Übungen zur Vorlesung Optimale Steuerprozesse I

Übungsblatt 3, Abgabe: Dienstag, 29.04.2008, 08.15 Uhr

Aufgabe 9: (4 Punkte)
Berechnen Sie mit Hilfe von AMPL/IPOPT die Lösung von Aufgabe 8 für den nominellen Parameter $p_0 = (p_{01}, p_{02})^T = (1.2, 1.3)^T$. Berechnen Sie dann die Sensitivitätsdifferenziale $(dx/dp, d\lambda/dp)^T$ mittels der Differenzen-Approximation

$$\frac{dx}{dp_i}(p_0) \approx \frac{x(p_0 + he_i) - x(p_0)}{h}, \qquad \frac{d\lambda}{dp_i}(p_0) \approx \frac{\lambda(p_0 + he_i) - \lambda(p_0)}{h}, \qquad i = 1, 2,$$

wobei e_i der i-te Einheitsvektor ist. Wählen Sie als Schrittweite $h = 0.001$. Vergleichen Sie die Resultate mit denen aus Aufgabe 8 und erklären Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 10: (4 Punkte)
(Zeitoptimale Steuerung eines Wagens, vgl. (1.1))
Man integriere das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, & x(0) &= -1, \\ \dot{y} &= u(t), & y(0) &= -4, \end{aligned}$$

mit der Steuerung

$$u(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le t \le t_1\,, \\ -1 & , \quad t_1 < t \le T\,, \end{cases}$$

und bestimme die Parameter $t_1,\ T > 0$, so dass $x(T) = y(T) = 0$. Skizzieren Sie die Lösung im Phasenraum (x, y).

Aufgabe 11: (4 Punkte)
Bestimmen Sie mit Intuition und Raten (Begründung!) die optimale (stückweise stetige) Steuerung des folgenden Steuerprozesses mit der festen Endzeit $T > 0$:

$$\begin{aligned} \text{minimiere} \quad & \int_0^T x(t)^2 dt \\ \text{unter} \quad & \dot{x}(t) = u(t)\,, \\ & x(0) = x_0\,, \qquad x(T) = x_T\,, \\ & -1 \le u(t) \le 1\,, \quad 0 \le t \le T\,. \end{aligned}$$

Betrachten Sie die Fälle $T < |x_0| + |x_T|$ und $T \ge |x_0| + |x_T|$. Welche Bedingung muss T erfüllen, damit ausgehend von $x(0) = x_0$ mit einer Steuerung $|u(t)| \le 1$ der Endpunkt $x(T) = x_T$ erreicht werden kann? Skizzieren Sie die optimale Steuerung $u(t)$ sowie den Zustand $x(t)$ und berechnen Sie den Wert des Zielfunktionals.

Aufgabe 12: (4 Punkte)
Betrachten Sie eine äquidistante Zerlegung des Zeitintervalls $[0, T]$ gemäß $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = T$, mit der Schrittweite

$$h := 1/N, \quad N \in \mathbb{N}_+, \quad t_i = ih, \quad i = 0, \ldots, N.$$

Zu berechnen sind Approximationen für die Zustands- und Steuervariablen

$$x^i \approx x(t_i) \text{ für } i = 0, \ldots, N, \quad u^i \approx u(t_i) \text{ für } i = 0, \ldots, N-1,$$

an den diskreten Zeitpunkten t_i, $i = 0, \ldots, N$. Unter Verwendung des Euler-Verfahrens zur Integration einer Differentialgleichung, erhält man den folgenden diskreten Steuerprozess

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & g(x^N) \\ \text{unter} \quad & x^{i+1} = x^i + hf(x^i, u^i), \quad i = 0, .., N-1, \\ & x^0 = x_0 \in \mathbb{R}^n, \\ & \psi(x^N) = 0 \in \mathbb{R}^r. \end{aligned}$$

Dies stellt ein nichtlineares Optimierungsproblem in den Variablen

$$(x^0, \ldots, x^N, u^0, \ldots, u^{N-1}) \in \mathbb{R}^{n(N+1)+mN}$$

mit $n(N+1)+r$ Nebenbedingungen dar. Diskutieren Sie die notwendigen Bedingungen von Kuhn-Tucker mit einem Multiplikator $(\lambda^0, \ldots, \lambda^N, \nu) \in \mathbb{R}^{n(N+1)+r}$, $\lambda^i \in \mathbb{R}^n$ $(i = 0, .., N)$. Welcher Rekursionsformel genügen die Multiplikatoren λ^i, $i = N, N-1, ..., 1, 0$, wobei $\lambda^N = \lambda_0 g_x(x^N) + \nu \psi_x(x^N)$ gesetzt wird.