Übungen zur Vorlesung Optimale Steuerprozesse I

Übungsblatt 2, Abgabe: Donnerstag, 22.04.2008, 08.15 Uhr

Aufgabe 5: (2 Punkte)
Gegeben sei wiederum das Problem aus Aufgabe 1:

$$\min\{\, f(x) = -(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) \mid g(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0\,\}\,.$$

Diskutieren Sie die hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung.

Aufgabe 6: (2 Punkte)
Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sowie $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $g = (g_1, \ldots, g_m)^T$ und das Problem

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & f(x) \\ \text{unter} \quad & g_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Sei weiterhin $\bar{x}$ normal. Zeigen Sie, dass die Bedingung

$$v^T L_{xx}(\bar{x}, \lambda) v > 0 \quad \forall\, v \in C \setminus \{0\}$$

aus den SSC äquivalent zu der folgenden Bedingung ist:

$$w^T P_B w > 0 \quad \forall\, w \in \mathbb{R}^{n-m} \setminus \{0\},$$

wobei $P_B := B^T L_{xx}(\bar{x}, \lambda) B$ mit einer orthogonalen Basis B des Raums Kern $(g_x(\bar{x}))$ die *projizierte HESSE-Matrix* heißt. Welche Dimension hat die Matrix B?

Aufgabe 7: (4 Punkte)
Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & (x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2 \\ \text{unter} \quad & x_1^2 + x_3 - 1 = 0, \\ & x_4 - x_2^2 - 4 = 0. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Lösung $\bar{x} \in \mathbb{R}^4$ und den zugehörigen Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}^2$ mit Hilfe von AMPL/IPOPT. Prüfen Sie nach, dass $\bar{x}$ normal ist und $(\bar{x}, \lambda)$ den notwendigen Bedingungen erster Ordnung genügt. Überprüfen Sie anschließend die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung.

Hinweis: Achten Sie auf die Vorzeichen von λ_1 sowie λ_2 und benutzen Sie das Resultat aus Aufgabe 6. Schicken Sie das Programm Ihrem Übungsleiter zu.

Aufgabe 8: (2+3+3 Punkte)
Gegeben sei das parameterabhängige Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & f(x,p) = x_1 + p_2 x_2 \\ \text{unter} \quad & g(x,p) = x_1^2 + x_2^2 - p_1^2 = 0 \end{aligned}$$

mit $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $p_1 > 0$.

(a) Berechnen Sie die optimale Lösung $x = x(p)$ und den zugehörigen Multiplikator $\lambda = \lambda(p)$.

(b) Skizzieren Sie die Niveaulinien des optimalen Wertes $f(x(p), p) = const.$ und verifizieren Sie die Schattenpreisformel in (6.15)(ii).

(c) Geben Sie die Matrizen A_0 und B_0 in (6.15)(i) an und verifizieren Sie $(dx/dp, d\lambda/dp)^T = -A_0^{-1} B_0$ durch Einsetzen der Lösungen $x(p), \lambda(p)$ aus (a).