alpha\iint w_{xx}w - \iint w\Theta[V(t)]w \\
&\leq \frac{\beta}{2}\|w\|_2^2 - \sigma\|w_v\|_2^2 + \epsilon\gamma\|w_x\|_2^2 + \frac{1}{\epsilon}\gamma\|w_v\|_2^2 - \alpha\|w_x\|_2^2 \\
&\leq \frac{\beta}{2}\|w\|_2^2.
\end{aligned}$$

Folglich

$$\frac{d}{dt}\|w\|_2^2 \;\leq\; \beta\|w\|_2^2 \quad \text{und} \quad \|w\|_2^2 \;\leq\; \|w^I\|_2^2 e^{\beta t}. \tag{2.33}$$

Aus dem Beweis des Lemmas 2.17 gilt für die Lösung von (2.20) aufgrund der Periodizität

$$\|V[u]\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R})} \;\leq\; C(\|u\|_X + \|D\|_{L^1(0,2\pi)}), \tag{2.34}$$

und mit (2.17) folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_X^2 - \frac{\beta}{2}\|w\|_X^2 &\leq \sigma\|w\|_2^2 + \iint u\Omega[V_x(t)]w \\
&\leq \sigma\|w\|_2^2 + \|V_x(t)\|_\infty\|u\|_2\|w\|_2 \\
&\leq \sigma\|w^I\|_2^2 e^{\beta t} + C(\|w\|_X + \|D\|_1)\|vw\|_2\|w^I\|_2 e^{\frac{\beta}{2}t} \\
&\leq \sigma\|w^I\|_2^2 e^{\beta t} + C\|w^I\|_2 e^{\frac{\beta}{2}t}(\|w\|_X^2 + \|w\|_X\|D\|_1) \\
&\leq \sigma\|w^I\|_2^2 e^{\beta t} + C\|w^I\|_2 e^{\frac{\beta}{2}t}(\|w\|_X^2 + \|D\|_1^2).
\end{aligned}$$

Das lässt sich umschreiben in

$$\frac{d}{dt}\|w\|_X^2 \;\leq\; a(t)\|w\|_X^2 + b(t), \tag{2.35}$$

mit

$$\begin{aligned}
a(t) &= C\|w^I\|_2 e^{\frac{\beta}{2}t} + \beta, \\
b(t) &= 2\sigma\|w^I\|_2^2 e^{\beta t} + C\|w^I\|_2 e^{\frac{\beta}{2}t}\|D\|_1^2.
\end{aligned}$$

Schließlich folgt unter Anwendung der Gronwall Ungleichung

$$\|w(t)\|_X^2 \;\leq\; \|w^I\|_X^2 e^{\int_0^t a(s)ds} + \int_0^t b(s)e^{\int_s^t a(\tau)d\tau}ds, \quad t \geq 0. \tag{2.36}$$

Somit ist $t_{max} = \infty$, denn sonst würde $w(t)$ beschränkt in X sein, was das Theorem 6.1.4 in [33] widersprechen würde.

2. Schritt Da (2.36) eine Abschätzung für $\|w(t)\|_X$ hauptsächlich auf der Basis der X-Norm der Anfangsbedingung w^I ist, obwohl im ersten Schritt $w^I \in D(\overline{A})$ war, lässt sich dieses Resultat mit Hilfe des folgenden Dichtheitsarguments auch für w^I nur in X übertragen. Damit hätten wir dann auch eine eindeutige globale milde Lösung für das WPFP-System.

Seien also $w^I \in X$ und (w_n^I) eine Folge in $D(\overline{A})$ mit $w_n^I \longrightarrow w^I$ in X. Mit (2.36) hat man für jedes Folgenelement w_n^I eine a-priori Abschätzung für die entsprechende klassische Lösung:

$$\|w_n(t)\|_X \;\leq\; h(t), \quad \forall t \geq 0,\, n \in \mathbb{N},$$

wobei $h \in C[0, \infty)$ unabhängig von n ist.
Sei $w \in C([0, t_{max}(w^I)), X)$ die eindeutige milde Lösung zu w^I.

Angenommen $t_{max}(w^I) < \infty$. Nach der Argumentation und den Referenzen am Anfang des ersten Schrittes folgt $\lim_{t \nearrow t_{max}(w^I)} \|w(t)\|_X = \infty$. Für die monoton steigende, stetige Funktion $g(t) := \max\{\|w(\tau)\|_X,\ 0 \le \tau \le\ t\}$ gilt dann $\lim_{t \nearrow t_{max}(w^I)} g(t) = \infty$.
Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N \ge 2\max\left\{h(t),\ t \in [0, t_{max}(w^I)]\right\}$. Folglich existiert ein $t_N < t_{max}(w^I)$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} g(t_N) &= N, \\ g(t) &\le N, \quad t \le t_N, \\ g(t) &\ge N, \quad t_N \le t < t_{max}(w^I). \end{aligned} \tag{2.37}$$

Mit L_N bezeichnen wir die lokale Lipschitz-Konstante von B auf $B_N := \{u \in X, \|u\|_X < N\}$ (vgl. Lemma 2.17). Sei nun $\tilde{B}$ die globale Lipschitz-Erweiterung von B außerhalb von B_N. Das Theorem 6.1.2 in [33] liefert dann auf $[0, t_N]$ eine Lipschitz-Abhängigkeit der Lösungen von ihren Anfangsbedingungen,

$$\|w - w_n\|_{C([0,t_N],X)} \ \le\ C(L_N)\|w^I - w_n^I\|_X. \tag{2.38}$$

Dann folgt aber $w_n \longrightarrow w$ in $C([0, t_N], X)$, und $\|w(t)\|_X \le h(t) \le \frac{N}{2}$, für $0 \le t \le t_N$, was (2.37) zum Widerspruch steht. □

2.4 Das lineare WFP-System in L^2

Wir betrachten nun das lineare (nichtperiodische) WFP-System entkoppelt vor der Poisson-Gleichung, mit einer vorgegebenen zeitunabhängigen Potentialfunktion $V \in L^\infty(\mathbb{R})$

$$\left\{ \begin{aligned} w_t + vw_x + \Theta[V]w &= \beta(vw)_v + \sigma w_{vv} + 2\gamma w_{xv} + \alpha w_{xx}, \quad t > 0, \\ w(t = 0) &= w^I, \end{aligned} \right. \tag{2.39}$$

und mit $X = L^2(\mathbb{R}^2)$ als zugrundeliegendem Hilbertraum.

In diesem Abschnitt, der als Vorbereitung auf die nachfolgende Konvergenzanalysis dient, untersuchen wir die analytische Lösbarkeit dieses Systems. Der theoretische Rahmen bezieht sich auf die vorangehenden Untersuchungen und Ergebnisse.

Beachte, dass das entkoppelte System in $L^2(\mathbb{R}^2)$ wohldefiniert ist, und dass V nicht periodisch zu sein braucht. Der Operator $A : D(A) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ ist entsprechend auf

$$D(A) \ =\ \{u \in L^2(\mathbb{R}^2) \,|\, vu_x, u_{vv}, vu_v, u_{xx}, u_{xv} \in L^2(\mathbb{R}^2)\}, \tag{2.40}$$

dicht in $L^2(\mathbb{R}^2)$ definiert.

Die folgenden zwei Resultate sind analog zu den Lemmata 2.4, 2.6 und 2.8.

Lemma 2.20 *Es gelte für die Koeffizienten des Operators A, $\alpha\sigma \ge \gamma^2$. Dann sind $A - \frac{\beta}{2}I$ und sein Abschluss dissipativ in $L^2(\mathbb{R}^2)$.*

Beweis.
Mit Bemerkung 2.3, den Eigenschaften von $D(A)$ und der folgenden Bemerkung 2.21

erhält man für $u \in D(A)$ nach partieller Integration:

$$\begin{aligned}
< Au, u >_2 &= -\iint v u_x u + \beta \iint (vu)_v u + \sigma \iint u_{vv} u + 2\gamma \iint u_{xv} u + \alpha \iint u_{xx} u \\
&= -\beta \iint u v u_v - \sigma \|u_v\|_2^2 + 2\gamma \iint u_{xv} u - \alpha \|u_x\|_2^2 \\
&\leq \frac{\beta}{2}\|u\|_2^2 - \sigma \|u_v\|_2^2 + \epsilon\gamma \|u_x\|_2^2 + \frac{1}{\epsilon}\gamma \|u_v\|_2^2 - \alpha \|u_x\|_2^2 \\
&\leq \frac{\beta}{2}\|u\|_2^2, \quad \forall u \in D(A),
\end{aligned}$$

wobei $\epsilon = \frac{\gamma}{\sigma}$ gewählt wurde, und $\iint f$ das Integral $\iint\limits_{\mathbb{R}\mathbb{R}} f(x,v)\, dxdv$ bezeichnet. Folglich $< [A - \frac{\beta}{2} I]u, u >_2 \leq 0$, also $A - \frac{\beta}{2} I$ ist dissipativ in $L^2(\mathbb{R}^2)$. Nach [33], Theorem 1.4.5b ist auch der Abschluss $\overline{A - \frac{\beta}{2} I} = \overline{A} - \frac{\beta}{2} I$ dissipativ in $L^2(\mathbb{R}^2)$. □

Bemerkung 2.21 *Hier beweisen wir die Ungleichung (2.9) in $L^2(\mathbb{R}^2)$. Sei $u \in D(A)$, so folgt mit (2.11) für $\epsilon > 0$*

$$\begin{aligned}
< u_{xv}, u >_2 &= < \mathcal{F}(u_{xv}), \mathcal{F}(u) >_2 \\
&= - < \xi\eta \mathcal{F}(u), \mathcal{F}(u) >_2 \\
&\leq < (\frac{\epsilon}{2}\xi^2 + \frac{1}{2\epsilon}\eta^2)\mathcal{F}(u), \mathcal{F}(u) >_2 \\
&= \frac{\epsilon}{2} < \xi^2 \mathcal{F}(u), \mathcal{F}(u) >_2 + \frac{1}{2\epsilon} < \eta^2 \mathcal{F}(u), \mathcal{F}(u) >_2 \\
&= -\frac{\epsilon}{2} < \mathcal{F}(u_{xx}), \mathcal{F}(u) >_2 - \frac{1}{2\epsilon} < \mathcal{F}(u_{vv}), \mathcal{F}(u) >_2 \\
&= -\frac{\epsilon}{2} \iint u_{xx} u - \frac{1}{2\epsilon} \iint u_{vv} u \\
&= \frac{\epsilon}{2}\|u_x\|_2^2 + \frac{1}{2\epsilon}\|u_v\|_2^2,
\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{F}$ die Fouriertransformierte bezeichnet, und ξ und η die entsprechenden Variablen für x und v im Fourierraum sind.

Lemma 2.22 *Auf $D(A)$ ist der L^2-adjungierte Operator von A gegeben durch*

$$A^* w = v\partial_x w - \beta v \partial_v w + \sigma \partial_v^2 w + 2\gamma \partial_v \partial_x w + \alpha \partial_x^2 w. \tag{2.41}$$

BEWEIS.
Für $u, w \in D(A)$ gilt

$$\begin{aligned}
< Au, w >_2 &= -\iint v u_x w + \beta \iint (vu)_v w + \sigma \iint u_{vv} w + 2\gamma \iint u_{xv} w + \alpha \iint u_{xx} w \\
&= \iint v u w_x - \beta \iint v u w_v + \sigma \iint u w_{vv} + 2\gamma \iint u w_{xv} + \alpha \iint u w_{xx} \\
&= < u, A^* w >_2 .
\end{aligned}$$

□

Der adjungierte Operator A^* ist damit dicht definiert und entspricht in Form dem Teiloperator A_1^* in Lemma 2.4. Nach Theorem VIII.1.b in [35] ist A ein abgeschlossener Operator.

Lemma 2.23 *Es gelte für die Koeffizienten des Operators A, $\alpha\sigma \geq \gamma^2$. Dann ist $A^* - \frac{\beta}{2}I$ auf $D(A)$ dissipativ in $L^2(\mathbb{R}^2)$.*

Beweis.
Analog zum Lemma 2.20 erhalten wir mit $\epsilon = \frac{\gamma}{\sigma}$ in der Bemerkung 2.21:

$$\begin{aligned}
< A_1^* u, u >_2 &= \iint v u_x u - \beta \iint v u_v u + \sigma \iint u_{vv} u + 2\gamma \iint u_{xv} u + \alpha \iint u_{xx} u \\
&= \beta \iint u(vu)_v - \sigma \|u_v\|_2^2 - 2\gamma \iint u_x u_v - \alpha \|u_x\|_2^2 \\
&\leq \frac{\beta}{2}\|u\|_2^2 - \sigma\|u_v\|_2^2 + \epsilon\gamma\|u_x\|_2^2 + \frac{1}{\epsilon}\gamma\|u_v\|_2^2 - \alpha\|u_x\|_2^2, \quad \forall u \in D(A) \\
&\leq \frac{\beta}{2}\|u\|_2^2, \quad \forall u \in D(A).
\end{aligned}$$

Damit ist $A^*|_{D(A)} - \frac{\beta}{2}I$ dissipativ in $L^2(\mathbb{R}^2)$. □

Nach (1.6) ist auch hier die Voraussetzung an die Koeffizienten von A in den Lemmata 2.20 und 2.23 erfüllt.
Weiterhin ist $A^* \in \mathfrak{P}_2(L^2(\mathbb{R}^2))$ (s. Definition 2.9 mit $X = L^2(\mathbb{R}^2)$).

Satz 2.24 *Sei $P \in \mathfrak{P}_2(L^2(\mathbb{R}^2))$ ein linearer abschließbarer Operator auf $L^2(\mathbb{R}^2)$ mit $D(P) = C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Dann ist $\overline{P}$ die maximale Erweiterung von P mit $D(\overline{P}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^2) \,|\, Pf \in L^2(\mathbb{R}^2)\}$, wobei Pf für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ als Distribution eindeutig erklärt ist.*

Beweis. Den Beweis dazu entnehme man [3]. Dieser Satz ist eine Vorversion des Satzes 2.10.

Nach der gleichen Argumentation wie im Abschnitt 2.1 wenden wir diesen Satz auf den Operator $A^* - \frac{\beta}{2}I$ an. Es folgt, dass $A^* - \frac{\beta}{2}I$ bzgl. seines eigenen Definitionsbereiches dissipativ in $L^2(\mathbb{R}^2)$ ist. Somit nach Korollar 1.4.4, [33] generiert $\overline{A} - \frac{\beta}{2}I$ eine C_0-Kontraktionshalbgruppe in $L^2(\mathbb{R}^2)$. Folglich ([33], Theorem 3.1.1) ist $\overline{A}$ der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe, die folgender Abschätzung genügt

$$\|e^{t\overline{A}}u\|_X \;\leq\; e^{\frac{\beta}{2}t}\|u\|_X,\; u \in L^2(\mathbb{R}^2), t \geq 0. \tag{2.42}$$

Der Operator B, der nun definiert ist durch $B : L^2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$, $u \mapsto Bu := -\Theta[V]u$, ist nach Proposition 2.11 ein linearer beschränkter Operator.
Schreiben wir das System (2.39) um in

$$\begin{aligned}
w_t &= \overline{A}w + Bw, \quad t > 0, \\
w(t=0) &= w^I,
\end{aligned} \tag{2.43}$$

so liefert uns der folgende Satz seine eindeutige Lösbarkeit.

Satz 2.25 *Sei $V \in L^\infty(\mathbb{R})$.*
a) Für $w^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$ hat das lineare WFP-System (2.43) eine eindeutige milde Lösung $w \in C([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$.
b) Falls zusätzlich $w^I \in D(\overline{A})$, so ist w die klassische Lösung, i.e. $w \in C^1([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$, und $w(t) \in D(\overline{A})$ für $t \geq 0$.

Beweis.
Da B ein beschränkter Operator ist, generiert $\overline{A} + B$, nach [33], Theorem 3.1.1, eine C_0-Halbgruppe in $L^2(\mathbb{R}^2)$. Folglich erhält man die Behauptung des obigen Satzes unmittelbar aus Theorem 1.2.4 bzw. Kapitel 4. in [33].

$\square$

3 Konvergenzanalysis für das lineare System

Im weiteren betrachten wir nur das vereinfachte lineare Wigner-Fokker-Planck-System in $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} w_t + vw_x + \Theta[V]w &= \beta(vw)_v + \sigma w_{vv}, \\ w(t=0) &= w^I, \end{aligned} \tag{3.1}$$

mit einem gegebenen zeitunabhängigen Potential $V \in L^\infty(\mathbb{R})$). Die Vereinfachung liegt darin, dass wir die Koeffizienten der Quantendiffusion α und γ in (2.39) als Null voraussetzen. Da der theoretische Rahmen noch der gleiche ist, gelten die Ergebnisse aus dem Abschnitt 2.4 über die Lösbarkeit des Systems auch für diesen Spezialfall. Beachten Sie, dass die Koeffizienten die Voraussetzungen in den Lemmata 2.20 und 2.23 weiterhin erfüllen, die Bedingung (1.5) dagegen nicht. Man spricht in diesem Fall von der kinetischen Fokker-Planck-Gleichung der klassischen Mechanik.

Die Ziele dieses Kapitels sind:

i) das Vorstellen des Operator-Splitting-Verfahrens für (3.1), basierend auf die Form und das Wirken der Operatoren;

ii) die Konsistenzanalysis dieses Schemas. Wir werden beweisen, dass, unter bestimmten Voraussetzungen an die Anfangsdaten, das Splittingschema konsistent erster Ordnung ist;

iii) Anschließend zeigen wir wie üblich in der Numerik die Konvergenz des Schemas;

iv) und zum Schluss des Kapitels geben wir einen kurzen Ausblick über ein alternatives Splitting.

Die Konsistenz und Konvergenz des Schemas zeigen wir ausführlich,
• einmal für das einfache System mit $\beta = 0$ und $V \equiv 0$,
• und dann für das obige System (3.1).
Die Fälle mit nur $\beta = 0$ bzw. nur $V \equiv 0$ lassen sich völlig analog behandeln.

3.1 Die Vorstellung des Operator-Splitting-Schemas

Zunächst teilen wir den Operator A in (2.3) mit $\alpha = \gamma = 0$, auf

$$D(A) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^2) \,|\, vu_x, u_{vv}, vu_v \in L^2(\mathbb{R}^2)\}, \tag{3.2}$$

in den Transportterm A_1 und den Reibungs- und Diffusionsterm A_2, die dann jeweils wie folgt aussehen

$$
\begin{aligned}
A_1 w &:= -v\partial_x w, & D(A_1) &= \{u \in L^2(\mathbb{R}^2) \,|\, vu_x \in L^2(\mathbb{R}^2)\}, & (3.3)\\
A_2 w &:= \beta\partial_v(vw) + \sigma\partial_v^2 w, & D(A_2) &= \{u \in L^2(\mathbb{R}^2) \,|\, u_{vv}, vu_v \in L^2(\mathbb{R}^2)\}, & (3.4)
\end{aligned}
$$

und $A = A_1 + A_2$, $D(A) = D(A_1) \cap D(A_2)$.
Die Idee für diese Aufsplittung von A stammt aus der zentralen Eigenschaft, dass die Teiloperatoren A_1 und A_2 in orthogonalen Richtungen des (x, v)-Phasenraumes wirken. Der Operator A_1 wirkt nur in der x-Richung, dagegen A_2 offensichtlich nur in v-Richtung, so dass das folgende Splittingverfahren besonders geeignet für diesen Fall ist. Das Schema besteht in dem sukzessiven Lösen der folgenden Teilsysteme:

$$
\begin{cases}
u_t &= (A_2 + B)u, \quad t_n \geq t \geq t_{n+1} \\
u(t_n) &= w_n, \\
w_{n+\frac{1}{2}} &:= u(t_{n+1}),
\end{cases} \tag{3.5}
$$

$$
\begin{cases}
u_t &= A_1 u, \qquad t_n \geq t \geq t_{n+1} \\
u(t_n) &= w_{n+\frac{1}{2}}, \\
w_{n+1} &:= u(t_{n+1}),
\end{cases} \tag{3.6}
$$

wobei w_n und w_{n+1} die entsprechenden Approximationen der Lösung an den Zeitpunkten t_n und $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ bezeichen. Der beschränkte Operator B bleibt wie im Abschnitt 2.4 gehabt.

Lemma 3.1 *Die Operatoren $\overline{A}_1$ und $\overline{A}_2 + B$ generieren quasi-kontraktive C_0-Halbgruppen in $L^2(\mathbb{R}^2)$.*

Beweis. Dass die Operatoren $\overline{A}_1$ und $\overline{A}_2 - \frac{\beta}{2}I$ dissipativ in $L^2(\mathbb{R}^2)$ sind, kann man aus dem Beweis des Lemmas 2.20 mit $\gamma, \alpha = 0$ folgern. Die entsprechenden adjungierten Operatoren sind jeweils auf $D(A_i)$, $i = 1, 2$ gegeben durch

$$
\begin{aligned}
A_1^* w &:= v\partial_x w, \\
A_2^* w &:= -\beta v\partial_v w + \sigma\partial_v^2 w.
\end{aligned}
$$

Dies kann auch unmittelbar aus dem Beweis des Lemmas 2.22 gefolgert werden. Genauso folgt aus dem Beweis des Lemmas 2.23, dass $A_1^*|_{D(A_1)}$ und $A_2^*|_{D(A_2)} - \frac{\beta}{2}I$ dissipativ in $L^2(\mathbb{R}^2)$ sind. Der Satz 2.24, das Korollar 1.4.4 und das Theorem 3.1.1 in [33] liefern dann die Behauptung. □

Für die entsprechenden C_0-Halbgruppen in $L^2(\mathbb{R}^2)$ gelten die Abschätzungen

$$
\begin{aligned}
S(t)u &:= e^{t(\overline{A}+B)}u, & \|S(t)\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^2))} &\leq e^{\frac{\beta}{2}t}, & (3.7)\\
S_1(t)u &:= e^{t\overline{A}_1}u, & \|S_1(t)\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^2))} &\leq 1, & (3.8)\\
S_2(t)u &:= e^{t(\overline{A}_2+B)}u, & \|S_2(t)\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^2))} &\leq e^{\frac{\beta}{2}t}. & (3.9)
\end{aligned}
$$

Zum Beweis der Abschätzungen (3.7) und (3.9):
Klar ist, dass $\|e^{t\overline{A}}\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^2))} \leq e^{\frac{\beta}{2}t}$ bzw. $\|e^{t\overline{A}_2}\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^2))} \leq e^{\frac{\beta}{2}t}$ gilt.

Der folgende Beweis lehnt sich stark an die Beweisschritte des Satzes 2.19 an. Die weitere Rechnung gilt im distributionellen Sinn, wir verweisen dabei auf die kurze Argumentation am Anfang des **1. Schrittes** im Beweis vom Satz 2.19.

Sei zunächst $w^I \in D(\overline{A})$. Wir multiplizieren die Gleichung (3.1) mit der Lösung w und integrieren sie in $L^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_2^2 &= -\iint v w_x w + \beta\iint (vw)_v w + \sigma\iint w_{vv} w - \iint w\Theta[V]w \\
&= -\beta\iint v w w_v - \sigma\|w_v\|_2^2 \\
&\leq \frac{\beta}{2}\|w\|_2^2 - \sigma\|w_v\|_2^2 \\
&\leq \frac{\beta}{2}\|w\|_2^2.
\end{aligned}$$

Dabei wurde die Schiefsymmetrie des Operators $\Theta[V]$ (s. Proposition 2.11) benutzt. Folglich

$$\frac{d}{dt}\|w\|_2^2 \leq \beta\|w\|_2^2 \quad \text{und} \quad \|w\|_2^2 \leq \|w^I\|_2^2 e^{\beta t}.$$

(3.9) ist ein Spezialfall davon.
Die Verallgemeinerung davon für $w^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$ kann man mit einem Dichtheitsargument analog zum **2. Schritt** des Beweises vom Satz 2.19 mit $X = L^2(\mathbb{R}^2)$ zeigen. □

Bemerkung. Diese Ausführung war notwendig, weil wir keine explizite Lösung von (3.1) haben!

Allgemein lässt sich das Splittingschema (3.5)-(3.6) explizit hinschreiben

$$u(t) = S_1(t-s)S_2(t-s)u(s), \qquad \forall\, t \geq s \geq 0, \tag{3.10}$$

mit $u(0) = w^I$.

Proposition 3.2 *Seien $V \in L^\infty(\mathbb{R})$ und die Anfangsfunktion $w^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Dann konvergiert das Operator-Splitting-Schema (3.10) in $L^2(\mathbb{R}^2)$.*

Beweis. Die L^2-Konvergenz ist eine unmittelbare Folgerung aus der Trotter-Produktformel für lineare Operatorhalbgruppen, vgl. dazu [15] und [18], 5.8,

$$e^{t(\overline{A}+B)} = s\text{-}\lim_{N\to\infty}\left[e^{\frac{t}{N}\overline{A}_1} e^{\frac{t}{N}(\overline{A}_2+B)}\right]^N. \tag{3.11}$$

□

Zum Beweis der Konsistenz erster Ordnung für das Schema werden wir die Taylorentwicklungen der zweiten Ordnung in der Zeit von (3.10) und der klassischen Lösungen zur Hilfe nehmen. Darüberhinaus werden wir die expliziten Formen der oben definierten Halbgruppen bestimmen, und dabei die zeitregulierenden Eigenschaften des Fokker-Planck-Operators A_2 benutzen.

3.2 Die einfache Gleichung

Zuerst möchten wir die Konsistenz für den einfachsten Fall unseres Splittingschemas diskutieren

$$\begin{aligned} w_t &= -vw_x + \sigma w_{vv}, \\ w(t=0) &= w^I, \end{aligned} \tag{3.12}$$

mit $A_2 = \sigma\partial_v^2$, $D(A_2) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^2) \,|\, u_{vv} \in L^2(\mathbb{R}^2)\}$ entsprechend.
Diese Gleichung ist hyperbolisch in x und parabolisch in v. Seine analytische Lösbarkeit garantiert uns wieder der Satz 2.25, in dessen Beweis (3.12) als Spezialfall zu betrachten ist.
Auch kann man aus dem Lemma 3.1 mit $\beta = 0$ und $V \equiv 0$ folgern, dass die Operatoren $\overline{A}$, $\overline{A}_1$ und $\overline{A}_2$ lineare kontraktive C_0-Halbgruppen in $L^2(\mathbb{R}^2)$ generieren.

Proposition 3.3 *Die Generatoren A_1 und A_2 sind jeweils auf ihren Definitionsbereichen $D(A_1)$ und $D(A_2)$ abgeschlossen.*

Beweis.
zu A_1: Sei $\{f_n\} \subset D(A_1)$ mit $f_n \longrightarrow f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ und $A_1 f_n = -v\partial_x f_n \longrightarrow g \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Zu zeigen ist (s. [5], Kap. 6.4): $f \in D(A_1)$ und $g = A_1 f$.
Betrachten wir die Fouriertransformierten in x, so haben wir $\hat{f}_n \longrightarrow \hat{f}$ und $-iv\xi\hat{f}_n \longrightarrow \hat{g}$ in $L^2(\mathbb{R}^2)$. Also ist $\{(1+|v\xi|)\hat{f}_n\}$ in $L^2(\mathbb{R}^2)$ bzw. $\{\hat{f}_n\}$ in $L^2(\mathbb{R}^2, (1+|v\xi|)^2 dv d\xi)$ eine Cauchy-Folge $\Longrightarrow \hat{f}_n \longrightarrow \hat{h} \in L^2(\mathbb{R}^2, (1+|v\xi|)^2 dv d\xi)$, d.h. $\hat{f}_n \longrightarrow \hat{h}$ und $|v\xi|\hat{f}_n \longrightarrow |v\xi|\hat{h}$ in $L^2(\mathbb{R}^2)$. Folglich $\hat{h} = \hat{f}$ und $-v\xi\hat{h} = -v\xi\hat{f} = \hat{g}$. Das Zurücktransformieren liefert dann die Behauptung.

zu A_2: Sei nun $\{f_n\} \subset D(A_2)$ mit $f_n \longrightarrow f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ und $\partial_v^2 f_n \longrightarrow g \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Nach der Fouriertransformation in v hat man $\hat{f}_n \longrightarrow \hat{f}$ und $-\eta^2\hat{f}_n \longrightarrow \hat{g}$, also eine Cauchy-Folge in $L^2(\mathbb{R}^2, (1+\eta^2)^2 dx d\eta) \Rightarrow \hat{f}_n \longrightarrow \hat{h} \in L^2(\mathbb{R}^2, (1+\eta^2)^2 dx d\eta)$. Folglich $\hat{f}_n \longrightarrow \hat{h} = \hat{f}$ und $-\eta^2\hat{f}_n \longrightarrow -\eta^2\hat{h} = -\eta^2\hat{f} = \hat{g}$.

Die gewichteten Räume $L^2(\mathbb{R}^2, (1+|v\xi|)^2 dv d\xi)$ und $L^2(\mathbb{R}^2, (1+\eta^2)^2 dx d\eta)$ sind Hilberträume, dazu sei auf [2], Kapitel 1 verwiesen, wo die L^2-Räume mit beliebigen Maßen allgemein behandelt werden. □

Die explizite Lösung von (3.12) für $w^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ist bekannt ([13], [25], [26]) als

$$w(x,v,t) = S(t)w^I := \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} G(x,v,t,\xi,\nu) w^I(\xi,\nu) d\xi d\nu, \qquad \text{für } t > 0, \tag{3.13}$$

wobei

$$G(x,v,t,\xi,\nu) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi t^2} exp\left\{ -\frac{3(x-\xi-\frac{t}{2}(v+\nu))^2}{\sigma t^3} - \frac{(v-\nu)^2}{4\sigma t} \right\} \tag{3.14}$$

eine Fundamentallösung ist. In den Referenzen findet man eigentlich den 3D-Fall, das hier ist eine entsprechende Anpassung an unseren Fall. Dass dies die Gleichung löst, lässt sich leicht nachprüfen. Der Beweis der Halbgruppeneigenschaften ist dagegen technisch schwierig, dazu sei auf die obige Literatur verwiesen. Zur Anpassung an die Anfangsbedingung sei erwähnt, dass bei solchen Konvolutionshalbgruppen $S(0) := I$ extra definiert werden muss.

Die von A_1 und A_2 generierten C_0-Halbgruppen in $L^2(\mathbb{R}^2)$ sind gegeben durch

$$S_1(t)u(x,v) = u(x-vt, v), \tag{3.15}$$

$$S_2(t)u(x,v) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma t}} \int_{\mathbb{R}} u(x,v')e^{-\frac{(v-v')^2}{4\sigma t}} dv' \tag{3.16}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\sigma\eta^2 t} u(x,v') e^{i(v-v')\eta} d\eta dv'. \tag{3.17}$$

Bemerkung 3.4 *Hier, nur eine kurze Motivation zu den obigen Halbgruppen:*
zu S_1*: Dies ist eine typische Translationshalbgruppe. Solche Halbgruppen sind ausführlich in [32], Kapitel 1,2 untersucht worden. Dass* $u(x,v,t) := S_1(t)u_0(x,v) = u_0(x-vt,v)$ *mit* $u_0 \in D(A_1)$ *das AWP* $u_t = -v\partial_x u$, $u(t=0) = u_0$ *löst, kann man sofort sehen. Der etwas technische Beweis der* C_0*-Eigenschaft und des Generators dieser Halbgruppe möchte hier nicht ausgeführt werden, dazu sei auf [32] verwiesen.*

zu S_2*:* S_2 *ist auch eine kontraktive* C_0*-Halbgruppe. Der Term (3.16) ist die klassische Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung, als Faltung/Konvolution in* v *der Fundamentallösung*

$$G(v,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma t}} e^{-\frac{v^2}{4\sigma t}} \tag{3.18}$$

mit der Anfangsbedingung ([11]). Einen ausführlichen Beweis der Halbgruppeneigenschaften findet man in [32], Kapitel 1. Wichtig für die Wohldefiniertheit und die Kontraktivität ist dabei nach der Hausdorff-Young-Ungleichung ([32], Theorem 1.4) die L^1*-Norm von* G*:*

$$\|G(t)\|_{L^1(\mathbb{R}_v)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{4\sigma t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v'^2} dv' = 1. \tag{3.19}$$

Die Erfüllung der Gleichung $u_t = \partial_v^2 u$, $u(0) = u_0$ *kann man durch Einsetzen von* $u(x,v,t) := S_2(t)u_0$ *leicht nachprüfen. Auch hier ist* $S_2(0) := I$ *definiert.*
Der andere Term (3.17) kann wie folgt interpretiert werden. Transformiert man in v *die Gleichung* $u_t = \partial_v^2 u$ *in den Fourierraum, so gilt*

$$\begin{aligned} \hat{u}_t &= -\sigma\eta^2\hat{u}, \\ \hat{u}(t=0) &= \widehat{u_0}, \end{aligned}$$

wobei η *die entsprechende Fouriervariable ist. Die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung ist* $\hat{u}(x,\eta,t) = e^{-\sigma\eta^2 t}\widehat{u_0}(x,\eta)$*. Hier liest man sofort den Generator ab. (3.17) ist dann Ergebnis der Rücktransformation.*
Man kann leicht die Halbgruppeneigenschaften von (3.17) nachrechnen.

Das Splittingschema kann wie in (3.10) geschrieben werden, und aus der Trotter-Produktformel (cf. Proposition 3.2) ergibt sich die L^2-Konvergenz.

Wie am Anfang dieses Kapitels schon erwähnt, werden wir die Konsistenz der ersten Ordnung des Schemas über eine Taylor-Abschätzung beweisen. Zunächst ein Resultat für den klassischen Fall.

Satz 3.5 *Sei* $w^I \in D(A^2)$*. Dann gilt für die klassische Lösung* w *von (3.12)* $w \in C^2([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$ *und* $w(t) \in D(\overline{A}^2)$, $\forall t \geq 0$.

Beweis. Leiten wir w formal in t ab, so ergibt sich $w_{tt} = \overline{A}w_t$. Sei nun $y := w_t$. Das folgende neue System

$$\begin{aligned} y_t &= \overline{A}y, \\ y(t=0) &= Aw^I, \end{aligned}$$

hat eine eindeutige Lösung $y \in C^1([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$ mit $y(t) \in D(\overline{A})$, $\forall t \geq 0$, (vgl. Satz 2.25). Mit $y = \overline{A}w$ folgt die Behauptung. □

Für $w^I \in D(A^2)$ können wir nun die Lösung w des Systems in ein Taylorpolynom zweiter Ordnung in $0 \leq s \leq t$ entwickeln:

$$w(t) \; = \; w(s) + (t-s)\overline{A}w(s) + \frac{1}{2}(t-s)^2\overline{A}^2 w(\theta), \quad \text{mit einem } \; \theta \in [s,t]. \tag{3.20}$$

Für die Konsistenz brauchen wir noch die gleiche Taylorentwicklung für das Splittingschema (3.10), um eine Abschätzung zweiten Grades machen zu können. Leiten wir die approximative Lösung zunächst für $s = 0$, $u(t) = S_1(t)S_2(t)w^I$, formal in $t = 0$ ab, so erhalten wir

$$u_{tt}(t=0) \; = \; S_1(t)(\overline{A}_1^2 + 2\overline{A}_1\overline{A}_2 + \overline{A}_2^2)S_2(t)w^I. \tag{3.21}$$

Es ergibt sich die Frage:
Unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen an w^I gelten die folgenden drei Ausdrücke im Bezug auf (3.21), und sind stetig in $t \geq 0$?

$$\begin{array}{ll} a) & A_1S_2(t)A_2w^I \in L^2(\mathbb{R}^2), \\ b) & A_1^2S_2(t)w^I \in L^2(\mathbb{R}^2), \\ c) & S_2(t)A_2^2w^I \in L^2(\mathbb{R}^2). \end{array} \tag{3.22}$$

Die Antwort gibt uns das nächste Lemma. Der Beweis bezieht sich stark auf die regularisierenden Eigenschaften der Konvolutionshalbgruppe S_2.

Definition 3.6 *Definieren wir*

$$\tilde{D}(A^2) \; := \; \{u \in L^2(\mathbb{R}^2) \,|\, vu_x, u_{vv}, u_{xv}, v^2u_{xx}, vu_{xvv}, u_{vvvv} \in L^2(\mathbb{R}^2)\},$$

so gilt $\tilde{D}(A^2) \subset D(A^2)$.

Lemma 3.7 *Sei* $w^I \in \tilde{D}(A^2)$ *mit zusätzlich* $\partial_x\partial_v^2w^I, \partial_x^2w^I, v\partial_x^2w^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$. *Dann sind die Ausdrücke in (3.22) und damit (3.21) stetig in* $t \geq 0$.

Beweis.
zu a) Offensichtlich ist $w^I \in D(A_2^2)$. Sei $z(t) := S_2(t)w_{vv}^I$ die klassische Lösung von

$$\begin{aligned} z_t &= A_2z, \\ z(t=0) &= z^I \; := \; w_{vv}^I. \end{aligned}$$

Wendet man nun $v\partial_x$ formal auf $z_t = A_2z$ an, so erhält man das System

$$\begin{aligned} y_t &= \sigma y_{vv} - 2\sigma z_{xv} \; = \; A_2y + f(x,v,t), \\ y(t=0) &= vz_x^I, \end{aligned}$$

mit $y := vz_x$ und $f(x,v,t) := -2\sigma z_{xv}(t)$.
Wir wissen, dass $vz_x^I = vw_{vvx}^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ist. Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass y eine milde Lösung für dieses System, d.h. $y \in C([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$ ist. Wir wollen hier wieder das Theorem 6.1.4 in [33] anwenden, und brauchen dafür eine „in Zeit vernünftige“ $L^2(\mathbb{R}^2)$-Abschätzung für die Inhomogenität f.

Da $w_{vvx}^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ist, können wir z anhand von (3.16) nach x ableiten, $\partial_x z(t) = S_2(t) w_{vvx}^I$. Andererseits, wenn wir dies weiter nach v ableiten, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\partial_v(S_2(t)z_x^I)(x,v) &= -\frac{1}{4\sigma\sqrt{\pi}\,t^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} z_x^I(x,v')(v-v')e^{-\frac{(v-v')^2}{4\sigma t}} dv' \\
&= z_x^I \, *_v \, g,
\end{aligned}$$

eine Faltung von w_{vvx}^I mit der Funktion

$$g(v,t) := -\frac{1}{4\sigma\sqrt{\pi}\,t^{3/2}} v e^{-\frac{v^2}{4\sigma t}}.$$

Für die Normen gilt dann

$$\|\partial_v(S_2(t)z_x^I)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \underbrace{\leq}_{[2],\ 2.12} \|z_x^I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|g(.,t)\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

und

$$\begin{aligned}
\|g(.,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \frac{1}{4\sigma\sqrt{\pi}\,t^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} |ve^{-\frac{v^2}{4\sigma t}}| dv \\
&= \frac{1}{4\sigma\sqrt{\pi}\,t^{3/2}} \left[\int_0^\infty ve^{-\frac{v^2}{4\sigma t}} dv + \int_{-\infty}^0 -ve^{-\frac{v^2}{4\sigma t}} dv \right] \\
&= \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}\,t^{3/2}} \int_0^\infty ve^{-\frac{v^2}{4\sigma t}} dv \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left[e^{-\frac{v^2}{4\sigma t}} \right]_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}.
\end{aligned}$$

Folglich $\|f(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi t}} \|w_{vvx}^I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$. Nach dem Theorem 6.1.4. in [33] bzw. einer Abschwächung davon mit nur $f \in L^1([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$, existiert eine eindeutige milde Lösung y auf $[0, t_{max})$, bestimmt durch

$$y(t) = S_2(t)y(t=0) + \int_0^t S_2(t-\tau)f(\tau)d\tau,$$

$$\begin{aligned}
\|y(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\leq \|y(t=0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \int_0^t \|f(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} d\tau \\
&\leq \|vw_{vvx}^I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + C\sqrt{t}\|w_{vvx}^I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow t_{max} = \infty$ und $y(t) = v\partial_x S_2(t) w_{vv}^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ist stetig in $t \geq 0$.

zu b) Sei $z(t) := S_2(t)w^I$ die klassische Lösung von

$$\begin{aligned} z_t &= A_2 z, \\ z(t=0) &= w^I_{vv}. \end{aligned}$$

Wendet man nun $v^2\partial_x^2$ formal auf $z_t = A_2 z$ an, so erhält man das System

$$\begin{aligned} y_t &= \sigma y_{vv} - 2\sigma z_{xx} - 4\sigma v z_{xxv} = A_2 y + \tilde{f}(x,v,t), \\ y(t=0) &= v^2 w^I_{xx}, \end{aligned}$$

mit $y := v^2 z_{xx}$ und $\tilde{f}(x,v,t) := -2\sigma z_{xx}(t) - 4\sigma v z_{xxv}(t)$.
Wir wissen, dass $w^I \in D(A_1^2)$, also $v^2 w^I_{xx} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ist. Wir zeigen nun wieder, analog zum Fall a), dass y eine milde Lösung für dieses System, $y \in C([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$ ist. Wir wollen auch hier die Inhomogenität f in $L^2(\mathbb{R}^2)$ abschätzen.

Da $w^I_{xx} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ist, können wir (3.16) nach x zweimal ableiten: $\partial_x^2 z(t) = S_2(t)w^I_{xx} \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $\forall t \geq 0$.
Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} v\partial_v(S_2(t)(w^I_{xx}))(x,v) &= -\frac{1}{4\sigma\sqrt{\pi}t^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} v w^I_{xx}(x,v')(v-v')e^{-\frac{(v-v')^2}{4\sigma t}} dv' \\ &= -\frac{1}{4\sigma\sqrt{\pi}t^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} w^I_{xx}(x,v')(v-v')^2 e^{-\frac{(v-v')^2}{4\sigma t}} dv' \\ &\quad -\frac{1}{4\sigma\sqrt{\pi}t^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} v' w^I_{xx}(x,v')(v-v')e^{-\frac{(v-v')^2}{4\sigma t}} dv' \\ &= w^I_{xx} *_v \tilde{g}(v,t) + v w^I_{xx} *_v g(v,t), \end{aligned}$$

wobei $\tilde{g}$ durch $\tilde{g}(v,t) := vg(v,t)$ gegeben ist, und

$$\begin{aligned} \|\tilde{g}(.,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \frac{1}{4\sigma\sqrt{\pi}t^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} |v^2 e^{-\frac{v^2}{4\sigma t}}| dv \\ &= \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}t^{3/2}} \int_0^\infty v^2 e^{-\frac{v^2}{4\sigma t}} dv \\ &\underbrace{=}_{[11]} \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}t^{3/2}} [2\sqrt{\pi}(\sigma t)^{3/2}] = \sqrt{\sigma}. \end{aligned}$$

Mit $v w^I_{xx} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ können wir nun abschätzen

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\underbrace{\leq}_{[2],\ 2.12} 2\sigma\|w^I_{xx}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + 4\sigma\left[\sqrt{\sigma}\|w^I_{xx}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\|v w^I_{xx}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right] \\ &= 2\sigma(1+2\sqrt{\sigma})\|w^I_{xx}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \frac{4\sigma}{\sqrt{\pi t}}\|v w^I_{xx}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Nach dem Theorem 6.1.4. in [33] bzw. einer Abschwächung davon mit nur $f \in L^1([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$, existiert eine eindeutige milde Lösung y auf $[0, t_{max})$, bestimmt durch

$$y(t) = S_2(t)y(t=0) + \int_0^t S_2(t-\tau)\tilde{f}(\tau)d\tau,$$

$$
\begin{aligned}
\|y(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\leq \|y(t=0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \int\limits_0^t \|f(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} d\tau \\
&\leq \|v^2 w^I_{xx}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + C_1 t \|w^I_{xx}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + C_2 \sqrt{t} \|v w^I_{xx}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)},
\end{aligned}
$$

mit den Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Schließlich folgt $t_{max} = \infty$ und y ist die milde Lösung.

zu c) Folgt unmittelbar aus den Voraussetzungen an w^I. □

Bemerkung 3.8 *Dieses Lemma kann man auch etwas anders beweisen, indem man die Definition (3.17) zu Hand nimmt. Es stellt sich heraus (s. dazu Lemma 3.14), dass*

$$
\begin{aligned}
S_2(t)(vu) &= v S_2(t) u + S_2^\eta(t) u, \\
S_2^\eta(t)(vu) &= v S_2^\eta(t) u + S_2^{\eta\eta}(t) u, \quad \forall u \in L^2\mathbb{R}^2 \textit{ mit } vu \in L^2\mathbb{R}^2,
\end{aligned}
$$

wobei $S_2^\eta, S_2^{\eta\eta} \in C([0,\infty), \mathcal{B}(X))$ definiert sind durch:

$$
\begin{aligned}
S_2^\eta(t) u &:= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \partial_\eta \left[e^{-\sigma \eta^2 t} \right] u(x, v') e^{i(v-v')\eta} d\eta dv' \\
S_2^{\eta\eta}(t) u &:= -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \partial_\eta^2 \left[e^{-\sigma \eta^2 t} \right] u(x, v') e^{i(v-v')\eta} d\eta dv'.
\end{aligned}
$$

Man kann dann die Ausdrücke a) und b) in (3.22) direkt in diesen Termen schreiben. Mit den Voraussetzungen an w^I folgt schließlich die Behauptung.

Um Konsistenz erster Ordnung zu zeigen, brauchen wir eine Abschätzung der Differenz der Splittinglösung zur klassischen, die sich auf jeden Schritt des Schemas bezieht, der Form

$$
\|w(s) - S_1(t-s) S_2(t-s) w(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C(t-s)^2, \qquad 0 \leq s \leq t.
$$

In (3.21) haben wir die Auswirkung des Schemas auf den ersten Zeitschritt betrachtet, und uns entsprechend die Taylorentwicklung in $s = 0$ angeschaut. Um $S_1(t-s)S_2(t-s)w(s)$ in $t = s$ entwickeln zu können, müssen die obigen Ausdrücke in (3.22) auch für $w(s)$ statt w^I gelten:

$$
\begin{aligned}
&a) \quad A_1 S_2(t-s) A_2 w(s) \in L^2(\mathbb{R}^2), \\
&b) \quad A_1^2 S_2(t-s) w(s) \in L^2(\mathbb{R}^2), \\
&c) \quad S_2(t-s) A_2^2 w(s) \in L^2(\mathbb{R}^2),
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

und stetig in t sein. Das nächste Lemma zeigt uns, unter welchen Voraussetzungen an w^I eine Taylorentwicklung zweiter Ordnung in s möglich wäre. Dabei ist zu beachten, dass im allgemeinen aus $w(t) \in D(\overline{A}^2) \not\Rightarrow w(t) \in D(A_2)$ bzw. $w(t) \in D(A_2^2)$.

Lemma 3.9 *Sei $w^I \in \tilde{D}(A^2)$ mit $\partial_x^2 w^I$, $\partial_x^3 \partial_v w^I$, $\partial_x^2 \partial_v^2 w^I$, $v \partial_x^3 w^I$, $\partial_x^4 w^I$, $\partial_x \partial_v^3 w^I$, $v \partial_x^2 \partial_v w^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Dann erfüllt die Lösung die Ausdrücke (3.23) stetig in t.*

Beweis.
Dieser Beweis besteht aus vielen Nebenschritten, die aber sukzessiv zu den zu zeigenden Eigenschaften der Lösung hinführen.

1) ∂_x^2 angewandt formal auf die Gleichung $w_t = Aw$ ergibt

$$\begin{aligned} y_t &= -vy_x + \sigma y_{vv}, \\ y(t=0) &= w^I_{xx}, \end{aligned}$$

mit $y := w_{xx}$.

Eigentlich ist w die Lösung von $w_t = \overline{A}w$, wir rechnen aber hier zunächst im distributionellen Sinn, analog zur Argumentation im Beweis vom Hauptsatz 2.19. Beachten Sie, dass A_1 und A_2 abgeschlossen sind (Proposition 3.3), so dass sich eine solche Argumentation im Beweis des Lemmas 3.7 erübrigt hat. Der Operator A muss es aber dagegen nicht sein. Finden wir eine milde Lösung $\tilde{y} \in C([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$ mit $\tilde{y}_t = \overline{A} + f(t)$, $\tilde{y}(0) = y_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ (hier ist $f \equiv 0$), so ist sie auch eine distributionelle Lösung für das System $y_t = Ay + f(t)$, $y(0) = y_0$, und stimmt somit mit y überein. Diese Argumentation werden wir nun öfters wiederfinden, daher nennen wir sie zu unseren Zwecken, der Einfachheit halber, als *die Argumentation im distributionellen Sinn.*

Mit $w^I_{xx} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ folgt $y \in C([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$ als milde Lösung.

2) Genauso geht mit $w^I_{xxxx} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ auch der Fall $\partial_x^4 w \in C([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$.

3) Wenden wir $\partial_x\partial_v$ auf die Gleichung $w_t = Aw$ an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} y_t &= Ay + f(t), \\ y(t=0) &= w^I_{xv}, \end{aligned}$$

mit $y := w_{xv}$ und $f(t) = -w_{xx}$.
Mit 1) und dem Theorem 6.1.4. in [33] wissen wir, dass es eine eindeutige milde Lösung y auf $[0, t_{max})$ existiert, mit

$$\begin{aligned} y(t) &= S(t)y(t=0) + \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau \\ &= S(t)y(t=0) - \int_0^t S(t-\tau)w_{xx}(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Mit der Kontraktivität von $S(t)$ ($\beta = 0$ in (3.7)) folgt

$$\begin{aligned} \|y(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\leq \|w^I_{xv}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \int_0^t \|w_{xx}(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} d\tau \\ &\leq \|w^I_{xv}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + t \sup_{0\leq\tau\leq t} \|w_{xx}(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Wäre t_{max} endlich, hätten wir die Abschätzung

$$\|y(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|w^I_{xv}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + C(t_{max})t_{max},$$

was das obige Theorem widerspricht.
Also ist $t_{max} = \infty$, und damit $y = w_{xv} \in C([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$.

4) $v\partial_x$ angewandt formal auf die Gleichung $w_t = Aw$ ergibt

$$\begin{aligned} y_t &= Ay + f(t), \\ y(t=0) &= vw_x^I, \end{aligned}$$

mit $y := vw_x$ und $f(t) = -2\sigma w_{xv}$.
Analog zum vorigen Fall 3) folgt mit dessen Ergebnis $y \in C([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$.

Für die folgenden Fälle untersuchen wir nur die sich ergebende Inhomogenität $f(t)$ nach bekannten Termen, um ihre Stetigkeit in der Zeit $t \geq 0$ sicherzustellen, und damit das Theorem 6.1.4. in [33] anwenden zu können.

5) ∂_v^2 angewandt auf die Gleichung $w_t = Aw$ ergibt ein neues System mit der Inhomogenität $f(t) = -2w_{xv}$. Aus 3) folgt dann $w_{vv} \in C([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$.

6) Wenden wir $\partial_v\partial_x^3$ formal auf die Gleichung $w_t = Aw$ an, so ergibt sich ein neues System mit $f(t) = -w_{xxxx}$. Aus $w_{xxxv}^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$ und 2) folgt $w_{xxxv} \in C([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$.

7) $\partial_v^2\partial_x^2$ angewandt formal auf die Gleichung $w_t = Aw$ ergibt ein neues System mit $f(t) = -2w_{xxxv}$. Aus $w_{xxvv}^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$ und 6) folgt $w_{xxvv} \in C([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$.

8) $v\partial_x^3$ angewandt auf die Gleichung $w_t = Aw$ ergibt ein neues System mit der Inhomogenität $f(t) := -2\sigma w_{xxxv}$. Aus $vw_{xxx}^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$ und 6) folgt dann $vw_{xxx} \in C([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$.

9) $\partial_x\partial_v^3$ angewandt auf die Gleichung $w_t = Aw$ ergibt ein neues System mit der Inhomogenität $f(t) := -3w_{xxvv}$. Aus $w_{xvvv}^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$ und 7) folgt dann $w_{xvvv} \in C([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$.

10) $v\partial_x^2\partial_v$ angewandt auf die Gleichung $w_t = Aw$ ergibt ein neues System mit der Inhomogenität $f(t) := -vw_{xxx} - 2\sigma w_{xxvv}$. Aus $vw_{xxv}^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$, 7) und 8) folgt dann $vw_{xxv} \in C([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$.

11) ∂_v^4 angewandt auf die Gleichung $w_t = Aw$ ergibt ein neues System mit der Inhomogenität $f(t) := -4w_{xvvv}$. Aus $w^I \in \tilde{D}(A^2)$ und 9) folgt dann $w_{vvvv} \in C([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$.

12) $v^2\partial_x^2$ angewandt auf die Gleichung $w_t = Aw$ ergibt ein neues System mit der Inhomogenität $f(t) := -2\sigma w_{xxv} - 2\sigma v w_{xxv}$. Aus 3) und 6) $\Rightarrow w_{xxv} \in C([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$ (Bem. 2.3). Mit 10) folgt dann $v^2 w_{xx} \in C([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$.

13) $v\partial_x\partial_v^2$ angewandt auf die Gleichung $w_t = Aw$ ergibt ein neues System mit der Inhomogenität $f(t) := -2vw_{xxv} - 2\sigma w_{xvvv}$. Aus $w^I \in \tilde{D}(A^2)$, 9) und 10) folgt dann $vw_{xvv} \in C([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$.

Nun können wir die Ausdrücke in (3.23) direkt in diesen Termen schreiben:
a) Aus $w_{vv}(t), w_{xxvv}(t) \in L^2(\mathbb{R}^2) \Rightarrow w_{xvv}(t) \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $t \geq 0$ (s. 5), 7) und Bemerkung 2.3)). Mit 13) folgt dann

$$\begin{aligned} v\partial_x S_2(t) w_{vv}(s) &= vS_2(t) w_{xvv}(s) \\ & S_2(t)(vw_{xvv}(s)) - S_2^\eta(t) w_{xvv}(s) \in L^2(\mathbb{R}^2), \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

b) Aus $vw_x(t), vw_{xxx}(t) \in L^2(\mathbb{R}^2) \Rightarrow vw_{xx}(t) \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $t \geq 0$ (s. 4), 8) und Bemerkung 2.3)). Mit 1) und 12) folgt schließlich

$$\begin{aligned} v^2\partial_x^2 S_2(t) w^I &= vS_2(t)(vw_{xx}^I) - vS_2^\eta(t) w_{xx}^I \\ &= S_2(t)(v^2 w_{xx}^I) - 2S_2^\eta(t)(vw_{xx}^I) + S_2^{\eta\eta}(t) w_{xx}^I, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

c) folgt direkt aus den Voraussetungen an w^I. $\square$

Nun kommen wir zum eigentlichen Konsistenzbeweis unseres Splittingschemas.
Unter den obigen Voraussetzungen an die Anfangsdaten, s. Lemma 3.9, können wir die approximative Lösung für jeden Zeitschritt

$$u(t) \;=\; S_1(t-s)S_2(t-s)w(s), \qquad 0 \le s \le t \tag{3.24}$$

in ein Taylorpolynom zweiten Grades in $t = s$ entwickeln:

$$\begin{aligned} u(t) \;&=\; w(s) + (t-s)\overline{A}w(s) + \\ &\frac{1}{2}(t-s)^2 \left(S_1(\theta-s)(A_1^2 + 2A_1A_2 + A_2^2)S_2(\theta-s)\right) w(s), \end{aligned} \tag{3.25}$$

mit einem $\theta \in [s,t]$.

Definition 3.10 *Sei $H_{t,s}$ der Schritt-Operator definiert durch*

$$H_{t,s}u \;:=\; S_1(t-s)S_2(t-s)u, \qquad u \in L^2(\mathbb{R}^2), \qquad 0 \le s \le t. \tag{3.26}$$

Satz 3.11 *Die Anfangsbedingung w^I genüge den Voraussetzungen in Lemma 3.9. Dann ist das Splittingschema konsistent erster Ordnung*

$$\|w(t) - H_{t,s}w(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \;\le\; C(t-s)^2, \tag{3.27}$$

mit C unabhängig von $0 \le s \le t \le T$.

Beweis.
Der Beweis ist eine unmittelbare Folgerung aus den Taylorentwicklungen zweiten Grades in (3.20) und (3.25), d.h.

$$\begin{aligned} &\|w(t) - H_{t,s}w(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le \\ &\le \frac{1}{2}(t-s)^2 \sup_{s\le\theta\le t\le T} \|\overline{A}^2 w(\theta) - \left(S_1(\theta-s)(A_1^2 + 2A_1A_2 + A_2^2)S_2(\theta-s)\right) w(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\le C(t-s)^2. \end{aligned}$$

□

Seien N die Anzahl der Iterationen und $\Delta t = t/N$. Dann lässt sich der Splittingalgorithmus schreiben als

$$u_N(t) \;=\; \left(\prod_{k=1}^{N} H_{k\Delta t,(k-1)\Delta t}\right) w^I, \tag{3.28}$$

wobei das Produkt links geordnet ist.

Der nächsten Satz liefert die Konvergenz erster Ordnung des Schemas.

Satz 3.12 *Die Anfangsbedingung w^I genüge den Voraussetzungen in Lemma 3.9. Dann gilt*

$$\|w(t) - u_N(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \;\le\; C\Delta t, \tag{3.29}$$

mit C unabhängig von $0 \le t \le T$.

Beweis.

$$\begin{aligned} w(t) - u_N(t) &= \\ &= \sum_{j=1}^{N} \left(\prod_{k=j+1}^{N} H_{k\Delta t,(k-1)\Delta t} \right) \left[w(j\Delta t) - H_{j\Delta t,(j-1)\Delta t} w((j-1)\Delta t) \right] \end{aligned}$$

Mit der Kontraktivität der Halbgruppen und dem Satz 3.11 schätzen wir nun ab

$$\begin{aligned} \|w(t) - u_N(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\leq \sum_{j=1}^{N} \|w(j\Delta t) - H_{j\Delta t,(j-1)\Delta t} w((j-1)\Delta t\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq CN(\Delta t)^2. \end{aligned}$$

□

3.3 Das lineare WFP-System

Im Abschnitt 3.1 haben wir den theoretischen Rahmen für das lineare WFP-System in (3.1) vorbereitet. Hier beweisen wir die Konvergenz erster Ordnung des Splittingschemas.

Als Erstes geben wir die expliziten Formen der von A_1 und $\overline{A}_2 + B$ generierten Halbgruppen in (3.8) und (3.9) an. Dabei ist der Operator A_1 abgeschlossen, s. Proposition 3.3.
Für $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ haben wir

$$\begin{aligned} S_1(t)u(x,v) &= u(x - vt, v), && (3.30) \\ S_2(t)u(x,v) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} E(x,\eta,t)\hat{u}(x,\eta e^{-\beta t}) e^{iv\eta} d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} E(x,\eta,t) u(x,v') e^{i(v - v' e^{-\beta t})\eta} d\eta dv', && (3.31) \end{aligned}$$

mit

$$E(x,\eta,t) := \exp\left\{ \frac{\sigma}{2\beta}\eta^2(e^{-2\beta t} - 1) - i \int_0^t \delta V(x, \eta e^{\beta(\tau - t)}) d\tau \right\}. \quad (3.32)$$

Bemerkung 3.13 *Der Fall S_1 ist derselbe wie im vorigen Abschnitt, s. dazu Bemerkung 3.4*
zu *S_2: Die obige Definition von S_2 kann wie folgt interpretiert werden. Transformiert man in v die Gleichung $w_t = A_2 + Bw$ in den Fourierraum, so gilt*

$$\begin{aligned} \hat{w}_t &= -\sigma\eta^2\hat{w} - \beta\eta\partial_\eta\hat{w} - i\delta V(x,\eta)\hat{w}, \\ \hat{w}(t=0) &= \widehat{w^I}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

wobei η wieder die entsprechende Fouriervariable bezeichnet. Wir wollen nun diese parabolische Differentialgleichung mit Hilfe der bekannten Charakteristikentechniken lösen ([27, 19, 37]):

$$\begin{aligned} t_s &= 1 &&; & t(s=0) &= 0 \\ \eta_s &= \beta\eta &&; & \eta(s=0) &= \eta_0 \\ \hat{w}_s &= -\sigma\eta^2\hat{w} - i\delta V(x,\eta)\hat{w} &&; & \hat{w}(s=0) &= \widehat{w^I}(\eta_0) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \qquad t &= s, \\
\eta(s) &= \eta_0 e^{\beta s} \quad \Rightarrow \quad \eta_0 = \eta e^{-\beta s}, \\
\hat{w}_s &= -\left(\sigma\eta_0^2 e^{2\beta s} + i\delta V(x,\eta_0 e^{\beta s})\right)\hat{w}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\Longrightarrow}_{[11]} \quad \hat{w} &= \widehat{w^I}(\eta_0)\exp\left\{-\frac{\sigma}{2\beta}\eta_0^2(e^{2\beta s}-1) - i\int_0^t \delta V(x,\eta_0 e^{\beta\tau})d\tau\right\} \\
\hat{w}(x,\eta,t) &= \widehat{w^I}(x,\eta e^{-\beta t})\exp\left\{-\frac{\sigma}{2\beta}\eta^2 e^{-2\beta t}(e^{2\beta t}-1) - i\int_0^t \delta V(x,\eta e^{\beta(\tau-t)})d\tau\right\} \\
&= \widehat{w^I}(x,\eta e^{-\beta t})E(x,\eta,t).
\end{aligned}
$$

Die Zurücktransformation würde ergeben

$$
\begin{aligned}
w(x,v,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \hat{w}(x,\eta,t)e^{iv\eta}d\eta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} E(x,\eta,t)\widehat{w^I}(\eta e^{-\beta t})e^{iv\eta}d\eta.
\end{aligned}
$$

Die C_0-Halbgruppeneigenschaften lassen sich leicht nachprüfen. Etwas technischer geht es beim Generator zu und möchte an dieser Stelle nicht ausgeführt werden.

Zunächst halten wir einige nützliche Eigenschaften der Lösung fest. Seien allgemein eine Funktion $F(.,.,t) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ für $t \geq 0$ gegeben, und für $\beta \geq 0$ eine Operatorfamilie $\{P(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^2))$ definiert durch

$$
P(t)u(x,v) := \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} F(x,\eta,t)u(x,v')e^{i(v-v'e^{-\beta t})\eta}d\eta dv', \qquad t \geq 0. \tag{3.34}
$$

Die obige Halbgruppe S_2 ist von diesem Typ mit $F = \frac{1}{2\pi}E$, und auch der Operator B entspricht der Form (3.34) für $\beta = 0$ und $F = -\frac{i}{2\pi}\delta V$, mit sowohl zeitabhängigem, als auch mit dem zeitunabhängigem Potential V.

Lemma 3.14 *Für $t \geq 0$ gilt*

1) $\partial_v^n P(t)u = e^{n\beta t}P(t)\partial_v^n u, \quad u, \partial_v^n u \in L^2(\mathbb{R}^2),\ n \in \mathbb{N}.$

Sei zusätzlich $F(.,.,t) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$. So gilt

2) $P(t)(vu) = e^{\beta t}\left[vP(t)u + P^\eta(t)u\right], \quad u, vu \in L^2(\mathbb{R}^2),$

3) $\partial_x P(t)u = P(t)\partial_x u + P^x(t)u, \quad u, u_x \in L^2(\mathbb{R}^2),$

wobei $P^\eta(t)$ und $P^x(t) \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^2))$ definiert sind durch

$$
\begin{aligned}
P^\eta(t)u &:= \frac{1}{i}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \partial_\eta\left[F(x,\eta,t)\right]u(x,v')e^{i(v-v'e^{-\beta t})\eta}d\eta dv', \\
P^x(t)u &:= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \partial_x\left[F(x,\eta,t)\right]u(x,v')e^{i(v-v'e^{-\beta t})\eta}d\eta dv', \quad t \geq 0.
\end{aligned}
$$

Beweis.
1) Für $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ mit $\partial_v^n u \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$\begin{aligned}
\partial_v^n P(t)u &= \sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}} F(x,\eta,t)(i\eta)^n \mathcal{F}_v u(x,\eta e^{-\beta t})e^{iv\eta}d\eta \\
&= e^{n\beta t}\sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}} F(x,\eta,t)\mathcal{F}_v(\partial_v^n u)(x,\eta e^{-\beta t})e^{iv\eta}d\eta \\
&= e^{n\beta t}P(t)\partial_v^n u.
\end{aligned}$$

2) Für $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ mit $vu \in L^2(\mathbb{R}^2)$ erhält man nach partieller Integration

$$\begin{aligned}
P(t)(vu) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} F(x,\eta,t)v'u(x,v')e^{i(v-v'e^{-\beta t})\eta}d\eta dv' \\
&= -\frac{1}{ie^{-\beta t}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \Big[F(x,\eta,t)u(x,v')e^{iv\eta}\Big]\Big[-iv'e^{-\beta t}e^{-iv'\eta e^{-\beta t}}\Big]d\eta dv' \\
&= \frac{e^{\beta t}}{i}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \partial_\eta\Big[F(x,\eta,t)u(x,v')e^{iv\eta}\Big]\Big[e^{-iv'\eta e^{-\beta t}}\Big]d\eta dv' \\
&= e^{\beta t}\left[vP(t)u + P^\eta(t)u\right].
\end{aligned}$$

3) Einfache Rechnung. $\square$

Bemerkung. Das Lemma 2.13 ist offenbar ein Spezialfall vom Lemma 3.14, 2), für $\beta = 0$ und $F = \frac{i}{2\pi}\delta V$.

Um eine Taylorentwicklung zweiter Ordnung machen zu können, schauen wir uns erstmal an, unter welchen Voraussetzungen an die Anfangsbedingung die Lösung zweimal stetig differenzierbar ist.

Satz 3.15 *Seien $w^I \in D(A^2)$ mit $vw^I, \partial_x w^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$ und $V \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$. Dann gilt für die klassische Lösung w von (3.1), $w \in C^2([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$ und $w(t) \in D((\overline{A}+B)^2)$, $\forall t \geq 0$.*

Beweis.
Leiten wir w formal zweimal in der Zeit ab, so erhalten wir $w_{tt} = (\overline{A}+B)w_t$, bzw. mit $y := w_t$ das folgende neue System

$$\begin{aligned}
y_t &= (\overline{A}+B)y, \\
y(t=0) &= (A+B)w^I.
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass $w^I \in D((A+B)^2)$ ist, mit $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$. Zu zeigen dabei ist eigentlich nur $ABw^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$.
Mit $vw^I, w_x^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$ und den Lemmata 3.14 bzw. 2.13 folgt

$$\begin{aligned}
A_1 B w^I &= v\partial_x \Theta[V]w^I \\
&= v\left[\Theta[V_x]w^I + \Theta[V]w_x^I\right] \\
&= \Theta[V_x](vw^I) - \Omega[V_{xx}]w^I + \Theta[V](vw_x^I) - \Omega[V_x]w_x^I.
\end{aligned}$$

Andererseits gilt nach dem Lemma 3.14 für diesen Spezialfall, dass die Operatoren A_2 und B auf $D(A_2)$ kommutieren. Weiterhin liefert das Lemma 3.14

$$\begin{aligned} \partial_v(vBw^I) &= \partial_v\left(B(vw^I)+\Omega[V_x]w^I\right) \\ &= B(\partial_v(vw^I))+\Omega[V_x]w^I_v. \end{aligned}$$

Somit ist $ABw^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$ und $w^I \in D((A+B)^2)$. D.h. das System hat eine eindeutige Lösung $y \in C^1([0,\infty),L^2(\mathbb{R}^2))$ mit $y(t) \in D(\overline{A}+B)$, $\forall t \geq 0$, (vgl. Satz 2.25). Mit $y=(\overline{A}+B)w$ folgt die Behauptung. □

Nun können wir analog zur Argumentation im Abschnitt 3.2, mit den Voraussetzungen aus dem Satz 3.15 an w^I, die Lösung w des Systems in ein Taylorpolynom zweiter Ordnung in $0\leq s\leq t$ entwickeln:

$$w(t) \;=\; w(s)+(t-s)(\overline{A}+B)w(s)+\frac{1}{2}(t-s)^2(\overline{A}+B)^2w(\theta), \quad \text{mit einem } \theta\in[s,t]. \tag{3.35}$$

Für die Konsistenz brauchen wir noch die gleiche Taylorentwicklung für das Splittingschema (3.10), um eine Abschätzung zweiten Grades machen zu können. Leiten wir die approximative Lösung zunächst für $s=0$, $u(t)=S_1(t)S_2(t)w^I$, formal in $t=0$ ab, so erhalten wir

$$u_{tt}(t=0)=S_1(t)\left(\overline{A}_1^2+2\overline{A}_1(\overline{A}_2+B)+(\overline{A}_2+B)^2\right)S_2(t)w^I. \tag{3.36}$$

Die Frage ist nun wieder:
Unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen an w^I gelten die folgenden drei Ausdrücke im Bezug auf (3.36), und sind stetig in $t\geq 0$?

$$\begin{array}{ll} a) & A_1S_2(t)(A_2+B)w^I \in L^2(\mathbb{R}^2), \\ b) & A_1^2S_2(t)w^I \in L^2(\mathbb{R}^2), \\ c) & S_2(t)(A_2+B)^2w^I \in L^2(\mathbb{R}^2). \end{array} \tag{3.37}$$

Korollar 3.16 *Für die C_0-Halbgruppe S_2 in (3.31) gilt:*

i) $\partial_xS_2(t)u \;=\; S_2(t)u_x \;+\; S_2^x(t)u;$

ii) $\partial_x^2S_2(t)u \;=\; S_2(t)u_{xx} \;+\; 2S_2^x(t)u_x \;+\; S_2^{xx}(t)u;$

iii) $v\partial_xS_2(t)u \;=\; e^{-\beta t}S_2(t)(vu_x) \;-\; S_2^\eta(t)u_x \;+\; e^{-\beta t}S_2^x(t)(vu) \;-\; S_2^{\eta x}(t)u;$

iv) $v\partial_x^2S_2(t)u \;=\; e^{-\beta t}S_2(t)(vu_{xx}) \;-\; S_2^\eta(t)u_{xx} \;+\; 2e^{-\beta t}S_2^x(t)(vu_x) \;-\; 2S_2^{\eta x}(t)u_x +$ $e^{-\beta t}S_2^{xx}(t)(vu) \;-\; S_2^{\eta xx}(t)u;$

v) $v^2\partial_x^2S_2(t)u \;=\; e^{-2\beta t}S_2(t)(v^2u_{xx}) \;-\; 2e^{-\beta t}S_2^\eta(t)(vu_{xx}) \;+\; S_2^{\eta\eta}(t)u_{xx} +$ $2e^{-2\beta t}S_2^x(t)(v^2u_x) \;-\; 4e^{-\beta t}S_2^{\eta x}(t)(vu_x) \;+\; 2S_2^{\eta\eta x}(t)u_x \;+\; e^{-2\beta t}S_2^{xx}(t)(v^2u) -$ $2e^{-\beta t}S_2^{\eta xx}(t)(vu) \;+\; S_2^{\eta\eta xx}(t)u,$

wobei u und V entsprechend zu wählen sind.

Beweis. Da die Terme $\partial_x^i\partial_\eta^jE(x,\eta,t)$, $i,j\in\{0,1,2\}$ beschränkt sind in $\mathbb{R}$, folgt die Behauptung unter Anwendung des Lemmas 3.14 mit $P=S_2$ und $F=\frac{1}{2\pi}E$. □

Definition 3.17 *Wir definieren auch hier*

$$\tilde{D}(A^2) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^2) \,|\, vu_x, u_{vv}, vu_v, u_{xv}, v^2u_{xx}, v^2u_{xv}, v^2u_{vv}, vu_{vvv}, \\ vu_{xvv}, u_{vvvv} \in L^2(\mathbb{R}^2)\}.$$

Nach einfacher Rechnung gilt $\tilde{D}(A^2) \subset D(A^2)$.

Lemma 3.18 *Seien $w^I \in \tilde{D}(A^2)$ mit zusätzlich vw^I, $\partial_x\partial_v^2 w^I$, v^2w^I, $\partial_x^2 w^I$, $v\partial_x^2 w^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$ und $V \in W^{4,\infty}(\mathbb{R})$. Dann sind die Ausdrücke in (3.37) und damit (3.36) stetig in $t \geq 0$.*

Beweis.
a) Da zusätzlich $v^2w_v^I, w_{xvv}^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$ gilt, folgt aus Korollar 3.16 und Lemma 3.14

$$\begin{aligned}
v\partial_x S_2(t)(A_2+B)w^I \;&=\; v\partial_x S_2(t)\left(\sigma w_{vv}^I + \beta(vw^I)_v\right) + v\partial_x S_2(t)Bw^I \\
=\;& v\left[S_2(t)\left(\sigma w_{xvv}^I + \beta(vw^I)_{xv}\right) + S_2^x(t)\left(\sigma w_{vv}^I + \beta(vw^I)_v\right)\right] + v\left[S_2(t)(\partial_x(Bw^I)) + \right. \\
& \left. S_2^x(t)Bw^I\right] \\
=\;& S_2(t)\left(\sigma v w_{xvv}^I + \beta v(vw^I)_{xv}\right) - S_2^\eta(t)\left(\sigma w_{xvv}^I + \beta(vw^I)_{xv}\right) + S_2^x(t)\left(\sigma v w_{vv}^I + \right. \\
& \left.\beta v(vw^I)_v\right) - S_2^{\eta x}(t)\left(\sigma w_{vv}^I + \beta(vw^I)_v\right) + v\left[S_2(t)(Bw_x^I + B^x w^I) + S_2^x(t)Bw^I\right] \\
=\;& S_2(t)\left(\sigma v w_{xvv}^I + \beta v(vw^I)_{xv}\right) - S_2^\eta(t)\left(\sigma w_{xvv}^I + \beta(vw^I)_{xv}\right) + S_2^x(t)\left(\sigma v w_{vv}^I + \right. \\
& \left.\beta v(vw^I)_v\right) - S_2^{\eta x}(t)\left(\sigma w_{vv}^I + \beta(vw^I)_v\right) + S_2(t)(vBw_x^I) - S_2^\eta(t)Bw_x^I + \\
& S_2(t)(vB^x w^I) - S_2^\eta(t)B^x w^I + S_2^x(t)(vBw^I) - S_2^{\eta x}(t)Bw^I \\
=\;& S_2(t)\left(\sigma v w_{xvv}^I + \beta v(vw^I)_{xv}\right) - S_2^\eta(t)\left(\sigma w_{xvv}^I + \beta(vw^I)_{xv}\right) + S_2^x(t)\left(\sigma v w_{vv}^I + \right. \\
& \left.\beta v(vw^I)_v\right) - S_2^{\eta x}(t)\left(\sigma w_{vv}^I + \beta(vw^I)_v\right) + S_2(t)B(vw_x^I) - S_2(t)B^\eta w_x^I - S_2^\eta(t)Bw_x^I + \\
& S_2(t)B^x(vw^I) - S_2(t)B^{\eta x}w^I - S_2^\eta(t)B^x w^I + S_2^x(t)B(vw^I) - S_2^x(t)B^\eta w^I - \\
& S_2^{\eta x}(t)Bw^I.
\end{aligned}$$

Analog zur Bemerkung 2.3 haben wir aus $vw_v^I, (vw_v^I)_{vv} \in L^2(\mathbb{R}^2) \Rightarrow (vw_v^I)_v = w_v^I + vw_{vv}^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$, aus $vw_x^I, (vw_x^I)_{vv} \in L^2(\mathbb{R}^2) \Rightarrow (vw_x^I)_v = w_x^I + vw_{xv}^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$, und aus $w^I, w_{xx}^I \Rightarrow w_x^I$. Damit folgt die Behauptung.

b) Da zusätzlich $v^2w^I, \partial_x^2 w^I, v\partial_x^2 w^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$ gilt, folgert man die Behauptung nach Anwendung des Korollars 3.16, v), und den Tatsachen (analog zur Bemerkung 2.3):
– aus $v^2w^I, \partial_x^2(v^2w^I) = v^2w_{xx}^I \in L^2(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \partial_x(v^2w^I) = v^2w_x^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$, und
– aus $v^2w^I, (v^2w^I)_{vv} = 2w^I + 4vw_v^I + v^2w_{vv}^I \in L^2(\mathbb{R}^2) \Rightarrow (v^2w^I)_v = 2vw^I + v^2w_v^I$ also $v^2w_v^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

c) Folgt unmittelbar aus den Voraussetzungen an w^I. □

Genau nach der gleichen Argumentatin wie auf Seite 31 brauchen wir auch hier eine Taylorentwicklung zweiter Ordnung des Splittingschrittes $S_1(t-s)S_2(t-s)w(s)$ in $t = s$. Ersetzen wir in (3.36) w^I durch $w(s)$, so ergeben sich folgende drei Ausdrücke

$$\begin{aligned}
&a) \quad A_1 S_2(t-s)(\overline{A}_2 + B)w(s), \\
&b) \quad A_1^2 S_2(t-s)w(s), \\
&c) \quad S_2(t-s)(\overline{A}_2 + B)^2 w(s),
\end{aligned} \tag{3.38}$$

die stetig in t mit Werten in $L^2(\mathbb{R}^2)$ sein müssen. Es folgt aus $w(s) \in D((\overline{A}+B)^2)$ nicht notwendigerweise $w(s) \in D((\overline{A}_2+B)^2)$, bzw. $w(s) \in D(\overline{A}_2+B)$.

Wir werden beweisen, dass unter bestimmten Voraussetzungen an die Anfangsfunktion w^I, $w(t) \in D(A_2+B)$ bzw. $w(t) \in D((A_2+B)^2)$, $t \geq 0$ ist. Welche Voraussetzungen es sind, zeigt uns das nächste Lemma.

Lemma 3.19 *Seien $w^I \in \tilde{D}(A^2)$ mit vw^I, v^2w^I, $\partial_x^2 w^I$, $\partial_x^3\partial_v w^I$, $\partial_x^2\partial_v^2 w^I$, $v\partial_x^3 w^I$, $\partial_x^4 w^I$, $\partial_x\partial_v^3 w^I$, $v\partial_x^2\partial_v w^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$ und $V \in W^{4,\infty}(\mathbb{R})$. Dann erfüllt die Lösung die Ausdrücke (3.38) stetig in t.*

Beweis.
Dieser Beweis ist relativ technisch, und besteht aus vielen Nebenschritten, die aber sukzessiv zu den zu zeigenden Eigenschaften der Lösung hinführen. Er läuft ähnlich wie der Beweis des Lemmas 3.9. Wir wollen uns damit nicht sehr lange aufhalten, daher ist dieser Beweis in einer Kurzform in der folgenden Tabelle 3.1 zusammengefasst.

Jedoch wollen wir uns zunächst das Prinzip des Beweises anhand einiger typischen Fälle anschauen.

1) Nach Anwendung von ∂_x formal auf die Gleichung $w_t = (A+B)w$ ergibt sich mit Lemma 3.14

$$\begin{aligned} y_t &= (A+B)y + B^x w, \\ y(t=0) &= w_x^I, \end{aligned}$$

wobei $y(t) := w_x(t)$. Hier und im weiteren gelten die Rechnungen im distributionellen Sinn wie in der Argumentation im Beweis von Lemma 3.9.

Aus Theorem 6.1.4. in [33] wissen wir, dass es eine eindeutige milde Lösung y auf $[0, t_{max})$ existiert, mit

$$\begin{aligned} y(t) &= S(t)y(t=0) + \int_0^t S(t-\tau)B^x w(\tau)d\tau \\ &= S(t)y(t=0) + \int_0^t S(t-\tau)B^x S(\tau)w^I d\tau. \end{aligned}$$

Mit der Quasi-Kontraktivität von $S(t)$ in (3.7) generiert durch $\overline{A}+B$ folgt

$$\begin{aligned} \|y(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\leq e^{\frac{\beta}{2}t}\|w_x^I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \int_0^t e^{\frac{\beta}{2}(t-\tau)}\|B^x S(\tau)w^I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}d\tau \\ &\leq e^{\frac{\beta}{2}t}\|w_x^I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \int_0^t e^{\frac{\beta}{2}(t-\tau)}2\|V_x\|_{L^\infty(\mathbb{R})}e^{\frac{\beta}{2}\tau}\|w^I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}d\tau \\ &\leq e^{\frac{\beta}{2}t}\|w_x^I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + 2te^{\frac{\beta}{2}t}\|V_x\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|w^I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Also ist $t_{max} = \infty$, und damit $y = w_v \in C([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$.

2) ∂_x^2 angewandt formal auf die Gleichung $w_t = (A+B)w$ ergibt mit $\partial_x^2 Bw = Bw_{xx} + 2B^x w_x + B^{xx} w$ (Lemma 3.14)

$$\begin{aligned} y_t &= (A+B)y + 2B^x w_x + B^{xx} w, \\ y(t=0) &= w_{xx}^I, \end{aligned}$$

wobei $y(t) := w_{xx}(t)$. Aus 1) und dem Theorem 6.1.4. in [33] erhalten wir eine eindeutige milde Lösung y auf $[0, t_{max})$, welche der Abschätzung

$$\begin{aligned} \|y(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\leq \|S(t)w_{xx}^I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \int_0^t \|S(t-\tau)\left[2B^x w_x(\tau) + B^{xx} w(\tau)\right]\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} d\tau \\ &\leq e^{\frac{\beta}{2}t}\|w_{xx}^I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \int_0^t e^{\frac{\beta}{2}(t-\tau)} \Big[4\|V_x\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|w_x(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \\ &\quad 2\|V_{xx}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|w(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\Big] d\tau \\ &\leq e^{\frac{\beta}{2}t}\|w_{xx}^I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \int_0^t e^{\frac{\beta}{2}(t-\tau)} \Big[4\|V_x\|_{L^\infty(\mathbb{R})}(e^{\frac{\beta}{2}\tau}\|w_x^I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \\ &\quad 2\tau e^{\frac{\beta}{2}\tau}\|V_x\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|w^I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}) + 2\|V_{xx}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} e^{\frac{\beta}{2}\tau}\|w^I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\Big] d\tau \\ &\leq e^{\frac{\beta}{2}t}\|w_{xx}^I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + e^{\frac{\beta}{2}t}\Big(4t\|V_x\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|w_x^I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \\ &\quad 4t^2\|V_x\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})}\|w^I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + 2t\|V_{xx}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|w^I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\Big) d\tau \\ &\leq e^{\frac{\beta}{2}t} p(t) \end{aligned}$$

genügt. Dabei ist $p \in \Pi_2$ ein Polynom zweiten Grades in t. Damit folgt $t_{max} = \infty$ und $y = w_{xx} \in C([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$.

3) Analog folgt für den Fall ∂_x^3

$$\begin{aligned} y_t &= (A+B)y + 3B^x w_{xx} + 3B^{xx} w_x + B^{xxx} w, \\ y(t=0) &= w_{xxx}^I, \end{aligned}$$

mit $y(t) := w_{xxx}(t)$. Aus 1), 2) und wiederum dem Theorem 6.1.4 in [33] folgt wie im vorigen Fall für die milde Lösung

$$\|y(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq e^{\frac{\beta}{2}t}\left(\|w_{xxx}^I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + p(t)\right),$$

mit $p \in \Pi_3$, und damit $y = w_{xxx} \in C([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$.

Einen etwas anderen Typus stellen die folgenden Fälle dar.

4) Wenden wir nun ∂_v formal auf $w_t = (A+B)w$, so ergibt sich mit $(vw_x)_v = w_x + vw_{xv}$, $(vw_v)_v = w_v + vw_{vv}$ und Lemma 3.14

$$\begin{aligned} y_t &= (A+B)y + f(t,y) \\ y(t=0) &= w_v^I, \end{aligned}$$

wobei $y(t) := w_v(t)$ und $f(t,y) = -w_x + \beta y$ sind. Analog zur Bemerkung 2.3 folgt aus $w^I, w_{vv}^I \in L^2(\mathbb{R}^2) \Rightarrow w_v^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Argumentieren wir wie oben, so erhalten wir aus 1) und dem Theorem 6.1.4. in [33] die milde solution y auf $[0, t_{max})$, welche nun der Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|y(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\leq \|S(t)w_v^I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \int_0^t \|S(t-\tau)f(\tau, y(\tau))\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} d\tau \\
&\leq e^{\frac{\beta}{2}t}\|w_v^I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \int_0^t e^{\frac{\beta}{2}(t-\tau)} \left(\|w_x(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \beta\|y(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right) d\tau \\
&\leq e^{\frac{\beta}{2}t}\|w_v^I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \int_0^t e^{\frac{\beta}{2}(t-\tau)} \left(e^{\frac{\beta}{2}\tau}p_1(\tau) + \beta\|y(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right) d\tau \\
&\leq e^{\frac{\beta}{2}t}p_2(t) + \beta e^{\frac{\beta}{2}t} \int_0^t \|y(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} d\tau
\end{aligned}$$

genügt, mit $p_1 \in \Pi_1$ und $p_2 \in \Pi_2$. Wäre t_{max} endlich, so hätten wir

$$\|y(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq a(t_{max}) + b(t_{max}) \int_0^t \|y(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} d\tau,$$

und die Gronwall Ungleichung liefert

$$\|y(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq a(t_{max})e^{b(t_{max})t}, \quad t \in [0, t_{max}).$$

Damit ist $t_{max} = \infty$ und $y = w_v \in C([0, \infty), L^2(\mathbb{R}^2))$.

5) Multiplizieren wir $w_t = (A + B)w$ mit v und benutzen dabei $(vw)_{vv} = 2w_v + vw_{vv}$, $(v^2 w)_v = 2vw + v^2 w_v$ und wiedermal das Lemma 3.14, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
y_t &= (A + B)y + f(t, y) \\
y(t = 0) &= vw^I,
\end{aligned}$$

mit $y(t) := vw(t)$ und $f(t, y) = -2\sigma w_v - \beta y - B^\eta w$. Aus 4) folgt

$$\|w_v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq a(T)e^{B(T)t}, \qquad t \in [0, T].$$

Das Theorem 6.1.4 in [33] und die Gronwall Ungleichung liefern wie im vorigen Fall für die milde Lösung y auf $[0, t_{max})$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|y(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\leq e^{\frac{\beta}{2}t}\|vw^I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \int_0^t e^{\frac{\beta}{2}(t-\tau)} \Big(2\sigma\|w_v(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \beta\|y(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \\
&\qquad 2\|V_x\|_{L^\infty(\mathbb{R})}e^{\frac{\beta}{2}\tau}\|w^I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\Big) d\tau \\
&\leq c(t_{max}) + d(t_{max}) \int_0^t \|y(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \tau \\
\|y(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\leq c(t_{max})e^{d(t_{max})t}, \qquad t \in [0, t_{max}),
\end{aligned}$$

mit $t_{max} < \infty$ angenommen. Mit der gewohnten Argumentation folgt das Gewünschte, $y = vw \in C([0, \infty), L^2(\mathbb{R}^2))$.

Diese und die weiteren Fälle findet man in der folgenden Tabelle 3.1.
Sie entstehen grundsätzlich aus der Anwendung eines Operators, nennen wir ihn Φ, auf die lineare WFP-Gleichung $w_t = (A+B)w$. Mit w wird immer die klassische Lösung gemeint. Notieren wir $y := \Phi w$ und formen unter anderem mit Hilfe des Lemmas 3.14 um, so ergeben sich Systeme der Form

$$\begin{aligned} y_t &= (A+B)y + f(t,y) \\ y(0) &= \Phi w^I, \end{aligned}$$

wobei f manchmal auch nur von t abhängt, z.B. der Fall 1). Wichtig ist nun, wie sich die Inhomogenität verhält. Ist sie stetig in $t \geq 0$, und die Anfangsbedingung $\Phi w^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$, so folgt $y \in C([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^2))$ mit der aus den obigen Fällen bekannten Überlegung, basierend auf das wichtige Theorem 6.1.4 in [33].

Der Einfachheit halber, untersuchen wir nur die Inhomogenität der Gleichungen nach bekannten, schon behandelten Termen. Die Abhängigkeit der Fälle voneinander sind sukzessiv in der letzten Spalte eingetragen. Zu den Argumentationseinzelheiten verweisen wir auf die Fälle 1), 2) für $f = f(t)$ (y-unabhängig), und auf die Fälle 4), 5) für $f = f(t, y(t))$ (y-abhängig). Alle weiteren Fällen sind eine Kombination von diesen.

Zu der Bedingung $\Phi w^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$ wird es manchmal nötig sein, sie aus den Voraussetzungen an w^I analog zur Bemerkung 2.3 zu interpolieren.

Tabelle 3.1: Tabellarischer Überblick über den Beweis des Lemmas 3.19

Operator		***Inhomogenität***	***Anfangsbed.***	***Abhäng.***
1.	∂_x	$f(t) = B^x w$	$w^I, w^I_{xx} \Rightarrow w^I_x$	
2.	∂_x^2	$f(t) = 2B^x w_x + B^{xx} w$	w^I_{xx}	1.
3.	∂_x^3	$f(t) = 3B^x w_{xx} + 3B^{xx} w_x + B^{xxx} w$	$w^I_{xx}, w^I_{xxxx} \Rightarrow w^I_{xxx}$	1., 2.
4.	∂_v	$f(t,y) = -w_x + \beta y$	$w^I, w^I_{vv} \Rightarrow w^I_v$	1.
5.	v	$f(t,y) = -2\sigma w_v - \beta y - B^\eta w$	vw^I	4.
6.	$\partial_x\partial_v$	$f(t,y) = -w_{xx} + \beta y + B^x w_v$	w^I_{xv}	2., 4.
7.	∂_v^2	$f(t,y) = -2w_{xv} + 2\beta y$	w^I_{vv}	6.
8.	$v\partial_x$	$f(t,y) = -2\sigma w_{xv} - \beta y + B^x(vw) - B^\eta w_x - B^{x\eta} w$	vw^I_x	1., 5., 6.
9.	$\partial_v\partial_x^2$	$f(t,y) = -w_{xxx} + \beta y + 2B^x w_{xv} + B^{xx} w_v$	$w^I_{xxxv}, w^I_{xv} \Rightarrow w^I_{xxv}$	3., 4., 6.
10.	$v\partial_v$	$f(t) = -vw_x - 2\sigma w_{vv} - B^\eta w_v$	vw^I_v	4., 7., 8.
11.	$\partial_x\partial_v^2$	$f(t,y) = -2w_{xxv} + 2\beta y + B^x w_{vv}$	$w^I_{xxvv}, w^I_{vv} \Rightarrow w^I_{xvv}$	7., 9.

	Operator	*Inhomogenität*	*Anfangsbed.*	*Abhäng.*
12.	$v\partial_x^2$	$f(t,y) = -2\sigma w_{xxv} - \beta y - B^\eta w_{xx} + 2B^x(vw_x) - 2B^{x\eta} w_x + B^{xx}(vw) - B^{xx\eta} w$	$vw^I_{xxx}, vw^I_x \Rightarrow vw^I_{xx}$	1., 2., 5., 8., 9.
13.	v^2	$f(t,y) = -2\sigma w_v - 4\sigma v w_v - 2\beta y - 2B^\eta(vw) + B^{\eta\eta} w$	$v^2 w^I$	4., 5., 10.
14.	∂_v^3	$f(t,y) = -3w_{xvv} + 3\beta y$	$w^I_{vv}, w^I_{vvvv} \Rightarrow w^I_{vvv}$	11.
15.	$v\partial_x\partial_v$	$f(t) = -vw_{xx} - 2\sigma w_{xvv} - B^\eta w_{xv} + B^x(vw_v) - B^{x\eta} w_v$	$vw^I_x, (vw^I_x)_{vv} \Rightarrow vw^I_{xv}$	4., 6., 10., 11., 12.
16.	$v\partial_v^2$	$f(t,y) = -2vw_{xv} - 2\sigma w_{vvv} + \beta y - B^\eta w_{vv}$	$vw^I_v, (vw^I_v)_{vv} \Rightarrow vw^I_{vv}$	7., 14., 15.
17.	$v^2\partial_x$	$f(t,y) = -2\sigma w_{xv} - 4\sigma v w_{xv} - 2\beta y + B^x(v^2 w) - 2B^\eta(vw_x) - 2B^{\eta x}(vw) + B^{\eta\eta} w_x + B^{\eta\eta x} w$	$v^2 w^I, v^2 w^I_{xx} \Rightarrow v^2 w^I_x$	1., 5., 6., 8., 13., 15.
18.	$v^2\partial_v$	$f(t,y) = -v^2 w_x - 2\sigma w_v - 4\sigma v w_{vv} - \beta y - 2B^\eta(vw_v) + B^{\eta\eta} w_v$	$v^2 w^I, (v^2 w^I)_{vv} \Rightarrow v^2 w^I_v$	4., 10., 16., 17.
19.	∂_x^4	$f(t) = 4B^x w_{xxx} + 6B^{xx} w_{xx} + 4B^{xxx} w_x + B^{xxxx} w$	w^I_{xxxx}	1., 2., 3.
20.	$\partial_v\partial_x^3$	$f(t,y) = -w_{xxxx} + \beta y + 3B^x w_{xxv} + 3B^{xx} w_{xv} + B^{xxx} w_v$	w^I_{xxxv}	4., 6., 9., 19.
21.	$\partial_x^2\partial_v^2$	$f(t,y) = -2w_{xxxv} + 2\beta y + 2B^x w_{xvv} + B^{xx} w_{vv}$	w^I_{xxvv}	7., 11., 20.
22.	$v\partial_x^3$	$f(t,y) = -2\sigma w_{xxxv} - \beta y + 3B^x(vw_{xx}) + 3B^{xx}(vw_x) + B^{xxx}(vw) - B^\eta w_{xxx} - 3B^{\eta x} w_{xx} - 3B^{\eta xx} w_x - B^{\eta xxx} w$	vw^I_{xxx}	1., 2., 3., 5., 8., 12., 20.
23.	$\partial_x\partial_v^3$	$f(t,y) = -3w_{xxvv} + 3\beta y + B^x w_{vvv}$	w^I_{xvvv}	14., 21.
24.	$v\partial_x^2\partial_v$	$f(t) = -vw_{xxx} - 2\sigma w_{xxvv} - B^\eta w_{xxv} - 2B^{\eta x} w_{xv} - B^{\eta xx} w_v + 2B^x(vw_{xv}) + B^{xx}(vw_v)$	vw^I_{xxv}	4., 6., 9., 10., 15., 21., 22.
25.	∂_v^4	$f(t,y) = -4w_{xvvv} + 4\beta y$	w^I_{vvvv}	23.
26.	$v\partial_x\partial_v^2$	$f(t,y) = -2vw_{xxv} - 2\sigma w_{xvvv} + \beta y - B^\eta w_{xvv} - B^{\eta x} w_{vv} + B^x(vw_{vv})$	vw^I_{xvv}	7., 11., 16., 23., 24.

Operator		*Inhomogenität*	*Anfangsbed.*	*Abhäng.*
27.	$v^2\partial_x^2$	$f(t,y) = -2\sigma w_{xxv} - 4\sigma v w_{xxv} - 2\beta y + 2B^x(v^2 w_x) + B^{xx}(v^2 w) - 2B^\eta(v w_{xx}) - 4B^{\eta x}(v w_x) + B^{\eta\eta} w_{xx} - 2B^{\eta xx}(vw) + 2B^{\eta\eta x} w_x + B^{\eta\eta xx} w$	$v^2 w^I_{xx}$	1., 2., 5., 8., 12., 13., 17., 24.
28.	$v\partial_v^3$	$f(t,y) = -2\sigma w_{vvvv} + 2\beta y - 3v w_{xvv} - B^\eta w_{vvv}$	$v w^I_{vvv}$	14., 25., 26.
29.	$v^2\partial_x\partial_v$	$f(t,y) = -v^2 w_{xx} - 2\sigma w_{xv} - 4\sigma v w_{xvv} - \beta y + B^x(v^2 w_v) - 2B^\eta(v w_{xv}) - 2B^{\eta x}(v w_v) + B^{\eta\eta} w_{xv} + B^{\eta\eta x} w_v$	$v^2 w^I_{xv}$	4., 6., 10., 15., 18., 26., 27
30.	$v^2\partial_v^2$	$f(t,y) = -2v^2 w_{xv} - 2\sigma w_{vv} - 4\sigma v w_{vvv} - 2B^\eta(v w_{vv}) + B^{\eta\eta} w_{vv}$	$v^2 w^I_{vv}$	7., 16., 28., 29.

Wir kommen nun zu den Ausdrücken in (3.38).

zu a). Aus 7. und 10. folgt offensichtlich $w(t) \in D(A_2 + B)$, $t \geq 0$. Der Rest folgt aus dem Punkt a) im Beweis des Lemmas 3.18.

zu b). Dies folgt wie im Punkt b) des Beweises vom Lemma 3.18.

zu c). Wir zeigen nun $w(t) \in D((A_2 + B)^2)$, $t \geq 0$. $(A_2 + B)^2 = A_2^2 + A_2 B + B A_2 + B^2$, daher interessant sind nur die Fälle $A_2^2 w(t), A_2 B w(t) \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Mit 4., 7. und 10. gilt $A_2 B w(t) \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Dagegen folgt $A_2^2 w(t) \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $t \geq 0$ aus 25., 28. und 30. □

Unter den obigen Voraussetzungen an die Anfangsdaten, (Lemma 3.19) können wir die approximative Lösung für jeden Zeitschritt

$$u(t) \;=\; S_1(t-s)S_2(t-s)w(s), \qquad 0 \leq s \leq t \tag{3.39}$$

in ein Taylorpolynom zweiten Grades in $t = s$ entwickeln:

$$\begin{aligned} u(t) \;&=\; w(s) + (t-s)(\overline{A} + B)w(s) + \\ &\quad \frac{1}{2}(t-s)^2 \Big(S_1(\theta - s)(\overline{A}_1^2 + 2\overline{A}_1(\overline{A}_2 + B) + (\overline{A}_2 + B)^2)S_2(\theta - s)\Big) w(s), \\ &=\; w(s) + (t-s)(\overline{A} + B)w(s) + \\ &\quad \frac{1}{2}(t-s)^2 \Big(S_1(\theta - s)A_1^2 S_2(\theta - s) + 2S_1(\theta - s)A_1 S_2(\theta - s)(A_2 + B) + \\ &\quad S_1(\theta - s)S_2(\theta - s)(A_2 + B)^2 \Big) w(s), \end{aligned} \tag{3.40}$$

mit einem $\theta \in [s,t]$.

Der folgende Satz liefert die Konsistenz erster Ordnung des Splittingschemas. Dabei ist $H_{t,s}$ der Schritt-Operator des Schemas, definiert in (3.26).

Satz 3.20 *Die Anfangsbedingung w^I und die Potentialfunktion V genügen den Voraussetzungen in Lemma 3.19. Dann ist das Splittingschema konsistent erster Ordnung*

$$\|w(t) - H_{t,s}w(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \;\leq\; C(t-s)^2, \tag{3.41}$$

mit C unabhängig von $0 \leq s \leq t \leq T$.

Beweis. Der Beweis läuft genau wie der Beweis des Satzes 3.11. Dabei werden die entsprechenden Taylorentwicklungen (3.35) und (3.40) verwendet. □

Satz 3.21 *Die Anfangsbedingung w^I und die Potentialfunktion V genügen den Voraussetzungen in Lemma 3.19. Dann gilt*

$$\|w(t) - u_N(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \;\leq\; C\Delta t, \tag{3.42}$$

mit C unabhängig von $0 \leq t \leq T$.

Beweis.

$$\begin{aligned} w(t) - u_N(t) &= \\ &= \sum_{j=1}^{N} \left(\prod_{k=j+1}^{N} H_{k\Delta t,(k-1)\Delta t} \right) \left[w(j\Delta t) - H_{j\Delta t,(j-1)\Delta t} w((j-1)\Delta t) \right]. \end{aligned}$$

Mit den Abschäzungen (3.7)-(3.9) der Halbgruppen und dem Satz 3.20 folgt nun

$$\begin{aligned} \|w(t) - u_N(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\leq \sum_{j=1}^{N} e^{\frac{\beta}{2}(N-j-1)\Delta t} \|w(j\Delta t) - H_{j\Delta t,(j-1)\Delta t} w((j-1)\Delta t\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq e^{\frac{\beta}{2}N\Delta t} \sum_{j=1}^{N} \|w(j\Delta t) - H_{j\Delta t,(j-1)\Delta t} w((j-1)\Delta t\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq CN(\Delta t)^2 e^{\frac{\beta}{2}T}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.22 *Die Spezialfälle vom linearen WFP-System (3.1):*

$\beta = 0$:

$$\begin{aligned} w_t &= -vw_x + \sigma w_{vv} + Bw, \\ w(t=0) &= w^I, \end{aligned} \tag{3.43}$$

und

$V \equiv 0$:

$$\begin{aligned} w_t &= -vw_x + \beta(vw)_v + \sigma w_{vv}, \\ w(t=0) &= w^I, \end{aligned} \tag{3.44}$$

lassen sich ganz analog untersuchen. Die zugehörigen Halbgruppen kann man direkt aus (3.31) ablesen.
Wir wollen aber im Rahmen dieser Diplomarbeit nicht weiter darauf eingehen.

3.4 Ein alternatives Splitting

Wir haben am Anfang dieses Kapitels im Abschnitt 3.1 das Splittingschema vorgestellt, und dabei die Wahl des Splittings durch die Wirkung der Operatoren motiviert, was auch plausibel ist. Das Verfahren (3.5)-(3.6) hat vielleicht den Anschein gegeben, als ob wir uns etwas willkürlich für diese Reihenfolge der Wirkung der Halbgruppen entschieden haben. Genauso gut könnte vielleicht auch das folgende umgekehrte Schema zu einer guten Approximation der Lösung führen. Zumindest ist dies einer Untersuchung wert.

Das umgekehrte Schema für das lineare System (3.1) ist gegeben durch:

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t & = & A_1 u, & t_n \geq t \geq t_{n+1} \\ u(t_n) & = & w_n, & \\ w_{n+\frac{1}{2}} & := & u(t_{n+1}), & \end{array}\right. \tag{3.45}$$

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t & = & (A_2+B)u, & t_n \geq t \geq t_{n+1} \\ u(t_n) & = & w_{n+\frac{1}{2}}, & \\ w_{n+1} & := & u(t_{n+1}), & \end{array}\right. \tag{3.46}$$

wobei w_n und w_{n+1} die entsprechenden Approximationen der Lösung an den Zeitpunkten t_n und $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ bezeichen.

Die Gleichung (3.10) lässt sich nun anpassen in

$$u(t) \;=\; S_2(t-s)S_1(t-s)u(s), \qquad \forall t \geq s \geq 0, \tag{3.47}$$

und die Trotter-Produktformel ist auch hierfür anwendbar.

Um einen ersten qualitativen Vergleich mit unserem gewählten Schema im Abschnitt 3.1 machen zu können, untersuchen wir zunächst das neue Schema angewandt auf die einfache Gleichung (3.12) aus Abschnitt 3.2.

Wir wollen uns zunächst auf den ersten Zeitschritt

$$u(t) \;=\; S_2(t)S_1(t)w^I, \qquad t \geq 0, \tag{3.48}$$

konzentrieren. Entwickeln wir dies in ein Taylorpolynom zweiten Grades in $t = 0$, so erhalten wir entsprechend

$$u_{tt}(t=0) = S_2(t)(\overline{A}_2^2 + 2\overline{A}_2\overline{A}_1 + \overline{A}_1^2)S_1(t)w^I. \tag{3.49}$$

Nun ist wieder die Frage: Unter welchen Voraussetzungen an w^I zusätzlich zu $w^I \in \tilde{D}(A^2)$ (s. Definition 3.6) gelten die folgenden drei Ausdrücke im Bezug auf (3.49), und sind stetig in $t \geq 0$?

$$\begin{array}{ll} a) & A_2 S_1(t) A_1 w^I \in L^2(\mathbb{R}^2), \\ b) & A_2^2 S_1(t) w^I \in L^2(\mathbb{R}^2), \\ c) & S_1(t) A_1^2 w^I \in L^2(\mathbb{R}^2). \end{array} \tag{3.50}$$

Schreiben wir nun formal a) und b) auf, so erhalten wir mit Hilfe der expliziten Definition der Translationshalbgruppe $S_1(t)$ in (3.15) folgende Ausdrücke:

zu a)

$$\begin{aligned}\partial_v^2 S_1(t)(vw_x^I) &= \partial_v^2 \left(vw_x^I(x-vt,v)\right)\\ &= \partial_v \left(w_x^I(x-vt,v) - tvw_{xx}^I(x-vt,v) + vw_{xv}^I(x-vt,v)\right)\\ &= -2tw_{xx}^I + 2w_{xv}^I - 2tvw_{xxv}^I + t^2vw_{xxx}^I + vw_{xvv}^I.\end{aligned}$$

zu b)

$$\begin{aligned}\partial_v^4 S_1(t)w^I &= \partial_v^4 w^I(x-vt,v)\\ &= \partial_v^3 \left(-tw_x^I(x-vt,v) + w_v^I(x-vt,v)\right)\\ &= \partial_v^2 \left(t^2w_{xx}^I(x-vt,v) - 2tw_{xv}^I(x-vt,v) + w_{vv}^I(x-vt,v)\right)\\ &= \partial_v \left(-t^3w_{xxx}^I(x-vt,v) + 3t^2w_{xxv}^I(x-vt,v)\right.\\ &\quad \left.-3tw_{xvv}^I(x-vt,v) + w_{vvv}^I(x-vt,v)\right)\\ &= t^4w_{xxxx}^I(x-vt,v) - 4t^3w_{xxxv}^I(x-vt,v) + 6t^2w_{xxvv}^I(x-vt,v)\\ &\quad -4tw_{xvvv}^I(x-vt,v) + w_{vvvv}^I(x-vt,v).\end{aligned}$$

c) ist klar da $v^2w_{xx}^I \in L^2(\mathbb{R}^2)$ gilt.

Zusammengefasst gilt also (analog zum Lemma 3.7):

Lemma 3.23 *Sei $w^I \in \tilde{D}(A^2)$ mit $\partial_x^2 w^I$, $\partial_x^3\partial_v w^I$, $\partial_x^2\partial_v^2 w^I$, $v\partial_x^3 w^I$, $\partial_x^4 w^I$, $\partial_x\partial_v^3 w^I$, $v\partial_x^2\partial_v w^I$ $\in L^2(\mathbb{R}^2)$. Dann erfüllt die Lösung die Ausdrücke (3.50) stetig in t.*

Die Taylorentwicklung zweiter Ordnung von

$$u(t) \ = \ S_2(t-s)S_1(t-s)w(s), \qquad \forall t \geq s \geq 0, \tag{3.51}$$

in $t = s$ lässt sich genauso beweisen.

Lemma 3.24 *Unter den gleichen Voraussetzungen an w^I wie im Lemma 3.23 gilt insbesondere*

$$u_{tt}(t) \ = \ S_2(t-s)(\overline{A}_2^2 + 2\overline{A}_2\overline{A}_1 + \overline{A}_1^2)S_1(t-s)w(s), \qquad \forall t \geq s \geq 0, \tag{3.52}$$

stetig in t.

Beweis.
Aus den obigen Ausführungen kann man die Eigenschaften, die die Lösung w erfüllen muss, ablesen. Der Beweis geht analog wie im Lemma 3.9.

Bemerkung 3.25 *Auch der lineare Fall (3.1) lässt sich ähnlich behandeln. Dabei verweisen wir auf die Ausführungen im Abschnitt 3.3, insbesondere auf den Beweis des Lemmas 3.19.*

Für eine Konvergenz erster Ordnung erfordern also beide Schemen die gleichen Voraussetzungen an die Anfangsdaten, und damit eignen sich beide für die Approximation der Lösung. Das wäre vielleicht auch zu erwarten, da die Halbgruppe S_1 nur eine Verschiebung der Daten in x-Richtung bewirkt.

Man könnte nun die beiden Schemen in ein soganenntes Strang-Splitting kombinieren

$$u(t) \ = \ S_2(\frac{t-s}{2})S_1(t-s)S_2(\frac{t-s}{2})u(s), \qquad t \geq s \geq 0,$$

(dazu mehr in [8]), um eine Konvergenz zweiter Ordnung zu erreichen, was aber im Rahmen dieser Diplomarbeit nicht weiter untersucht wird.

4 Stabilität und numerisches Verhalten

In diesem Kapitel werden wir die Numerik des Splittingschemas (3.5)-(3.6) für das lineare WFP-System (3.1) mit dem gegebenen Potential V analysieren.

Im Bezug auf die Darstellungen (3.30)-(3.31) lässt sich der Splitting-Algorithmus für den Zeitschritt $t_n \longrightarrow t_{n+1} = t_n + \Delta t$ analytisch wie folgt zusammenfassen:

$$\text{Step I} \quad \begin{cases} \hat{w}^n(x,\eta) &= \mathcal{F}_v w^n(x,\eta) \\ \hat{w}^{n+1/2}(x,\eta) &= \hat{w}^n(x, \eta e^{-\beta\Delta t}) E(x,\eta,\Delta t) \\ w^{n+1/2}(x,v) &= \mathcal{F}_v^{-1}(\hat{w}^{n+1/2})(x,v) \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\text{Step II} \quad \{ \quad w^{n+1}(x,v) = w^{n+1/2}(x - v\Delta t, v) \tag{4.2}$$

mit $E(x,\eta,t) := \exp\left\{ \frac{\sigma}{2\beta}\eta^2(e^{-2\beta t} - 1) - i \int\limits_0^t \delta V(x, \eta e^{\beta(\tau - t)}) d\tau \right\}$.

w^n und w^{n+1} bezeichnen dabei die Approximationen der Lösung zu den Zeitpunkten t_n und t_{n+1}.

Bemerkung 4.1 *In (4.1) stellt $\eta e^{-\beta\Delta t}$ die Charakteristiken der Gleichung (3.33) dar. Die logarithmischen Kurven auf dem Bild 4.1 zeigen qualitativ einige ihrer Verläufe.*

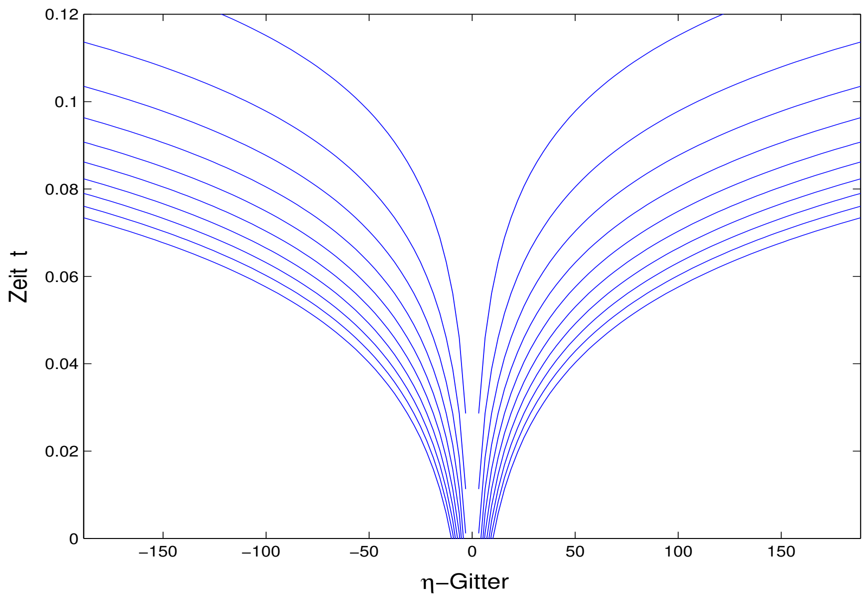


Abbildung 4.1: Charakteristiken der FP-Gleichung (3.33)

4.1 Die diskrete Stabilität des Splittingschemas

Im vorigen Kapitel wurde bewiesen (vgl. (3.8), (3.9)), dass das Splittingschema folgender L^2-Abschätzung genügt

$$\|w^{n+1}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|S_1(\Delta t)S_2(\Delta t)w^n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq e^{\frac{\beta}{2}\Delta t}\|w^n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{4.3}$$

Stellen wir uns kurz die Diskretisierung des Problems vor. Da der zweite Schritt (4.2) des Algorithmus nur eine Verschiebung der Daten in x-Richtung bewirkt, wird die disktrete L^2-Norm der Lösung in diesem Schritt erhalten bleiben

$$\|w^{n+1}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|w^{n+1/2}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \tag{4.4}$$

was aber auch aus der Kontraktivität der S_1-Halbgruppe zu erwarten ist.

Was den ersten Schritt betrifft, wissen wir, dass die Fouriertransformation die L^2-Norm beibehält. Das würde man auch von einer diskreten Fouriertransformation erwarten, mehr dazu in [7, 34]. Also wünschen wir uns zeigen zu können, dass für die diskrete L^2-Norm in (4.1)

$$\|\hat{w}^{n+1/2}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq e^{\frac{\beta}{2}\Delta t}\|\hat{w}^n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \tag{4.5}$$

gilt. Aber die erste große Frage ist eher, wie wir (4.1) im Fourierraum überhaupt realisieren möchten.

Wissend dass die Algorithmusschritte in orthogonalen Richtungen wirken, untersuchen wir ab jetzt, der Einfachheit halber, nur das Geschehen auf dem v-Gitter bzw. dem η-Gitter im Fourier-Raum.

Sei $v_l = l\Delta v$, $l \in \mathbb{Z}$ das gegebene v-Gitter, zunächst unbeschränkt. So erhält man nach der diskreten Fouriertransformation die entsprechende Schrittweite $\Delta\eta$ im Fourier-Raum. Ferner bezeichnen $\hat{w}_l^n$, $\hat{w}_l^{n+1/2}$ die entsprechenden Approximierenden zu den Zeitpunkten t_n und t_{n+1} an $\eta_l = l\Delta\eta$, $l \in \mathbb{Z}$.

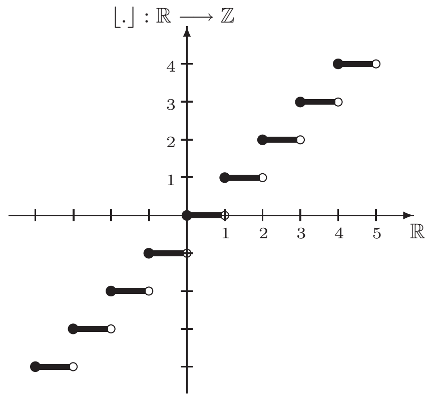


Abbildung 4.2:

Wir nehmen an, dass $1 < e^{\beta\Delta t} < 2$ ist, falls $\beta > 0$. Das ist aber, im Sinne unseres Algorithmus, keine wirkliche Einschränkung. Später werden wir eine schärfere Bedingung an Δt stellen. Definiere

$$\tilde{l}(l) := \lfloor le^{-\beta\Delta t}\rfloor, \qquad \forall l \in \mathbb{Z}, \tag{4.6}$$

wobei für $z \in \mathbb{R}$, $\lfloor z\rfloor$ die größte ganze Zahl unterhalb von z bezeichnet, d.h. $\lfloor z\rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z},\, k \leq z\}$, und damit $\lfloor z\rfloor \in \mathbb{Z}$. Die Abbbildung 4.2 links zeigt den Verlauf dieser Funktion.

Um $\hat{w}^n(\eta_l e^{-\beta\Delta t})$ in (4.1) realisieren zu können, interpolieren wir zwischen $\hat{w}^n_{\tilde{l}(l)}$ und $\hat{w}^n_{\tilde{l}(l)+1}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \eta_l e^{-\beta\Delta t} &= \Delta\eta\left[\varepsilon(l)\tilde{l}(l) + (1-\varepsilon(l)(\tilde{l}(l)+1))\right], \\ \hat{w}_l^{n+1/2} &= \left[\varepsilon(l)\hat{w}^n_{\tilde{l}(l)} + (1-\varepsilon(l))\hat{w}^n_{\tilde{l}(l)+1}\right] E(.,\eta_l,\Delta t), \end{aligned} \tag{4.7}$$

mit $\varepsilon(l) \in (0,1]$ gegeben durch

$$\varepsilon(l) \;:=\; 1 + \tilde{l}(l) - le^{-\beta\Delta t}. \tag{4.8}$$

Die Idee unseres Beweises ist diskrete L^1- und L^∞-Abschätzungen für die Approximierende herzuleiten, um dann mit Hilfe des Riesz-Thorin-Interpolationstheorems, [35], IX.17 auf eine vernünftige L^2-Abschätzung kommen zu können.

Zunächst wollen wir etwa zeigen

$$\|\hat{w}^{n+1/2}\|_{L^1(\mathbb{R})} \;\leq\; e^{\omega\beta\Delta t}\|\hat{w}^n\|_{L^1(\mathbb{R})}, \tag{4.9}$$

mit einem $\omega \geq 1$. $\|.\|_{L^1(\mathbb{R})}$ bezeichnet dabei die diskrete L^1-Norm.
Da

$$|E(.,\eta,t)| \;=\; \exp\left\{\frac{\sigma}{2\beta}\eta^2(e^{-2\beta t}-1)\right\} \;\leq\; 1 \tag{4.10}$$

gilt, trägt dieser Term zur L^1-Abschätzung von (4.7) offensichtlich nicht bei, und wird von der Interpolation nicht beeinflusst, sodass wir ihn den nächsten Rechnungen diesbezüglich entziehen.

4.1.1 Die L^1-Stabilität des Modells

Die L^1-Stabilität des Ein-Punkt-Modells

Gemäss den obigen Notationen sei $\hat{w}_l^n = d_k\delta_l^k$, für festes $k \in \mathbb{Z}$. Die für unsere Untersuchung interessanten Punkte, die zur L^1-Norm beitragen, vgl. (4.7), sind gegeben durch $\tilde{l}^{-1}(k-1)$ und $\tilde{l}^{-1}(k)$. Wir bezeichnen sie wie folgt

$$\left\{\begin{array}{lcrcl} p \in \mathbb{Z} & : & \tilde{l}(p) & = & k-1 \\ q \in \mathbb{Z} & : & \tilde{l}(q) & = & k \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcccl} k-1 & \leq & \frac{p}{y} & < & k \\ k & \leq & \frac{q}{y} & < & k+1 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcccl} (k-1)y & \leq & p & < & ky \\ ky & \leq & q & < & (k+1)y. \end{array}\right.$$

Für $y := e^{\beta\Delta t} \in (1,2)$ erhalten wir

$$\begin{array}{lcl} \max\sharp\{p\} & = & 2 \\ \max\sharp\{q\} & = & 2 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{lcl} \min\sharp\{p\} & = & 1 \\ \min\sharp\{q\} & = & 1. \end{array}$$

Fall 1. $\sharp\{p\} = \sharp\{q\} = 1$
Seien $q - p = 1$ die Indizes. Aus (4.7) und (4.10) folgt

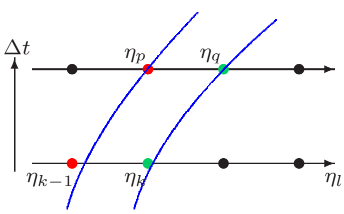


Abbildung 4.3: Fall 1.

$$\begin{aligned} \|\hat{w}^{n+1/2}\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\hat{w}_l^{n+1/2}| \\ &\leq |\varepsilon(q) + 1 - \varepsilon(p)||d_k| \\ &= \left(1 + k - \frac{q}{y} - (k-1) + \frac{p}{y}\right)\|\hat{w}^n\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &= \left(2 + \frac{p-q}{y}\right)\|\hat{w}^n\|_{L^1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq (y-1)^2 + q - p - 1 \\ &= y^2 - 2y + q - p \\ \iff \qquad y &\geq 2 + \frac{p-q}{y}, \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\|\hat{w}^{n+1/2}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq y\|\hat{w}^n\|_{L^1(\mathbb{R})} \tag{4.11}$$

Also $\omega = 1$ in (4.9).

Fall 2. $\sharp\{p\} = \sharp\{q\} = 2$

Seien $p_1 < p_2 < q_1 < q_2$ die Indizes. Es ist klar dass sie benachbart und verschieden voneinander sind. Aus (4.7) und (4.10) folgt

$$\begin{aligned} \|\hat{w}^{n+1/2}\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\hat{w}_l^{n+1/2}| \\ &\leq |\varepsilon(q_1) + \varepsilon(q_2) + 1 - \varepsilon(p_1) + 1 - \varepsilon(p_2)||d_k| \\ &= \Bigg(1 + k - \frac{q_1}{y} + 1 + k - \frac{q_2}{y} - (k-1) + \\ &= \frac{p_1}{y} - (k-1) + \frac{p_2}{y}\Bigg) \|\hat{w}^n\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &= \left(4 + \frac{p_1 + p_2 - q_1 - q_2}{y}\right) \|\hat{w}^n\|_{L^1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

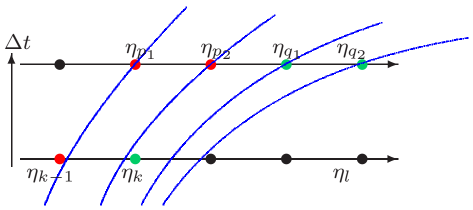


Abbildung 4.4: Fall 2.

Da insbesondere $q_1 - p_2 = 1$, $q_2 - p_1 = 3$ erhalten wir $q_1 + q_2 - p_1 - p_2 - 4 = 0$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq (y-2)^2 + q_1 + q_2 - p_1 - p_2 - 4 \\ &= y^2 - 4y + q_1 + q_2 - p_1 - p_2 \\ \iff \qquad y &\geq 4 + \frac{p_1 + p_2 - q_1 - q_2}{y}, \end{aligned}$$

und damit

$$\|\hat{w}^{n+1/2}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq y\|\hat{w}^n\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{4.12}$$

Also $\omega = 1$ in (4.9).

Fall 3. $\sharp\{p\} = 2$, $\sharp\{q\} = 1$

Mit den Indizes $p_1 < p_2 < q$ folgt aus (4.7) und (4.10)

$$\begin{aligned} \|\hat{w}^{n+1/2}\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\hat{w}_l^{n+1/2}| \\ &\leq |\varepsilon(q) + 1 - \varepsilon(p_1) + 1 - \varepsilon(p_2)||d_k| \\ &= \Bigg(1 + k - \frac{q}{y} - (k-1) + \frac{p_1}{y} - \\ &\quad (k-1) + \frac{p_2}{y}\Bigg) \|\hat{w}^n\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &= \left(3 - k + \frac{p_1 + p_2 - q}{y}\right) \|\hat{w}^n\|_{L^1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

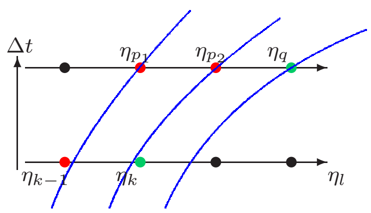


Abbildung 4.5: Fall 3.

Da $q - p_2 = 1$, $q - p_1 = 2$ und $ky > p_2$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &\leq (y-1)^2(y+2) + (ky - p_2) \\ &= y^3 - 3y + 2 + (ky - p_2) \\ &= y^3 - 3y + ky + q - p_1 - p_2 \\ \iff \qquad y^2 &\geq 3 - k + \frac{p_1 + p_2 - q}{y}, \end{aligned}$$

und damit die Abschätzung

$$\|\hat{w}^{n+1/2}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq y^2 \|\hat{w}^n\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{4.13}$$

In diesem Fall ist $\omega = 2$ in (4.9).

Fall 4. $\sharp\{p\} = 1$, $\sharp\{q\} = 2$
Seien $p < q_1 < q_2$ die Indizes. Sie sind offensichtlich auch benachbart und verschieden voneinander. Aus (4.7) und (4.10) erhalten wir

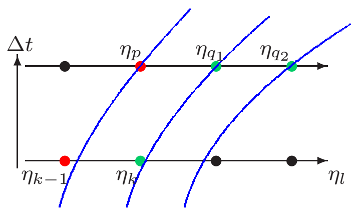


Abbildung 4.6: Fall 4.

$$\begin{aligned} \|\hat{w}^{n+1/2}\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{w}_l^{n+1/2}| \\ &\leq |\varepsilon(q_1) + \varepsilon(q_2) + 1 - \varepsilon(p)||d_k| \\ &= \left(1 + k - \frac{q_1}{y} + 1 + k - \frac{q_2}{y} - \right. \\ &\quad \left. (k-1) + \frac{p}{y}\right) \|\hat{w}^n\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &= \left(3 + k + \frac{p - q_1 - q_2}{y}\right) \|\hat{w}^n\|_{L^1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Da $q_1 - p = 1$, $q_2 - p = 2$ und $ky \leq q_1$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq (y-1)^2(y+2) + (q_1 - ky) \\ &= y^3 - 3y + 2 + (q_1 - ky) \\ &= y^3 - 3y - ky + q_1 + q_2 - p \\ \iff \qquad y^2 &\geq 3 + k + \frac{p - q_1 - q_2}{y}, \end{aligned}$$

und damit

$$\|\hat{w}^{n+1/2}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq y^2 \|\hat{w}^n\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{4.14}$$

Auch hier erhalten wir $\omega = 2$ in (4.9).

Insgesamt erhalten wir also für das Ein-Punkt-Modell folgende Stabilitätsabschätzung

$$\|\hat{w}^{n+1/2}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq e^{2\beta\Delta t} \|\hat{w}^n\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{4.15}$$

Beispiel 4.2 *$k = 2$ und $d_2 = 1$.*

- *Für $y = 1.9$ kriegen wir vier Punkte $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $q_1 = 4$ und $q_2 = 5$ (Fall 2).*

$$\begin{aligned} \|\hat{w}^{n+1/2}\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq \varepsilon(4) + \varepsilon(5) + (1 - \varepsilon(2)) + (1 - \varepsilon(3)) \\ &= 3 - \frac{4}{y} + 3 - \frac{5}{y} + 1 - 2 + \frac{2}{y} + 1 - 2 + \frac{3}{y} \\ &= 4 - \frac{4}{y} \\ &\leq y, \end{aligned}$$

da $y^2 - 4y + 4 = (y-2)^2 \geq 0$ *gilt.*

- *Für* $y = \frac{3}{2}$ *kriegen wir drei Punkte* $p = 2$, $q_1 = 3$ *und* $q_2 = 4$ *(Fall 4). Nun*

$$\begin{aligned}
\|\hat{w}^{n+1/2}\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq \varepsilon(3) + \varepsilon(4) + (1 - \varepsilon(2)) \\
&= 3 - \frac{3}{y} + 3 - \frac{4}{y} + 1 - 2 + \frac{2}{y} \\
&= 5 - \frac{5}{y} \\
&\leq y^2,
\end{aligned}$$

weil $y^3 - 5y + 5 = y^3 - 3y + 2 + (3 - 2y) = y^3 - 3y + 2 = (y-1)^2(y+2) \geq 0.$

- *Für* $y = 1.001$ *erhalten wir zwei Punkte* $p = 2$ *und* $q = 3$ *(Fall 1), sodass*

$$\begin{aligned}
\|\hat{w}^{n+1/2}\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq \varepsilon(3) + (1 - \varepsilon(2)) \\
&= 3 - \frac{3}{y} + 1 - 2 + \frac{2}{y} \\
&= 2 - \frac{1}{y} \\
&\leq y
\end{aligned}$$

folgt, da $y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2 \geq 0.$

Die L^1-Stabilität des Mehrpunkt-Modells

Wir untersuchten bisher nur das Ein-Punkt-Modell $\hat{w}_l^n = d_k \delta_l^k$, für festes $k \in \mathbb{Z}$.
Nun verallgemeinern wir es auf mehrere Punkte. Sei $\hat{w}_l^n = \sum_{k\in\Gamma} d_k \delta_l^k$ mit $\Gamma \subset \mathbb{Z}$ gegeben. Folglich gilt $\|\hat{w}^n\|_{L^1(\mathbb{R})} = \sum_{k\in\Gamma} |d_k|$ und aus (4.7), (4.10) und (4.15) können wir nun abschätzen

$$\begin{aligned}
\|\hat{w}^{n+1/2}\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\varepsilon(l)\hat{w}^n_{\tilde{l}(l)} + (1-\varepsilon(l))\hat{w}^n_{\tilde{l}(l)+1}| \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\varepsilon(l) \sum_{k\in\Gamma} d_k \delta^k_{\tilde{l}(l)} + (1-\varepsilon(l)) \sum_{k\in\Gamma} d_k \delta^k_{\tilde{l}(l)+1}| \\
&\leq \sum_{k\in\Gamma} |d_k| \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\varepsilon(l)\delta^k_{\tilde{l}(l)} + (1-\varepsilon(l))\delta^k_{\tilde{l}(l)+1}| \\
&\leq y^2 \|\hat{w}^n\|_{L^1(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir

$$\|\hat{w}^{n+1/2}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq e^{2\beta\Delta t} \|\hat{w}^n\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{4.16}$$

4.1.2 Die L^2-Stabilität des Modells

Wir werden, wie eingangs erwähnt, das Riesz-Thorin-Interpolationstheorem, [35], IX.17 anwenden, daher brauchen wir als nächstes eine Abschätzung der diskreten L^∞-Normen für das Modell.

Die L^∞-Stabilität

Dazu sei $\hat{w}_l^n = \sum_{k\in\Gamma} d_k \delta_l^k$, mit $\Gamma \subset \mathbb{Z}$. Mit Hilfe von (4.7), (4.10) und der folgenden Ungleichung

$$\forall\, \epsilon \in [0,1]: \qquad \epsilon a + (1-\epsilon) b \leq \max\{a, b\}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \tag{4.17}$$

schätzen wir nun ab

$$\begin{aligned}\|\hat{w}^{n+1/2}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq \max_{l\in\mathbb{Z}} |\varepsilon(l)\hat{w}^n_{\tilde{l}(l)} + (1-\varepsilon(l))\hat{w}^n_{\tilde{l}(l)+1}| \\ &\underbrace{\leq}_{(4.17)} \max_{l\in\mathbb{Z}} |\hat{w}^n_l| \\ &= \|\hat{w}^n\|_{L^\infty(\mathbb{R})}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Die L^2-Stabilität

Aus (4.16), (4.18) und dem Riesz-Thorin-Interpolationstheorem [35], IX.17, erhalten wir

$$\|\hat{w}^{n+1/2}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq e^{\beta\Delta t}\|\hat{w}^n\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

und mit (4.4) folgt

$$\|w^{n+1}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq e^{\beta\Delta t}\|w^n\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Nun fassen wir diese Ergebnisse zusammen.

Satz 4.3 *Sei $0 < \Delta t < \frac{1}{\beta}\ln(2)$. Dann gilt für das Splittingschema (4.1)-(4.2), wobei (4.1) explizit in (4.7) beschrieben wird, folgende Stabilitätsabschätzung*

$$\|w^{n+1}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq e^{\beta\Delta t}\|w^n\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{4.19}$$

Bemerkung 4.4 *Die Bedingung $0 < \Delta t < \frac{1}{\beta}\ln(2)$ ist equivalent mit $y = e^{\beta\Delta t} \in (1,2)$, das wir beim Beweis verwendet haben.*
Beachten Sie, dass die Abschätzung (4.19) nicht die exakt erwünschte in (4.3) ist. Der Grund für diesen suboptimalen Wachstumsfaktor ist die lineare Interpolation und die etwas künst-liche Funktion $\lfloor . \rfloor : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$, dennoch bleibt das System für unsere Zwecke stabil. Auf die diskrete Fouriertransformation und die Details der Implementierung gehen wir im nächsten Abschnitt ein.

Bemerkung 4.5 *Ausgehend aus der Tatsache, dass man im **Fall 1** (s. (4.11)) die optimale Stabilität (4.5) zeigen kann, würde man etwa versuchen, y so zu wählen, dass nach Möglichkeit nur der **Fall 1** eintritt. Der Versuch, y so zu wählen, dass*

$$\tilde{l}(l) = \begin{cases} l-1, & l \in \{1,...,M\} \\ l, & l \in \{-M,...,0\} \end{cases} \tag{4.20}$$

*gilt, was zunächst vielversprechend aussieht, scheitert an $l = 0$. Dort tritt nämlich der **Fall 3** ein.*

Dennoch werden wir im nächsten Abschnitt, wo die Volldiskretisierung des Schrittes (4.1) untersucht wird, eine solche Wahl treffen müssen, um die Reellwertigkeit der diskreten inversen Fouriertransformierten sichern zu können.

4.2 Das FP-Teilmodell

Wir stürzen uns in diesem Abschnitt auf den numerisch interessanten ersten Schritt (4.1) dieses Schemas. Interessant dabei ist nebst der diskreten Fouriertransformation auch und insbesondere die lineare Interpolation zur Anpassung an den Charakteristikenverlauf, die für einen suboptimalen Stabilitätsfaktor gesorgt hat.

Wir werden nun diesen Splittingschritt numerisch untersuchen, und ihn mit einem klassischen finiten Differenzenverfahren vergleichen. Da ein solches Verfahren sich nicht auf den Pseudodifferentialterm $\Theta[V]$ anwenden lässt, möchten wir uns auf das Fokker-Planck-Teilsystem

$$\begin{aligned} u_t &= \sigma u_{vv} + \beta(vu)_v, \qquad t > 0, \\ u(0) &= u^I, \end{aligned} \tag{4.21}$$

in $L^2(\mathbb{R})$ einschränken. Dieses System ist somit x-unabhängig.

Die analytische Lösung zu diesem System besteht nach (4.1) aus folgenden Schritten:

$$\text{Fouriertransformation} \; : \; \begin{aligned} \hat{u}_t &= -\sigma\eta^2\hat{u} - \beta\eta\hat{u}_\eta \\ \hat{u}(0) &= \hat{u}^I, \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\text{explizite Lösung} \; : \; \hat{u}(\eta,t) = \hat{u}^I(\eta e^{-\beta t}) \exp\left\{\frac{\sigma}{2\beta}\eta^2(e^{-2\beta t}-1)\right\}, \tag{4.23}$$

$$\text{Rücktransformation der Lösung} \; : \; u(v,t) = \mathcal{F}_v^{-1}\hat{u}(v,t), \tag{4.24}$$

wobei η wie üblich die Fouriervariable bezeichnet.

4.2.1 Die Massenerhaltung und der Stationärzustand

Nun zeigen wir, dass das System (4.21) die Gesamtmasse in der Zeit erhält.
Die Masse ist gegeben durch

$$M(t) = \int_{\mathbb{R}} u(v,t)dv, \tag{4.25}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \partial_t M &= \int_{\mathbb{R}} u_t(v,t)dv \\ &= \sigma \int_{\mathbb{R}} u_{vv}dv + \beta \int_{\mathbb{R}} (vu)_v dv \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist $M(t) \equiv M(0) = \int_{\mathbb{R}} u^I(v)dv$, konstant in der Zeit.

Die Lösung (4.23) würde auch der Massenerhaltung genügen, denn beim Übergang in den Fourierraum konzentriert sich die Masse bis auf den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ in dem Punkt $\eta = 0$

$$M(t) = \sqrt{2\pi}\,\hat{u}(0,t) = \hat{u}^I(0).$$

Um die obige Lösung mit einem finiten Differenzenverfahren vergleichen, und eine qualitative Abschätzung für die Güte der Approximationen geben zu können, untersuchen wir zunächst das System (4.21) nach der stationären Lösung. Sie gibt uns insbesondere Aufschluss darüber, wogegen das System zeitlich konvergiert.

Der Stationärzustand tritt bekanntlich ein, wenn die Evolutionsgleichung zeitunabhängig wird, also setzen wir $u_t = 0$, so erhalten wir

$$(\beta v u + \sigma u_v)_v = 0.$$

Die stationäre Lösung als Lösung der linearen homogenen Gleichung

$$\beta v u + \sigma u_v = 0 \tag{4.26}$$

ist gegeben durch

$$u_\infty(v) = A e^{-\frac{\beta}{2\sigma}v^2}, \quad A \in \mathbb{R}. \tag{4.27}$$

Aufgrund der Massenerhaltung ist die Gesamtmasse des Stationärzustandes $\int_{\mathbb{R}} u_\infty(v)dv$ durch die Masse der Anfangsbedingung $M := \int_{\mathbb{R}} u_0(v)dv$ gegeben. Also halten wir fest $M = \int_{\mathbb{R}} u_\infty(v)dv = A\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\beta}{2\sigma}v^2}dv = A\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\sigma}{\beta}}$ nach [11].

Es folgt $A = M\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\beta}{\sigma}}$, d.h. dass A der Skalierungsfaktor der Masse der Gauss-Verteilung $e^{-\frac{\beta}{2\sigma}v^2}$ auf die Gesamtmasse des Systems ist.
Nun wollen wir das Analogon im Fourier-Raum finden, daher untersuchen wir dort die entsprechende Gleichung

$$\hat{u}_t = -\beta\eta\hat{u}_\eta - \sigma\eta^2\hat{u}$$

auf stationäre Lösungen. Für $\hat{u}_t = 0$ erhalten wir

$$\hat{u}_\eta = -\frac{\sigma}{\beta}\eta\hat{u}, \tag{4.28}$$

und als Lösung

$$\hat{u}_\infty(\eta) = C e^{-\frac{\sigma}{2\beta}\eta^2}, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{4.29}$$

Wenn wir nun die Lösung (4.27) transformieren, so erhalten wir nach [23]

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_v(u_\infty)(\eta) &= A\sqrt{\frac{\sigma}{\beta}}e^{-\frac{\sigma}{2\beta}\eta^2} \overset{!}{=} Ce^{-\frac{\sigma}{2\beta}\eta^2} \\ \Longrightarrow \qquad C = A\sqrt{\frac{\sigma}{\beta}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}M = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} u_\infty(v)dv = \hat{u}_\infty(\eta = 0), \end{aligned}$$

was eigentlich auch zu erwarten ist.

4.2.2 Die algorithmische Realisierung

Eigentlich haben wir uns im Abschnitt über die Stabilität 4.1 nur für das Geschehen im Fourierraum interessiert, und nicht für den Weg dorthin. Sogar haben wir, der Einfachheit halber, ein unendliches Gitter betrachtet. Das Ziel dieses Abschnittes ist es, zunächst den expliziten Algorithmus zu präsentieren, anhand dessen wir anschließend das Schemaverhalten analysieren werden.

Seien $L \in \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{N}$ und die Anfangsverteilung u^I auf dem Gitter $v_l \in [-L, L]$, $l \in \{-M, ..., M\}$ mit $v_l = l\Delta v$ und der Gitterweite $\Delta l = L/M$ vorgegeben.

Zum Übergang in den Fourierraum verwenden wir die diskrete Fouriertransformation (DFT), die für eine Funktion f auf dem obigen Gitter, $f(v_l) =: f_l$ definiert ist durch (vgl. [43], Kap. 4)

$$\text{DFT:} \qquad \hat{f}_l = \frac{1}{2M}\sum_{k=-M}^{M} f_k e^{-i\pi kl/M}, \qquad l \in \{-M, ..., M\} \tag{4.30}$$

$$\text{IDFT:} \qquad f_k = \sum_{l=-M}^{M} \hat{f}_l e^{i\pi lk/M}, \qquad k \in \{-M, ..., M\}. \tag{4.31}$$

Sei $\eta_l = l\Delta\eta$, $l \in \{-M, ..., M\}$ das entsprechende Gitter im Fourierraum, folglich ist $\hat{f}_l = f(\eta_l)$.

Die Summe (4.30) ist eine Approximation des kontinuierlichen Fourierintegrals von f auf dem obigem Gitter, etwa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2M}\int_{-M}^{M} f(v)e^{-iv\eta}dv &\approx \frac{1}{2M}\sum_{k=-M}^{M} f(v_k)e^{-iv_k\eta_l} \\ &= \frac{1}{2M}\sum_{k=-M}^{M} f(v_k)e^{-ik\Delta v l\Delta\eta} \\ &= \hat{f}(\eta_l). \end{aligned}$$

Wie gut dabei diese Approximation ist, insbesondere auch was die Stabilität des volldiskretisierten Modells angeht, ist in [7, 34] ausführlich studiert worden.

Für die Schrittweite im Fourierraum $\Delta\eta$ muss daher gelten:

$$\Delta v\Delta\eta = \frac{\pi}{M} \quad \Longrightarrow \quad \Delta\eta = \frac{\pi}{L}.$$

D.h. insbesondere, dass $\Delta\eta$ unabhängig von der Feinheit des v-Gitters ist, sondern lediglich von der Länge des v-Intervalls abhängt. Für ein größeres L kriegen wir also eine feinere Auflösung im Fourierraum. Da wir aber die Rechnung im Fourierraum durchführen, wird diese Tatsache eine große Rolle bei der Approximationsgüte mitspielen.

Seien Δt eine gegebene Zeitschrittweite und $T \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Iterationen, die wir durchführen möchten. Mit $t_n := n\Delta t$, $n = 0, ..., T$ bezeichnen wir die Zeitschritte.
Wir fassen die notwendigen Definitionen (s. auch den Abschnitt 4.1) zusammen. Seien also:

$$\begin{aligned} \tilde{l}(l) &:= \lfloor le^{-\beta\Delta t} \rfloor, \\ \varepsilon(l) &:= 1 + \tilde{l}(l) - le^{-\beta\Delta t}, \\ E_{l,\Delta t} &:= \exp\left\{\frac{\sigma}{2\beta}\eta_l^2(e^{-2\beta\Delta t} - 1)\right\}, \qquad l \in \{-M, ..., M\} \end{aligned}$$

Algorithmus 4.6 *Mit den Bezeichnungen* $u_l^n := u(v_l, t_n)$ *und entsprechend* $\hat{u}_l^n := \hat{u}(v_l, t_n)$ *besteht der Algorithmus aus den folgenden drei Schritten.*

1. Schritt:

$$\hat{u}_l^I = \frac{1}{2M}\sum_{k=-M}^{M} u_k^I e^{-i\pi kl/M}$$

2. Schritt: $n = 0 \dots T$

$$\hat{u}_l^{n+1} = \left[\varepsilon(l)\hat{u}^n_{\tilde{l}(l)} + (1-\varepsilon(l))\hat{u}^n_{\tilde{l}(l)+1}\right] E_{l,\Delta t}$$

3. Schritt:

$$u_k^T = \sum_{l=-M}^{M} \hat{u}_l^T e^{i\pi lk/M}$$

Bemerkungen

• Man stellt sich vielleicht die etwas naive aber durchaus berechtigte Frage, warum wir überhaupt in Zeit iterieren. Wir haben schließlich in (4.23) die explizite Lösung in Form einer Halbgruppe, also wäre auch prinzipiell möglich gleich $T\Delta t$ einzusetzen, und dann eine entsprechende Anpassung an das Gitter vorzunehmen. Das geht natürlich auch, wir wollen aber diesen Algorithmus im Rahmen unseres Splittingverfahrens einsetzen, deshalb sind wir an der Zeititeration interessiert.

• Eine andere berechtigte Frage wäre, was mit den Rändern passieren soll, und ob Randbedingungen notwendig sind. Für $l \geq 0$ gilt sicherlich $\tilde{l}(l) \leq l$. Andererseits für $l < 0$ folgt $-l > -le^{-\beta\Delta t}$ und damit $l \leq \tilde{l}(l)$, so dass sich Randbedingungen erübrigen.

• Aus dem Algorithmus folgt an $l = 0$, $\varepsilon(0) = 1$ und

$$\hat{u}_0^{n+1} = \hat{u}_0^n, \qquad \forall\, n \geq 0.$$

Damit bleibt die Masse auf dem Intervall $[-L, L]$ erhalten.

• Vom Interesse ist auch die Frage, ob der Algorithmus reelle (Teil)Lösungen im v-Raum liefert. Dafür reicht es bekanntlich zu zeigen

$$\overline{\hat{u}_l^{n+1}} = \hat{u}_{-l}^{n+1}, \qquad l \in \{-M, ..., M\}, \;\; n \geq 0. \tag{4.32}$$

Die nächste Proposition liefert eine Bedingung, wann das erfüllt ist.

Proposition 4.7 *Sei $0 < \Delta t < \frac{1}{\beta}\ln(\frac{M}{M-1})$. Dann gilt (4.32) für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis.
Für $l \in \{2, ..., M\}$ gilt $\frac{M}{M-1} \leq \frac{l}{l-1}$. Aus $0 < \Delta t < \frac{1}{\beta}\ln(\frac{M}{M-1})$ folgt dann

$$1 < e^{\beta\Delta t} < \frac{l}{l-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad l-1 < le^{-\beta\Delta t} < l.$$

Für $l \in \{-M, ..., -2\}$ erhalten wir analog

$$\begin{aligned} 1 < e^{\beta\Delta t} < \frac{|l|}{|l|-1} \qquad &\Longleftrightarrow \qquad |l|-1 < |l|e^{-\beta\Delta t} < |l| \\ &\Longleftrightarrow \qquad l < le^{-\beta\Delta t} < l+1. \end{aligned}$$

Für $l = \pm 1$ gilt offenbar $0 < e^{-\beta\Delta t} < 1$ und $0 > e^{-\beta\Delta t} > -1$, und die Funktion $\tilde{l}(l)$ hat folglich die Darstellung (4.20).

Und nun vollständige Induktion:
Sei (4.32) zum Zeitschritt n erfüllt. Zum Zeitpunkt $n = 0$ ist sie wegen der reellen Anfangsbedingung u^I sowieso erfüllt.
Es gilt aus der Definition von E, $\tilde{l}$ und ε für alle $l \in \{-M, ..., M\}$:

$$\begin{aligned} E_{l,\Delta t} &= E_{-l,\Delta t}, \\ \tilde{l}(l) &= -\left[\tilde{l}(-l) + 1\right], \\ \varepsilon(l) &= 1 - \varepsilon(-l). \end{aligned}$$

Folglich für $l \in \{-M, ..., M\}$

$$\begin{aligned} \overline{\hat{u}_l^{n+1}} &= \left[\varepsilon(l)\overline{\hat{u}^n_{\tilde{l}(l)}} + (1-\varepsilon(l))\overline{\hat{u}^n_{\tilde{l}(l)+1}}\right] E_{l,\Delta t} \\ &= \left[(1-\varepsilon(-l))\hat{u}^n_{-\tilde{l}(l)} + \varepsilon(-l)\hat{u}^n_{-\tilde{l}(l)-1}\right] E_{-l,\Delta t} \\ &= \left[(1-\varepsilon(-l))\hat{u}^n_{\tilde{l}(-l)+1} + \varepsilon(-l)\hat{u}^n_{\tilde{l}(-l)}\right] E_{-l,\Delta t} \\ &= \hat{u}^{n+1}_{-l}. \end{aligned}$$

Damit ist die Reellwertigkeit der inversen DFT der Approximierenden zu jedem Zeitpunkt gesichert. □

Bemerkung 4.8 *In der Literatur findet man öfters diese Variante der DFT:*
Sei das Tupel $\{f(0), ..., f(N)\}$, $N \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann definiert man (vgl. [43], Kap. 4)

$$\text{DFT:} \qquad \hat{f}(j) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(k)e^{-2i\pi kj/N}, \qquad j \in \{0, ..., N-1\} \tag{4.33}$$

$$\text{IDFT:} \qquad f(k) = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{f}(j)e^{2i\pi kj/N}, \qquad k \in \{0, ..., N-1\}. \tag{4.34}$$

Was aber in der Praxis vorgezogen wird, ist eine weniger aufwendige Version der DFT, die schnelle Fouriertransformation (FFT). Dafür hat man N gerade zu wählen.

Passen wir unseren Algorithmus an die obige Definition an, so haben wir dabei das Problem, dass in $e^{-2i\pi kj/N}$ die Indizes k, j immer nicht negativ sind. Deshalb ist eine Umordnung der Stützpunkte im ersten Schritt $\{u^I_{-M+1}, ..., u^I_M\}$ (beachte $N = 2M$ für die FFT!) notwendig. Nehmen wir die Periodizität der Fourierkoeffizienten zur Hilfe

$$\hat{f}(j+N) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(k)e^{-2i\pi k(j+N)/N} = \hat{f}(j), \qquad j \in \{0, ..., N-1\}, \tag{4.35}$$

so ergibt sich folgende Umordnung der Indizes als sinnvoll

$$\tilde{u}^I_l = \begin{cases} u^I_l, & l = 0, ..., M-1 \\ u^I_M + u^I_{-M}, & l = M \\ u^I_{l-2M}, & l = M+1, ..., 2M-1. \end{cases}$$

Natürlich hat man dann bei der Anwendung des zweiten Schrittes die Umindizierung zu beachten.

Das folgende Beispiel gewährt uns einen ersten Einblick in das Verhalten des Verfahrens.

Beispiel 4.9 *Seien $\sigma = 1$ und $\beta = 15$ die Systemparameter, $L = 16$, $M = 600$ bestimmen das v-Gitter.*

Die Anfangsbedingung u^I *ist gegeben durch*

$$u_l^I = \begin{cases} 1, & l = 0 \\ 0, & sonst. \end{cases}$$

Sie ist in der Abbildung 4.7 etwas vergrößert aufgezeichnet. Eine Iteration mit den Zeitparametern $\Delta t = 0.0001$, $T = 3000$ *würde eine deutlich gute Approximation der rot aufgetragenen entsprechend normierten stationären Lösung (4.27) liefern, s. Abbildung 4.8.*

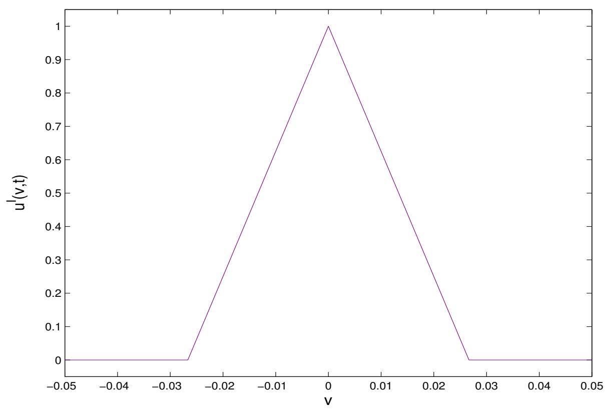


Abbildung 4.7: *Die Anfangsbedingung*

Wir gehen auf die Approximation und die Wahl der Parameter ausführlich im unteren Abschnitt über das Fehlerverhalten ein. Das nächste Bild 4.9 zeigt uns die entsprechende Entwicklung im Fourierraum.

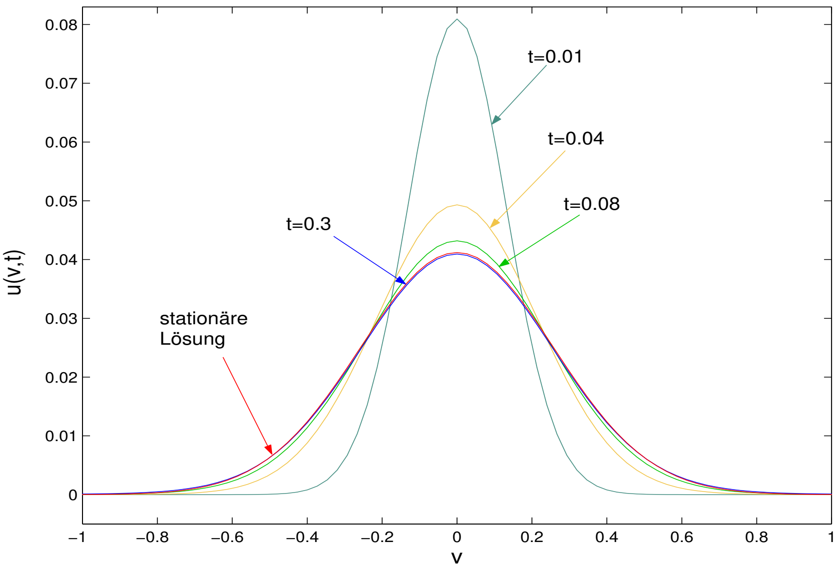


Abbildung 4.8: *Die Zeitentwicklung der Approximierenden*

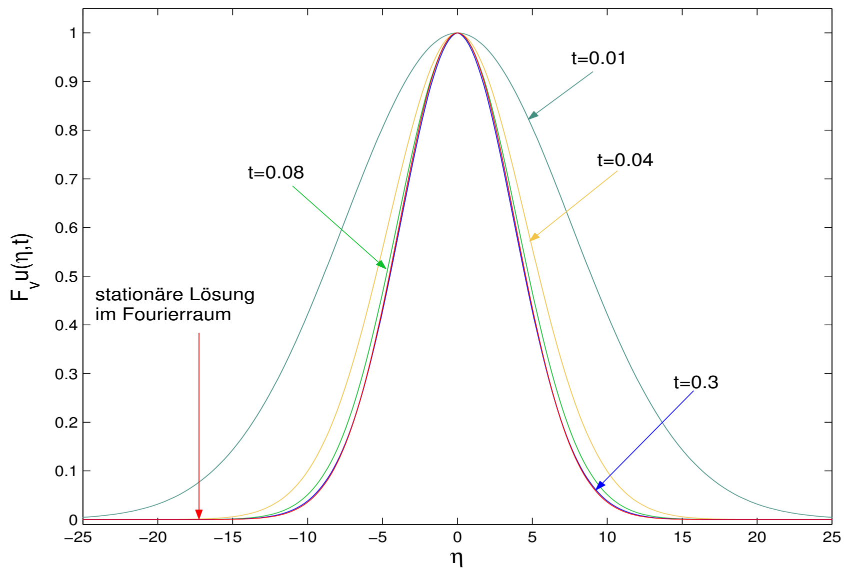


Abbildung 4.9: *Die Zeitentwicklung der Approximierenden im Fourierraum*

4.2.3 Das Fehlerverhalten

Mit den obiden Konventionen aus dem Abschnitt 4.2.2 bezeichnet also L die Länge des betrachteten v-Intervalls und $2M+1$ die Anzahl der Gitterpunkte. Das Zeitintervall ist durch $T\Delta t$ gegeben. Die folgenden Bilder geben Aufschluss über das Verhalten dieses Schemas in Abhängigkeit von L, M und T. Als Fehler wird die diskrete L^2-Norm zur stationären Lösung genommen. Die Systemparameter sind $\sigma = 1$ und $\beta = 15$. Die Umodnungen bei den Achsenskalierungen sind durch Rotationen der Bilder zur besseren Darstellung entstanden.

Das erste Bild 4.10 zeigt die Abhängigkeit des Fehlers von M und T bei einem festgehaltenen $L = 16$. Das Schema approximiert deutlich gut für wachsendes M, für wachsendes T aber nur bis eine gewisse Stabilität erreicht wird. Danach kann es aufgrund von Rechenfehlern zu geringen Verschlechterungen kommen.

Bei festgewähltem $T = 2000$ zeigt das zweite Bild 4.11 die Abhängigkeit des Fehlers von den Gitterparametern L und M. Interessant ist dabei die Verbesserung in L-Richtung, was mit der Verfeinerung der Schrittweite $\Delta\eta = \frac{\pi}{L}$ im Fourierraum zusammenhängt.

Auf dem letzten Bild 4.12 ist nun $M = 100$ festgehalten. Das Verhalten des Systems ist mehr oder weniger eine Zusammenfassung der obigen Kommentare aus einer etwas anderen Sichtweise. In der Zeit verhält sich das System wie auf dem Bild 4.10, also der Fehler verkleinert sich bis zu einer gewissen Stabilität. Interessanter ist eher die L-Richtung. Mit wachsendem L verbessert sich zunächst das Ergebnis aufgrund der feineren Auflösung im Fourierraum, danach geht es aber wieder, und zwar, viel schlechter zu, weil die Auflösung in v ziemlich grob wird. Es gibt also einen gewissen Balancebereich bei der Wahl von M und L.

Es hat sich während der verschiedenen Testrechnungen ergeben, dass eine feinere Zeitschrittweite Δt als in der Proposition 4.7, keine wesentliche Verbesserungen mit sich bringt, sie akkumuliert eher Rechenfehler.

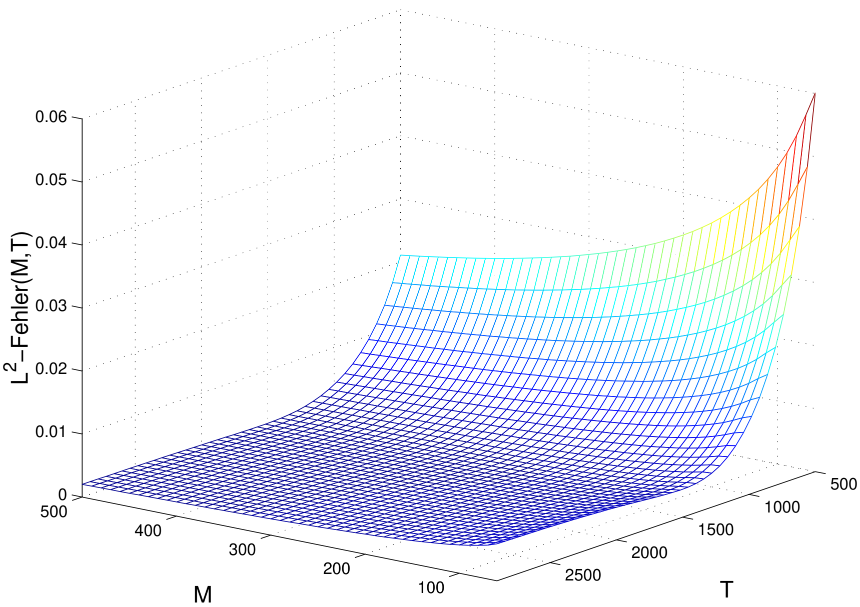


Abbildung 4.10: Das Fehlerverhalten bei $L = 16$

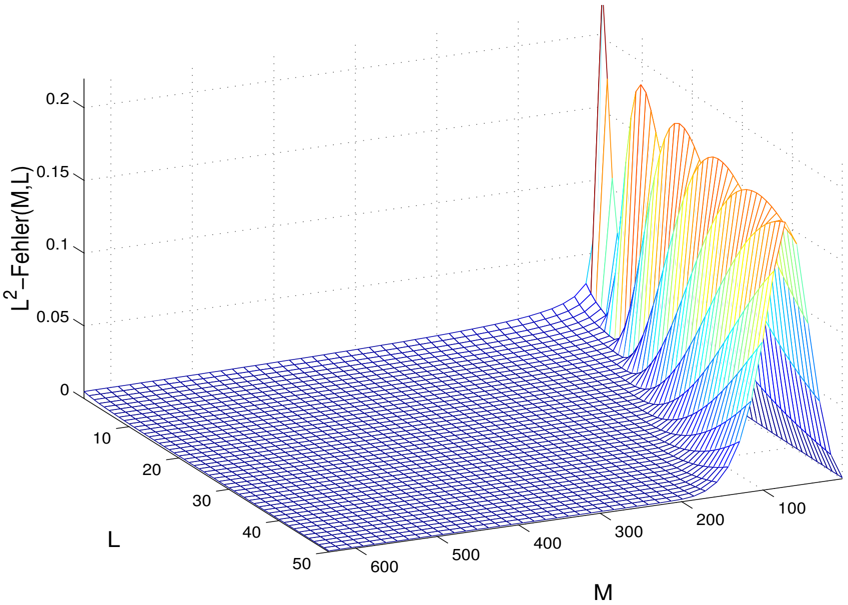


Abbildung 4.11: Das Fehlerverhalten bei $T = 2000$

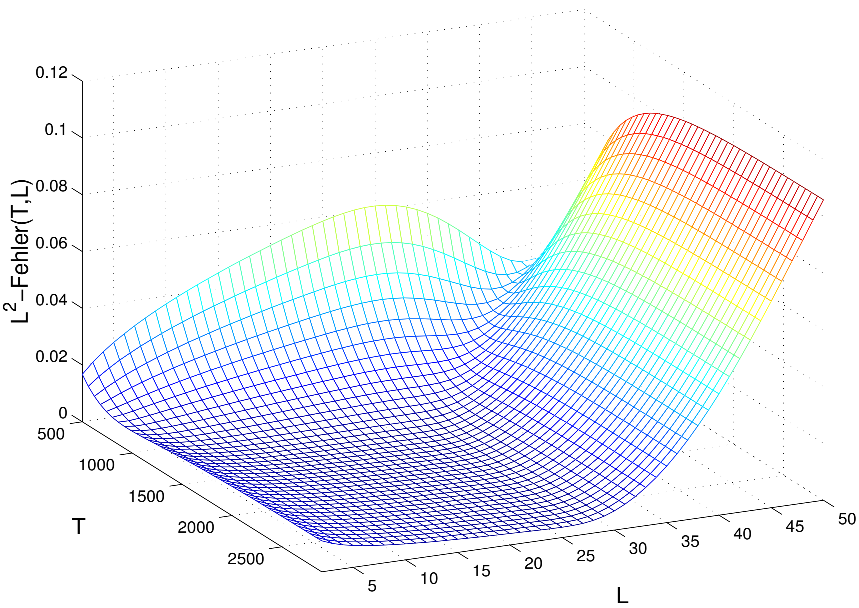


Abbildung 4.12: Das Fehlerverhalten bei $M = 100$

4.2.4 Ein klassisches Differenzenschema und sein Fehlerverhalten

Wie am Anfang des Abschnittes 4.2 erwähnt, wollen wir nun das obige Verfahren zur Lösung von (4.21) mit einem klassischen finiten Differenzenschema qualitativ vergleichen. Dafür wollen wir ein einfaches, am besten ein explizites Differenzenschema verwenden.
Es bietet sich dazu folgendes Differenzenschema für parabolische Gleichungen (cf. [39], Kap. 6) an.

Sei $t_n := n\Delta t$, $n = 0, ..., T$, $T \in \mathbb{N}$ das Zeitgitter mit der Schrittweite $\Delta t > 0$. Wie im obigen Abschnitt seien $L \in \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{N}$ und die Anfangsverteilung u^I auf dem Gitter $v_l \in [-L, L]$, $l \in \{-M, ..., M\}$ mit $v_l = l\Delta v$ und der Gitterweite $\Delta l = L/M$ vorgegeben. Dann sieht das Schema wie folgt aus

$$\frac{u_l^{n+1} - u_l^n}{\Delta t} = \beta \frac{v_{l+1}u_{l+1}^n - v_{l-1}u_{l-1}^n}{2\Delta v} + \sigma \frac{u_{l+1}^n - 2u_l^n + u_{l-1}^n}{(\Delta v)^2}, \tag{4.36}$$

$l \in \{-M+1, ..., M-1\}$.

Mit $\mu := \frac{\Delta t}{(\Delta v)^2}$ schreiben wir das Schema (4.36) um in

$$\begin{aligned} u_l^{n+1} &= \left(\sigma\mu + \frac{\beta}{2}\Delta t(l+1)\right) u_{l+1}^n + (1 - 2\sigma\mu)u_l^n \\ &\quad + \left(\sigma\mu - \frac{\beta}{2}\Delta t(l-1)\right) u_{l-1}^n. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Wir haben den ersten Term mit β aufgrund der Charakteristikenverläufe symmetrisch bzgl. v (s. Abb. 4.1) gewählt, und den zweiten Term mit σ als klassisches Differenzenquotient zweiter Ordnung.
Die diskreten Randbedingungen dieses Schemas sind so zu wählen, dass die Massenerhaltung des Systems gewährleistet werden kann

$$\sum_{l=-M}^{M} u_l^{n+1} = \sum_{l=-M}^{M} u_l^n.$$

Die folgenden Randbedingungen

$$u_{-M}^{n+1} = \left[\sigma\mu + \frac{\beta}{2}\Delta t(-M+1)\right] u_{-M+1}^n + \left[1 - \sigma\mu - M\frac{\beta}{2}\Delta t\right] u_{-M}^n, \tag{4.38}$$

$$u_M^{n+1} = \left[\sigma\mu - \frac{\beta}{2}\Delta t(M-1)\right] u_{M-1}^n + \left[1 - \sigma\mu - M\frac{\beta}{2}\Delta t\right] u_M^n, \tag{4.39}$$

würden bei Umordnung der Summanden

$$\begin{aligned} \sum_{l=-M}^{M} u_l^{n+1} &= \left[1 - \sigma\mu - \frac{\beta}{2}\Delta tM + \sigma\mu + \frac{\beta}{2}\Delta tM\right] u_{-M}^n + \\ &\quad \cdots + \left[\sigma\mu + \frac{\beta}{2}\Delta tl + 1 - 2\sigma\mu + \sigma\mu - \frac{\beta}{2}\Delta tl\right] u_l^n + \cdots + \\ &\quad \left[\sigma\mu + \frac{\beta}{2}\Delta tM + 1 - \sigma\mu - \frac{\beta}{2}\Delta tM\right] u_M^n \\ &= \sum_{l=-M}^{M} u_l^n \end{aligned}$$

ergeben.

Bemerkung 4.10 *Was die analytische Massenerhaltung auf $[-L, L]$ mit $L = M\Delta v$ betrifft, erhalten wir die folgenden Randbedingungen*

$$\begin{aligned} 0 \;&\overset{!}{=}\; \partial_t \int_{-L}^{L} u dv \;=\; \sigma \int_{-L}^{L} u_{vv} dv + \beta \int_{-L}^{L} (vu)_v dv \\ &=\; \sigma u_v + \beta vu \,\big|_{-L}^{L} \,. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Für $\Delta t, \Delta v \to 0$ kann man (4.38) umschreiben in

$$\begin{aligned} -\Delta v \frac{u_{-M}^{n+1} - u_{-M}^{n}}{\Delta t} \;&=\; -\sigma \frac{u_{-M+1}^{n} - u_{-M}^{n}}{\Delta v} - \beta \frac{v_{-M+1} u_{-M+1}^{n} + v_{-M} u_{-M}^{n}}{2} \\ &\longrightarrow\; -\sigma u_v \,|_{-L} - \beta vu \,|_{-L} = 0. \end{aligned}$$

Analog erhält man für (4.39) $\sigma u_v \,|_L + \beta vu \,|_L = 0$, so dass (4.40) folgt und die Kompatibilität gegeben ist.

Zusätzlich müssen wir natürlich noch sicherstellen, dass das Differenzenschema (4.36) die CFL-Stabilitätsbedingung erfüllt (mehr dazu in [39], Kap. 6)

$$\sigma\mu \;\leq\; \frac{1}{2}. \tag{4.41}$$

Beispiel 4.11 *Seien $\sigma = 1$ und $\beta = 15$ die Systemparameter, $L = 1$, $M = 60$ bestimmen das v-Gitter.*

Die Anfangsbedingung u^I (Abb. 4.13) ist gegeben wie im Beispiel 4.9 durch

$$u_l^I \;=\; \begin{cases} 1, & l = 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie wir auf dem Bild 4.14 sehen können, liefert eine Iteration mit den Zeitparametern $\Delta t = 0.0001$, $T = 3000$ eine sehr gute Approximation der stationären Lösung (4.27). Die letzte Iteration wird durch die rote Kurve fast vollständig bedeckt.

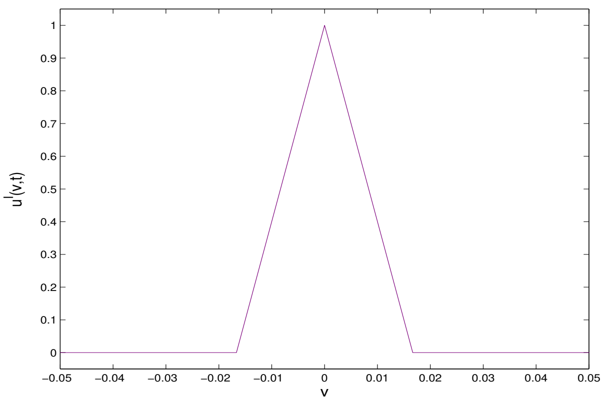


Abbildung 4.13: *Die Anfangsbedingung*

Auf die Güte der Approximation und die Wahl der Parameter gehen wir im unteren Abschnitt ein.

Das Fehlerverhalten

Nun wollen wir kurz einige Verhaltenseigneschaften dieses Differenzenverfahrens untersuchen. Auch hier wird der diskrete L^2-Fehler der Approximierenden zu der stationären Lösung betrachtet. Dabei halten wir wieder die Zeitschrittweite Δt fest. Die Bilder sind wiederum zur besseren Darstellung rotiert worden.

Das erste Bild 4.15 zeigt die Abhängigkeit des Fehlers von M und T bei einem festgehaltenen $L = 16$. Er verhält sich fast genau wie bei unserem Schema (vgl. Abb. 4.10).

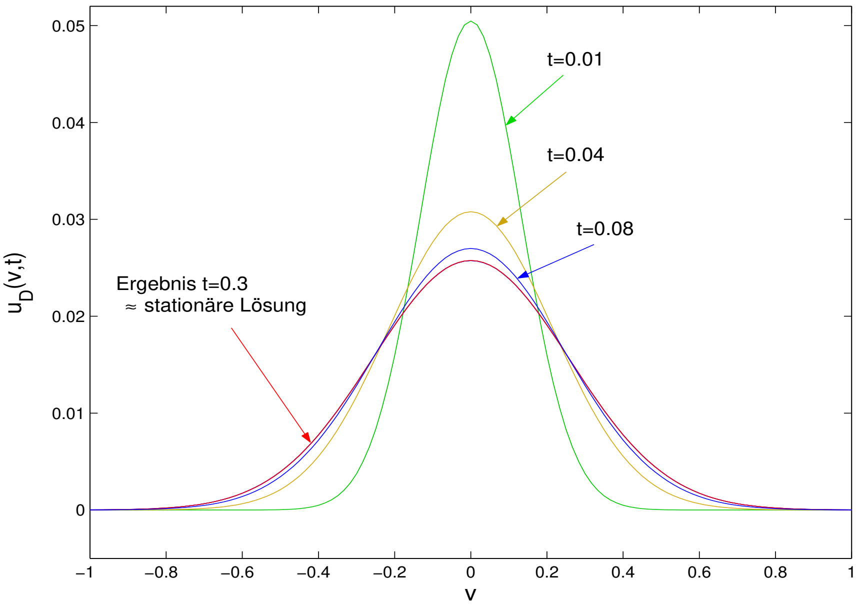


Abbildung 4.14: *Die Zeitentwicklung der Differenzenlösung*

Bei festgewähltem $T = 2000$ zeigt das zweite Bild 4.16 die Abhängigkeit des Fehlers von den Gitterparametern L und M. Anders als bei unserem Schema (vgl. Abb. 4.11) spielt hier nur die Gitterschrittweite Δv die Hauptrolle zur Verbesserung der Approximation. Dabei ist noch zu erwähnen, dass das Bild aufgrund der CFL-Bedingung (4.41) dadurch entstanden ist, dass an fehlenden Stützpunkten eine einfache Interpolation in M-Richtung durchgeführt wurde. Im Einzelnen, es wurde bis zu einem durch die CFL-Bedingung bestimmten M gerechnet und das letzte Ergebnis auf die darauf folgenden Stellen übernommen.

Auf dem letzten Bild 4.17 wird nun $M = 100$ festgehalten. In der Zeitintervallgröße verhält sich die Lösung wie auf dem Bild 4.15, und in L kommt es wiederum auf die Schrittweite Δv an.

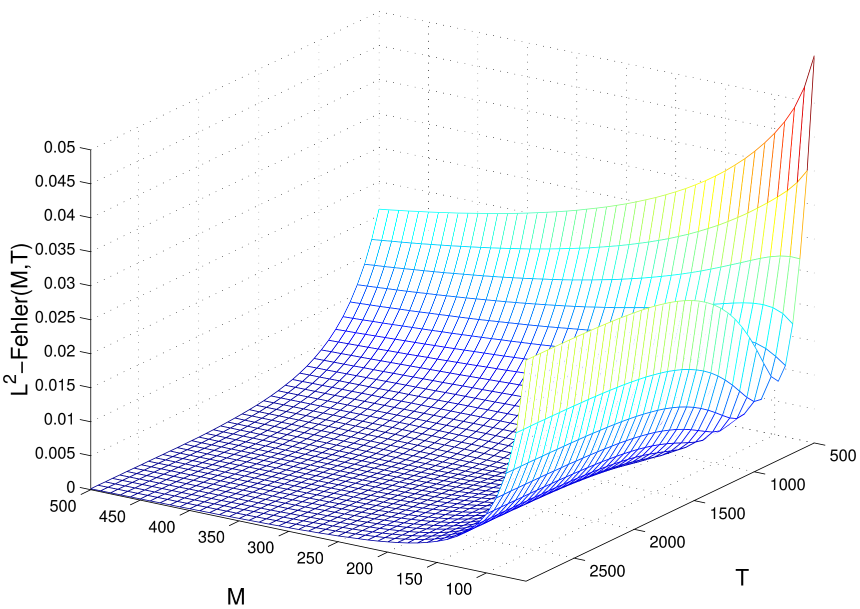


Abbildung 4.15: Das Fehlerverhalten bei $L = 16$

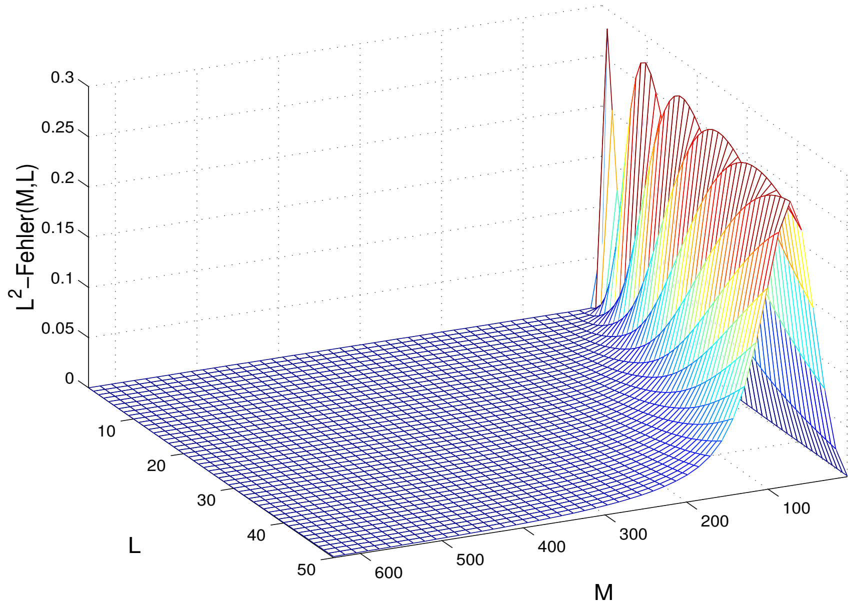


Abbildung 4.16: Das Fehlerverhalten bei $T = 2000$

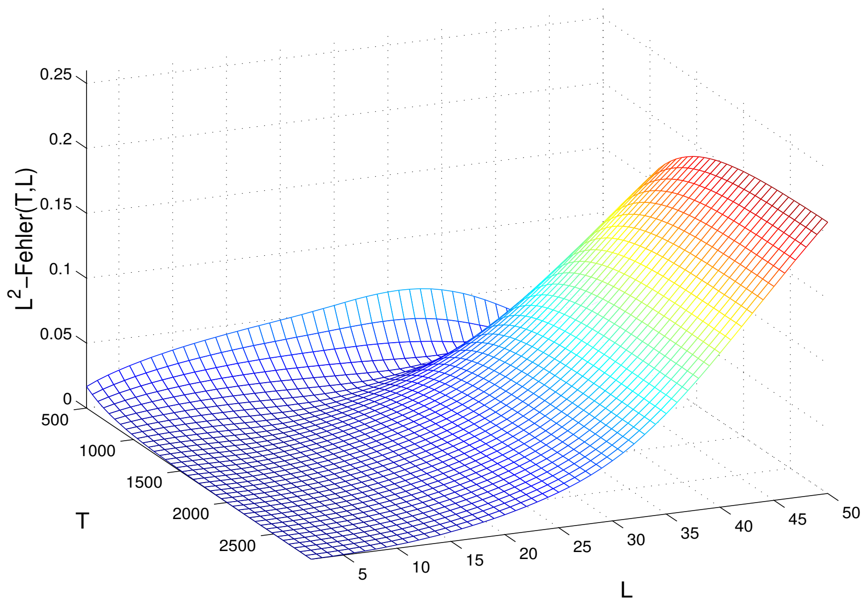


Abbildung 4.17: Das Fehlerverhalten bei $M = 100$

Fazit
Würde man die beiden Schemata gegeneinander zum Vergleich laufen lassen, so kommt es auf die Wahl der Parameter und Schrittweiten an, ob das eine oder das andere besser konvergiert.

Das Differenzenschema stellt durch die CFL-Bedingung eine sehr starke Anforderung an die Zeitschrittweite, für eine feinere Auflösung in v, die mit mehr Rechenaufwand verbunden ist, muss man auch noch viel länger in Zeit iterieren.

Dagegen bietet unser Algorithmus auch die Möglichkeit der Adjustierung der Intervalllänge L zur Verbesserung des Fehlers bei gleichem Zeitaufwand an. Dennoch erfordert die Fouriertransformation einen nicht zu vernachlässigen Rechenaufwand. Da wir aber diesen Algorithmus im Rahmen des Splittingverfahrens einsetzen wollen, ist diese Transformation wegen dem Potentialoperator unumgänglich. Und die Zeitevolution unter seiner Wirkung ist gerade das, was uns wirklich interessiert.

5 Der Algorithmus und ein Simulationsbeispiel

Zum Schluss möchten wir ein Testbeispiel für unser Splittingverfahren (4.1)-(4.2) zur Lösung des linearen WFP-Systems (3.1) mit dem gegebenen Potential V vorstellen.

5.1 Die Realisierung des linearen Gesamtmodells

Nachdem wir uns im letzten Kapitel mit der Stabilität des Splittingschemas, vor allem der expliziten Realisierung und dem Verhalten des am meisten interessanten ersten Splittingschrittes (3.5) intensiv beschäftigt haben, wollen wir nun zur diskreten Realisierung des Gesamtmodells übergehen, und die bisherigen Resultate zusammenfassen.

Was wir in unseren bisherigen Betrachtungen sicherlich "übersehen" haben, ist die Approximation des Potentialintegrals in (4.1). Und das wollen wir jetzt nachholen. Zuerst aber, der Vollständigkeit halber, ein paar Vereinbarungen.

• Das Zeitgitter sei durch $t_n := n\Delta t$, $n \in \mathbb{N}$ mit der Schrittweite $\Delta t > 0$ definiert.

• Seien $L \in \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{N}$ und damit das Gitter $v_l \in [-L, L]$, $l \in \{-M, ..., M\}$ mit $v_l = l\Delta v$ und der Gitterweite $\Delta l = L/M$ vorgegeben. $\eta_l = l\Delta\eta$ mit $\Delta\eta = \frac{\pi}{L}$ ist dann das entsprechende η-Gitter im Fourierraum.

• Seien $H \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$. Das x-Gitter ist durch $x_k = k\Delta x \in [-H, H]$, $k \in \{-N, ..., N\}$ mit der Schrittweite $\Delta x = H/N$ gegeben.

• Die Anfangsverteilung w^I sei auf dem (x, v)-Gitter vorgegeben.

5.1.1 Die Approximation des Potentialintegrals

Wir wollen also das Integral $\int_0^{\Delta t} \delta V(x, \eta e^{\beta(\tau-\Delta t)})d\tau$ durch eine lineare Interpolation der Form

$$\int_0^{\Delta t} \delta V(\eta e^{-\beta(\Delta t-\tau)})d\tau \approx \Big[\alpha(l)\delta V_{\tilde{l}(l)} + (1-\alpha(l))\delta V_l\Big]\,\Delta t, \tag{5.1}$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten $\alpha(l)$, an das η-Gitter anpassen und approximieren, wobei $\delta V_l(x) := \delta V(x, \eta_l)$, $l \in \{-M, ..., M\}$ bezeichne und die Variable x vernachlässigt werde.

Mit der Voraussetzung $V \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ (die Konvergenzanalysis in Kapitel 2.4 forderte schärfere Bedingungen an V) und $\eta_{\tilde{l}(l)} = \eta_l - m\Delta\eta$, $m \in \mathbb{Z}$ geeignet, liefert die Taylorformel

$$\delta V_{\tilde{l}(l)} = \delta V_l - m\Delta\eta\delta V_l' + \frac{m^2\Delta\eta^2}{2}\delta V_l'' + O(\Delta\eta^3), \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}\delta V(\eta_l e^{-\beta(\Delta t-\tau)}) &= \delta V_l - \left[\eta_l(1-e^{-\beta(\Delta t-\tau)})\right]\delta V_l' + \\ &\quad \frac{\eta_l^2}{2}\left[e^{-\beta(\Delta t-\tau)}-1\right]^2\delta V_l'' + O(\Delta\eta^3).\end{aligned} \tag{5.3}$$

Das obige Integral angewandt auf (5.3) ergibt

$$\begin{aligned}\int_0^{\Delta t}\delta V(\eta e^{-\beta(\Delta t-\tau)})d\tau &= \Delta t\delta V_l - \eta_l\delta V_l'\int_0^{\Delta t}\left[1-e^{-\beta(\Delta t-\tau)}\right]d\tau + \\ &\quad \frac{\eta_l^2}{2}\delta V_l''\int_0^{\Delta t}\left[e^{-\beta(\Delta t-\tau)}-1\right]^2 d\tau.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Mit

$$\begin{aligned}\int_0^{\Delta t}\left[1-e^{-\beta(\Delta t-\tau)}\right]d\tau &= \Delta t + \frac{1}{\beta}(e^{-\beta\Delta t}-1), \\ \int_0^{\Delta t}\left[e^{-\beta(\Delta t-\tau)}-1\right]^2 d\tau &= \int_0^{\Delta t}\left[1-2e^{-\beta(\Delta t-\tau)}+e^{-2\beta(\Delta t-\tau)}\right]d\tau \\ &= \Delta t + \frac{2}{\beta}(e^{-\beta\Delta t}-1) - \frac{1}{2\beta}(e^{-2\beta\Delta t}-1),\end{aligned}$$

eingesetzt in (5.4) und den Gleichungen (5.1) und (5.2) gilt

$$\begin{aligned}\int_0^{\Delta t}\delta V(\eta e^{-\beta(\Delta t-\tau)})d\tau &= \Delta t\delta V_l - \eta_l\delta V_l'\left[\Delta t + \frac{1}{\beta}(e^{-\beta\Delta t}-1)\right] + \\ &\quad \frac{\eta_l^2}{2}\delta V_l''\left[\Delta t + \frac{2}{\beta}(e^{-\beta\Delta t}-1) - \frac{1}{2\beta}(e^{-2\beta\Delta t}-1)\right] \\ &\overset{!}{=} \Delta t\{\alpha(l)\left[\delta V_l - m\Delta\eta\delta V_l' + \frac{m^2\Delta\eta^2}{2}\delta V_l'' + O(\Delta\eta^3)\right] + \\ &\quad (1-\alpha(l))\delta V_l\}.\end{aligned}$$

Vernachlässigen wir die quadratischen (und kubischen) Terme, so folgt durch Vergleich für die Koeffizienten $\alpha(l)$:

$$\alpha(l) = \begin{cases} \frac{l}{m}\left[1+\frac{1}{\beta\Delta t}(e^{-\beta\Delta t}-1)\right] &, \quad k>0 \\ 1 &, \quad k=0\end{cases}, \qquad l\in\{-M,...,M\}. \tag{5.5}$$

5.1.2 Der Algorithmus

Es gelten die Gitterdefinitionen am Anfang dieses Abschnittes. $w_{k,l}^n := w(x_k, v_l, t_n)$ bezeichne den Näherungswert der Lösung w auf (x_k, v_l, t_n). Das Splittingschema (4.1)-(4.2) lässt sich nun für den Zeitschritt $t_n \longrightarrow t_{n+1}$ wie folgt explizit schreiben (s. auch Abschnitt 4.2 für die Einzelheiten):

1. Schritt: $$\hat{w}_{k,l}^n = \frac{1}{2M}\sum_{j=-M}^{M} w_{k,j}^n e^{-i\pi jl/M}$$

$$
\begin{aligned}
\text{2. Schritt:} \qquad & \hat{w}_{k,l}^{n+1/2} &=& \left[\varepsilon(l)\hat{w}^n_{k,\tilde{l}(l)} + (1-\varepsilon(l))\hat{w}^n_{k,\tilde{l}(l)+1}\right] E_{k,l,\Delta t} \\
\text{3. Schritt:} \qquad & w_{k,l}^{n+1/2} &=& \sum_{j=-M}^{M} \hat{w}_{k,j}^{n+1/2} e^{i\pi lj/M} \\
\text{4. Schritt:} \qquad & w_{k,l}^{n+1} &=& w^{n+1/2}_{(k-l)\Delta x,l}.
\end{aligned}
$$

Dabei ist

$$E_{k,l,\Delta t} \quad := \quad \exp\left\{\frac{\sigma}{2\beta}\eta_l^2(e^{-2\beta\Delta t}-1) - i\left[\alpha(l)\delta V_{k,\tilde{l}(l)} + (1-\alpha(l))\delta V_{k,l}\right]\right\}, \tag{5.6}$$

mit $\delta V_{k,l} := \delta V(x_k, \eta_l)$.

Im 4. Schritt ist $\frac{\Delta v \Delta t}{\Delta x} \in \mathbb{Z}$ erfoderlich, damit die Verschiebung in x auf das Gitter wieder landet. Definieren wir etwa $\Delta t := \frac{\Delta x}{\Delta v}$, so muss andererseits auch $0 < \Delta t < \frac{1}{\beta}\ln(\frac{M}{M-1})$ (s. Proposition 4.7) gelten. Also haben wir eine entsprechend feine Auflösung in x zu wählen, sodass diese Bedingung an Δt erfüllt wird.

Was die Randbedingungen in x angeht, möchten wir hier nur homogene einsetzen. Dadurch haben wir auch nicht mehr zu erwarten, dass die Gesamtmasse des Systems erhalten bleibt.

Interessant wäre naturlich auch die Frage, was bei periodischen Randbedingungen passieren würde. Dies muss aber zuerst im theoretischen Rahmen untersucht werden!

5.2 Eine numerische Simulation

Nun ein numerisches Testbeispiel mit folgenden Parametern:

• 3201 Punkte in x verteilt auf dem Intervall $[-1, 1]$;

• 128 Punkte in v verteilt auf dem Intervall $[-10, 10]$;

• $\beta = 0.2$, $\sigma = 0.05$;

• $\Delta t := \frac{\Delta x}{\Delta v} = 0.00441711489$ erfüllt die gewünschten Bedingungen;

• $t_{max} = 5$

• homogene Randbedingungen in x.

• Die Anfangsbedingung ist eine Gaussverteilung um den Punkt $(-0.78, 1)$ mit den Radien 0.2 in x und 1 in v (bzgl. der Maximumsnorm) und den Standardabweichungen $(0.05, 0.2)$. Damit ist sie im Sinne unserer Konvergenzüberlegungen im Kapitel 2.4 glatt genug.

Ohne das Potential ($V \equiv 0$).
Die folgenden Bilder 5.18, a)-d) zeigen die Zeitevolution des WFP-Systems ohne die Wirkung des Potentials. Dabei ist die Zeit t in den Titeln nur symbolisch. Das erste Bild 5.18, a) zeigt die Anfangsbedingung. Sie befindet sich in der Halbebene mit positiver Geschwindigkeit, $v > 0$. Die Anteile mit grösseren Geschwindigkeiten bewegen sich natürlich schneller, als die mit niedrigeren Geschwindigkeiten (Bilder 5.18, b), c)). Der visuelle Eindruck, als ob sich die Welle in Teilen trennt, ist bedingt durch die etwas schwachere Auflösung in v-Richtung. Die Welle läuft mit der Zeit wegen den homogenen Randbedingungen aus dem Gebiet heraus (Bild 5.18, d)). Sobald sie in die Halbebene $v < 0$ hineinkommt, verzögert sich etwas die Bewegung, da sie dort entgegen der bisherigen Richtung läuft. Nur in v-Richtung gesehen läuft sie gegen den Gaußglocke ähnlichen Stationärzustand.

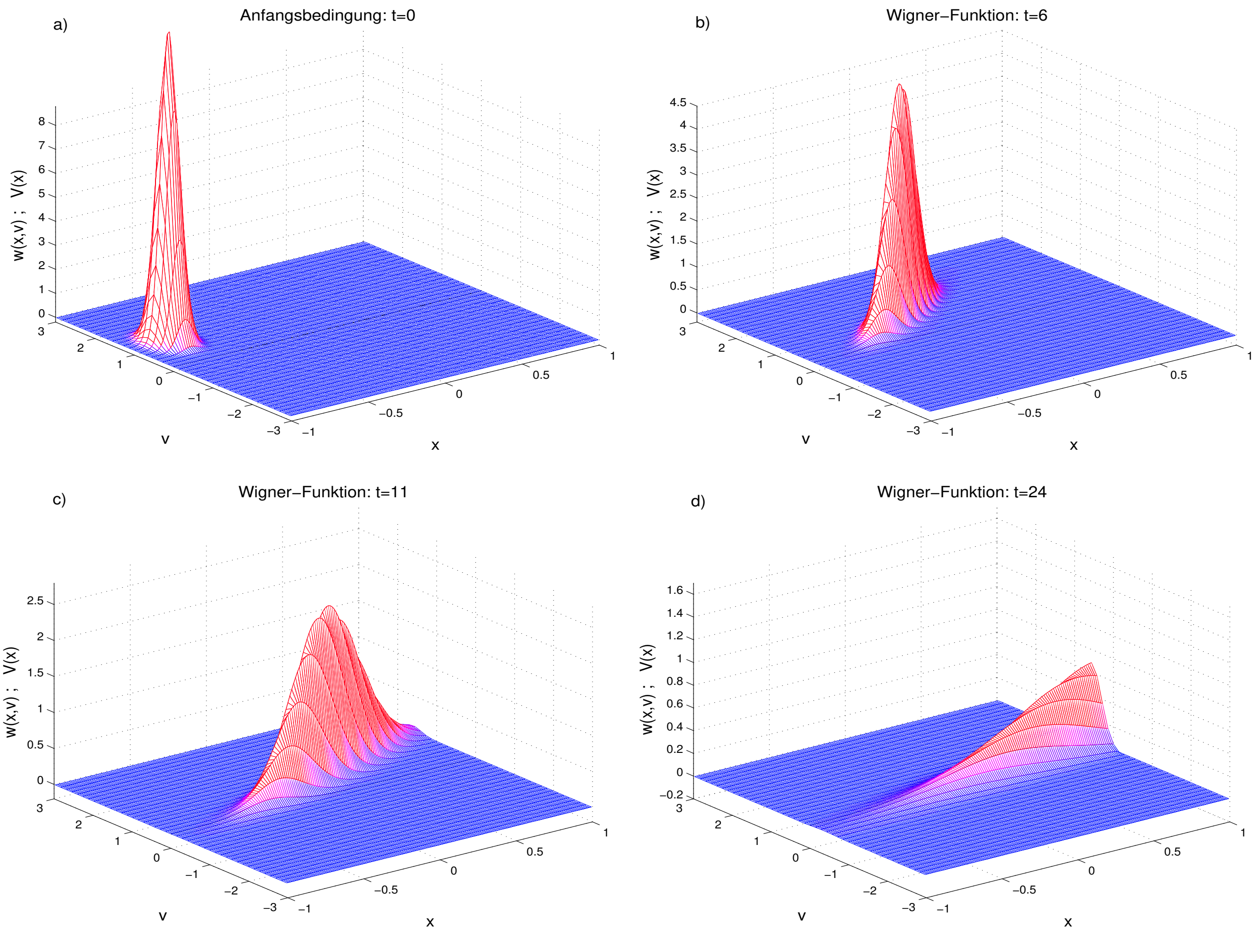


Abbildung 5.18: Das lineare WFP-System mit homogenen Randbedingungen

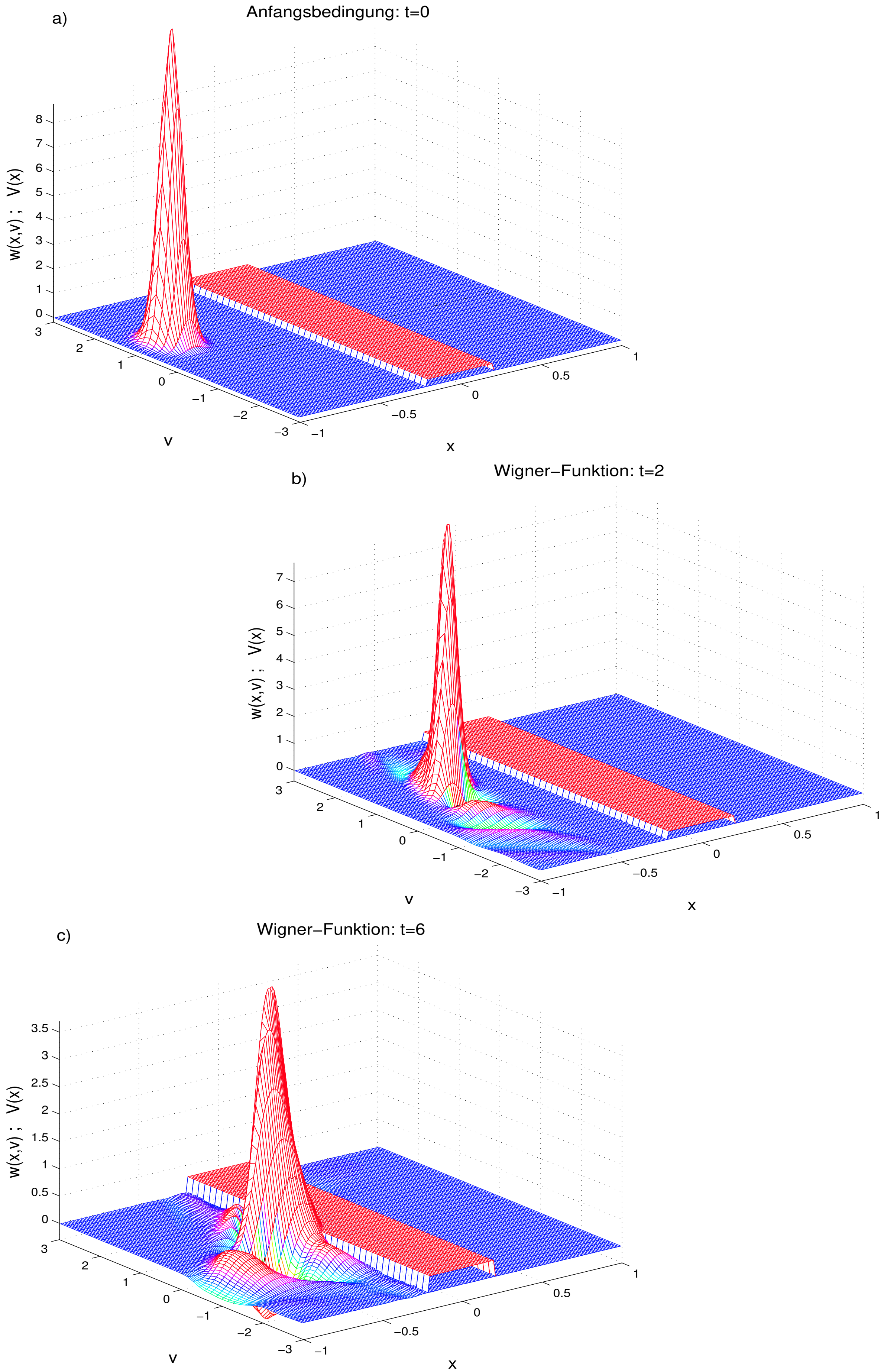
Die Bilder sind zur besseren Darstellung unterschiedlich skaliert.

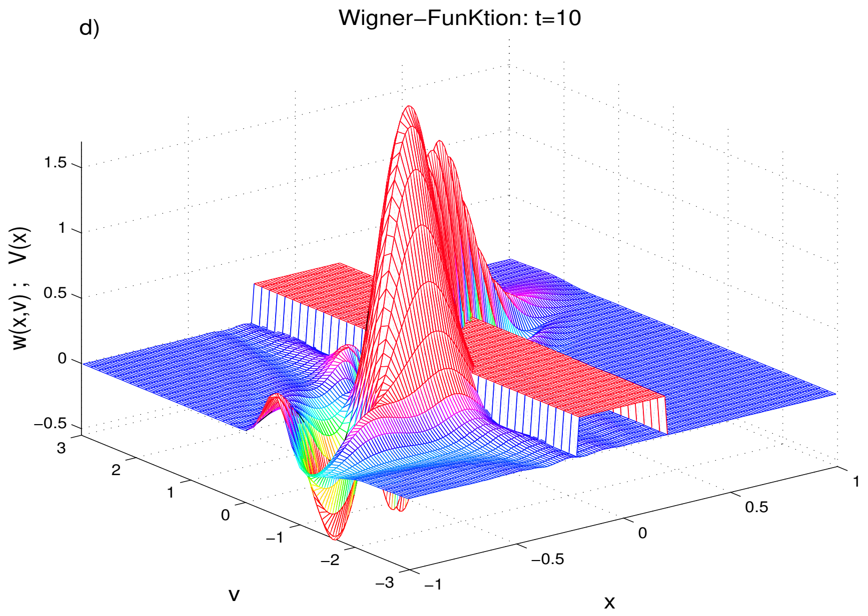
Mit dem Potential $V \not\equiv 0$ gegeben durch

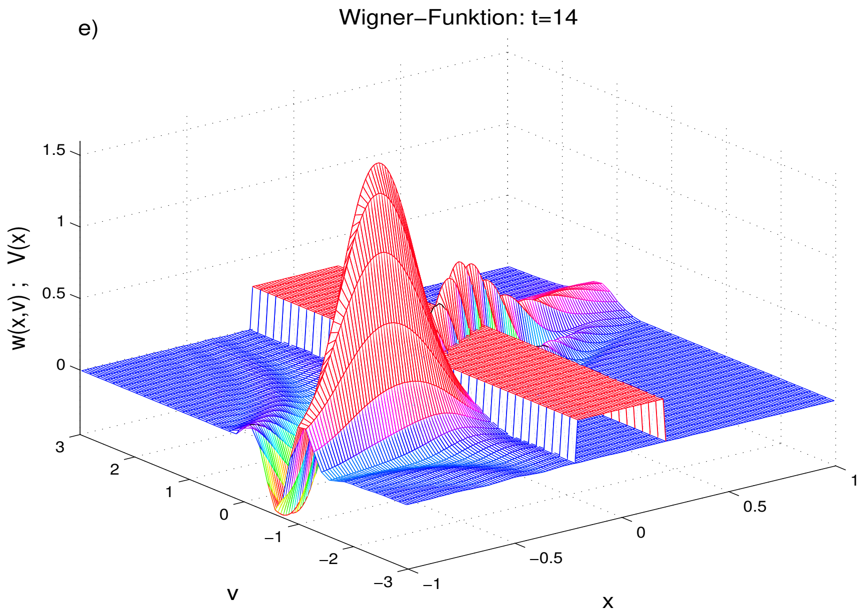
$$V(x) \quad = \quad \begin{cases} 0.5\,, & x \in [-0.105, 0.105] \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

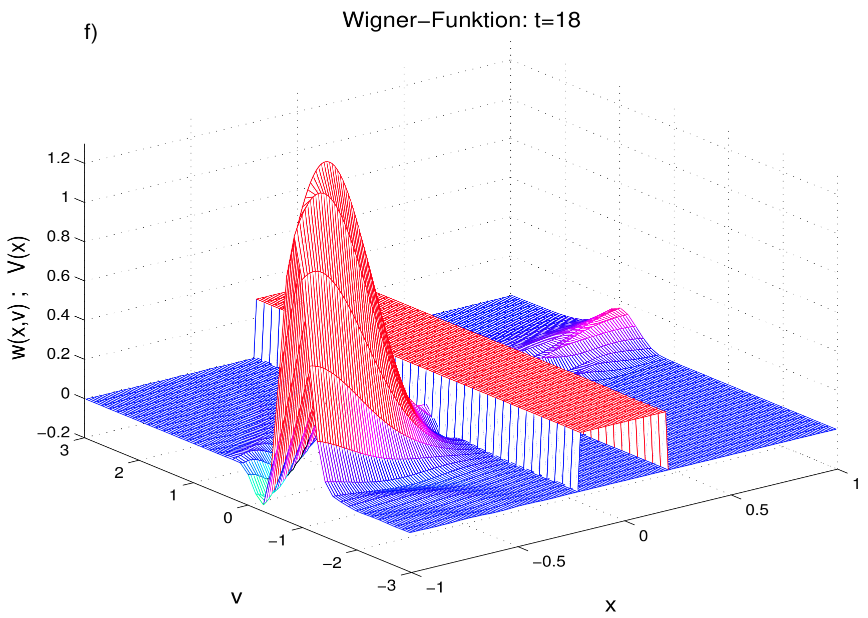
Die Bilder 5.19, a)-g) zeigen die Zeitentwicklung des Systems unter der hemmenden Wirkung des Potential V. In den Bildern 5.19, b), c) sehen wir seine ersten Wirkungen. Ein Teil der Welle wird von der Barriere reflektiert. Die Teilen der Welle mit grösseren Geschwindigkeiten versuchen die Barriere zu durchbrechen und verlieren dabei Energie, dagegen werden die reflektierenden Anteile, die in die $\{v < 0\}$-Halbebene hineinkommen, aufgrund der homogenen Randbedingungen aus dem Gebiet heraustransporiert (Bilder 5.19, d), e)). Die letzten beiden Bilder 5.19, f), g) zeigen, dass die Welle, wie erwartet, mit der Zeit verschwindet.

Auch hier sind die Bilder zur besseren Darstellung unterschiedlich skaliert, und die Zeiten in den Titeln sollen die Zeitevolution des System symbolisch andeuten.


a)
Anfangsbedingung: t=0
w(x,v) ; V(x)
0
1
2
3
4
5
6
7
8
v
3
2
1
0
−1
−2
−3
x
−1
−0.5
0
0.5
1
b)
Wigner−Funktion: t=2
w(x,v) ; V(x)
0
1
2
3
4
5
6
7
v
3
2
1
0
−1
−2
−3
x
−1
−0.5
0
0.5
1
c)
Wigner−Funktion: t=6
w(x,v) ; V(x)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
v
3
2
1
0
−1
−2
−3
x
−1
−0.5
0
0.5
1


d)
Wigner−FunKtion: t=10
w(x,v) ; V(x)
v
x


e)
Wigner−Funktion: t=14
w(x,v) ; V(x)
v
x


f)
Wigner−Funktion: t=18
w(x,v) ; V(x)
v
x

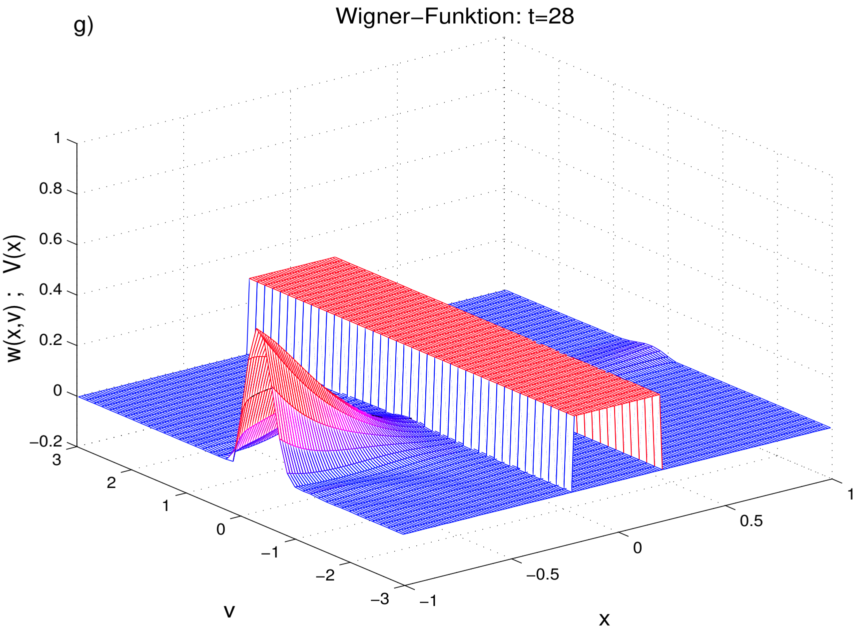


Abbildung 5.19: a)-g) Das lineare WFP-System mit homogenen Randbedingungen

Literatur

[1] R.A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] H.W. Alt, *Lineare Funktionalanalysis*, Springer, Berlin, 1985

[3] A. Arnold, J.A.Carrillo, E.Dhamo, *On the periodic Wigner-Poisson-Fokker-Planck system: well-posedness and approximation by an operator splitting algorithm*, preprint, 2001.

[4] A. Arnold, *Self-consistent relaxation-time models in quantum mechanics*, Comm. PDE, 21(3&4):473–506, 1995.

[5] A. Arnold, *Funktionalanalysis I & II*, Skript zur Vorlesung, Berlin, 1998/99.

[6] A. Arnold, J.L. Lopez, P.A. Markowich, J. Soler, *An Analysis of quantum Fokker-Planck models: A Wigner function approach*, submitted to Rev. Iberoam., 2000.

[7] A. Arnold, C. Ringhofer, *Operator splitting methods applied to spectral discretizations of quantum transport equations*, SIAM J.Numer.Anal., 32(1995), 1876-1894.

[8] A. Arnold, C. Ringhofer, *An operator splitting method for the Wigner-Poisson problem*, SIAM J.Numer.Anal., 33(1996), 1622-1643.

[9] N.C. Ashcroft, N.D. Mermin, *Solid state physics*, Holt-Sounders, New York, 1976.

[10] F. Bouchut, *Existence and uniqueness of a global smooth solution for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system in three dimensions*, J.Funct.Anal 3, 239-258, 1993.

[11] I.N.Bronstein, K.A. Semendjajev, ..., *Taschenbuch der Mathematik, B.G.Teubner*, Stuttgart-Leipzig, 1996.

[12] A.O. Caldeira, A.J. Leggett, *Path integral approach to quantum Brownian motion*, Physica A, 121:587–616, 1983.

[13] A. Carpio, *Long time behavior for solutions of the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck equation*, submitted to Math.Meth.Appl.Sci, 2000.

[14] J. A. Carrillo, J. Soler, J. L. Vázquez, *Asymptotic behaviour and selfsimilarity for the three dimensional Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system*, J. Funct. Anal. 141, 99-132, 1996.

[15] A.J. Chorin, T.J. Hughes, M.F. McCracken, J.E. Marsden, *Product formulas and numerical algorithms*, Comm.Pure Appl.Math., 31 (1978), 205-256.

[16] J.B. Conway, *A course in functional analysis*, Springer, New York, 1990.

[17] L. Diósi, *On high-temperature Markovian equation for quantum Brownian motion*, Europhys. Lett., 22:1–3, 1993.

[18] K.J. Engel, R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Springer, New York, 2000.

[19] L.C. Evans, *Partial differential equations*, AMS, Providence RI, 1998.

[20] G.B. Folland, *Introduction to partial differential equations*, Princeton Univ. Press, 1995.

[21] H.L. Grubin, T.R. Govindan, J.P. Kreskovsky, M.A. Stroscio, *Transport via the Liouville equation and moments of quantum distribution functions*, Solid State Electr., 36:1697–1709, 1993.

[22] H. Haken, *The semiclassical and quantum theory of the laser*, In S.M. Kay, A. Maitland, *Quantum optics*, Academic Press, New York, 1970.

[23] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis II*, Teubner, 1991.

[24] E.Hille & R.S.Phillips, *Functional analysis and semigroups*, AMS Providence (RI), 1957.

[25] A.M. Il'in, *On a class of ultraparabolic equations*, Sov. Math. Dokl., 5:1673-1676, 1964.

[26] A.M.Il'in & R.Z.Kasminsky, *On the equations of Brownian motion*, Theory of Prob. and Appl., 9:421-444, 1964.

[27] F. John, *Partial differential equations*, Springer, New York, 1978.

[28] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley, New York, 1978.

[29] L.D. Landau, E.M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik, 3: Quantenmechanik*, Akademie-Verlag, Berlin, 1960.

[30] P.A. Markowich, C. Ringhofer, *An analysis of the quantum Liouville equation*, Z.Angew.Math.Mech., 69(1989), 121-127.

[31] P.A. Markowich, C. Ringhofer, C. Schmeiser, *Semiconductor Equations*, Springer, New York, 1990.

[32] A.C. McBride, *Semigroups of linear Operators. An introduction*, Longman Scientific & Technical, Harlow, Essex, UK, 1987.

[33] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential Equations*, Springer, Berlin/New York, 1983.

[34] C. Ringhofer, *On the convergence of spectral methods for the Wigner-Poisson problem*, Math.Models Methods Appl.Sci., 2(1991), 91-112.

[35] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics I, Functional analysis*, Academic Press, London, 1980.

[36] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics II, Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press, London, 1975.

[37] M. Renardy, R.C. Rogers, *An introduction to partial differential equations*, Springer, New York, 1993.

[38] H. Risken, *The Fokker-Planck equation*, Springer, Berlin-Heidelberg, 1989.

[39] J.C. Strikwerda, *Finite difference schemes and partial differential equations* Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, California, 1989.

[40] M.A. Stroscio, *Moment-equation representation of the dissipative quantum Liouville equation*, Superlattices and Microstructures, 2:83–87, 1986.

[41] V.I. Tatarskii, *The Wigner representation of quantum mechanics*, Sov. Phys. Usp., 26:311–327, 1983.

[42] F. Treves, *Basic linear partial differential equations*, Academic Press, New York, 1975.

[43] H.J. Weaver, *Applications of discrete and continuous Fourier analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1983.

[44] E. Wigner, *On the quantum correction for thermodynamic equilibrium*, Phys. Rev. 40, 749–759, 1932.