Übungen zur Vorlesung Optimale Steuerprozesse I

Übungsblatt 4, Abgabe: Dienstag, 06.05.2008, 08.15 Uhr

Aufgabe 13: (4 Punkte)
(Steuerung eines Reservoirsystems)
Gegeben sei das Reservoirsystem

$$x_1(t) \xrightarrow{u_1(t)} x_2(t) \xrightarrow{u_2(t)}$$

$$\begin{array}{rcl} x_i(t) & : & \text{Wasser-Volumen im Reservoir} \quad i \quad (i=1,2)\,, \\ u_i(t) & : & \text{Abflussrate vom Reservoir} \quad i \quad (i=1,2)\,. \end{array}$$

Bestimmen Sie mit Intuition und Raten (Begründung!) die stückweise stetigen Steuerungen $u_i : [0,10] \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, welche das Funktional

$$F(u_1, u_2) = \int_0^{10} [(10-t)u_1(t) + t\, u_2(t)]\, dt$$

maximieren unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{lll} \dot{x}_1 = -u_1(t)\,, & & \\ \dot{x}_2 = u_1(t) - u_2(t)\,, & & \\ x_1(0) = 4\,, & x_2(0) = 4\,, & \\ 0 \le u_i(t) \le 1 & \text{für} \quad t \in [0,10]\,, & i = 1,2\,, \\ 0 \le x_i(t) & \text{für} \quad t \in [0,10]\,, & i = 1,2\,. \end{array}$$

Aufgabe 14: (4 Punkte)
(*Resource allocation problem*)
Es bezeichne:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & : & \text{Produktionsrate eines Gutes zur Zeit } t \text{ (z. B. Stahl)}, \\ u(t) & : & \text{Prozentsatz von } x(t), \text{der für Investitionen benutzt wird} \\ & & \text{(z. B. Maschinen)}, \ 0 \le u(t) \le 1, \\ 1 - u(t) & : & \text{Prozentsatz von } x(t) \text{ für Konsum (z. B. Auto)}, \\ 0 \le r < 1 & : & \text{Diskontrate.} \end{array}$$

Der optimale Steuerpozess lautet:

$$\begin{array}{rl} \text{maximiere Konsum in } [0,T]: & F(u) = \displaystyle\int_0^T e^{-rt}(1-u(t))x(t)\, dt \\ \text{unter} & \dot{x} = u(t)x \quad , \quad x(0) = x_0 > 0\,, \\ & 0 \le u(t) \le 1, \qquad 0 \le t \le T\,. \end{array}$$

Die optimale Steuerung ist bang-bang:

$$(*) \qquad u(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le t \le t_s \,, \\ 0 & , \quad t_s < t \le T \,. \end{cases}$$

Bestimmen Sie den optimalen Schaltpunkt t_s und interpretieren Sie ($*$).

Aufgabe 15: (3 Punkte)
Charakterisieren Sie für $T > 1$ alle stückweise stetigen Steuerfunktionen $u : [0, T] \to \mathbb{R}$, die das Funktional

$$F(u) = \int_0^T (u(t)^2 - 1)^2 \, dt$$

minimieren unter den Nebenbedingungen

$$\dot{x}(t) = u(t) \,, \quad 0 \le t \le T \,, \quad x(0) = 0 \,, \quad x(T) = 1 \,.$$

Aufgabe 16: (Programmieraufgabe, Abgabe: Dienstag, 20.05.08, 08.15 Uhr)

(a) Das Rayleigh-Problem lautet in Standard-Mayer-Form folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & x_3(T) \\ \text{unter} \quad & \dot{x}_1 = x_2, \\ & \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1.4 - 0.14\, x_2^2) + 4\, u(t) \,, \\ & \dot{x}_3 = x_1^2 + u^2, \\ & x_1(0) = x_2(0) = -5 \,, \; x_3(0) = 0, \qquad x_1(T) = x_2(T) = 0 \,, \end{aligned}$$

mit der festen Endzeit $T = 4.5$. Lösen Sie dieses Optimierungsproblem mit AMPL/IPOPT, indem Sie zur Lösung der Differenzialgleichungen das Euler-Verfahren mit $N = 1001$ Disktretisierungspunkten verwenden. Betrachten Sie einmal den Fall, dass $|u(t)| \le 1 \,, \; 0 \le t \le T$ vorausgesetzt wird, und einmal den Fall, dass diese Bedingung nicht gilt. Plotten Sie die diskreten Trajektorien $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, und $u(t)$ sowie die diskreten adjungierten Variablen $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, der Lösung.

(b) Betrachten Sie das Problem

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & \int_0^2 (x(t)^2 + \alpha u(t)^2) dt \\ \text{unter} \quad & \dot{x}(t) = u(t), \\ & x(0) = 1 \,, \\ & |u(t)| \le 1 \,, \; 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

Lösen Sie dieses Optimierungsproblem mit AMPL/IPOPT für $\alpha = 10^{-k}$ für $k = 0, 1, 2, 4$, sowie für $\alpha = 0$. Plotten Sie die optimalen Trajektorien (x, u) und die dazugehörigen adjungierten Variablen λ.

Anmerkung: Schicken Sie alle Programme Ihrer Übungsgruppenleiterin. Beachten Sie die Hinweise zu Gnuplot auf der Homepage zur Vorlesung.