Das inverse Problem der Optionsbewertung

Diplomarbeit

vorgelegt von

Christian Witte

Thema gestellt von

Prof. Dr. F. Natterer

11. Dezember 1998

a

Institut für Numerische und instrumentelle Mathematik
der Westfälischen Wilhelms - Universität Münster

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1997 erhielten Myron Scholes und Robert Merton für ihre Methoden, den Wert von Optionen auf dem Aktienmarkt zu berechnen, den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaft. Die von ihnen und dem 1995 gestorbenen Fischer Black in [4] und [30] entwickelte Black & Scholes - Formel, gilt nach Einschätzung der Königlichen Schwedischen Akademie der Wissenschaft als wichtigste Errungenschaft der Wirtschaftswissenschaft in den letzten 25 Jahren. Mit der Formel sei der Grundstein für das schnelle Wachstum des Derivatehandels in den letzten 10 Jahren geschaffen worden, und habe als Folge davon wesentlich zur Fortentwicklung und Erleichterung eines wirkungsvolleren Risikomanagements auf dem Kapitalmarkt beigetragen.

Generell lassen sich Optionsbewertungsmodelle in zwei Kategorien einteilen: statistische Regressionsmodelle und Gleichgewichtsmodelle.
Bei den Regressionsmodellen werden auf der Grundlage von Ex - Post - Regressionsmodellen mit vergangenheitsorientierten Parametern Prognosen über zukünftige Optionspreise erstellt. Als Vertreter dieser Preismodelle können Boness [5] und Thorp und Kassouf [42] genannt werden. Da allerdings ausschließlich historische Daten verwendet werden, können zukünftige Entwicklungen von Kursen häufig nicht in befriedigender Weise erklärt werden.
Bei Gleichgewichtsmodellen wird dagegen eine einheitliche Kapitalmarkttheorie über effiziente Märkte und die Annahme der Existenz eines einheitlichen Zinssatzes für risikolose Kapitalanlagen unterstellt. Auf dieser Basis wird der Optionspreis als „fairer" Wert ermittelt, so daß weder der Käufer noch der Verkäufer einen Vorteil aus der Preisbildung ziehen kann. Als partielle Gleichgewichtsmodelle bezeichnet man dabei Modelle, in denen entweder individuelle Risikoprämissen der Anleger oder geschätzte Parameter zur Prognose zukünftiger Kursentwicklungen eingehen. Vertreter dieser Modelle, der sogenannten ersten Generation, sind z.B. Sprenkle [40] und Samuelson [38].

Die wesentliche Neuerung, die das vollständige Gleichgewichtsmodell von Black und Scholes [4] erbracht hat, ist, daß zum ersten Mal der Nachteil der individuellen oder geschätzten Parameter, wie sie in die partiellen Gleichgewichtsmodelle eingehen, überwunden wurde. Als weitere Vertreter dieser Modelle, der sogenannten zweiten Generation, können Cox, Ross und Rubinstein [9] genannt werden.

Allerdings gehen auch in das Black & Scholes - Modell nicht nur empirisch eindeutig zu bestimmende Parameter ein. Die kritischste Größe wird dabei die Bestimmung der zukünftigen Standardabweichung des Kurses des zugrundegelegten Basisinstrumentes der Option sein. Im Black & Scholes - Modell wird diese, im folgenden als Volatilität bezeichnete, maximale Schwankungsbreite der Kurse als konstant für die Laufzeit der Option angenommen. In der Realität werden allerdings Optionen mit einer nichtkonstanten Volatilität gehandelt. Vielmehr tritt die Volatilität als Funktion in Abhängigkeit vom Kurs des Basisinstrumentes und der Zeit auf. Natürlich kann es nur eine zukünftige Kursentwicklung geben, so daß am Markt der Effekt auftritt, daß die Black & Scholes - Formel als Mechanismus benutzt wird, um z.B. Informationen über „faire" Optionspreise zu erhalten. Allerdings werden die Optionspreise am Markt im Gegensatz zu den Voraussetzungen des Modells auf der Basis einer nichtkonstanten Volatilitätsfunktion gehandelt.
Um das Black & Scholes - Modell auf diesen Sachverhalt auszuweiten, wird das inverse Problem der Optionsbewertung [22] von Isakov und Bouchouev erläutert. Der Vorteil dieses Modell ist, daß es die theoretischen und praktischen Vorzüge des Black & Scholes - Modells erhält und das Modell auf die am Markt beobachtete Volatilitätsfunktion in Abhängigkeit des Kurses des Basisinstrumentes ausweitet.

In Kapitel 2 werden zunächst die grundlegenden Definitionen und Zusammenhänge erläutert, die für das Verständnis der nachfolgenden Kapitel benötigt werden. Das Black & Scholes - Modell wird in Kapitel 3 vorgestellt und die Black & Scholes - Optionspreisformel hergeleitet. Anschließend wird das Modell auf weitere Optionstypen erweitert. In Kapitel 4 wird das inverse Problem der Optionsbewertung von Isakov und Bouchouev erläutert und anhand von Beipielen wird die im Rahmen dieses Modells entwickelte lokale Volatilitätsfunktion für Optionen auf den S&P 500 - Index und den DAX verdeutlicht.

Kapitel 2

Grundbegriffe

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Definitionen, Eigenschaften und Modelle erläutert, die zum Verständnis des Black & Scholes - Modells und des inversen Problems der Optionsbewertung notwendig sind. Die Literatur dazu stützt sich soweit nicht anders dargestellt auf [18], [33] und [41].
In Kapitel 2.1 werden die grundlegenden wirtschaftswissenschaftlichen Grundbegriffe erläutert, die für das Verständnis der folgenden Kapitel notwendig sind. Insbesondere wird der für diese Arbeit zentrale Begriff der Volatilität eingeführt und das nach John C. Hull wichtigste einzelne Instrument zur Analyse von Finanzderivaten erläutert: die risikoneutrale Bewertung. Anschließend werden in Kapitel 2.2 optionstechnische Grundbegriffe definiert und elementare Eigenschaften von Optionen entwickelt.

2.1 Wirtschaftswissenschaftliche Grundbegriffe

Ein grundlegendes Prinzip, das implizit hinter fast allen hier behandelten wirtschaftswissenschaftlichen Modellen steht, ist das des *vollkommenen Kapitalmarktes*. Ein vollkommener Kapitalmarkt zeichnet sich dadurch aus, daß

- keine Transaktionskosten, Steuern oder andere Friktionen existieren,
- Wertpapiere beliebig teilbar sind,
- vollständiger Wettbewerb herrscht, d.h. kein einzelner Marktteilnehmer den Preis eines Wertpapieres beeinflussen kann,
- sämtliche Informationen allen Marktteilnehmern gleichzeitig und kostenlos zur Verfügung stehen und

- alle Anleger sich rational verhalten.

Ein weiteres wirtschaftswissenschaftliches Konzept zur Herleitung der Modelle in den Kapiteln 3 und 4 ist das der *Abwesenheit von Arbitragemöglichkeiten*. Das bedeutet, daß es keine Möglichkeit gibt, einen risikolosen Gewinn zu erzielen, der größer als der risikolose Zinssatz ist. Zumindest besteht diese Möglichkeit nicht über einen signifikant großen Zeitraum, daß sich Investoren gezielt auf diesen Sachverhalt einstellen können. Dieses Modell impliziert einen risikolosen Zinssatz, zu dem sich risikolose Kapitalanlagen verzinsen. Als Maßstab für diesen Zinssatz ist z.B. ein Zerobond erstklassiger Bonität mit einer der Kapitalanlage entsprechenden Laufzeit oder ein laufzeitadäquater Interbankenzinssatz wie der LIBOR[1] oder der FIBOR[2] denkbar.
Angenommen, es gäbe Arbitragemöglichkeiten, so würden sich rationale Investoren z.B. von einer Bank Geld zum risikolosen Zinssatz leihen und das Geld zu dem höheren Zinssatz anlegen, wobei sie keinerlei Risiko eingehen würden. Dies würde einen theoretisch unendlich großen Gewinn für die Investoren implizieren. Allerdings kann man erwarten, daß entweder die Bank ihren Zinssatz anhebt, oder daß sich die Rendite der Kapitalanlage verringern wird. Dieses Modell besagt aber nicht, daß Investoren nur eine Rendite in Höhe des risikolosen Zinssatzes erzielen können. Eine höhere Rendite einer Kapitalanlage ist jedoch nicht mehr risikolos.
Im Rahmen der „Arbitrage Pricing Theory" läßt sich dieses Modell noch allgemeiner formulieren, siehe dazu etwa [33], S. 12ff., oder [43], S. 195ff.

Des weiteren sei auf dem Kapitalmarkt *schwache Informationseffizienz* vorausgesetzt, d.h. in dem Kurs eines Finanzinstrumentes sind sämtliche Informationen über vergangene Kursentwicklungen bereits vollständig berücksichtigt. So können lediglich neue Informationen Einfluß auf den zukünftigen Kurs haben.
Dieses Modell der schwachen Informationseffizienz ist zum einen eine Grundvoraussetzung für den in Kapitel 3 entwickelten Zufallsprozeß. Zum anderen ist unmittelbar klar, daß zukünftige Informationen einen nicht vorher quantifizierbaren Einfluß auf die Kursentwicklung des Finanzinstrumentes haben, so daß das zugehörige Risiko zukünftiger Kursschwankungen näher untersucht werden muß.
Das Gesamtrisiko zukünftiger Kursentwicklungen wird als die Summe aus systematischem und unsystematischem Risiko definiert. Dabei umfaßt der Begriff *unsystematisches Risiko* einzelwirtschaftliche bzw. titelspezifische Ri-

[1]LIBOR bedeutet London Interbank Offered Rate.
[2]FIBOR bedeutet Frankfurt Interbank Offered Rate.

siken. Im Bereich Aktien würden Streiks, negative Presseberichte über Unternehmen o.ä. unter diesem Begriff subsumiert werden. Diese Risiken können durch geeignete Diversifikation der Anlageinstrumente, d.h. durch geeignet breite Streuung der Finanzinstrumente, weitgehendst ausgeschlossen werden. Dagegen umfaßt der Begriff *systematisches Risiko* Risiken aufgrund marktinhärenter Veränderungen, d.h. es wird nicht nur ein einziger Emittent erfaßt, sondern eine ganze Anlagekategorie. Beispiele für systematische Risiken wären Steuerreformen, Zentralbankinterventionen eines Landes o.ä.. Dabei ist zu betonen, daß systematisches Risiko nicht einfach wegdiversifiziert werden kann.

Als Maß für das Gesamtrisiko zieht man die *Volatilität* heran. Anschaulich betrachtet, ist die Volatilität ein Maß für die relative Schwankungsbreite eines Finanzinstrumentes innerhalb eines gewissen zukünftigen Zeitraumes. In den folgenden Kapiteln wird dieses Finanzinstrument immer der Basiswert einer Option sein. Dabei ist zu betonen, daß Volatilität einerseits eine Ex - Post - Größe darstellt, andererseits aber ein Risikomaß für in der Zukunft liegende Kurschwankungen ist.
Es gibt mehrere Arten der Volatilitätsberechnung. Gebräuchlich sind die folgenden:

- *Historische Volatilität* berechnet sich nach [17], S. 73f. und S. 82f., aus der annualisierten Standardabweichung von Vergangenheitsdaten, genauer gesagt aus historischen Kassakursen, des entsprechenden Basisinstrumentes. Zumeist werden dabei Vergangenheitsdaten der letzten 90 bis 180 Tagen oder ein der Laufzeit der Option entsprechender Zeitraum gewählt. Jedoch ist diese Art der Volatilitätsberechnung nur beschränkt aussagekräftig, da die Standardabweichung auf der Basis von Vergangenheitswerten die zukünftige Schwankungsbreite nur unzureichend wiedergeben kann.

- *Implizite Volatilität* berechnet sich aus einem einzigen Wert, dem am Markt notierten Optionspreis. Präziser ausgedrückt, bezeichnet die implizite Volatilität diejenige annualisierte Volatilität, die in die Black & Scholes - Formel, die in Kapitel 3 hergeleitet wird, eingesetzt werden muß, um mit dem Marktpreis der Option übereinzustimmen.
  Dabei ist festzuhalten, daß im allgemeinen die am Markt benutzte implizite Volatilität nicht für sämtliche gehandelten Optionen gleich ist, wie in [45], S. 65f., [10], S. 1, oder [11], S. 25f., beschrieben wird.
  Betrachtet man Optionen mit verschiedenen Laufzeiten, ansonsten aber identischen Parametern, so beobachtet man im allgemeinen, daß die den Optionen zugrundeliegende implizite Volatilität jeweils verschieden ist.

Diese Eigenschaft nennt man *term structure* der Volatilität und ist in Abbildung 2.1 für eine Option auf den S&P 500 - Index vom 5.5.1993 dargestellt.

Abbildung 2.1: Term structure der Volatilität am Beipiel einer Option auf den S&P 500 - Index vom 5.5.1993. (Quelle: [18], Figure 19.5, S. 504)

Analog stellt man bei Optionen mit verschiedenen Basispreisen, ansonsten jedoch identischen Parametern, fest, daß sich die benutzte implizite Volatitlität mit dem Basispreis ändert. Diese Eigenschaft nennt man *Smile - Effekt* und wird in Abbildung 2.2 für die obige Option gezeigt. Dabei ist die Asymetrie der impliziten Volatilität in Abbildung 2.2 charakteristisch für am Markt gehandelte Optionen und wird als *skewness* der Volatilität bezeichnet.

- Daß konstante Volatilität keine marktadäquate Voraussetzung ist, sieht man an der impliziten Volatilität. Doch auch die implizite Volatilität ist mehr ein ,,globales Maß", wie es in [11], S. 26, ausgedrückt wird, indem eine durchschnittlich antizipierte Volatilität als Konstante in die Black & Scholes - Formel einsetzt wird. Des weiteren hängt die implizite Volatilität noch vom Basispreis und von der Laufzeit der Option

Abbildung 2.2: Smile - Effekt der Volatilität am Beipiel einer Option auf den S&P 500 - Index vom 5.5.1993. (Quelle: [18], Figure 19.4, S. 504)

ab. Daraus folgt, daß für jeden betrachteten Basispreis und für jede betrachtete Laufzeit im allgemeinen eine andere durchschnittliche Volatilität zugrunde liegt. Dies impliziert aber eine lokale Struktur der Volatilität als Funktion in Abhängigkeit vom Basispreis und von der Laufzeit der Option.
Um diese Funktion zu finden, wird zunächst die Annahme einer konstanten Volatilität in der Black & Scholes - Formel aufgegeben und durch eine *lokale Volatilitätsfunktion* in Abhängigkeit vom Basispreis und von der Laufzeit der Option ersetzt. Diese lokale Volatilitätsfunktion läßt sich nach [10] und [12] prinzipiell bestimmen, wenn für alle Basispreise und Laufzeiten Optionswerte am Markt vorhanden sind. In der Realität finden sich allerdings nach [22] nicht ausreichend Marktpreise für Optionen bezogen auf verschiedenste Laufzeiten, so daß eine lokale Volatilitätsfunktion in Abhängigkeit vom Basispreis angenommen wird. Dies führt auf das inverse Problem der Optionsbewertung, das in Kapitel 4 behandelt wird.

Wie sich die verschiedenen Volatilitätsberechnungen auf die Optionsmodelle auswirken, ist Gegenstand der folgenden Kapitel.

Das bereits erwähnte Prinzip der *risikoneutralen Bewertung* kann wie folgt erklärt werden. Wenn angenommen werden kann, daß sich sämtliche Investoren einer beliebigen Kapitalanlage risikoneutral verhalten, so entspricht der Erwartungswert der Rendite dieser Kapitalanlage, den die Investoren erwarten, dem risikolosen Zinssatz. Der Grund dafür ist, daß Investoren mit einer risikoneutralen Erwartungshaltung keine Risikoprämie voraussetzen, um das Risiko einer Kapitalanlage einzugehen. Für eine Kapitalanlage kann die risikoneutrale Bewertung herangezogen werden, wenn die mathematische Modellierung der Kapitalanlage unabhängig von Variablen ist, die von individuellen Risikopräferenzen der Investoren abhängen.
Im Black & Scholes - Modell wird sich zeigen, daß die mathematische Modellierung von Optionswerten unabhängig von Erwartungswerten der Investoren ist. Deshalb kann jede beliebige Risikoneigung angenommen werden, und der Optionswert bleibt davon unabhängig. Insbesondere kann also die risikoneutrale Bewertung vorausgesetzt werden, und die erwartete Rendite der Investition entspricht gerade dem risikolosen Zinssatz.
In einer risikoneutralen Welt kann man also, um zur Zeit t den fairen Wert M eines zukünftigen Cashflows K in T $(t \leq T)$ zu bestimmen, den risikolosen Zinssatz R als Diskontierungsfaktor annehmen. Bei einer stetigen Betrachtungsweise, wie beim Black & Scholes - Modell, gilt für den abdiskontierten Wert

$$M = Ke^{-R(T-t)}, \qquad t \leq T.$$

Abschließend noch zwei Begriffe, die im folgenden häufig gebraucht werden. Als *Hedging* bezeichnet man die Risikobegrenzung bei Finanzinstrumenten durch ein zweites entgegengesetztes Anlagegeschäft, d.h. Verluste beim Anlageobjekt A sollen durch Gewinne beim Anlageobjekt B kompensiert werden. Größere Aktienbestände können z.B. mit Verkaufsoptionen gegen Kursverluste abgesichert (gehedgt) werden.

Die *Rendite* eines Finanzinstruments bezeichnet den Ertrag Δx der Kapitalanlage bei einer Laufzeit von einem Jahr, der sich aus einem Kapitaleinsatz x ergibt, d.h.

$$\text{Rendite einer Kapitalanlage} = \frac{\Delta x}{x}.$$

2.2 Optionstechnische Grundbegriffe

Ein *Derivat* oder *derivatives Finanzinstrument* ist ein Sammelbegriff für Finanzinstrumente, die von anderen Anlageobjekten abhängen. Der Kurs des Derivates hängt von der Kursentwicklung des zugrundeliegenden Objektes, des *Basisinstrumentes*, ab. Als derivative Finanzinstrumente bezeichnet man u.a. Futures, Swaps, Forwards und insbesondere sämtliche Typen von Optionen. Als Basisinstrumente können z.B. Aktien, Aktienindices, Währungen, Anleihen oder Handelswaren (z.B. Edelmetalle oder Öl) zugrundegelegt sein.

Im folgenden werden Optionen näher erläutert, da sie den Modellen in den folgenden Kapiteln zugrundeliegen. Eine *Option* bezeichnet einen Finanztitel, der dem Halter der Option das Recht einräumt, eine bestimmte Menge eines Basisinstrumentes zu einem bestimmten Preis innerhalb eines festgelegten Zeitraumes zu kaufen oder zu verkaufen. Eine Kaufoption wird als *Call* und eine Verkaufsoption als *Put* bezeichnet. Da es bei jedem Optionskontrakt einen Käufer, der einen Optionspreis bezahlt, und einen Verkäufer (Stillhalter), der diesen Optionspreis erhält, gibt, unterscheidet man zwischen einer *long - position* bzw. einer *short - position*. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 2.3 zur Verdeutlichung dargestellt. Zu betonen ist aber, daß eine Option ein

	Käufer	Verkäufer
Call	Long Call: - bezahlt Optionspreis - besitzt Kaufrecht	Short Call: - erhält Optionspreis - Stillhalter (in Wertpapieren)
Put	Long Put: - bezahlt Optionspreis - besitzt Verkaufsrecht	Short Put: - erhält Optionspreis - Stillhalter (in Geld)

Abbildung 2.3: Grundpositionen bei Optionen

Recht und keine Pflicht darstellt, so daß die Möglichkeit besteht, die Option einfach verfallen zu lassen, ohne das Optionsrecht auszuüben.
Bei der Position eines short Calls geht man zumeist so vor, daß der Stillhalter den Call - Kontrakt eingeht, aber das zugrundeliegende Finanzinstrument, z.B. die Aktien, noch gar nicht besitzt. Er spekuliert darauf, die Aktien zu einem späteren Zeitpunkt günstiger kaufen zu können. Dieses Prinzip wird als *Leerverkauf* bezeichnet. Da man dabei theoretisch ein unendlich hohes Risiko eingeht, sind Leerverkäufe zumeist streng reguliert. Doch wird diese Regulierung aufgrund der impliziten Annahme eines vollkommenen Kapitalmarktes im folgenden ausgeschlossen.

Weiterhin unterscheiden sich Optionen durch die Art der Fälligkeit. Entweder kann man das Recht auf Ausübung der Option jederzeit bis zum letzten Fälligkeitstermin wahrnehmen, *amerikanische Option* genannt, oder man kann das Recht nur an dem vorher festgesetzten Fälligkeitsdatum ausüben, *europäische Option* genannt.
Der Preis, zu dem das Basisinstrument bei Ausübung der Option gekauft oder verkauft wird, bezeichnet man als *Basispreis*. Optionen werden als *in - the - money*, *at - the - money* oder *out - of - the - money* bezeichnet, wenn es bei aktueller Ausübung der Option zu einem positiven, zu keinem oder zu einem negativen Cashflow kommen würde. Dieser Sachverhalt entspricht im Falle eines Calls auf eine Aktie, daß der Aktienkurs größer, gleich oder kleiner als der Basispreis ist. Um das Optionsrecht zu erwerben, bezahlt der Käufer einer Option einen Optionspreis, der sich aus zwei Wertkomponenten zusammensetzt:

$$\text{Optionspreis} = \text{innerer Wert} + \text{Zeitwert}.$$

Als *inneren Wert* einer Option bezeichnet man dabei den Wert, den die Option hätte, wenn sie bei einem Kurs des Basisinstrumentes x und einem Basispreis K ausgeübt werden würde. Im Falle eines Calls gilt:

$$\text{innerer Wert} = \max(0, x - K),$$

da der Inhaber des Calls bei Ausübung der Option den Wert des Basisinstruments erhält und dafür den Basispreis bezahlt. Falls diese Differenz positiv ist, wird der Callinhaber sein Optionsrecht wahrnehmen, sonst läßt er es verfallen. Im Falle eines Puts gilt dann:

$$\text{innerer Wert} = \max(0, K - x),$$

da der Inhaber des Puts das Optionsrecht nur dann wahrnehmen wird, wenn der Kurs des Basisinstrumentes niedriger als der festgelegte Basispreis ist. Sonst verfällt die Verkaufsoption ungenutzt.
Die zweite Wertkomponente einer Option wird als *Zeitwert* bezeichnet und ist als Preis für die Chance zu verstehen, daß sich das Basisinstrument während der Laufzeit in die vom Anleger gewünschte Richtung entwickelt. Am Verfallstag verschwindet folglich der Zeitwert einer Option und der Optionspreis entspricht genau dem inneren Wert. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 2.4 veranschaulicht.

Abbildung 2.4: Zeitwertkurve einer Option in Abhängigkeit von der Restlaufzeit. (Quelle: [41], S. 127)

Ein Call u wird fast sicher ausgeübt, wenn der Kurs des Basisinstrumentes x weit größer als der Basispreis K ist, und dann fast sicher nicht ausgeübt, wenn der Kurs erheblich kleiner als der Basispreis ist. Für $x \in [0, \infty)$ folgt dann insbesondere, daß

$$u = 0 \text{ für } K \longrightarrow \infty.$$

Je länger die Laufzeit einer Option ist, desto größer ist der Zeitwert der Option. Folglich nähert sich der Wert einer Option u bei langen Laufzeiten dem Wert des Basisinstrumentes x an. Allerdings übersteigt der Wert einer Option nie den Kurs des Basisinstrumentes, da in dem Fall Arbitragemöglichkeiten existieren würden. Bei kürzeren Laufzeiten nähert sich dagegen der Wert einer Option dem inneren Wert an, da sich der Zeitwert verringert. Der Optionswert kann aber nicht negativ sein, da in diesem Fall wieder Arbitragemöglichkeiten existieren würden. Insgesamt gilt also

$$0 \leq u \leq x, \qquad x \geq 0. \tag{2.1}$$

Außerdem folgt unmittelbar, daß

$$u = 0 \text{ falls } x = 0. \tag{2.2}$$

Wenn eine Dividendenausschüttung einer Aktie ansteht, stellt man in der Realität fest, daß der Kurs der Aktie kurz vor dem Dividendentermin in Höhe der Dividende fällt. Dies läßt sich damit begründen, daß sich mit der Ausschüttung das Eigenkapital des Unternehmens mindert. In der Realität fällt jedoch der Aktienkurs aus steuerlichen Gründen nicht exakt um die Höhe der Dividende, sondern in einem geringeren Ausmaß. Da Steuern aber in den Voraussetzungen der folgenden Modelle ausgeschlossen werden, geht man davon aus, daß sich der Kurs der Aktie kurz vor einem Dividendentermin exakt um die Höhe der Dividende verringert.
Inhaber von Optionen sind somit im Nachteil gegenüber Aktieninhabern, da sie keine Dividende erhalten. Folglich hat eine Dividendenausschüttung einen negativen Einfluß auf den Kurs der Option. Im Black & Scholes - Modell wird zunächst eine Dividendenausschüttung per Voraussetzung ausgeschlossen. Doch wird im allgemeinen eine Dividende für Aktien ausgegeben, so daß diese Voraussetzung unrealistisch ist. Es wird daher ein Modell entwickelt, das die Black & Scholes - Formel auch an Dividendenausschüttungen anpaßt, wie im folgenden dargestellt wird. Im Fall von Aktienindices als Basisinstrument einer Option wird z.B. angenommen, daß auf fast jede Aktie eine Dividende ausgezahlt wird. Da in einem Index eine Vielzahl von Aktien enthalten sind, im S & P 500 - Index z.B. 500 verschiedene Aktien, geht man von einer stetigen Dividendeausschüttung in Höhe der durchschnittlichen Dividende aus.

Kapitel 3

Das Black & Scholes - Modell

In den folgenden Kapiteln wird zunächst die Black & Scholes - Optionspreisformel auf der Basis einer europäischen Call - Option hergeleitet, wobei Aktien als Basisinstrument angenommen werden. Dazu wird im ersten Schritt ein risikoloses Portfolio konstruiert, bei dem die Rendite am Ende der Laufzeit bestimmt werden kann. Im zweiten Schritt wird die zukünftige Aktienkursentwicklung mathematisch modelliert und das Lemma von Ito angewandt. Auf diese Weise kann der zugrundegelegte Zufallsprozeß mit Hilfe einer partiellen Differentialgleichung beschrieben werden. Aus der Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe folgt dann die Black & Scholes - Formel.
Im letzten Kapitel wird die Black & Scholes - Formel auf weitere Optionsarten ausgeweitet: Put - Optionen, sowie amerikanische Optionen. Des weiteren werden Dividendenausschüttungen bezüglich des Basisinstrumentes einer Option in das Modell integriert und abschließend Auswirkungen der Annahme einer nichtkonstanten Volatilität diskutiert.

3.1 Voraussetzungen des Black & Scholes - Modells

Für die Herleitung der Black & Scholes - Gleichung zur Bewertung von Aktienoptionen gelten folgende Voraussetztungen:

1. Der risikolose Zinssatz ist konstant und bekannt über die Laufzeit der Option.

2. Es werden europäische Optionen betrachtet.

3. Es wird ein vollkommener Kapitalmarkt unterstellt. Dies impliziert insbesondere, daß keine Transaktionskosten bei Kauf oder Verkauf von Wertpapieren, keine Steuern, sowie keine Beschränkungen für Leerverkäufe existieren und sämtliche gehandelten Wertpapiere vollständig teilbar sind.

4. Der Handel mit Wertpapieren ist stetig.

5. Der Aktienkurs x kann mittels der stochastischen Differentialgleichung

$$\frac{dx}{x} = \mu dt + \sigma dz,$$

modelliert werden, wobei t die Zeit, μ die erwartete Wachstumsrate des Aktienkurses, σ^2 die konstante Varianz des Aktienkurses und $dz(t)$ ein standardisierter Wiener - Prozeß[1] ist.

6. Es fallen keine Dividendenausschüttungen, Bezugsrechte o.ä. während der Laufzeit der Option an.

7. Es gibt keine risikolosen Arbitragemöglichkeiten.

Der Wert u einer Option wird durch folgenden Variablen bestimmt: dem Aktienkurs x zur Zeit t und den konstanten Parametern: Fälligkeitsdatum T, Basispreis K, risikoloser Zinssatz R und Volatilität σ, d.h.

$$u = u(x, t; K, T, R, \sigma) \text{ mit } (x, t) \in [0, \infty) \times [t_*, T],$$

wobei t_* einen beliebigen, aber festen Zeitpunkt angibt. Weiterhin nehme an, daß

$$u \in C^2((0, \infty) \times (t_*, T)) \cap C([0, \infty) \times [t_*, T]).^2$$

---

[1] Nach [39], (9.32), ist ein *Wiener - Prozeß* definiert als ein stetiger, stochastischer Prozeß $z(t), t \in \mathbf{R}_+$, mit Driftparameter $\tilde{\mu} \in \mathbf{R}$ und Streuungsparameter $\tilde{\sigma}^2 > 0$ und es gilt:

(a) $z(0) = 0$,

(b) für alle $t > 0$ besitzt z(t) eine Normalverteilung $N(\tilde{\mu}t, \tilde{\sigma}^2 t)$,

(c) $z(t)$ ist ein Prozeß mit stationären Zuwächsen und

(d) $z(t)$ ist ein Prozeß mit stochastisch unabhängigen Zuwächsen.

Für einen *standardisierten Wiener - Prozeß* gilt dann zusätzlich $\tilde{\mu} = 0$ und $\tilde{\sigma} = 1$. Für weitere Ausführungen siehe [33] und [39].

[2] Sämtliche anderen Funktionen, die im folgenden benutzt werden, seien so oft differenzierbar wie nötig.

Außerdem gilt nach (2.1):

$$0 \leq u(x,t) \leq x \text{ für } (x,t) \in [0,\infty) \times [t_*,T]$$

und nach (2.2):

$$u(0,t) = 0 \text{ für } t \in [t_*,T]. \tag{3.1}$$

3.2 Konstruktion eines risikolosen Portfolios

Zur Herleitung der Optionspreisformel wird zunächst ein risikoloses Portfolio aus Aktien und Optionen konstruiert. Dazu wird ein Portfolio aus einer long - position in einer Aktie und short - positions in $1/\frac{\partial u}{\partial x}$ Call - Optionen bestimmt, so daß der Wert des Portfolios

$$\Pi = x - \frac{1}{\partial u/\partial x} u. \tag{3.2}$$

entspricht.

Um zu zeigen, daß das Portfolio risikolos ist, muß gelten, daß der Wert des Portfolios Π nicht von Aktienkursänderungen innerhalb eines beliebigen Zeitraumes $[t_*,T]$ abhängt. Dazu wird an einem beliebigen, aber festen Zeitpunkt $t \in [t_*,T]$ das Portfolio betrachtet. So ergibt sich unmittelbar, daß $\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0$ gilt, da bei der Betrachtung eines festen Zeitpunktes t die Anzahl der $\frac{1}{\partial u/\partial x}$ Optionen konstant ist, denn es kann kein Hedging stattfinden.
Wird jedoch während des betrachteten Zeitraums $[t_*,T]$ perfektes Hedging des Portfolios praktiziert, d.h. die Anzahl der Optionen wird stetig über den ganzen Zeitraum an die Aktienkursänderungen angepaßt, so bleibt das Portfolio auch über die ganze Laufzeit risikolos.

Falls es keine stetige Anpassung der short - positions an Aktienkursänderungen gibt, sondern, wie es in der Praxis häufig vorkommt, eine wöchentliche Anpassung praktiziert wird, bleibt das entstehende Risiko klein und es kann durch geeignete Diversifikation, z.B. indem ein Portfolio mit einer großen Anzahl von gehedgten Positionen konstruiert wird, vernachlässigt werden.

Daß das Portfolio risikolos ist, bedeutet, daß Π unabhängig vom Aktienkurs ist. Allerdings ist die Wertentwicklung des Portfolios weiterhin abhängig von der betrachteten Laufzeit und den Werten der gegebenen Parameter.

Deshalb wird die Wertänderung $\Delta\Pi$ des Portfolios (3.2) innerhalb eines kurzen Zeitraumes Δt betrachtet, wenn kein Hedging stattfindet. Dann gilt:

$$\Delta\Pi = \Delta x - \frac{\Delta u}{\partial u/\partial x} \tag{3.3}$$

mit $\Delta u = u(x + \Delta x, t + \Delta t) - u(x, t)$.
Dann folgt aus der Voraussetzung, daß es keine Arbitragemöglichkeiten gibt, daß sich das risikolose Portfolio zum risikolosen Zinssatz R rentiert:

$$\Delta\Pi = (x - \frac{u}{\partial u/\partial x})R\Delta t. \tag{3.4}$$

3.3 Mathematische Modellierung zukünftiger Aktienkurse

Da zukünftige Aktienkurse einem Zufallsprozeß unterliegen, der aus ökonomischer Sicht der Hypothese der schwachen Informationseffizienz unterliegt, kann nach [18], Kapitel 10.1, als geeigneter stochastischer Prozeß ein Markow - Prozeß gewählt werden. Charakteristisch für einen Markow - Prozeß ist, daß nur der aktuelle Wert der stochastischen Variable für die zukünftige Entwicklung des Prozesses relevant ist. Sämtliche historischen Daten sind irrelevant, da diese schon implizit in den aktuellen Daten enthalten sind. Um zukünftige Aktienkurse mathematisch zu modellieren, wird in der Regel eine speziellere Form eines Markow - Prozesses unterstellt: ein standardisierter Wiener - Prozeß, manchmal auch Brownsche Bewegung genannt.
Die Zufallsfunktion $z(t)$, die einem solchen Wiener - Prozeß folgt, besitzt u.a. die wichtigen Eigenschaften:

1. Gebe Δz die Veränderung der stochastischen Variable in einem Zeitraum Δt an und sei ϵ eine weitere N(0,1) - verteilte Zufallsvariable, so gilt:
$$\Delta z = \epsilon\sqrt{\Delta t}.$$
2. Die Werte von Δz in zwei beliebigen Intervallen Δt sind stochastisch unabhängig.

Aufgrund der Modellvoraussetzung, daß der Wertpapierhandel stetig ist, kann man von der obigen diskreten Betrachtungsweise des stochastischen Prozesses auf eine stetige Analyse übergehen. Diesem Sachverhalt wird durch die Bezeichnungweise dt, dz und dx anstelle von $\Delta t, \Delta z$ und Δx Rechnung getragen.

Im folgenden muß das standardisierte Wiener - Modell noch weiter entwickelt werden und zwar hin zu einem Wiener - Prozeß mit Driftparameter a und Varianz $b^2 > 0$ der Form:

$$dx = adt + bdz, \tag{3.5}$$

wobei x den Aktienkurs angibt, a und b konstante reelle Parameter sind und $z(t)$ die oben beschriebene Zufallsfunktion ist. Anschaulich kann man sich die beiden Terme auf der rechten Seite von (3.5) folgendermaßen vorstellen. Der Term adt impliziert eine erwartete Wachstumsrate a des Aktienkurses pro Zeiteinheit. Wobei der zweite Term eine mögliche Schwankungsbreite b des Aktienkurses beschreibt. Allerdings ist bdz eine Zufallsgröße, da $z(t)$ eine Zufallsfunktion ist, die dem standardisierten Wiener - Prozeß unterliegt. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 3.1 veranschaulicht.

Abbildung 3.1: Modellierung des Kurses eines Basisinstrumentes mit einem Wiener - Prozeß. (Quelle: [18], S. 214)

Dieses Modell ermöglicht es allerdings noch nicht, sämtliche nötigen Aspekte zu erfassen. Dazu sei das folgende Beipiel angeführt. Geht man von einer erwarteten Rendite von 14 % für die Aktie aus, so erwartet man 14 % Rendite bei einem Kurs von 50 DM genauso wie bei einem Kurs von 200 DM. Sei μ die erwartete prozentuale Rendite innerhalb einer betrachteten Laufzeit, so muß μx als Driftparameter des Aktienkurses angenommen werden. Analog gilt dies beim Streuungsparameter: Sei hier σ^2 die Varianz der prozentualen Aktienrendite, so gibt $\sigma^2 x^2$ die Varianz der Änderung des Aktienkurses an.

Zur Modellierung eines zukünftigen Aktienkurses wird man daher eine als Ito - Prozeß bekannte stochastische Differentialgleichung annehmen:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz. \tag{3.6}$$

Genauer

$$\begin{aligned} dx &= \mu x dt + \sigma x dz \qquad (3.7) \\ \Longleftrightarrow \frac{dx}{x} &= \mu dt + \sigma dz. \end{aligned}$$

μ ist dabei die erwartete Rendite[3] und σ^2 die Varianz der Aktienrendite[4]. σ bezeichnet man als Volatilität des Aktienkurses.

3.4 Anwendung des Lemmas von Ito

Black und Scholes wenden das Lemma von Ito an, um einen Zusammenhang zwischen dem Ito - Prozeß (3.7) und einer partiellen Differentialgleichung herzustellen.

Lemma von Ito: *Sei $F(x,t)$ eine zweimal differenzierbare Funktion in t und in der stochastischen Variablen x. Außerdem gelte für die Zufallsvariable x die stochastische Differentialgleichung (3.6) mit wohldefiniertem Drift- und Diffusionsparameter a und b. Dann gilt:*

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} b^2 dt. \tag{3.8}$$

Für den Beweis des Lemmas von Ito siehe [29] und für eine ausführlichere Darstellung siehe [33].

[3] $\mu = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mu_{\Delta t}}{\Delta t}$, wobei $\mu_{\Delta t}$ die erwartete Aktienrendite im Zeitraum Δt angibt.

[4] $\sigma^2 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sigma^2_{\Delta t}}{\Delta t}$, wobei $\sigma^2_{\Delta t}$ die erwartete Aktienrendite im Zeitraum Δt angibt.

Wendet man das Lemma von Ito für den Optionswert $u = u(x,t)$ an, und setzt man (3.7) in (3.8) ein, dann gilt:

$$du = (\mu x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})dt + \sigma x \frac{\partial u}{\partial x} dz. \tag{3.9}$$

Der Optionspreis folgt demnach selbst einem Ito - Prozeß mit Driftrate

$$\mu x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

und Varianz

$$\sigma^2 x^2 (\frac{\partial u}{\partial x})^2.$$

Diskretisiert man (3.7) und (3.9), so gilt:

$$\Delta x = \mu x \Delta t + \sigma x \Delta z \tag{3.10}$$

und

$$\Delta u = (\mu x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})\Delta t + \frac{\partial u}{\partial x}\sigma x \Delta z. \tag{3.11}$$

Setzt man dann (3.10) und (3.11) in (3.3) ein, so folgt:

$$\Delta \Pi = -\Big(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)\frac{\Delta t}{\partial u / \partial x}. \tag{3.12}$$

Damit kürzt sich die stochastische Zufallsgröße z und der erwartete Driftparameter μ heraus. Die Änderung des Portfolios wird deshalb unabhängig von Zufallsvariablen und individellen Risikoerwartungen von Investoren.

Setzt man (3.12) in (3.4) ein, so ergibt sich:

$$-(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})\frac{\Delta t}{\partial u / \partial x} = R(x - \frac{u}{\partial u / \partial x})\Delta t$$

$$\Longleftrightarrow \qquad Ru = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Rx \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{3.13}$$

Diese Differentialgleichung ist bekannt als Black & Scholes - Differentialgleichung.

Da (3.13) eine rückwärts parabolische Differentialgleichung ist, wird nach [45], S. 86, eine Endbedingung $u(x,T)$ benötigt, um die Differentialgleichung zu lösen. Zum Zeitpunkt $t = T$ entspricht der Optionswert u dabei gerade dem inneren Wert der Option am Fälligkeitsdatum T :

$$u(x, T) = \max(0, x - K). \tag{3.14}$$

3.5 Charakteristische Anfangswertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung

Das Ziel ist nun, die partielle Differentialgleichung (3.13) auf die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2}$ sowie die Endbedingung (3.14) auf eine Anfangsbedingung zu transformieren. Dann ergibt sich die charakteristische Anfangswertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung, für die nach [32], Kapitel 4.7, eine explizite Lösung mittels der zugehörigen Fundamentallösung konstruiert werden kann.

Substituiert man dazu

$$x = Ke^s,\ t = T - \tau/(\frac{1}{2}\sigma^2) \text{ und } u = Kv(s, \tau),$$

dann gilt für $(s, \tau) \in (-\infty, \infty) \times (0, \frac{\sigma^2}{2}(T - t_*))$:

$$\begin{aligned} RKv &= -\frac{K\sigma^2}{2}\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{K\sigma^2}{2}(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \frac{\partial v}{\partial s}) + RK\frac{\partial v}{\partial s} \\ \Longleftrightarrow \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + (\frac{R}{\sigma^2/2} - 1)\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{R}{\sigma^2/2}v \\ \Longleftrightarrow \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + (k_1 - 1)\frac{\partial v}{\partial s} - k_1 v, \qquad k_1 = \frac{R}{\sigma^2/2}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Aus der Substitution von (3.14) ergibt sich unmittelbar:

$$v(s, 0) = \max(0, e^s - 1).$$

Führt man nun eine weitere Hilfsfunktion $w : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ ein, der Form:

$$v(s, \tau) = e^{\alpha s + \beta \tau} w(s, \tau)\ ,\ (s, \tau) \in \mathbf{R} \times [0, \frac{\sigma^2}{2}(T - t_*)], \tag{3.16}$$

wobei die Konstanten α und β noch geeignet bestimmt werden. Dazu setzt man (3.16) in (3.15) ein:

$$\beta w + \frac{\partial w}{\partial \tau} = \alpha^2 w + 2\alpha\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + (k_1 - 1)(\alpha w + \frac{\partial w}{\partial s}) - k_1 w$$

und wählt anschließend α und β so, daß die Terme mit w und $\frac{\partial w}{\partial s}$ verschwinden:

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha^2 + (k_1 - 1)\alpha - k_1 \text{ und} \\ 0 &= 2\alpha + (k_1 - 1) \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}(k_1 - 1)\ ,\ \beta = -\frac{1}{4}(k_1 + 1)^2.$$

Insgesamt setzt man also

$$v(s, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(k_1-1)s-\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} w(s, \tau).$$

So egibt sich das charakteristische Anfangswertproblem der Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\ , \qquad (s, \tau) \in (-\infty, \infty) \times (0, \frac{\sigma^2}{2}(T - t_*)) \qquad (3.17) \\ w(s, 0) &= \max\left(e^{\frac{1}{2}(k_1+1)s} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)s}, 0\right), \qquad s \in \mathbf{R}. \qquad (3.18) \end{aligned}$$

3.6 Existenz und Eindeutigkeit der Anfangswertaufgabe

Um die Existenz einer Lösung der charakterischtischen Anfangswertaufgabe zu beweisen, genügt es nach [32], Satz 4.7.1, folgende Ungleichung zu zeigen:

$$\exists\, A, M > 0\ : \qquad |\ w(s, 0)\ | \leq M e^{As^2} \qquad \forall s \in \mathbf{R}. \qquad (3.19)$$

Da $w(s, 0) \geq 0$ für alle $s \in \mathbf{R}$ und $w(s, 0) = 0$ für alle $s \leq 0$ gilt, muß man für (3.19)

$$\exists\, A, M > 0\ : \qquad w(s, 0) \leq M e^{As^2} \qquad \forall s \in \mathbf{R}_+$$

zeigen. Dazu setze man

$$M := e^{\frac{1}{2}(k_1+1)} \text{ und } A := \frac{1}{2}(k_1 + 1)$$

und (3.19) ist für alle $s \in \mathbf{R}$ erfüllt.

Die Lösung der Anfangswertaufgabe läßt sich nach [32], Satz 4.7.1, mit Hilfe der zugehörigen Fundamentalösung

$$\gamma(s,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{s^2}{4\tau}}$$

schreiben als

$$w(s,\tau) = \int_{\mathbf{R}} \gamma(s-s',\tau) w(s',0) ds'.$$

Um die Eindeutigkeit dieser Lösung zu zeigen, genügt es nach [32], Satz 4.7.3, für $s \in \mathbf{R}$ und $\tau \in [0, \frac{\sigma^2}{2}(T-t_*)]$ die Gültigkeit der folgenden Ungleichung nachzuweisen:

$$\exists\, A, M > 0 \, : w(s,\tau) \leq M e^{As^2} \tag{3.20}$$

$$\Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(s-s',\tau) w(s',0) ds' \leq M e^{As^2}.$$

Es genügt den Fall $\tau = 0$ zu zeigen, da sich für $\tau \neq 0$ die Ungleichung dann unmittelbar ergibt. Für die Fundamentallösung gilt:

$$\gamma(s-s',0) = \begin{cases} 0 & : \quad s' \neq s \\ \infty & : \quad s' = s \end{cases} = \delta(s-s'),$$

wobei δ die Diracsche Deltafunktion ist. Diese besitzt die Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(s-s') w(s',0) e^{-As^2} ds' = w(s,0) e^{-As^2}.$$

Dann kann die Argumentation aus dem Existenzbeweis übernommen werden, und es folgt (3.20).
Somit existiert eine eindeutige Lösung der charakteristischen Anfangswertaufgabe der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung (3.17) und (3.18).

3.7 Black & Scholes - Optionspreisformel

Durch die Substitution $s'' = (s'-s)/\sqrt{2\tau}$ folgt:

$$w(s,\tau) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w_0(s + s''\sqrt{2\tau}) e^{-\frac{1}{2}s''^2} ds''$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-s/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1+1)(s+s''\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}s''^2} ds'' \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-s/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1-1)(s+s''\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}s''^2} ds'' \\
&= I_1 - I_2.
\end{aligned}
$$

Betrachte zunächst I_1:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-s/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1+1)(s+s''\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}s''^2} ds'' \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)s+\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-s/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(s''-\frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau})^2} ds'' \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)s+\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-(s/\sqrt{2\tau})-\frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\
&= e^{\frac{1}{2}(k_1+1)s+\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} N(d_1),
\end{aligned}
$$

wobei

$$
N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \ \text{ mit } \ d_1 = \frac{s}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau}
$$

die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist. Das Vertauschen der Integrationsgrenzen in der letzten Umformung ist aufgrund der Symmetrie der Verteilungsfunktion nach [24], (5.13), möglich.

Das Vorgehen für den Term I_2 ist völlig analog. Ersetze lediglich den Term (k_1+1) durch den Term (k_1-1). So folgt:

$$
I_2 = e^{\frac{1}{2}(k_1-1)s+\frac{1}{4}(k_1-1)^2\tau} N(d_2) \ \text{ mit } \ d_2 = \frac{s}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k_1-1)\sqrt{2\tau}.
$$

Insgesamt gilt also:

$$
\begin{aligned}
w(s,\tau) &= e^{\frac{1}{2}(k_1+1)s+\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)s+\frac{1}{4}(k_1-1)^2\tau} N(d_2), \\
d_1 &= \frac{s}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau}, \\
d_2 &= \frac{s}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k_1-1)\sqrt{2\tau}.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Abschließend transformiert man die Lösung (3.21) der charakteristischen Anfangswertaufgabe (3.17), (3.18) folgendermaßen: Mittels der Substitution

$$v(s,\tau) = e^{-\frac{1}{2}(k_1-1)s-\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau}w(s,\tau)$$

ergibt sich

$$v(s,\tau) = e^s N(d_1) - e^{k_1\tau}N(d_2)$$

und abschließend setzt man

$$s = ln(\frac{x}{K}), \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T-t) \text{ und } u = Kv(s,\tau),$$

dann folgt unmittelbar die Black & Scholes - Optionspreisformel:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= xN(d_1) - Ke^{-R(T-t)}N(d_2), \\ d_1 &= \frac{ln(\frac{x}{K}) + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= \frac{ln(\frac{x}{K}) + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

3.8 Ausweitung des Black & Scholes - Modells

Sei w der Wert eines europäischen Puts, wobei als Basisinstrument wieder Aktien angenommen seien. Der Wert eines Puts hängt von denselben Variablen und Parametern ab wie der Wert eines Calls u:

$$w = w(x,t;K,T,R,\sigma) \text{ mit } (x,t) \in [0,\infty) \times [t_*,T].$$

Um das Black & Scholes - Modell auf europäische Puts anzuwenden, benutze die in [18], (7.3), beschriebene *Put - Call - Parität*:

$$u + Ke^{-R(T-t)} = w + x. \tag{3.23}$$

Diese leitet sich aus der Betrachtung der folgenden beiden Portfolios her:

Portfolio A	besteht aus einer europäischen Call - Option und einem Geldbestand zur Zeit $t\,(< T)$ von $Ke^{-R(T-t)}$,
Portfolio B	besteht aus einer europäischen Put - Option und einer Aktie. Dabei ist die Aktie zu wählen, die als Basisinstrument für die Optionen zugrundegelegt wurde.

Zum Fälligkeitszeitpunkt T der Optionen entspricht der Wert der beiden Portfolios: $\max(x, K)$. Dann folgt aufgrund der Voraussetzung der Abwesenheit von Arbitragemöglichkeiten, daß beide Portfolios auch in $t\,(< T)$ den gleichen Wert haben, und es gilt folglich die oben behauptete Put - Call - Parität.

Wenn also der Wert eines Calls u nach (3.22) gegeben ist, kann über die Put - Call - Parität der Wert w eines Puts bestimmt werden, wenn für u und w die gleichen Bedingungen zugrundegelegt sind.
Eine explizite Bewertungsformel für Put - Optionen, analog der Black & Scholes - Bewertungsformel (3.22) für Calls, erhält man, wenn zusätzlich zu (3.22) und (3.23) die Eigenschaft der Standardnormalverteilung:

$$1 - N(d) = N(-d), \qquad d \in \mathbf{R} \tag{3.24}$$

ausgenutzt wird. Für Put - Optionen gilt dann die Bewertungsformel:

$$w(x,t) = -xN(-d_1) + Ke^{-R(T-t)}N(-d_2).$$

Bei der Anwendung der Black & Scholes - Formel für amerikanische Calls, bei denen keine Dividendenausschüttungen, Bezugsrechte o.ä. anfallen, hat Merton in [30], Theorem 2, bewiesen, daß rationale Investoren das Recht auf vorzeitige Ausübung der Option nie in Anspruch nehmen werden, da es sich nicht lohnt, die Option vor dem Fälligkeitsdatum auszuüben. Somit entspricht der Wert einer amerikanischen Call - Option dem Wert des entsprechenden europäischen Calls.

Für amerikanische Puts gilt diese Eigenschaft im allgemeinen nicht, wie Merton in [30], Theorem 13, gezeigt hat. Überhaupt existiert bisher noch keine analytische Lösung zur Bewertung amerikanischer Put - Optionen.
Man kann jedoch auf numerische Verfahren zurückgreifen, um amerikanische Puts zu bewerten. Dabei sei zum einen auf das Binomial - Modell von Cox, Ross und Rubinstein [9] verwiesen. Zum anderen kann der ursprünglich von MacMillan [28] entwickelte und von Barone - Adesi und Whaley [2] weiter ausgeführte Ansatz quadratischer Approximation angewandt werden.

Für die Bewertung komplexerer Optionstypen, wie barrier options, exotische Optionen, asiatische Optionen oder auch Zinsoptionen sei auf [18] und [45] verwiesen. Weiterhin haben Black und Scholes in [4] sowie Merton in [31] den obigen optionstheoretischen Ansatz auf die Bewertung von Eigenund Fremdkapitaltitel, wie Aktien und Anleihen, übertragen, wobei wieder die Arbeiten [4] und [31], aber insbesondere die Arbeiten [23] und [14], zur weiteren Vertiefung genannt seien. Diese unterschiedlichen Optionstypen entstehen dadurch, daß entweder unterschiedliche Basisinstrumente zugrundegelegt sind, wie etwa bei Zinsoptionen eine Zinskurve oder bei der Bewertung von Aktien das Eigenkapital der Gesellschaft. Andererseits kann sich die Art und Weise der Ausübung der Optionen von der bisher erläuterten unterscheiden, wie z.B. bei barrier options. Bei barrier options steigert sich der innere Wert der Option, je länger ein bestimmter Wert des Basisinstrumentes über- oder unterschritten wird.

Darüber hinaus sind weitere Ausweitungen des Black & Scholes - Modells möglich. So ist die Voraussetzung, daß keine Dividendenausschüttungen während der Laufzeit der Option stattfinden, im allgemeinen realitätsfern.
Deshalb betrachtet man den Fall, daß eine konstante, jährliche Dividende D für eine Aktie stetig ausgeschüttet wird. Diese Annahme ist insbesondere für Aktienindices gebräuchlich.
Wie in Kapitel 2.2 erläutert wurde, mindert eine Dividendenausschüttung den Aktienkurs um die Höhe der Dividende. Falls also ein Aktienkurs x zum Zeitpunkt t, inklusive einer stetigen Dividende D, bis zum Zeitpunkt T $(> t)$ auf x_T steigen würde, so würde die Aktie im anderen Fall, daß keine Dividende ausgeschüttet wird, auf $x_T e^{D(T-t)}$ bis zum Zeitpunkt T steigen. Anders ausgedrückt würde die Aktie ohne Dividendenausschüttung von $xe^{-D(T-t)}$ zum Zeitpunkt t auf x_T zum Zeitpunkt T steigen.
Deshalb erhält man die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung in den folgenden beiden Fällen:

1. Ausgehend von einem Aktienkurs x zur Zeit t wird eine konstante, stetige Dividende D für die Aktie ausgezahlt.

2. Ausgehend von einem Aktienkurs $xe^{-D(T-t)}$ findet keine Dividendenausschüttung statt.

Dies führt bei der Bewertung einer europäischen Option zu der einfachen Regel: Falls für einen Zeitraum $T - t$ eine konstante, stetige Dividende D anfällt, reduziert man den Aktienkurs x zur Zeit t auf $xe^{-D(T-t)}$ und bewertet die Option mit dem reduzierten Aktienkurs, als ob keine Dividende ausgeschüttet würde.
Da

$$\ln\Big(\frac{xe^{-D(T-t)}}{K}\Big) = \ln\frac{x}{K} - D(T-t)$$

gilt, folgt für die Black & Scholes - Optionspreisformel

$$\begin{aligned} u(x,t) &= xe^{-D(T-t)}N(d_{10}) - Ke^{-R(T-t)}N(d_{20}) \\ d_{10} &= \frac{ln(x/K) + (R - D + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_{20} &= \frac{ln(x/K) + (R - D - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Bewiesen wurde diese Ausweitung des Black & Scholes - Modells zum ersten Mal in [30].

Für die Integration der Annahme von konstanten, stetigen Dividendenausschüttungen in das Modell zur Bewertung von Put - Optionen geht man wieder entsprechend der obigen Regel vor und erhält in diesem Fall für die Put - Call - Parität:

$$u + Ke^{-R(T-t)} = w + xe^{-D(T-t)}. \tag{3.26}$$

Die explizite Bewertungsformel für Put - Optionen mit einer stetigen Dividendenausschüttung D erhält man wieder mit (3.24), (3.25) und (3.26):

$$w(x,t) = -xe^{-D(T-t)}N(-d_{10}) + Ke^{-R(T-t)}N(-d_{20}).$$

Falls diskrete Dividendenausschüttungen betrachtet werden sollen, wie sie etwa bei einzelnen Aktien als Basisinstrument realistisch sind, muß zwischen europäischen und amerikanischen Optionen genauer als bisher erfolgt unterschieden werden. Für die Bewertung europäischer Optionen kann man relativ analog wie bei der Voraussetzung konstanter, stetiger Dividenden argumentieren. Eine gute Darstellung dazu wird in [18], S. 249f., gegeben. Bei amerikanischen Optionen kann man, entgegen dem obigen, Beispiele konstruieren, in denen es sich lohnt, das Recht auf vorzeitige Ausübung auszunutzen. Dies führt auf das von Roll, Geske und Whaley in [15], [16], [36] und [44] entwickelte Modell. Eine Einführung in dieses Modells findet man in [18], Kapitel 11.12 und Anhang 11A.

Wie in Kapitel 2 erläutert, ist die Voraussetzung einer konstanten Volatilität σ im Black & Scholes - Modell nicht realistisch. In der Praxis wird die Black & Scholes - Formel im allgemeinen mit Hilfe der impliziten Volatilität angewandt. Dies impliziert zum einen den Smile - Effekt der Volatilität und zum anderen den Term - Structure - Effekt. Das Problem bei einer nichtkonstanten Volatilität ist allerdings, daß nur für den Spezialfall

$$\sigma(x) = \sigma/x \ , \ \sigma = \text{const} \tag{3.27}$$

eine geschlossene Lösung existiert. Ansonsten muß auf numerische Methoden zurückgegriffen werden.

Die von Cox und Ross in [8] entwickelte Lösung u von (3.13), (3.14) und (3.1) des Spezialfalls (3.27) ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} u(x,t;K) &= xe^{-D(T-t)}(N(q_1)+N(q_2)) - Ke^{-R(T-t)}(N(q_1)-N(q_2)) \\ &\quad + \nu(n(q_1)-n(q_2)) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \nu &= \sigma\sqrt{\frac{e^{-2D(T-t)}-e^{-2R(T-t)}}{2(R-D)}}, \\ q_1 &= \frac{xe^{-D(T-t)}-Ke^{-R(T-t)}}{\nu}, \\ q_2 &= \frac{-xe^{-D(T-t)}-Ke^{-R(T-t)}}{\nu}. \end{aligned}$$

$N(q)$ bezeichnet dabei die Standardnormalverteilung und $n(q)$ die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung.
Diese Formel wird als ,,Absolute Diffusion Formula" bezeichnet.

Kapitel 4

Das inverse Problem der Optionsbewertung

In diesem Kapitel wird das von Isakov und Bouchouev in [22] vorgestellte inverse Problem der Optionsbewertung erläutert. Wie bereits im vorangegangenen Kapitel deutlich wurde, hängt die Bewertung von Finanzderivaten kritisch von dem zugrundegelegten stochastischen Prozeß ab. Dabei steht aufgrund des Prinzips der risikoneutralen Bewertung, wie bereits in Kapitel 3.4 deutlich wurde, die benutzte Volatilität im Mittelpunkt.
Black und Scholes gehen in [4] von einer konstanten Volatilität für alle am Markt gehandelten Optionen aus. Am Markt werden jedoch die Optionen mit der impliziten Volatilität gehandelt. Dies führt zu dem in Kapitel 2.1 erläuterten Smile - Effekt sowie dem Term - Structure - Effekt. Da im allgemeinen die Volatilität damit nicht mehr für Optionen mit verschiedenen Basispreisen oder verschiedenen Laufzeiten konstant ist, muß hinterfragt werden, ob das Black & Scholes - Modell auf der Basis einer nichtkonstanten Volatilitätsfunktion überhaupt noch anwendbar ist.
Um das Black & Scholes - Modell an die in der Realität beobachtete implizite Volatilität anzupassen, und zusätzlich die theoretischen und praktischen Vorteile der Optionspreisformel (3.22) zu erhalten, wird die Annahme einer konstanten Volatilität σ in (3.7) aufgegeben und in durch eine lokale Volatilitätsfunktion $\sigma(x)$ ersetzt.
Die bisherigen Versuche das Black & Scholes - Modell auf die implizite Volatilität auszuweiten, hatten zumeist den Nachteil, daß wesentliche Eigenschaften des Modells verloren gingen. Im Modell von Hull und White [19] wurde z.B. ein zusätzlicher stochastischer Volatilitätsfaktor eingeführt. Da allerdings keine Instrumente existieren, die Volatilität selbst zu hedgen, verliert das Black & Scholes - Modell die Eigenschaft der Risikoneutralität.

Um die lokale Volatilitätsfunktion zu bestimmen, wird in Kapitel 4.1 zunächst das inverse Problem der Optionsbewertung in den Variablen x und t formuliert. Im darauf folgenden Kapitel wird das inverse Problem mittels der zugehörigen adjungierten Differentialgleichung auf das inverse Koeffizientenproblem in den Variablen K und τ transformiert, um die Eindeutigkeit und die Stabilität des Problems im Kapitel 4.3 beweisen zu können. Im Kapitel 4.4 wird der Optionswert u zunächst als Funktional des zugrundeliegenden stochastischen Prozesses aufgefaßt und im Kapitel 4.5 mittels der Parametrix - Methode als Fredholmsche Integralgleichung geschrieben. Diese läßt sich mit numerischen Methoden lösen und man erhält als Lösung die gesuchte lokale Volatilitätsfunktion. Im letzten Kapitel wird dann die Rekonstruktion der lokalen Volatilitätsfunktion auf der Basis verschiedener Beipiele verdeutlicht.

4.1 Formulierung des Problems

Zur Herleitung des inversen Problems der Optionsbewertung werden folgende Bedingungen vorausgesetzt:

1. Der risikolose Zinssatz R ist konstant und bekannt über die betrachtete Laufzeit.

2. Es werden europäische Optionen gehandelt.

3. Es wird ein vollkommener Kapitalmarkt unterstellt. Dies impliziert insbesondere, daß keine Transaktionskosten bei Kauf oder Verkauf von Wertpapieren, keine Steuern, sowie keine Beschränkungen für Leerverkäufe existieren und sämtliche gehandelten Wertpapiere vollständig teilbar sind.

4. Der Handel mit Wertpapieren ist stetig.

5. Der Aktienkurs x kann mittels der stochastischen Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{x} = \mu dt + \sigma(x)dz$$

   modelliert werden, wobei $\sigma^2(x)$ jetzt die stetige, zeitunabhängige Varianz des Aktienkurses angibt, und die übrigen Variablen und Parameter wie in den Voraussetzungen zum Black & Scholes - Modell erklärt sind.

6. Die Dividende D ist konstant für die betrachtete Laufzeit der Option und wird stetig ausgeschüttet.

7. Es gibt keine risikolosen Arbitragemöglichkeiten.

Im Gegensatz zu den Voraussetzungen für die Black & Scholes - Formel ist hier eine positive Dividendenausschüttung zulässig. Da in diesem Kapitel europäische Optionen insbesondere auf Aktienindices, wie den S&P 500 - Index, betrachtet werden, kann das Basisinstrument, wie in Kapitel 3 erläutert, als Aktie, die einen stetigen Dividendenertrag ausschüttet, angenommen werden. Dieser stetige Ertrag wird dann als konstant für die Laufzeit der Option angesehen.

Des weiteren ist die zugrundeliegende Volatilität nicht mehr konstant wie im Black & Scholes - Modell, sondern wird zunächst als Funktion in Abhängigkeit vom Kurs des Basisinstrumentes x angenommen. In den Arbeiten [11], [12] und [37] wird diese lokale Volatilitätsfunktion in Abhängigkeit vom Kurse des Basisinstrumentes und der Zeit konstruiert, indem Marktpreise von Optionen mit allen am Markt erhältlichen Basispreisen und Laufzeiten benutzt werden. Allerdings werden Optionen nur mit ganz bestimmten Laufzeiten gehandelt. Für Optionen auf den S&P 500 - Index liegen die möglichen Fälligkeitszeitpunkte immer einen Monat auseinander, so daß nicht ausreichend Marktwerte bezüglich der Laufzeit existieren. Aus diesem Grund wird die lokale Volatilitätsfunktion in [22] als zeit - unabhängige Funktion betrachtet. Um die lokale Volatilitätsfunktion zu konstruieren, werden deshalb die Marktpreise von Optionen zu sämtlichen vorhandenen Basispreisen bei gegebener Laufzeit herangezogen.

Der Wert einer Call-Option $u = u(x, t; K, T, R, D, \sigma(x))$ muß nach Kapitel 3 der rückwärts parabolischen Black & Scholes - Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} x^2 \sigma^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (R - D) x \frac{\partial u}{\partial x} - Ru = 0, \qquad (x,t) \in (0,\infty) \times (t_*, T) \quad (4.1)$$

genügen.
Weiterhin nehme man an, daß

$$u(x,t) \in C(\,[0,\infty) \times [t_*, T]\,).$$

Im Unterschied zu Kapitel 3 wird hier nur verlangt, daß der Optionswert eine stetige Funktion und nicht eine zweimal stetig differenzierbare Funktion sein muß, da in den folgenden Theoremen mit verallgemeinerten Ableitungen und dem Raum Hölder - stetiger Funktionen gearbeitet wird. Dabei gilt: Der Raum $C^\lambda[a,b]$ der Hölder - stetigen Funktionen mit Exponenten $0 < \lambda < 1$

besteht aus den Funktionen $u : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ mit

$$| u(x) - u(y) | \leq A | x - y |^{\lambda}$$

für eine Konstante $A > 0$ und für alle $x, y \in [a,b], a, b \in \mathbf{R}$. Für eine Funktion $u \in C^{\lambda}[a,b]$ ist dann eine Norm wie folgt definiert:

$$| u |_{\lambda} ([a,b]) = \sup_{x,y \in [a,b], x \neq y} \frac{| u(x) - u(y) |}{| x - y |^{\lambda}}, \qquad 0 < \lambda < 1.$$

Für nähere Ausführungen dieser Begrifflichkeiten siehe [13].

Des weiteren gilt analog Kapitel 3:

$$0 \leq u(x,t) \leq x \,,\ [0;\infty) \times [t_*, T].$$

Der Einfachheit halber wird oft $u = u(x,t;K)$ gebraucht und die Abhängigkeit von den anderen Parametern nicht ausgeschrieben.

Die Endbedingung für die obige rückwärts parabolische Differentialgleichung ist gegeben durch:

$$u(x,T;K) = \max(0, x - K), \tag{4.2}$$

da am Verfallstag der Wert des Calls seinem inneren Wert entspricht. Die Randbedingung ist gegeben durch:

$$u(0,t;K) = 0. \tag{4.3}$$

Das inverse Problem der Optionsbewertung besteht darin, die zeitunabhängige Volatilitätsfunktion aus den jeweilig am Markt gehandelten Preisen für Optionen mit allen vorhandenen Basispreisen zu ermitteln:

$$u(x_*, t_*; K) = u_*(K) \qquad , \qquad K \in \omega. \tag{4.4}$$

ω ist dabei ein Intervall in $\mathbf{R}_+$ und es sei angenommen, daß $\sigma(x)$ außerhalb ω bekannt sei.

Das inverse Problem der Optionsbewertung (IPOP): Man bestimme das Funktionenpaar $(\, u(x,t;K)\,,\, \sigma(x)\,)$ so, daß die Bedingungen (4.1) - (4.4) erfüllt sind.

Nach [6] ist das IPOP auch bekannt als inverses Koeffizientenproblem, bei dem die Reaktion des Systems an einem bestimmten Zeitpunkt zu einem bestimmten Zustand, jedoch mit verschiedenen Eingangssignalen, gemessen wird. D.h. ausgehend von einem fixen, meist aktuellen Kurs x_* des Basisinstruments werden sämtliche Marktpreise für Optionen mit einer gegebenen Laufzeit $T - t_*$ und allen vorhandenen Basispreisen bestimmt. Dies spiegelt die Gleichung (4.4) wieder. Die Gleichungen (4.1) - (4.3) stellen das End - Randwertproblem und das gesuchte Funktionenpaar die gesuchte Reaktion auf das System dar.

Bis zur Arbeit [22] gab es noch kein mathematisches Verfahren, das dies inverse Problem im Rahmen in t stetiger Funktionen analysiert. Allerdings existieren verschiedene Verfahren basierend auf der Rekonstruktion eines in t diskreten, impliziten Binomialbaumes auf der Grundlage impliziter Volatiliät. Für weitere Ausführungen dazu siehe z.B. [11]. Des weiteren kann ein alternativer Optimierungsansatz, der von Lagnado und Osher in [25] entwickelt wurde, angewandt werden, um das inverse Problem zu lösen. Dieser Algorithmus erfordert allerdings ein hohes Maß an Computereinsatz .

4.2 IPOP als inverses Koeffizientenproblem mit Endbedingung

Wie in Kapitel 2 erläutert wurde, gilt für $K \longrightarrow \infty$, daß $u(x,t;K,T)$ verschwindet. Dann folgt daraus unmittelbar, daß auch die zugehörigen Ableitungen nach K für $K \longrightarrow \infty$ verschwinden.

Daß die Ableitungen nach dem Parameter K überhaupt existieren, ergibt sich aus der Betrachtung des Differenzenquotienten

$$v(x,t;K) = \frac{1}{h}(u(x,t;K+h) - u(x,t;K)).$$

Dann löst v die Differentialgleichung (4.1) für beliebige h und als Endbedingung erhält man

$$v(x,T;K) = \frac{1}{h}(u(x,T;K+h) - u(x,T;K)).$$

Nach [13], Kapitel 3, Theorem 7, existiert für dieses Endwertproblem eine eindeutig bestimmte Lösung. Insbesondere existiert eine eindeutige Lösung für $h \longrightarrow 0$, da

$$\begin{aligned} v(x,T;K) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\max(0,x-K-h)-\max(0,x-K)) \\ &= \begin{cases} 0 & : \quad x < K \\ -1 & : \quad x \geq K \end{cases} = -H(x-K), \end{aligned}$$

wobei H die Heavysidesche Sprungfunktion darstellt. D.h.

$$v(x,t;K) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(u(x,T;K+h)-u(x,T;K)) = \frac{\partial u}{\partial K}$$

existiert.

Dann folgt mit derselben Argumentation, daß auch die zweite Ableitung von u bezüglich K existiert. Es gilt also

$$\frac{\partial^2 u(x,t;K,T)}{\partial K^2} = \varphi(x,t;K,T).$$

$\varphi(x,t;K,T)$ ist somit selbst eine Lösung von (4.1), wobei die ursprüngliche Endbedingung (4.2) in die folgende Bedingung übergeht:

$$\begin{aligned} \varphi(x,T;K,T) &= \frac{\partial^2}{\partial K^2}[u(x,T;K,T)] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial K^2}[\max(0,x-K)] \\ &= \frac{\partial}{\partial K}[-H(x-K)] \\ &= \delta(x-K), \end{aligned}$$

wobei δ die Diracsche Deltafunktion bezeichnet.

Aus den in [13], Kapitel 3.7, erläuterten Eigenschaften der Greenschen Funktion folgt, daß φ die Lösung der zu (4.1) gehörigen adjungierten Gleichung in K und T darstellt. Nach [13], Kapitel 1, (8.3), ist die zugehörige adjungierte Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial T} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial K^2}(K^2\sigma^2(K)\varphi) - (R-D)\frac{\partial}{\partial K}(K\varphi) - R\varphi.$$

Integriert man die adjungierte Gleichung zweimal bezüglich K von K bis ∞, wobei der zweite Term der rechten Seite partiell integriert wird. Dabei beachte man, daß nach der Aussage am Anfang des Kapitels die Ableitungen von u nach K für $K \longrightarrow \infty$ verschwinden. So gilt für den Term:

$$\begin{aligned}
\int_K^\infty \int_\eta^\infty \frac{\partial}{\partial \xi}(\xi \varphi(x,t;\xi,T)) d\xi d\eta &= -\int_K^\infty \eta \varphi(x,t;\eta,T) d\eta \\
&= \int_K^\infty \eta \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\int_\eta^\infty \varphi(x,t;\xi,T) d\xi\right) d\eta \\
&= -K \int_K^\infty \varphi(x,t;\xi,T) d\xi \\
&\quad - \int_K^\infty \int_\eta^\infty \varphi(x,t;\xi,T) d\xi d\eta \\
&= K \frac{\partial u}{\partial K} - u.
\end{aligned}$$

Definiert man jetzt $\tau = T - t$, so daß τ die vom Zeitpunkt t aus verbleibende Laufzeit der Option bis zum Fälligkeitsdatum der Option angibt. Somit gilt:

$$\tau \in [\,0, \tau_*] \qquad , \qquad \tau_* = T - t_*.$$

Dann folgt für $(K, \tau) \in \mathbf{R}_+ \times (\,0, \tau_*)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{1}{2} K^2 \sigma^2(K) \frac{\partial^2 u}{\partial K^2} - (R - D)\,(\,K \frac{\partial u}{\partial K} - u) - R\,u \\
&= \frac{1}{2} K^2 \sigma^2(K) \frac{\partial^2 u}{\partial K^2} + (D - R)\,K \frac{\partial u}{\partial K} - D\,u. \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

Vereinfachte Versionen der Formel (4.5) wurden in [11] und [12] hergeleitet, allerdings mit Hilfe eines impliziten Binomialmodells. Der Vorteil dieser Herleitungen liegt darin, daß sie anschaulicher sind als die obige Herleitung.

Für $u = u\,(\,K, \tau)$ geht dann die Gleichung (4.2) über in:

$$u(K, 0) = \max(0, x_* - K). \qquad (4.6)$$

Für die Randbedingung (4.3) gilt :

$$u(0, \tau) = e^{-D\tau} x_*, \qquad (4.7)$$

da sich zum einen aufgrund der Voraussetzung einer stetigen Dividendenausschüttung D ein risikoloser Gewinn ergibt und da zum anderen eine Option mit Basispreis 0 in jedem Fall ausgeübt wird. Der faire Wert eines Calls mit Basispreis 0 entpricht folglich gerade dem auf die entsprechende Laufzeit

bezogenen, mit D diskontierten Wert des Basisinstruments.
Und für die Gleichung (4.4) gilt:

$$u\,(\,K, \tau_*) = u_*\,(\,K). \tag{4.8}$$

Somit erhält man insgesamt das inverse Koeffizientenproblem in den Variablen K und τ mit Endbedingung in $\tau = \tau_*$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{1}{2}K^2\sigma^2(K)\frac{\partial^2 u}{\partial K^2} + (D - R)\,K\frac{\partial u}{\partial K} - D\,u, \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\,K, \tau) \in \mathbf{R}_+ \times (\,0, \tau_*) \\
u(0, \tau) &= e^{-D\tau}x_*\,, \qquad\qquad \tau \in [0, \tau_*], \\
u(K, 0) &= \max(0, x_* - K)\,, \qquad K \in \mathbf{R}_+, \\
u(K, \tau_*) &= u_*(K)\,, \qquad\qquad K \in \mathbf{R}_+.
\end{aligned}$$

Bei diesem Problem ist x_* ein bekannter, gegebener Parameter.

Die partielle Differentialgleichung (4.5) mit Anfangswert (4.6) und Randwert (4.7) kann ebenfalls als Black & Scholes - Gleichung für Put - Optionen interpretiert werden, wenn der Wert des Basisinstruments mit dem Basispreis und der Zinssatz mit dem Dividendensatz ausgetauscht wird. Dies folgt aus der Put - Call - Parität:

$$u(x, t; K) - w(x, t; K) = xe^{-D(T-t)} - Ke^{-R(T-t)}.$$

4.3 Das Eindeutigkeitstheorem

Theorem 1 *(a.) Sei $\sigma(K)$ bekannt auf einem gegebenen Intervall $\Omega \subset \omega$. Dann ist ein Funktionenpaar $(\,u(K, \tau), \sigma(K)\,)$, welches (4.5) - (4.8) erfüllt, und damit auch das IPOP, eindeutig bestimmt.*
(b.) Falls zusätzlich ω beschränkt, $0 \notin \overline{\omega}$ und $|\ \sigma_j\ |_\lambda\ (\omega) \leq M$, $j = 1, 2$, $0 < \lambda < 1$, dann ist die Lösung stabil, d.h. es existiert eine Konstante $C = C(M)$, so daß

$$|\ \sigma_1 - \sigma_2\ |_\lambda\ (\omega) \leq C\ |\ u_1(., \tau_*) - u_2(., \tau_*)\ |_{2+\lambda}\ (\omega)$$

gilt, wobei u_1 und u_2 zu σ_1 und σ_2 gehörige Lösungen sind, und overlineω den Abschluß von ω bezeichnet.

Beweis (a.): Als Vorbemerkung sei angemerkt, daß sämtliche klassischen Resultate bezüglich parabolischer Gleichungen auf (4.5) angewendet werden können, da sämtliche Entartungen behoben werden können mit $ln(K)$ als neuer Variable an Stelle von K.
Angenommen $(u_1, \sigma_1), (u_2, \sigma_2)$ seien zwei Lösungen von (4.5) - (4.8). Für $u := u_2 - u_1$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{1}{2}K^2(\sigma_2^2(K)\frac{\partial^2 u_2}{\partial K^2} - \sigma_1^2(K)\frac{\partial^2 u_1}{\partial K^2}) + (D-R)K\frac{\partial u}{\partial K} - Du \\
&= \frac{1}{2}K^2\sigma_2^2(K)\frac{\partial^2 u}{\partial K^2} + (D-R)K\frac{\partial u}{\partial K} - Du + \frac{1}{2}K^2(\sigma_2^2(K) - \sigma_1^2(K))\frac{\partial^2 u_1}{\partial K^2} \\
&= \frac{1}{2}K^2\sigma_2^2(K)\frac{\partial^2 u}{\partial K^2} + (D-R)K\frac{\partial u}{\partial K} - Du + f(K)\frac{\partial^2 u_1}{\partial K^2} \qquad (4.9) \\
&\quad \text{mit } f(K) = \frac{1}{2}K^2(\sigma_2^2(K) - \sigma_1^2(K)).
\end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung die Volatilität auf dem Intervall Ω bekannt ist, folgt daß

$$\begin{aligned}
f(K) = 0 \quad &, \quad K \in \Omega \\
u(K, \tau_*) = 0 \quad &, \quad K \in \Omega.
\end{aligned}$$

Dann verschwinden auch sämtliche Ableitungen von u nach K für $(K, \tau_*) \in \Omega \times \{\tau_*\}$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{1}{2}K^2\sigma_2^2(K)\frac{\partial^2 u}{\partial K^2} + (D-R)K\frac{\partial u}{\partial K} - Du \\
&= 0 \qquad \text{in}\, \Omega \times \{\tau_*\}.
\end{aligned}$$

Differenziert man jetzt diese Gleichung nach τ, dann folgt mit derselben Argumentation wie oben, daß sämtliche Ableitungen der Funktion $u(K, \tau)$ nach τ auf $\Omega \times \{\tau_*\}$ verschwinden.
Nach [45], S.80, ist bekannt, daß $u(K, \tau)$ eine analytische Funktion bezüglich τ ist. Dann folgt, daß sämtliche Koeffizienten der Potenzreihe der analytischen Funktion verschwinden. Damit gilt:

$$u(K, \tau) = 0 \qquad \text{für}\, (K, \tau) \in \Omega \times (0, \tau_*).$$

Erweitert man die Gleichung (4.5) dergestalt, daß $\tau \in (\tau_*, 2\tau_*)$, und benutzt wie oben, daß die Lösung der partiellen Differentialgleichung eine analytische Funktion ist, so gilt:

$$u(K, \tau) = 0 \qquad \text{für}\, (K, \tau) \in \Omega \times (\tau_*, 2\tau_*).$$

Damit gilt insgesamt:

$$u(K,\tau) = 0 \qquad \text{für } (K,\tau) \in \Omega \times (0, 2\tau_*).$$

Betrachtet man nun die adjungierte partielle Differentialgleichungleichung (4.9) auf $\tilde{\Omega} \times (0, 2\tau_*), \tilde{\Omega} = (0, \infty)\backslash\overline{\Omega}$ und benutze folgendes

Lemma 1 *Sei $u(K,\tau)$ Lösung von*

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}K^2\sigma^2(K)\frac{\partial^2 u}{\partial K^2} + (D-R)K\frac{\partial u}{\partial K} - Du + f(K)\varphi(K,\tau) \qquad \text{in } \tilde{\Omega} \times (0, 2\tau_*)$$

und

$$\varphi(K, \tau_*) > \varepsilon \qquad \text{für } \varepsilon > 0. \tag{4.10}$$

Falls

$$u(K,\tau) = \frac{\partial u(K,\tau)}{\partial K} = 0 \qquad \text{in } \partial\Omega \times (0, 2\tau_*) \tag{4.11}$$

und

$$u(K, \tau_*) = 0 \qquad \text{in } \tilde{\Omega}, \tag{4.12}$$

dann folgt

$$u(K,\tau) = 0 \qquad \text{in } \tilde{\Omega} \times (0, 2\tau_*)$$

und

$$f(K) = 0 \qquad \text{in } \tilde{\Omega}.[1]$$

Überprüfe zunächst die Voraussetzungen des Lemmas: Die Bedingung (4.10) gilt, da $\varphi(K,\tau_*) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial K^2}(K,\tau_*)$ eine Lösung der parabolischen Differentialgleichung (4.5) in $\tau = \tau_*$ ist. Diese ist strikt positiv in $\tau = \tau_*$ wie in [13], Kapitel II, Theorem 11, gezeigt wird.
Die Voraussetzungen (4.11) und (4.12) sind klar, wenn man bedenkt, daß $u = u_2 - u_1$ gilt.

Wendet man das Lemma an, so folgt daraus unmittelbar die Behauptung des Theorems (1.a).

[1] Dieses Lemma stellt die Anwendung des in [20] in allgemeinerer Form bewiesenen Theorems 6.4.1. dar.

Beweis (b.): Nach Theorem 1.1 in [21] gilt für das inverse Koeffizientenproblem (4.5) - (4.8):

$$| f |_\lambda (\omega) \leq C(| u_*(.,\tau_*) |_{2+\lambda} (\omega) + | u |_0 (\mathbf{R}_+ \times (0,\tau_*))).$$

Da nach Theorem (1.a) die Lösung eindeutig ist, kann nach [21], Lemma 2.2 und Korollar 2.4, bzw. [20], Bemerkung 6.2.6, $0 < \lambda < 1$ angenommen und der Term $| u |_0 (\mathbf{R}_+ \times (0,\tau_*))$ weggelassen werden. Aus den Voraussetzungen des Theorems (1.b) folgt dann unmittelbar die Behauptung. □

4.4 Der Optionswert als Funktional des zugrundeliegenden stochastischen Prozesses

In diesem Kapitel wird die Lösung des Problems (4.1) - (4.3) in eine Integraldarstellung transformiert. Dazu führt man im ersten Schritt eine Variablensubstitution durch:

$$\tau = T - t \qquad , \qquad y = ln\frac{x}{K}$$

und definiert

$$U(y,\tau;K) = u(x,t;K) \qquad , \qquad a(y) = \sigma(x).$$

Setzt man dies in (4.1) und (4.3) ein, so ergibt sich unmittelbar:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2}a^2(y)(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial U}{\partial y}) + (R-D)\frac{\partial U}{\partial y} - RU,\ (y,\tau) \in \mathbf{R}\times(0,\tau_*), \tau_* = T - t_*, \tag{4.13}$$

$$U(y,0;K) = K \max\,(0, e^y - 1). \tag{4.14}$$

Differenziert man U nach τ, definiert $V = \frac{\partial U}{\partial \tau}$ und vertauscht die Differentiationsreihenfolge geeignet, so ergibt sich aus (4.13):

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{2}a^2(y)(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial V}{\partial y}) + R(\frac{\partial V}{\partial y} - V) - D\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Für die Anfangsbedingung (4.14) folgt aus

$$\begin{aligned} U(y,0;K) &= K\max\,(0, e^y - 1) \\ &= KH(y)(e^y - 1), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial y}(y,0;K) &= K(\delta(y)(e^y-1)+H(y)e^y) \\
&= KH(y)e^y, \\
\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(y,0;K) &= K(\delta(y)e^y+H(y)e^y) \\
&= K(\delta(y)+H(y)e^y),
\end{aligned}
$$

daß

$$
V(y,0;K) = K(\frac{1}{2}a^2(y)\delta(y)+RH(y)-DH(y)e^y) \tag{4.15}
$$

gilt. Dabei bezeichnet δ wieder die Diracsche Deltafunktion und H die Heavysidesche Sprungfunktion. Bezüglich dieser beiden Funktionen wurde der Zusammenhang $H'(x)=\delta(x)$ ausgenutzt.

Die Lösung $V(y,\tau;K)$ dieses Cauchy - Problems kann nach [13], Kapitel 1, Theorem 12, als Integralausdruck der zugehörigen Fundamentallösung $\Gamma(y,\tau;\xi,s)$ geschrieben werden:

$$
\begin{aligned}
V(y,\tau;K) &= \int_{\mathbf{R}} \Gamma(y,\tau;\xi,0)V(\xi,0;K)d\xi \\
&= K\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(y,\tau;\xi,0)[\frac{1}{2}a^2(\xi)\delta(\xi)+RH(\xi)-DH(\xi)e^\xi]d\xi.
\end{aligned}
$$

Integriert man V bezüglich τ von 0 bis τ_*, dann folgt:

$$
\begin{aligned}
U(y,\tau_*;K) &= U(y,0;K)+K\int_0^{\tau_*}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(y,\tau;\xi,0) \\
&\quad \times[\frac{1}{2}a^2(\xi)\delta(\xi)+RH(\xi)-DH(\xi)e^\xi]d\xi d\tau \\
&= U(y,0;K)+K\int_0^{\tau_*}\Gamma(y,\tau;0,0)\frac{1}{2}a^2(0)d\tau \\
&\quad +KR\int_0^{\tau_*}\int_0^{\infty}\Gamma(y,\tau;\xi,0)d\xi d\tau \\
&\quad -KD\int_0^{\tau_*}\int_0^{\infty}\Gamma(y,\tau;\xi,0)e^\xi d\xi d\tau,
\end{aligned}
$$

wobei beim ersten Integralausdruck auf der rechten Seite die Eigenschaft der Deltafunktion:

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi)\varphi(\xi)d\xi = \varphi(0),
$$

und bei den letzten beiden Integraltermen die Definition der Heavysideschen Sprungfunktion:

$$
H(y) = \begin{cases} 0 & : \quad y<0 \\ 1 & : \quad y\geq 0 \end{cases}
$$

ausgenutzt wurde.

Somit ergibt sich insgesamt:

$$\begin{aligned} U(y,\tau_*;K) &= K\max\,(0,e^y-1)+\frac{K}{2}a^2(0)\int_0^{\tau_*}\Gamma(y,\tau;0,0)d\tau \\ &\quad +KR\int_0^{\tau_*}\int_0^{\infty}\Gamma(y,\tau;\xi,0)d\xi d\tau \\ &\quad -KD\int_0^{\tau_*}\int_0^{\infty}\Gamma(y,\tau;\xi,0)e^{\xi}d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{4.16}$$

4.5 Eine Integralgleichung für die unbekannte Volatilität

Da die Fundamentallösung $\Gamma(y,\tau;\xi,s)$ einer parabolischen Differentialgleichung mit Koeffizientenfunktionen im allgemeinen nicht in geschlossener Form darstellbar ist, geht man wie in [13] mit Hilfe der Parametrix - Methode vor. D.h. man konstruiert die Fundamentallösung $\Gamma(y,\tau;\xi,s)$ mit Hilfe unendlicher Reihen und bewertet explizit Terme, die bei $\tau \longrightarrow s$ nicht verschwinden.

Theorem 2 *Sei $\sigma(x)$ eine strikt positive, beschränkte, Lipschitz - stetige Funktion. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} u(x,t_*;K) = max(0,x-K)+I\sigma(K)+\int_0^{\infty}I_1\sigma(K,\nu)d\nu \\ +\int_K^{\infty}I_2\sigma(K,\nu)d\nu+o(T-t_*) \end{aligned} \tag{4.17}$$

mit

$$I\sigma(K)=\frac{K}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sigma(K)\sqrt{T-t_*}}e^{-\frac{(ln\frac{x}{K})^2}{2s^2}}ds,$$

$$\begin{aligned} I_1\sigma(K,\nu) &= \frac{K}{4\pi\nu\sigma(K)\sigma(\nu)}\int_0^{T-t_*}\int_0^{\tau}\Big[\Big(\frac{\sigma^2(\nu)-\sigma^2(K)}{\varsigma}\Big)\Big(\frac{(ln\frac{\nu}{K})^2}{\varsigma\sigma^2(K)}-1\Big) \\ &\quad +\Big(\frac{\sigma^2(\nu)}{2}-R+D\Big)\frac{1}{\sqrt{(\tau-\varsigma)\varsigma}}\Big] \\ &\quad \times exp\Big(-\frac{(ln\frac{x}{\nu})^2}{2(\tau-\varsigma)\sigma^2(\nu)}\Big)exp\Big(-\frac{(ln\frac{\nu}{K})^2}{2\varsigma\sigma^2(K)}\Big)\,d\varsigma d\tau, \end{aligned}$$

$$I_2\sigma(K,\nu) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma^2(\nu)}(\frac{RK}{\nu} - D)\int_0^{\sigma(\nu)\sqrt{T-t_*}} e^{-\frac{(ln\frac{x}{\nu})^2}{2s^2}} ds,$$

$$\lim_{t_*\to T} \frac{o(T-t_*)}{T-t_*} = 0.$$

Zum Beweis von Theorem 2 wird folgendes Lemma benutzt:

Lemma 2 *Sei a(y) eine Lipschitz - stetige Funktion mit*

$$0 < \lambda_0 \leq a(y) \leq \lambda_1 < \infty.$$

Dann kann die Fundamentallösung $\Gamma(y,\tau;\xi,s)$ *eines parabolischen Operators*

$$LV = \frac{1}{2}a^2(y)\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (R - D - \frac{1}{2}a^2(y))\frac{\partial V}{\partial y} - RV - \frac{\partial V}{\partial \tau}$$

geschrieben werden als

$$\Gamma(y,\tau;\xi,s) = Z(y,\tau;\xi,s) + Z_1(y,\tau;\xi,s) + Z^*(y,\tau;\xi,s),$$

mit

$$Z(y,\tau;\xi,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau-s)}a(\xi)} e^{-\frac{(y-\xi)^2}{2(\tau-s)a^2(\xi)}},$$

$$\begin{aligned} Z_1(y,\tau;\xi,s) \quad = \quad & \int_s^\tau \int_{-\infty}^\infty \Big((\frac{a^2(\eta)-a^2(\xi)}{2(\varsigma-s)a^2(\xi)})(\frac{(\eta-\xi)^2}{(\varsigma-s)a^2(\xi)} - 1) \\ & + (\frac{a^2(\eta)}{2} - R + D)\frac{(\eta-\xi)}{(\varsigma-s)a^2(\xi)}\Big) \\ & \times Z(y,\tau;\eta,\varsigma)Z(\eta,\varsigma;\xi,s)d\eta d\varsigma, \end{aligned}$$

und

$$Z^*(y,\tau;\xi,s) \longrightarrow 0 \qquad \textit{für } \tau \longrightarrow s.$$

Außerdem gilt:

$$\int_0^\infty \Gamma(y,\tau;\xi,s)d\xi = \int_0^\infty Z(y,\tau;\xi,s)d\xi + Z^{**}(y,\tau;s)$$

mit

$$Z^{**}(y,\tau;s) \longrightarrow 0 \qquad \textit{für } \tau \longrightarrow s.$$

Beweis des Lemmas: Nach [13], Kapitel I, Theorem 8 und (2.8), läßt sich die Fundamentallösung $\Gamma(y,\tau;\xi,s)$ des parabolischen Operators LV schreiben als:

$$\Gamma(y,\tau;\xi,s) = Z(y,\tau;\xi,s) + \int_s^\tau \int_{-\infty}^{\infty} Z(y,\tau;\eta,\varsigma)\Phi(\eta,\varsigma;\xi,s)d\eta d\varsigma.$$

$Z(y,\tau;\xi,s)$ gibt dabei die Fundamentallösung von

$$L_0 v(y,\tau) = \frac{1}{2}a^2(\xi)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0$$

an. Nach [13], Kapitel I, (2.1), (2.4) - (2.6), kann man $Z(y,\tau;\xi,s)$ unmittelbar bestimmen:

$$Z(y,\tau;\xi,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau-s)}a(\xi)} e^{-\frac{(y-\xi)^2}{2(\tau-s)a^2(\xi)}}.$$

Außerdem ist Φ eine noch zu bestimmende Funktion, so daß Γ eine Lösung von $LV = 0$ ist. Diese Methode wird als Parametrix bezeichnet.
Nach [13], Kapitel I, (4.4), kann man Φ schreiben als

$$\Phi(\eta,\varsigma;\xi,s) = \sum_{\nu=1}^{\infty}(LZ)_\nu(\eta,\varsigma;\xi,s),$$

wobei nach [13], Kapitel I, (4.2) und (4.5),

$$\begin{aligned} LZ(\eta,\varsigma;\xi,s) &= \frac{1}{2}(a^2(\eta)-a^2(\xi))\frac{\partial^2}{\partial x^2}Z(\eta,\varsigma;\xi,s) \\ &\quad +(R-D-\frac{1}{2}a^2(\eta))\frac{\partial}{\partial x}Z(\eta,\varsigma;\xi,s) \\ &\quad -RZ(\eta,\varsigma;\xi,s) \end{aligned}$$

und

$$(LZ)_1(\eta,\varsigma;\xi,s) = LZ(\eta,\varsigma;\xi,s),$$

$$(LZ)_{\nu+1}(\eta,\varsigma;\xi,s) = \int_\tau^t \int_{-\infty}^{\infty} [LZ(\eta,\varsigma;y,\sigma)](LZ)_\nu(y,\sigma;\xi,s)dyd\sigma,\ \nu \geq 2$$

gilt. Dann folgt:

$$\Gamma(y,\tau;\xi,s) = Z(y,\tau;\xi,s) + \sum_{k=1}^{\infty} Z_{(k)}(y,\tau;\xi,s)$$

mit

$$Z_{(k)}(y,\tau;\xi,s) = \int_s^\tau \int_{-\infty}^{\infty} Z(y,\tau;\eta,\varsigma)(LZ)_{(k)}(\eta,\varsigma;\xi,s)d\eta d\varsigma.$$

Nach [13], Kapitel I, (4.14) und Lemma 3, gelten folgende Abschätzungen für $m \geq 1$:

$$\begin{aligned}
(LZ)_{(m)}(y,\tau;\xi,s) &\leq \text{const}\,(\tau-s)^{\frac{m-3}{2}} exp(-\frac{(y-\xi)^2}{2(\tau-s)\lambda_1^2}),\\
Z_{(m)}(y,\tau;\xi,s) &\leq \text{const}\,(\tau-s)^{\frac{m-1}{2}} exp(-\frac{(y-\xi)^2}{2(\tau-s)\lambda_1^2}),
\end{aligned}$$

wobei *const* jeweils für eine positive, beschränkte Konstante steht. Integriert man die zweite Ungleichung bzgl. ξ, so ergibt sich:

$$\int_0^\infty Z_{(m)}(y,\tau;\xi,s)d\xi \leq \text{const}\,(\tau-s)^{\frac{m}{2}},$$

wobei implizit $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$ für $a > 0$ ausgenutzt wird. Dann folgt daraus insgesamt die zweite Aussage des Lemmas 2.

Um schließlich noch den ersten Teil des Beweises zu zeigen, genügt es, nach dem bisher bewiesenen, lediglich Z und $Z_{(1)}$ zu betrachten, da

$$Z^{***}(y,\tau;\xi,s) := \sum_{k=2}^{\infty} Z_{(k)}(y,\tau;\xi,s) \longrightarrow 0 \qquad \text{für } \tau \longrightarrow s.$$

Demnach sind sämtliche partiellen Ableitungen nach y bekannt und $LZ(y,\tau;\xi,s)$ kann direkt bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
LZ(y,\tau;\xi,s) &= \Big[(\frac{a^2(y)-a^2(\xi)}{2a^2(\xi)(\tau-s)})(\frac{(y-\xi)^2}{a^2(\xi)(\tau-s)}-1)\\
&\quad +(\frac{a^2(y)}{2}-R+D)(\frac{(y-\xi)}{a^2(\xi)(\tau-s)})-R\Big]Z(y,\tau;\xi,s).
\end{aligned}$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
Z_{(1)}(y,\tau;\xi,s) &= \int_s^\tau \int_{-\infty}^\infty Z(y,\tau;\eta,\varsigma)LZ(\eta,\varsigma;\xi,s)d\eta d\varsigma\\
&= \int_s^\tau \int_{-\infty}^\infty \Big[(\frac{a^2(\eta)-a^2(\xi)}{2a^2(\xi)(\varsigma-s)})(\frac{(\eta-\xi)^2}{a^2(\xi)(\varsigma-s)}-1)\\
&\quad +(\frac{a^2(\eta)}{2}-R+D)(\frac{(\eta-\xi)}{a^2(\xi)(\varsigma-s)})-R\Big]\\
&\quad \times Z(y,\tau;\eta,\varsigma)Z(\eta,\varsigma;\xi,s)d\eta d\varsigma\\
&= \int_s^\tau \int_{-\infty}^\infty \Big[(\frac{a^2(\eta)-a^2(\xi)}{2a^2(\xi)(\varsigma-s)})(\frac{(\eta-\xi)^2}{a^2(\xi)(\varsigma-s)}-1)
\end{aligned}$$

$$+(\frac{a^2(\eta)}{2} - R + D)(\frac{(\eta-\xi)}{a^2(\xi)(\varsigma - s)})\Big]$$

$$\times Z(y,\tau;\eta,\varsigma)Z(\eta,\varsigma;\xi,s)d\eta d\varsigma + Z^{**}(y,\tau;\xi,s),$$

wobei

$$Z^{**}(y,\tau;\xi,s) \longrightarrow 0 \qquad \text{für } \tau \longrightarrow s.$$

Letzteres folgt aus [13], Kapitel I, Lemma 3:

$$\begin{aligned}
Z^{**}(y,\tau;\xi,s) &:= R\int_s^\tau\int_{-\infty}^\infty Z(y,\tau;\eta,\varsigma)Z(\eta,\varsigma;\xi,s)d\eta d\varsigma \\
&\leq R\int_s^\tau\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau-\varsigma)}a(\eta)} exp(-\frac{(y-\eta)^2}{2a^2(\eta)(\tau-\varsigma)}) \\
&\quad \times\frac{1}{\sqrt{2\pi(\varsigma-s)}a(\xi)} exp(-\frac{(\eta-\xi)^2}{2a^2(\xi)(\varsigma-s)})d\eta d\varsigma \\
&\leq \frac{R}{\sqrt{2\pi}\lambda_0}\int_s^\tau\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau-\varsigma}} exp(-\frac{(y-\eta)^2}{2\lambda_1^2(\tau-\varsigma)}) \\
&\quad \times\frac{1}{\sqrt{\varsigma-s}} exp(-\frac{(\eta-\xi)^2}{2\lambda_1^2(\varsigma-s)})d\eta d\varsigma \\
&= (\frac{2\sqrt{2}R}{\lambda_0\lambda_1^2})\sqrt{\tau-s}\, exp(-\frac{(y-\xi)^2}{2\lambda_1^2(\tau-s)}) \\
&= \text{const}\sqrt{\tau-s}\, exp(-\frac{(y-\xi)^2}{2\lambda_1^2(\tau-s)}).
\end{aligned}$$

Setze $Z^*(y,\tau;\xi,s) := Z^{**}(y,\tau;\xi,s) + Z^{***}(y,\tau;\xi,s)$, dann folgt:

$$Z^{*}(y,\tau;\xi,s) \longrightarrow 0 \qquad \text{für } \tau \longrightarrow s.$$

Damit ist auch die erste Aussage des Hilfslemmas bewiesen. □

Beweis des Theorems 2: Mit Hilfe der Ergebnisse des Lemmas 2 kann die Gleichung (4.16) jetzt folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
U(y,\tau_*;K) &= K\max(0,e^y-1) + \frac{a^2(0)K}{2}\int_0^{\tau_*} Z(y,\tau;0,0)d\tau \\
&\quad +\frac{a^2(0)K}{2}\int_0^{\tau_*} Z_1(y,\tau;0,0)d\tau + RK\int_0^{\tau_*}\int_0^\infty Z(y,\tau;\xi,0)d\xi d\tau \\
&\quad -DK\int_0^{\tau_*}\int_0^\infty Z(y,\tau;\xi,0)e^\xi d\xi d\tau + o(\tau_*) \\
&= K\max(0,e^y-1) + \frac{a^2(0)K}{2}\int_0^{\tau_*} Z(y,\tau;0,0)d\tau
\end{aligned}$$

$$+\frac{a^2(0)K}{2}\int_0^{\tau_*} Z_1(y,\tau;0,0)d\tau \tag{4.18}$$
$$+K\int_0^{\tau_*}\int_0^{\infty}(R-De^{\xi})Z(y,\tau;\xi,0)d\xi d\tau + o(\tau_*),$$

mit
$$\lim_{\tau\to 0}\frac{o(\tau)}{\tau}=0,$$
wobei o das Landau - Symbol bezeichnet. Vernachlässigt man die Terme der Ordnung $o(\tau_*)$, so ergibt sich eine geeignete Approximation für $U(y,\tau_*;K)$.

Substituiert man jetzt in (4.18) $\eta = \ln\frac{\nu}{K}$ in $Z_1(y,\tau;0,0)$ und $\xi = \ln\frac{\nu}{K}$ im letzten Integral. Anschließend substituiere so, daß man zu den ursprünglichen Variablen zurückkehrt, d.h. $x = Ke^y$ und $t = T-\tau$. Dann gilt:
$$u(x,t_*;K) = \max(0, x-K) + I\sigma(K) + \int_0^{\infty} I_1\sigma(K,\nu)d\nu + \int_K^{\infty} I_2\sigma(K,\nu)d\nu, \tag{4.19}$$
wobei
$$I\sigma(K) = \frac{\sigma(K)K}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^{T-t_*}\frac{1}{\sqrt{\tau}}exp(-\frac{(ln\frac{x}{K})^2}{2\tau\sigma^2(K)})d\tau,$$

$$\begin{aligned} I_1\sigma(K,\nu) &= \int_0^{T-t_*}\int_0^{\tau}\Big((\frac{\sigma^2(\nu)-\sigma^2(K)}{2\varsigma})(\frac{(ln\frac{\nu}{K})^2)}{\varsigma\sigma^2(K)}-1) \\ &\quad +(\frac{\sigma^2(\nu)}{2}-R+D)(\frac{ln\frac{\nu}{K}}{\varsigma})\Big)\frac{K}{4\pi\nu\sigma(\nu)\sigma(K)\sqrt{(\tau-\varsigma)\varsigma}} \\ &\quad \times exp(-\frac{(ln\frac{x}{\nu})^2}{2(\tau-\varsigma)\sigma^2(\nu)})exp(-\frac{(ln\frac{\nu}{K})^2}{2\varsigma\sigma^2(K)})d\varsigma d\tau, \end{aligned}$$

$$I_2\sigma(K,\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(\nu)}(\frac{RK}{\nu}-D)\int_0^{T-t_*}\frac{1}{\sqrt{\tau}}exp(-\frac{(ln\frac{x}{\nu})^2}{2\tau\sigma^2(\nu)})d\tau.$$
Damit ist Theorem 2 bewiesen. □

Für $x = x_*$ ist die linke Seite von (4.17) durch (4.4) bestimmt, und man erhält eine nichtlineare Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art in Bezug auf die unbekannte Volatilitätsfunktion σ.

Dieselbe Methode kann für Put - Optionen $w = w(x,t;K)$ angewandt werden. w ist ebenfalls eine Lösung der rückwärts parabolischen Differentialgleichung (4.1), allerdings mit Endbedingung und Randwert:
$$w(0,T;K) \;=\; e^{-R(T-t)}K,$$

$$w(x, T; K) = \max(K - x, 0).$$

Weiterhin sind die Werte für Put - Optionen zum Zeitpunkt $t = t_*$ gegeben:

$$w(x_*, t_*; K) = w_*(K).$$

Wiederholt man dann die obige Argumentation, so ergibt sich

$$w(x, t_*; K) = \max(K - x, 0) + I\sigma(K) + \int_0^\infty I_1\sigma(K, \nu) - \int_0^K I_2\sigma(K, \nu)d\nu.$$

4.6 Numerische Lösung

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie die oben hergeleitete Fredholmsche Integralgleichung numerisch gelöst wird. Dabei wird $x = x_*$ gesetzt und die Integralgleichung gelöst, indem man die folgende Iteration benutzt:

$$\begin{aligned} I\sigma^{(m+1)}(K) &= u_*(K) - \max(0, x_* - K) - \int_0^\infty I_1\sigma^{(m)}(K, \nu)d\nu \\ &\quad - \int_K^\infty I_2\sigma^{(m)}(K, \nu)d\nu, \qquad m \geq 0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

In jedem Iterationsschritt wird dann $\sigma^{(m+1)}(K)$ als Lösung der nichtlinearen Gleichung bestimmt.

Als erstes wird die Singularität in $I\sigma$ durch die Substitution $\tilde{s} = \sqrt{\tau}\sigma(K)$ behoben und anschließend wird zur einfacheren Implementation noch die Substitution $\tilde{s} = s\sqrt{T - t_*}$ durchgeführt, so daß gilt:

$$\begin{aligned} I\sigma(K) &= \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sigma(K)\sqrt{T-t_*}} e^{-\frac{(ln\frac{x_*}{K})^2}{2\tilde{s}^2}} d\tilde{s} \\ &= \frac{K\sqrt{T - t_*}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sigma(K)} e^{-\frac{(ln\frac{x_*}{K})^2}{2(T-t_*)s^2}} ds. \end{aligned}$$

$I_1\sigma(K, \nu)$ wird folgendermaßen definiert:

$$I_1\sigma(K, \nu) = \int_0^{T-t_*} \int_0^\tau f_1(\tau, \varsigma; K, \nu)d\varsigma d\tau.$$

Das Integrationsgebiet ist ein Dreieck in der (τ, ς)-Ebene mit den Eckpunkten $(0,0), (T-t_*, 0), (T-t_*, T-t_*)$. Für die Approximation von $I_1\sigma(K,\nu)$ stehen eine Reihe von Gauß - Quadraturformeln zur Verfügung, wobei hier die in [35] und [26] entwickelte Quadraturformel mit sieben Stützstellen benutzt wird, d.h. man approximiert $I_1\sigma$ durch

$$I_1\sigma(K,\nu) \approx \sum_{j=1}^{N_1} \mu_j f(\tau_j, \varsigma_j; K, \nu), \qquad N_1 = 7.$$

Um die Singularität in $I_2\sigma(K,\nu)$ zu beheben, führt man die Substitution $s = \sqrt{\tau}\sigma(\nu)$ durch. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} I_2\sigma(K,\nu) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma^2(\nu)}\left(\frac{RK}{\nu} - D\right) \int_0^{\sigma(\nu)\sqrt{T-t-*}} e^{-\frac{(ln\frac{x_*}{\nu})^2}{2s^2}} ds \\ &= \int_0^{\sigma(\nu)\sqrt{T-t_*}} f_2(s; K, \nu) ds. \end{aligned}$$

Zur numerischen Berechnung kann eine eindimensionale Gauß - Quadraturformel aus [34] benutzt werden, z.B. die Gauß - Legendre - Quadratur mit 10 Stützstellen in [34], S.148, so daß $I_2\sigma$ approximiert wird durch

$$I_2\sigma(K,\nu) \approx \sum_{j=1}^{N_2} \lambda_j f_2(s_j; K, \nu), \qquad N_2 = 10.$$

Setze

$$K_i = K_{\min} + h(i-1),\ i = 1, \ldots, n+1,\ n = \frac{1}{h}(K_{\max} - K_{\min}),$$

wobei $K_{\min}$ und $K_{\max}$ der kleinste bzw. der größte verfügbare Basispreis an einem Handelstag und h den Abstand der Basispreise voneinander angibt. Das Fehlen von Basispreisen für $K < K_{\min}$ und $K > K_{\max}$ ist kein großes Problem, da für derartige Basispreise die Integranden der Integralgleichung (4.17) exponentiell klein werden, und damit bei einer Betrachtung des Intervalls $[K_{\min}, K_{\max}]$ der Approximationsfehler vernachlässigbar ist.

Um die Integrale in (4.20) zu approximieren, wird die extended trapezoidal rule aus [34], S.133, benutzt. Für $i = 1, \ldots, n+1$: folgt deshalb

$$I\sigma^{(m+1)} = u_*(K_i) - \max(0, x_* - K_i)$$

$$-h\sum_{j=2}^{n} I_1\sigma^{(m)}(K_i,K_j) - \frac{h}{2}I_1^{(m)}(K_i,K_1) - \frac{h}{2}I_1^{(m)}(K_i,K_{(n+1)})$$

$$-h\sum_{j=i+1}^{n} I_2\sigma^{(m)}(K_i,K_j) - \frac{h}{2}I_2^{(m)}(K_i,K_i) - \frac{h}{2}I_2^{(m)}(K_i,K_{(n+1)}). \qquad (4.21)$$

Für $i = n+1$ müssen dabei die letzten beiden Terme gestrichen werden. Dann wird in jedem Iterationsschritt die Integralgleichung (4.21) nach $\sigma(K_i)$ gelöst, wobei die in [34] beschriebene Bisektionsroutine „rtbis" verwendet wird.

Als Abbruchkriterium wird schließlich angenommen:

$$\max_i \mid \sigma^{(m+1)}(K_i) - \sigma^{(m)}(K_i) \mid < 10^{-5}$$

4.7 Beispiele

In diesem Kapitel werden Beispiele für die Rekonstruktion der konstanten und der lokalen Volatilität angegeben. Dafür wurde der in [22] entwickelte Algorithmus nach der in Kapitel 4.6 beschriebenen Vorgehensweise in C programmiert. Die aus diesem Programm errechneten Daten wurden dann mit Maple in die grafische Form gebracht.

Die entsprechenden C - Programme sind auf der anbei liegenden Diskette enthalten. Dabei gehören die Programme mit $1a\_*.*$ und $1b\_*.*$ zu dem Beispiel 1. Die lokale Volatilitätsfunktion, die auf der Basis von Werten auf dem Intervall $[650, 750]$ rekonstruiert wurde, wurde mit den $1a\_*.*-$ Programmen entwickelt. Der zweiten lokalen Volatilitätsfunktion entsprechen dann die $1b\_*.*-$ Programme. Das Beipiel 2.a wurde mit den C - Programmen $2o\_*.*$ und $2oiv\_*.*$ entwickelt, wobei mit den $2o\_*.*-$ Programmen die lokale Volatilitätsfunktion bestimmt wurde und mit den $2oiv\_*.*-$ Programmen die implizite Volatilitätsfunktion. Das Beipiel 2.b wurde dann entsprechend mit den Programmen $2d\_*.*$ und $2div\_*.*$ programmiert. Die Daten für das letzte Beipiel wurden schließlich mit den Programmen $dd\_*.*$ und $ddiv\_*.*$ berechnet.

Beispiel 1: Rekonstruktion der konstanten Volatilität
Um den oben entwickelten Algorithmus zu testen, berechne die Optionswerte $u_*(K)$ aus (4.4) durch die Black & Scholes - Formel (3.22) mit einer konstanten Volatilität $\sigma = 0.15$, wobei die Menge der Basispreise $[K_{\min}, K_{\max}] = [650, 750]$ und die Schrittweite der Optionskontrakte $h = 5$ sei. Des weiteren werden folgende Parameter benutzt:

$$x_* = 700, \qquad T - t_* = 0.1, \qquad R = 0.05, \qquad D = 0.02.$$

Die Iteration wird dann mit einer angenommenen Volatilität $\sigma^{(0)} = 0.2$ gestartet. Wertet man die Lösungsdaten des Algorithmus aus, so stellt man fest, daß der Approximationsfehler am Rand des Basispreisintervalls steigt. Um die Genauigkeit der Approximation zu erhöhen, weite man das Intervall der Basispreise auf $[K_{\min}, K_{\max}] = [625, 775]$ aus. Als Resultat erhält man eine bessere Näherung der konstanten Anfangsvolatilität $\sigma = 0.15$ ist. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 4.1 dargestellt.

Abbildung 4.1: Rekontruktion der konstanten Volatilität

Beispiel 2.a: Rekonstruktion der lokalen Volatilität
In diesem Beispiel wird der obige Algorithmus auf der Basis von Marktdaten für Optionen auf den S&P 500 - Index angewandt. Die benötigten Optionswerte $u_*(K)$ entsprechen den am 9.10.1998 an der New Yorker Börse AMEX[2] gehandelten Optionen für einen Oktober - Kontrakt. Die Restlaufzeit der Optionen beträgt 8 Handelstage. Dabei geht man generell von 252 Handelstagen im Jahr aus. Die lokale Volatilität wir hier auf einem Intervall von $[950, 1050] = [K_{\min}, K_{\max}]$ rekonstruiert. Der Indexstand x_* an diesem Tag war 984.32. Es werden also folgende Parameter benutzt:

$$x_* = 984.32, \qquad T - t_* = \frac{8}{252}, \qquad R = 0.05, \qquad D = 0.02.$$

In Abbildung 4.2 wird dann die am 9.10.1998 am Markt beobachtete implizite Volatilität mit der lokalen Volatilität verglichen.

Abbildung 4.2: Rekontruktion der lokalen Volatilität für Optionen auf den S&P 500 - Index mit einer Restlaufzeit von 8 Handelstagen.

[2] AMEX = American Stock Exchange

Beispiel 2.b: Rekonstruktion der lokalen Volatilität
Hier werden wie in Beipiel 2.a Marktdaten für Optionen auf den S&P 500 - Index vom 9.10.1998 angewandt. Bis auf die Laufzeit der Optionen sind die benutzten Parameter identisch. In diesem Fall wird jedoch der Unterschied zwischen impliziter und lokaler Volatilität für einen Dezember - Kontrakt dargestellt, d.h. $T - t_* = \frac{62}{252}$. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 4.3 dargestellt.

Abbildung 4.3: Rekontruktion der lokalen Volatilität für Optionen auf den S&P 500 - Index mit einer Restlaufzeit von 62 Handelstagen.

Beispiel 3: Rekonstruktion der lokalen Volatilität
In diesem Beispiel wird der Algorithmus auf der Basis von Marktdaten für Optionen auf den Deutschen Aktienindex (DAX) vom 10.11.1998 angewandt. Die Optionswerte $u_*(K)$ entsprechen den an der Frankfurter Börse gehandelten Optionen für einen Dezember - Kontrakt. Die Restlaufzeit der Optionen beträgt 36 Handelstage. Die lokale Volatilität wird auf einem Intervall $[4400, 5200]$ rekonstruiert. Der Indexstand x_* an diesem Tag war 4762.38. In Abbildung 4.4 wird dann die am 10.11.1998 am Markt beobachtete implizite Volatilität mit der lokalen Volatilität verglichen.

Abbildung 4.4: Rekontruktion der konstanten Volatilität für Optionen auf den DAX mit einer Restlaufzeit von 36 Handelstagen.

Kapitel 5

Schluß

Mit dem von Isakov und Bouchouev in [22] vorgestellten Algorithmus zur Berechnung der lokalen Volatilitätsfunktion wird eine Ausweitung des Black & Scholes - Modells auf den am Markt beobachteten Smile - Effekt der Volatilität erreicht. D.h. gegenüber früheren Modellen, wie etwa [19], können zum einen die theoretischen und praktischen Eigenschaften der Optionspreisformel von Black und Scholes erhalten werden, ohne das zusätzliche geschätzte oder stochastische Größen in das Modell einfließen. Die einzigen zusätzlichen Parameter, die benötigt werden, um das inverse Problem zu lösen, sind sämtliche am Markt beobachteten Optionswerte. Man kann also weiterhin von einem vollständigen Gleichgewichtsmodell sprechen.
Zum anderen übernimmt die lokale Volatilitätsfunktion, wie man in den Beispielen in Kapitel 4.7 sehen kann, die Skewness - Eigenschaft, die typisch für die am Markt beobachtete implizite Volatilität ist. So daß diese in der Realität beobachtete Eigenschaft in das Modell integriert und somit in der Optionspreisbildung berücksichtigt werden kann. Man hat folglich das Black & Scholes - Modell mit Hilfe der lokalen Volatilitätsfunktion einen wichtigen Schritt weiter der Realität angepaßt.

Literaturverzeichnis

[1] Ayres, H.F.: Risk Aversion in the Warrants Market. Indus. Management Rev. 4 (Fall), S. 497 - 505, (1963)

[2] Barone-Adesi, G. und Whaley, R.E.: Efficient Analytic Approximation of American Option Values. Journal of Finance 42 (June), S. 301 - 320, (1987)

[3] Baumol, W.J., Malkiel, B.G. und Quandt, R.E.: The Valuation of Convertible Securities. Q.J.E. 80 (February), S. 48 - 59, (1966)

[4] Black, F. und Scholes, M.: The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy 81 (May-June), S. 637 - 659, (1973)

[5] Boness, A.J.: Elements of a Theory of Stock - Option Values. J.P.E. 72 (April), S. 163 - 175, (1964)

[6] Bouchouev, I.: Inverse Parabolic Problems with Applications to Option Pricing. PhD Dissertation , (1997)

[7] Chen, A.H.Y.: A Model of Warrant Pricing in a Dynamic Market. Journal of Finance 25 (December), S. 1041 - 1060, (1970)

[8] Cox, J.C und Ross, S.A.: The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. Journal of Financial Economics 3 (March), S. 145 - 166, (1976)

[9] Cox, J.C., Ross, S.A. und Rubinstein, M.: Option Pricing: A Simplified Approach. Journal of Financial Economics 7 (October), S. 229 - 264, (1988)

[10] Derman, E. und Kani, I.: Riding on a smile. RISK 7 (February), S. 32 - 39, (1994)

[11] Derman, E., Kani, I. und Zou, J.Z.: The Local Volatility Surface: Unlocking the Information in Index Option Prices. Financial Analysts Journal (July-August), S. 25 - 36, (1996)

[12] Dupire, B.: Pricing with a smile. RISK 7 (January), S. 18 - 20 (1994)

[13] Friedman, A.: Partial Differential Equation of Parabolic Type. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New York, (1964)

[14] Gaida, S.: Kreditrisikokosten - Kalkulation mit Optionspreisansätzen. IFK Edition 2, LIT Verlag Münster - Hamburg - London, (1997)

[15] Geske, R.: A Note on an Analytic Valuation Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends. Journal of Financial Economics 7, S. 375 - 380, (1979)

[16] Geske, R.: Comments on Whaley's Note. Journal of Financial Economics 9, S. 213 - 215, (1981)

[17] Hielscher, U.: Investmentanalyse. R. Oldenbourg Verlag München Wien, (1990)

[18] Hull, J.: Options, Futures, and other Derivatives. Prentice Hall International Edition, 3rd Edition, New York, (1997)

[19] Hull, J. und White, A.: The pricing of options on assets with stochastic volatilities. Journal of Finance 42, S. 125 - 144, (1987)

[20] Isakov, V.: Inverse Source Problems. American Mathematical Society Providence, Rhode Island, (1990)

[21] Isakov, V.: Inverse Parabolic Problems with the Final Overdetermination. Comm. Pure Appl. Math. 54, S. 185 - 209, (1991)

[22] Isakov, V. und Bouchouev, I.: The Inverse Problem of Option Pricing. Inverse Problems 13, Nr. 5, S. L11 - L22, (1997)

[23] Jurgeit, L.: Bewertung von Optionen und bonitätsrisikobehafteten Finanztiteln: Anleihen, Kredite und Fremdfinanzierungsfaszilitäten. Deutscher Universitäts-Verlag, Wiesbaden, (1989)

[24] Krengel, U.: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Vieweg Studium Aufbaukurs Mathematik, 3. Aufl., (1991)

[25] Lagnado, R. und Osher, S.: Reconciling Differences. RISK 10 (April), S. 79 - 83, (1997)

[26] Laursen, M. und Gellert, M.: Some criteria for numerically integrated matrices and quadrature formulas for triangles. Int. J. num. Meth. Engng. 12, S. 67 - 76, (1978)

[27] Loistl, O.: Computergestütztes Wertpapiermanagement. R. Oldenbourg Verlag München Wien, 4. Aufl., (1992)

[28] MacMillan, L.W.: Analytic Approximation for the American Put Option. Advances in Futures and Options Research 1, S. 119 - 139, (1986)

[29] McKean, H.P.: Stochastic Integrals. Academic Press, New York, (1969)

[30] Merton, R.C.: Theory of Rational Option Pricing. Bell Journal of Economics and Management Science 4 (Spring), S. 141 - 183, (1973)

[31] Merton, R.C.: On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. Journal of Finance 29, S. 449 - 470, (1974)

[32] Natterer, F.: Partielle Differentialgleichungen. Interne Quelle, Vorlesungsskript WS 1996/97

[33] Neftci, N.S.: An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives. Academic Press, (1996)

[34] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. und Flannery, B.P.: Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press, 2nd Edition, (1992)

[35] Reddy, C.T. und Shippy, D.J.: Alternative integration formulae for triangular finite elements. Int. J. num. Meth. Engng. 17, S. 133 - 153, (1981)

[36] Roll, R.: An Analytic Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends. Journal of Financial Economics 5, S. 251 - 258, (1977)

[37] Rubinstein, M.: Implied Binomial Trees. Journal of Finance 49 (July), S. 771 - 818, (1994)

[38] Samuelson, P. A.: Rational Theory of Warrant Pricing. Indus. Management Rev. 6 (Spring), S. 506 - 532, (1965)

[39] Schmitz, N.: Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitstheorie. Interne Quelle, Skripten zur Mathematischen Statistik, 2. Aufl., (1990)

[40] Sprenkle, C.: Warrant Prices as Indications of Expectations. Yale Econ. Essays 1, S. 179 - 232, (1961)

[41] Steiner, M. und Bruns, C.: Wertpapiermanagement. Schäffer-Poeschel Verlag Stuttgart, 5. Aufl., (1996)

[42] Thorp, E.O. und Kassouf, S.T.: Beat the Market. Random House New York, (1967)

[43] Uhlir, H. und Steiner, P.: Wertpapieranalyse. Physica - Verlag Heidelberg, 2. Aufl., (1991)

[44] Whaley, R.: On the Valuation of American Call Options on Stocks with Known Dividends. Journal of Financial Economics 7, S. 207 - 211, (1979)

[45] Wilmott, P., Dewynne, J. und Howison, S.: Option Pricing: Mathematical Models and Copmutation. Oxford Financial Press, (1993)

Hiermit erkläre ich an Eides statt, daß ich diese Arbeit selbständig angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen benutzt habe.

Münster, den 11. Dezember 1998