Übungen zur Vorlesung Optimale Steuerprozesse I

Übungsblatt 1, Abgabe: Dienstag, 15.04.08, 08.00 Uhr

Übungstermine:

Gruppe 1:	Di.	10.00 - 12.00 Uhr	SR1	BK	90 (Julia)
Gruppe 2:	Di.	12.00 - 14.00 Uhr	SR1	BK	90 (Julia)

Aufgabe 1: (3 Punkte)
Gegeben sei das Problem

$$\min\{\, f(x) = -(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) \mid g(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0 \,\}\,.$$

Diskutieren Sie die Bedingungen aus dem Satz von KUHN-TUCKER.

Aufgabe 2: (5 Punkte)
Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$\max\{f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\sqrt{x_1} + x_2 \mid x_1 \geq 0.1, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1 + x_2 \leq 1\}.$$

(a) Skizzieren Sie die zulässige Menge und lösen Sie das Problem graphisch.

(b) Zeigen Sie, dass alle Punkte der zulässigen Menge normal sind und berechnen Sie die Lösung, indem Sie den Satz von KUHN-TUCKER für alle Kombinationen aktiver Ungleichungen diskutieren. Warum besitzt das Problem eine Lösung?

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Gegeben sei das quadratische Optimierungsproblem

$$(P) \qquad \min\,\{\, \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx \mid b - Ax = 0, \quad x \geq 0 \,\}$$

mit den Spaltenvektoren $c \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$ sowie der $(n \times n)$-Matrix Q und der $(m \times n)$-Matrix A, wobei $m \geq n$ gilt.

(a) Diskutieren Sie die Bedingungen aus dem Satz von KUHN-TUCKER.

(b) Für $Q = 0 \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist (P) ein lineares Optimierungsproblem. Bestimmen Sie das zu (P) duale Problem (P^*). Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Lösung des dualen Problems (P^*) und dem Satz von KUHN-TUCKER ?

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Gegeben seien Zahlen x_i, $i = 1, \ldots, n$, mit $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sigma$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \frac{\sigma^2}{n}\,.$$