Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 1 , Abgabe: Freitag, 27.10.2000, 11.00 Uhr

Übungstermine:

Gruppe 1:	Mo.	9-11 Uhr	SR7	BK	70
Gruppe 2:	Mo.	13-15 Uhr	SR5	BK	71
Gruppe 3:	Di.	9-11 Uhr	SR4	BK	72
Gruppe 4:	Di.	13-15 Uhr	SR1	BK	73
Gruppe 5:	Di.	17-19 Uhr	SRC	BK	74

Aufgabe 1: (3 Punkte)
Für

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b := \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix}$$

bestimme man die Lösung x der Gleichung $Ax = b$ mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens exakt "von Hand".

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Zur Invertierung der $(n \times n)$-Matrix A kann man $Ax^i = e_i, \ (i = 1, \ldots, n)$ lösen und hat dann $A^{-1} = (x^1, \ldots, x^n)$.

(a) Zeigen Sie, dass man dies in $n^3 + \mathrm{O}(n^2)$ Rechenoperationen ausführen kann.

(b) Berechnen Sie die Inverse von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Zeigen Sie: Das lineare System

$$x_i - \sum_{j=1}^{i-1} x_j = b_i \, , \qquad i = 1, ..., n \, ,$$

ist eindeutig lösbar. Sind $b_1, ..., b_n \geq 0$, so sind auch $x_1, ..., x_n \geq 0$.

(Bitte wenden!)

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Sei A eine symmetrische $(n \times n)$-Matrix und seien $x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^n$. Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) := \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \qquad \text{(T: Transponierung).}$$

(a) Zeigen Sie: Ist $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Minimierungsproblems

$$f(x_0) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \ , \qquad \textbf{(MP)}$$

dann ist x_0 eine Lösung des linearen Gleichungssystems (LGS) $Ax = b$.

(b) Geben Sie eine zusätzliche Eigenschaft der Matrix A an, so dass jede Lösung x_0 des LGS's $Ax = b$ auch eine Lösung des Minimierungsproblems **(MP)** ist.