Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 10 , Abgabe: Freitag, 12.01.2000, 11.00 Uhr

Aufgabe 35: (3 Punkte)
Für das Polynom $p(x) = 4x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 2x - 5$ berechne man mit Hilfe des HORNER-Schemas die Ableitungen $p^{(i)}(x_0),\ \ i = 0, 1, 2, 3, 4$, an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 36: (3 Punkte)
Die Iteration beim zweidimensionalen NEWTON-Verfahren kann explizit durchgeführt werden. Mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} , \qquad f'(x,y) = \begin{pmatrix} u_x(x,y) & u_y(x,y) \\ v_x(x,y) & v_y(x,y) \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie damit explizit die NEWTON-Iteration

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - f'(x_k, y_k)^{-1} f(x_k, y_k) .$$

Aufgabe 37: (Programmieraufgabe, Abgabe: Freitag, 19.01.2000, 11.00 Uhr)
Führen Sie die explizite NEWTON-Iteration aus Aufgabe 36 durch für die folgenden vier Probleme. Berechnen Sie jeweils $f(x_k, y_k)$ und den Quotienten

$$\| (x_{k+1}, y_{k+1}) - (x_k, y_k) \|_2 \, / \, \| (x_k, y_k) - (x_{k-1}, y_{k-1}) \|_2^2 .$$

(a) Für die komplexe Variable $z = x + iy \in \mathbb{C},\ i^2 = -1,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$, führt die komplexe Fixpunktgleichung $z = e^z$ auf die äquivalenten reellen Gleichungen

$$e^x \cos y - x = 0 , \qquad e^x \sin y - y = 0 .$$

Startpunkt: $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Finden Sie zwei weitere Lösungen.

(b) Für die komplexe Variable $z = x + iy \in \mathbb{C},\ i^2 = -1,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$, ergibt die komplexe Gleichung $\log z = z$ das reelle System

$$\log \sqrt{x^2 + y^2} - x = 0 , \qquad \arctan \frac{y}{x} - y = 0 .$$

Startpunkt: 1. $(x_0, y_0) = (1, 1)$, 2. $(x_0, y_0) = (-1, -1)$. Ist die zweite Lösung eine Lösung von $\log z = z$?

(c) Das Minimum der ROSENBROCK-Funktion

$$h(x,y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$$

ist offensichtlich der Punkt $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$. Starten Sie die NEWTON-Iteration für die Gleichung $f(x, y) := \nabla h(x, y) = 0$ im Punkt $(x_0, y_0) = (-0.5, 0.5)$. Prüfen Sie die Hesse-Matrix von $h(x, y)$ auf Positiv-Definitheit.

(d) Maximieren Sie die Funktion

$$h(x,y) = x^3 \exp(y - x^2 - 10(x-y)^2) \ .$$

<u>Hinweis:</u> Abbruchkriterium für alle Teilaufgaben: $\| f(x,y) \|_2 \leq 10^{-10}$. Rechnen Sie mit doppelter Genauigkeit.

Wir wünschen allen Teilnehmern ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins neue Jahr !