Übungen zur Vorlesung Optimale Steuerprozesse I

Übungsblatt 10, Abgabe: Dienstag, 08.07.2008, 08.15 Uhr

Aufgabe 36: (2 + 4 + 1 Punkte)
(Ein quadratisches Instandhaltungsmodell)
Es bedeuten:

$T > 0$	:	Nutzungsdauer einer Maschine oder Anlage,
$x(t)$	:	Qualität (Zustand) der Maschine zur Zeit t,
$u(t)$	:	Instandhaltung (Steuerung),
$\delta > 0$	:	Abnutzungsrate der Maschine,
$\pi > 0$	:	Produktivität der Maschine,
$r > 0$	:	Diskontrate.

Das Modell lautet:

$$\text{Maximiere} \quad \int_0^T e^{-rt}(\,\pi\, x(t) - 0.5\, u(t)^2)\, dt$$
$$\text{unter} \quad \dot{x} = -\delta x + u(t)\,, \quad x(0) = x_0 > 0\,.$$

(a) Zeigen Sie: $0 \le x(t) \le x_0$, falls $0 \le u(t) \le \delta\, x_0$.

(b) Stellen Sie das zugehörige Randwertproblem auf und bestimmen Sie die optimalen $\lambda(t)$ und $u(t)$.

(c) Geben Sie eine Bedingung für δ, r und π an, so dass gilt: $\dot{x}(0) < 0$.

Aufgabe 37: (4 Punkte)
(*Resource allocation problem*)
Betrachten Sie das Problem aus Aufgabe 14:

$x(t)$	:	Umfang eines Gutes zur Zeit t (z. B. Stahl),
$u(t)$	:	Prozentsatz von $x(t)$, der für Investitionen benutzt wird,
$1 - u(t)$	:	Prozentsatz von $x(t)$ für Konsum (z. B. Auto),
$0 \le r < 1$	:	Diskontrate.

Der optimale Steuerpozess lautet:

$$\text{maximiere Konsum in } [0,T]: \qquad F(u) = \int_0^T e^{-rt}(1-u(t))x(t)\, dt$$
$$\text{unter} \qquad \dot{x} = u(t)x \quad , \quad x(0) = x_0 > 0\,,$$
$$0 \le u(t) \le 1, \qquad 0 \le t \le T\,.$$

Diskutieren Sie die Minimumbedingung und geben Sie die adjungierten Differentialgleichungen an. Zeigen Sie, dass die optimale Steuerung bang-bang ist mit einem Schaltpunkt. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Ergebnissen aus Aufgabe 14.

Aufgabe 38: (Programmieraufgabe, Abgabe: 08.07.2008, 08.15 Uhr)
Lösen Sie das folgende Steuerprobleme mit AMPL/IPOPT. Geben Sie die optimalen Trajektorien und die adjungierten Variablen graphisch aus.

Optimale Fährstrategie (Beispiel 8.8 aus der Vorlesung)

$$\begin{array}{rl}
\text{Minimiere} & T \\
\text{unter} & \dot{x} = w\cos(\alpha(t)), \\
& \dot{y} = w\sin(\alpha(t)) - v(x), \\
& x(0) = 0, \qquad y(0) = 0, \\
& x(T) = 1, \qquad y(T) = 0, \\
& -\pi/2 \le \alpha(t) \le \pi/2, \quad 0 \le t \le T,
\end{array}$$

mit $v(x) = v_0 x(1-x)$. Die konstante Eigengeschwindigkeit der Fähre betrage $w = 2$. Berechnen Sie die Lösung für die Parameter $v_0 = 2$, 5, 9, 12. Geben Sie die Lösung (x, y) im Phasenraum aus. Bestimmen Sie mit der Genauigkeit einer Nachkommastelle den Parameter $\overline{v_0}$, so dass die Steuerbeschränkung $\alpha(t) \le \pi/2$ für alle $v_0 \ge \overline{v_0}$ aktiv wird.