Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 12 , Abgabe: Freitag, 2.02.2001, 11.00 Uhr

Aufgabe 41: (4 Punkte)
Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine reelle (2×2)-Matrix.

Man zeige, dass zur Lösung von $Ax = b$ das Gesamtschrittverfahren genau dann konvergiert, wenn das Einzelschrittverfahren konvergiert.

Hinweis: Berechnen Sie die zugehörigen Spektralradien.

Aufgabe 42: (4 Punkte)
Seien $C_G = -D^{-1}(L+R)$, $C_E = -(L+D)^{-1}R$ die Matrizen des Gesamt- bzw. Einzelschrittverfahrens. Man zeige: Falls

$$\sum_{k \neq i} |a_{ik}| < |a_{ii}| \,, \quad i = 1, \ldots, n \,,$$

so gilt

$$\|C_E\|_\infty \leq \|C_G\|_\infty < 1 \,.$$

Hinweis: Für $x \in \mathbb{R}^n$, $y := C_E x$ zeige man induktiv

$$|y_k| \leq \|C_G\|_\infty \|x\|_\infty \,, \quad k = 1, \ldots, n \,.$$

Aufgabe 43: (2 Punkte)
Sei $p \in \prod_3$ das Polynom, das die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ an den Stützpunkten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 9$ interpoliert. Bestimmen Sie p mit der Formel von Lagrange.

Aufgabe 44: (Programmieraufgabe, Abgabe: Freitag, 2.02.2001, 11.00 Uhr)
Schreiben Sie ein Programm zur iterativen Lösung eines LGS

$$Ax = b \,, \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ regulär, } x \in \mathbb{R}^n \,,\ b \in \mathbb{R}^n$$

mittels des (1) Gesamtschrittverfahrens, (2) Einzelschrittverfahrens und (3) Relaxationsverfahrens mit gegebenem ω. Zu berechnen sind N Iterationsschritte. Testen Sie das Programm an den folgenden beiden Beispielen:

1.) Gegeben sei das LGS

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{pmatrix} .$$

Führen Sie jeweils $N = 15$ Iterationschritte durch mit dem Gesamtschrittverfahren, dem Einzelschrittverfahren und dem Relaxationsverfahren mit $\omega = 1.25$ und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung $\bar{x} = (3, 4, -5)^T$. Als Startvektor wähle man $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$.

2.) Hält man eine wärmeisolierte Platte am Rande auf einer zeitlich konstanten Temperaturverteilung, so stellt sich auch im Innern auf die Dauer eine unveränderliche Temperaturverteilung $T(x, y)$ ein (vgl. Bild), die der Potentialgleichung (partielle Differentialgleichung)

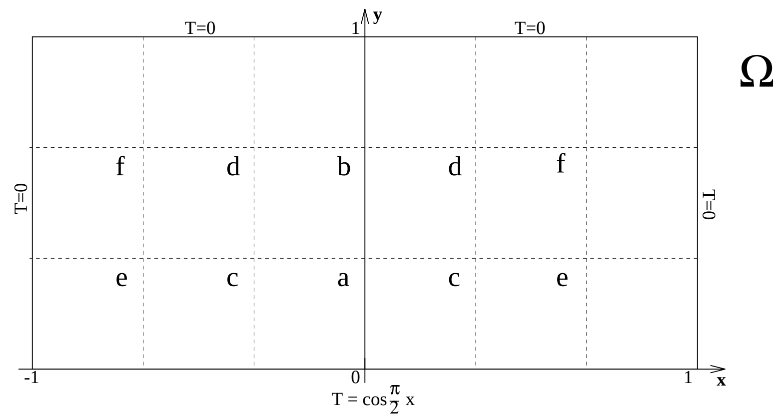
$$\Delta T(x, y) = T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) = 0 \quad \text{für} \quad (x, y) \in \overset{\circ}{\Omega}$$

genügt. Im folgenden sei $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ und $S = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1\} \subset \partial\Omega$. Auf dem Rand $\partial\Omega$ gelte die Temperaturverteilung

$$T(x, y) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2}x) & , \quad (x, y) \in S\,, \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} .$$

Die exakte Lösung lautet dann

$$(*) \qquad T(x, y) = \frac{\sinh(\frac{\pi}{2}(1 - y))}{\sinh(\frac{\pi}{2})} \cdot \cos(\frac{\pi}{2}x)\ .$$



Man lege das obige äquidistante Gitter auf Ω und bezeichne die Temperaturwerte in den einzelnen Gitterpunkten unter Berücksichtigung der Symmetrie mit a bis f (vgl. Bild). Die Potentialgleichung kann angenähert durch die Forderung ersetzt werden, dass der Temperaturwert in jedem Punkt gleich dem arithmetischen Mittel der Temperaturwerte in den vier Nachbarpunkten ist.

(a) Stellen Sie das zugehörige LGS auf.

(b) Lösen Sie das LGS mit dem Gesamtschrittverfahren, dem Einzelschrittverfahren und dem Relaxationsverfahren mit $\omega = 1.2$, wobei jeweils $N = 25$ Iterationen zu berechnen sind. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung $(*)$ und der exakten Lösung des LGS's, die per Gaußelimination zu berechnen ist. Was fällt auf?

Startvektor:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.6\ , & b_0 &= 0.3\ , & c_0 &= 0.5\ , \\ d_0 &= 0.2\ , & e_0 &= 0.3\ , & f_0 &= 0.1\ . \end{aligned}$$