# Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 6 , Abgabe: Freitag, 1.12.2000, 11.00 Uhr

---

**Aufgabe 21:** (2+2 Punkte)
Seien

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Kondition $\mathrm{cond}(A)$ für die Normen $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_2$.

(b) Für die Näherungen $\tilde{A}$, $\tilde{b}$, $\tilde{x}$ von $A$, $b$, $x$ gelte

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b} \quad \text{mit} \quad \|\tilde{A} - A\|_\infty \le 0.013 .$$

Wie groß darf der Fehler $\|\tilde{b} - b\|_\infty$ sein, damit $\|\tilde{x} - x\|_\infty \le 0.5$ gilt?

**Aufgabe 22:** (3+1 Punkte)
Die $(n \times n)$-Matrix $A$ sei diagonaldominant, d.h. es gelte $|a_{ii}| > \sum_{k \ne i} |a_{ik}|$ für $i = 1, \dots, n$.

(a) Beweisen Sie die Abschätzung

$$\|Ax\|_\infty \ge c\|x\|_\infty \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad c := \min_{i=1,\dots,n} \Big(|a_{ii}| - \sum_{k \ne i} |a_{ik}|\Big)$$

und folgern Sie daraus die Abschätzung

$$\mathrm{cond}_\infty(A) \le \|A\|_\infty / c .$$

<u>Hinweis:</u> Betrachten Sie $\|x\|_\infty = |x_r|$ und $\|Ax\|_\infty \ge |(Ax)_r|$.

(b) Bei der Spline-Interpolation begegnet man der tridiagonalen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & & & \\ \alpha_2 & 1 & \beta_2 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & & \beta_{n-1} \\ & & & \alpha_n & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \alpha_i, \beta_i > 0, \\ \beta_1, \alpha_n \le 1/2, \\ \alpha_i + \beta_i = 1/2, \\ i = 2, \dots, n-1. \end{array}$$

Geben Sie eine Abschätzung für $\mathrm{cond}_\infty(A)$ an.

**Aufgabe 23:** (4 Punkte)
Seien

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Lösung $x \in \mathbb{R}^2$ des linearen Gleichungssystems

$$Ax = b$$

mit dem $QR$-Verfahren.

**Aufgabe 24: (Programmieraufgabe, Abgabe: Freitag, 8.12.2000, 11.00 Uhr)**
Programmieren Sie das *CHOLESKY*–Verfahren zur Lösung des LGS $Ax = b$ in den drei Schritten

$$A = LL^T \;, \qquad Lc = b \;, \qquad L^T x = c \;.$$

**Anwendung:** Gegeben seien eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b \in \mathbb{R}$, und Werte $y_a, y_b \in \mathbb{R}$. Gesucht ist eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $y : [a,b] \to \mathbb{R}$, die das Randwertproblem (**RWP**)

$$y''(t) = f(t) \;, \qquad a \leq t \leq b \;, \qquad y(a) = y_a \;,\; y(b) = y_b \;,$$

löst. Mit einer Schrittweite $h > 0$ werden die Ableitungen approximiert durch

$$\begin{aligned} y'(t) &\approx \frac{1}{h}\left(y(t+h) - y(t)\right) \;, \\ y''(t) &\approx \frac{1}{h}\left(y'(t) - y'(t-h)\right) \approx \frac{1}{h^2}\left(y(t+h) - 2y(t) + y(t-h)\right) \;. \end{aligned}$$

Die Diskretisierung des Zeitintervalls

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} = b \;, \quad t_i = a + ih \;, \quad i = 0, 1, \ldots, n, n+1 \;,$$

mit der Schrittweite $h = (b-a)/(n+1)$ liefert die folgende Approximation des **RWP**:

$$\frac{1}{h^2}\left(y(t_i + h) - 2y(t_i) + y(t_i - h)\right) = f(t_i) \;, \quad i = 1, \ldots, n \;, \quad y(t_0) = a \;,\; y(t_{n+1}) = b \;.$$

Überlegen Sie, dass diese Approximation mit $x_i = y(t_i)\;,\; i = 1, \ldots, n$, auf das folgende LGS führt:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h^2 f(t_1) + y_a \\ -h^2 f(t_2) \\ \vdots \\ -h^2 f(t_{n-1}) \\ -h^2 f(t_n) + y_b \end{pmatrix} .$$

Lösen Sie mit Hilfe des *CHOLESKY*–Verfahrens das obige **RWP** auf dem Intervall $[a,b] = [0, 10]$ für

(a) $\quad f(t) \equiv 1 \;, \qquad y_a = 0 \;, \quad y_b = 50 \qquad$ mit $\quad n = 9 \;,$

(b) $\quad f(t) = 3t^2 \;, \qquad y_a = 0 \;, \quad y_b = 2500 \qquad$ mit $\quad n = 9, 19, 49, 99 \;.$

Berechnen Sie jeweils den absoluten Fehler der numerischen Lösung $x_i\;,\; i = 1, \ldots, n$, im Vergleich zur exakten Lösung $y(t) = \frac{1}{2}t^2$ bzw. $y(t) = \frac{1}{4}t^4$.