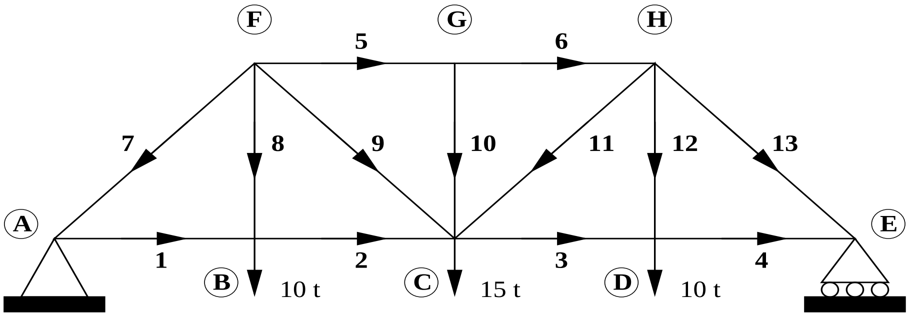
Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 2 , Abgabe: Freitag, 3.11.2000, 11.00 Uhr

Aufgabe 5: (3 Punkte)



Die Figur stellt eine Brücke dar, die linksseitig fest montiert und rechtsseitig auf einem beweglichen Gerüst gelagert ist. Alle nichtdiagonalen Teilstücke seien gleich lang, d.h. die Diagonalen bilden mit den Nichtdiagonalen einen Winkel von 45 Grad.

Die Knotenpunkte (A) bis (H) sind statische Gleichgewichtspunkte, d.h. die Summe der in x-Richtung wirkenden Kräfte F_x ist dort gleich Null, ebenso wie die Summe der in y-Richtung wirkenden Kräfte F_y.

Stellen Sie das zugehörige Gleichungssystem für die Kräfte f_1 bis f_{13} auf, indem Sie die Gleichgewichtszustände der Knotenpunkte ausnutzen. Beachten Sie hierbei, daß durch die feste Verankerung von Knotenpunkt (A) zwei Gleichungen entfallen und für Knotenpunkt (E) nur eine Kraftgleichung in x-Richtung benötigt wird.

Beispielsweise gilt für den Knotenpunkt (C):

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & = & \sum F_x & = & -\sin 45^o f_9 & - & f_2 & - & \sin 45^o f_{11} & + & f_3 \, , \\ 0 & = & \sum F_y & = & -\sin 45^o f_9 & - & f_{10} & - & \sin 45^o f_{11} & + & 15 \, . \end{array}$$

(Kräfte, deren Pfeil in den Knotenpunkt hineinzeigen, werden negativ gezählt; Kräfte, deren Pfeil aus dem Knotenpunkt herauszeigen, positiv.)

Aufgabe 6: (4 Punkte)
Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 14 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 26 & 11 \end{pmatrix} \quad , \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -13 \end{pmatrix} \, .$$

(a) Bestimmen Sie mit Spaltenpivotsuche die Zerlegung $PA = LR$, wobei P: Permutationsmatrix, L: linke normierte und R: rechte Dreiecksmatrix bedeuten.

(b) Bestimmen Sie die Lösung des LGS's $Ax = b$.

Aufgabe 7: (3+1 Punkte)
Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $-1 < \alpha < 1$ seien

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & \beta & 4 \end{pmatrix} \quad , \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(a) Berechnen Sie mit Spaltenpivotsuche die Zerlegung $PA = LR$, wobei P: Permutationsmatrix, L: linke normierte und R: rechte Dreiecksmatrix bedeuten.

(b) Lösen Sie $Ax = b$.

Aufgabe 8: (Programmieraufgabe, Abgabe: Freitag, 17.11.2000, 11.00 Uhr)
Schreiben Sie ein Programm **gausselim(a,b,n,index)** zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren. Beim Aufruf enthalte **gausselim (a,b,n,index)** die (n, n)-Matrix a und den n-Vektor b. Nach Ablauf ist auf a die LR-Zerlegung gespeichert und der n-Vektor *index* enthält die durchgeführten Zeilenpermutationen. Auf b ist die Lösung x von $Ax = b$ gespeichert.

(a) Testen Sie das Programm an den Daten von Aufgabe 6.

(b) Berechnen Sie mit und ohne Spaltenpivotsuche die Lösung von

$$\begin{pmatrix} 10^{-l} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{für} \quad 6 \leq l \leq 20$$

(c) Die (n, n)-Matrix $H_n = (h_{ik})$, $h_{ik} = \frac{1}{i+k-1}$, $i, k = 1, \ldots, n$ heißt, HILBERT-Matrix. Sei $b_n := H_n x_0$ mit $x_0 = (1, 1, \ldots, 1)^T$. Lösen Sie $H_n x = b_n$ für $n = 5, 10, 15, 20$ mit und ohne Spaltenpivotsuche.