Übungen zur Vorlesung Optimale Steuerprozesse I

Übungsblatt 7, Abgabe: Dienstag, 03.06.2008, 08.15 Uhr

Aufgabe 24: (4+6 Punkte)
Betrachten Sie den linearen autonomen Steuerprozess

$$(L) \qquad \dot{x} = A\,x + B\,u.$$

(a) Überlegen Sie: Die vollständige Steuerbarkeit von (L) ist für $B = (b_1, \ldots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$ in den Fällen

(1)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad \text{für} \ \ i \neq j\,,$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 0\,,$$

äquivalent zu

(1) $b_i \neq 0\,, \quad i = 1, \ldots, n\,,$

(2) $b_n \neq 0\,.$

(b) Zeigen Sie für die KALMANN-Matrix $C = [B, AB, \ldots, A^{n-1}B]$ die Äquivalenz der beiden folgenden Bedingungen:

(1) $\operatorname{rang} C = n\,.$

(2) Ist p ein Eigenvektor zu A^T, so gilt $p^T B \neq 0\,.$

Hinweis zu (b), "(2) $\Rightarrow$ (1)":
Zeigen Sie zunächst, dass der Unterraum $H = \{x \in \mathbb{C}^n \mid x^T C = 0\}$ invariant unter der Abbildung $x \mapsto A^T x$ ist. Machen Sie sich dann klar, dass H somit einen Eigenvektor von A^T enthält, falls $H \neq \{0\}$ gilt. Im zweiten Teil des Hinweises genügt es, die Behauptung für $\dim H = 1$ zeigen.

Aufgabe 25: (2+2+2 Punkte)
(*Rekonstruierbarkeit*)
Der lineare Steuerprozess

$$(L) \qquad \dot{x} = A(t)\,x + B(t)\,u$$

mit *Ausgang* (*beobachtbare* Größen)

$$y = C(t)\,x \in \mathbb{R}^k\,, \qquad C(t) \quad (k \times n) - \text{Matrix}\,,$$

heißt *rekonstruierbar*, wenn gilt:
Sind $x(t)$, $\tilde{x}(t)$ Lösungen von (L) mit *gleicher* Steuerfunktion $u(t)$ und gilt

$$C(t)\,x(t) = C(t)\,\tilde{x}(t) \qquad \text{für alle} \quad t \le \tau\,, \quad \tau \in \mathbb{R}\,,$$

so ist $x(t) = \tilde{x}(t)$ für alle $t \le \tau$.

(a) Überlegen Sie, dass die Rekonstruierbarkeit äquivalent ist mit der Eigenschaft:
Ist $x(t)$ eine Lösung der homogenen DGL

$$\dot{x} = A(t)\,x$$

und gilt

$$y(t) = C(t)\,x(t) = 0 \qquad \text{für alle} \quad t \le \tau\,, \quad \tau \in \mathbb{R}\,,$$

so ist $x(t) = 0$ für alle $t \le \tau$.

(b) Zeigen Sie: Für lineare autonome Steuerprozesse

$$\dot{x} = A\,x + B\,u \quad , \qquad y = C\,x\,,$$

ist die Rekonstruierbarkeit äquivalent mit

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n\,.$$

(c) Überprüfen Sie das System der Verladebrücke

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \quad + \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

auf Rekonstruierbarkeit bzgl. der Ausgänge:

$$\begin{aligned} &(1) \quad y = Cx = x_3 \qquad , \quad C = (0,0,1,0)\,, \\ &(2) \quad y = Cx = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 26: (Programmieraufgabe, Abgabe: 10.06.08, 08.15 Uhr)
Geben sei das Problem der zeitoptimalen Steuerung einer Verladebrücke (Beispiel 2 aus der Vorlesung):

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x(0) = (0,0,0,0)^T, \qquad x(T) = (E,0,0,0),$$
$$|u(t)| \le 1 \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Lösen Sie das Problem mit Hilfe von AMPL/IPOPT für die Endposition $E = 1$ und plotten Sie die optimale Trajektorie (x,u) sowie die adjungierte Variable λ. Geben Sie außerdem die Werte der Schaltpunkte und die optimale Endzeit aus.