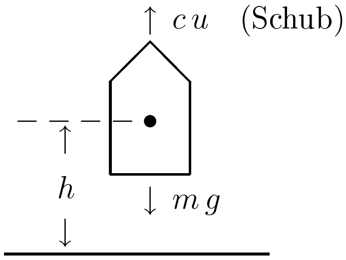
Prof. Dr. H. Maurer, Dipl.-Math. Marzena Franek SS 08

Übungen zur Vorlesung Optimale Steuerprozesse I

Übungsblatt 5, Abgabe: Dienstag, 20.05.2008, 08.15 Uhr

Aufgabe 17: (3+3+2 Punkte)
(*GODDARD–Problem*)
Für eine senkrecht aufsteigende Rakete gelten bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes die Bewegungsgleichungen

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\dot{h} &=& v\,, & h(0) &=& 0\,,\\
\dot{v} &=& \frac{c}{m}u(t)-g\,, & v(0) &=& 0\,,\\
\dot{m} &=& -u(t)\,, & m(0) &=& m_0\,,\\
0 &\le& u(t) \;\le\; u_{\max}\,, & & &
\end{array}$$



mit positiven Konstanten c, g.

(a) Integrieren Sie die DGL mit der (stückweise konstanten) Steuerung

$$(*) \qquad u(t) = \begin{cases} u_0 \;, & 0 \le t \le t_1 \\ 0 \;, & t_1 < t \le T \end{cases} \quad , \quad 0 < u_0 \le u_{\max}\,.$$

Zur Zeit t_1 sei die Treibstoffmenge $\mu = m_0 - m(t_1) > 0$ verbraucht.

(b) Bestimmen Sie u_0 in $(*)$ so, dass die Aufstiegshöhe $h(t_1)$ maximal wird. Berechnen Sie die Endzeit T aus $v(T) = 0$ und geben Sie die (totale) Aufstiegshöhe $h(T)$ an.

(c) Bestimmen Sie u_0 in $(*)$ so, dass die totale Aufstiegshöhe $h(T)$ maximal wird.

Hinweis: $\int \ln(a-bt)\,dt = (t-\frac{a}{b})\,\ln(a-bt) - t\,.$

Aufgabe 18: (5 Punkte)
Sei $L : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und sei $U \subset \mathbb{R}^m$ konvex. Gesucht ist eine stückweise stetige Steuerung $u : [0,T] \to U$, welche

$$\int_0^T L(t,u(t))dt$$

minimiert. Beweisen Sie das folgende *Minimumprinzip* für eine optimale Steuerung $\bar{u}$:

$$L(t,\bar{u}) \le L(t,u) \quad \text{für alle } u \in U\,, \quad 0 \le t \le T\,.$$

Folgern Sie hieraus

$$L_u(t,\bar{u})(u-\bar{u}) \ge 0\,, \quad u \in U\,, \quad 0 \le t \le T\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie in einem Stetigkeitspunkt $t \in (0,T]$ für $\epsilon > 0$ und einen beliebigen Vektor $u \in U$ die Funktion

$$u_\epsilon(s) = \begin{cases} u, & s \in [t-\epsilon,t], \\ \bar{u}(s), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 19: (Programmieraufgabe, Abgabe: Dienstag, 20.05.08, 08.15 Uhr)
Transformieren Sie den folgenden optimalen Steuerprozess mit freier Endzeit in die Mayer-Form mit fester Endzeit und lösen Sie es mit AMPL/IPOPT.

(Zeitoptimale Steuerung des Van der Pol-Oszillators:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimiere} \quad & T \\
\text{unter} \quad & \dot{x_1} = x_2 \,, \\
& \dot{x_2} = -x_1 + x_2(1 - x_1^2) + u \,, \\
& x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1 \\
& -1 \leq u(t) \leq 1 \,, \quad 0 \leq t \leq T \,.
\end{aligned}
$$

Betrachten Sie dazu die folgenden Zustandsbedingungen:

(a) $x_1(T)^2 + x_2(T)^2 = 0.01$

(b) $x_1(T) = 0, \quad x_2(T) = 0$

Benutzen Sie zur Lösung der Differenzialgleichungen das Euler-Verfahren mit $N = 1001$ Diskretisierungspunkten. Plotten Sie die optimalen Trajektorien (x, u) und die zugehörigen adjungierten Variablen λ.

Hinweis: Bei der numerischen Lösung mit AMPL/IPOPT kann man die freie Endzeit T anstatt als neue Zustandsvariable auch als eindimensionale Optimierungsvariable ansehen. Setzen Sie ggfs. natürliche Beschränkungen, damit das Optimierungsverfahren konvergiert.

Denken Sie an die Abgabe der Aufgabe 16!!