Angewandte Mathematik

Erwin Pier-Ribbert

Das inverse Problem der eindimensionalen Wellengleichung mit Potentialterm

1995

Universität Münster

Angewandte Mathematik

Das inverse Problem der eindimensionalen Wellengleichung mit Potentialterm

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften im Fachbereich Mathematik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms–Universität Münster

vorgelegt von

Erwin Pier-Ribbert
aus Soest

1995

Dekan:	Prof. Dr. F.-J. Holtmeier
Erster Gutachter:	Prof. Dr. F. Natterer
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. C. W. Cryer
Tag der mündlichen Prüfungen:	
Tag der Promotion:	

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die in dieser Arbeit untersuchten inversen Probleme gehören in der Anwendung zu den Problemen, bei denen versucht wird, aus außerhalb eines Materials gemessenen Daten das Innere des Materials beschreibende Parameter zu gewinnen. Wir arbeiten mit der Wellengleichung, die in den mathematischen Modellierungen vieler von der Anwendung her weit auseinanderliegender Gebiete auftritt. Das von uns behandelte Problem ist aus einem inversen Streuproblem der Quantenmechanik herleitbar, bei dem aus Spektraldaten eines Sturm-Liouville Operators dieser bestimmt werden soll. Ein weiterer Anwendungsbereich liegt in der Seismologie. Ein kostenintensives Anlegen von Bohrlöchern zur Erderkundung soll dort durch Methoden zur Lösung der auftretenden inversen Probleme ersetzt werden. Dabei liegen als Informationen die Ergebnisse aus an der Erdoberfläche durchgeführten Messungen von Wellen, die den Boden durchlaufen haben, vor.

Um einen Zugang zu einer mathematischen Beschreibung und zu Lösungsmethoden zu gewinnen, die für mehrdimensionale Probleme genutzt werden können, werden die Probleme im eindimensionalen Ortsraum betrachtet. Dies entspricht in der Seismologie der Vorstellung einer geschichteten Erde.

Wir untersuchen das inverse Problem der Bestimmung des Potentials $q = q(x)$, $x \in [0,1]$, eines Differentialoperators $\frac{d^2}{dt^2} - \frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ bei gegebenem Randwert $u(0,t)$, $t \in [0,2]$, einer Lösung u. $u(0,t)$ ist Randwert zu einer δ-Distribution in der t-Ableitung von u zur Zeit $t = 0$. Die δ-Distribution modelliert eine Impulserzeugung. $u(0,t)$ wird auch als Impulsantwort bezeichnet. Wir betrachten als zweites Problem die gleiche Aufgabe mit der δ-Distribution nicht im Anfangswert u_t, sondern in der Funktion selbst. Die beiden Probleme modellieren verschiedene physikalische Prozesse. In der mathematischen Untersuchung fördert ihre gemeinsame Betrachtung das Verständnis wesentlich. Die Herleitung von Aussagen zu den entsprechenden direkten Problemen, die Bestimmung einer Lösung u bei bekanntem Potential q, gibt wichtige Hinweise zur Lösung der inversen Probleme.

Ziel dieser Arbeit ist die exakte Problemdefinition im distributiven Sinn und eine Übertragung der damit erreichbaren Ergebnisse in die Numerik. Es erfolgt die Klärung der Anfangswert- und der Randwertannahme. Die distributive Formulierung wird in einen Zusammenhang zu einer klassischen Formulierung als gemischtes Problem und zu den Gel'fand-Levitan-Gleichungen gestellt. Damit können wir die Schlechtgestelltheit der inversen Probleme bestimmen und erhalten zwei Zugänge zur Lösung derselben. Die klassische Formulierung der direkten Probleme erlaubt eine Diskretisierung mit Differenzenverfahren, aus denen jeweils ein rekursiver Ansatz zur Lösung des entsprechenden inversen Problems mit Hilfe von Differenzensternen folgt. Es gelingt uns, auf der Grundlage der Differenzenverfahren eine sinnvolle Diskretisierung der distributiven Formulierungen insbesondere der auftretenden δ-Distributionen herzuleiten. Die lineare Gel'fand-Levitan-Gleichung führt zu einem Lösungsansatz der inversen Probleme über die Diskretisierung Fredholmscher Integralgleichungen mit dem Nyström-Verfahren. Der Übergang zwischen dem gemischten Problem und der linearen Gel'fand-Levitan-Gleichung wird durch Distributionen möglich. Durch die gewonnenen Diskretisierungen der distributiven Formulierungen sind wir in der Lage, diesen Übergang auf die diskreten Betrachtungsweisen zu übertragen. Im Vordergrund der numerischen Rechnungen steht ein Vergleich zwischen der rekursiven Auflösung mit Differenzensternen und dem Zugang über das Nyström-Verfahren an Beispielen. Die Fehleranalyse soll zeigen, wie sich die Schlechtgestelltheit der inversen Probleme in den Resultaten bemerkbar macht.

Wir beginnen diese Arbeit in **Kapitel 1** mit einer physikalischen Motivation der Problemstellung. Für diese geben wir eine vorläufige mathematische Modellierung an und stellen verwandte Gleichungen vor.
In **Kapitel 2** präzisieren wir die mathematische Problemformulierung, indem wir Halbraum-, Viertelraum- und Halbstreifenprobleme aus distributiver Sicht mit distributiven Inhomogenitäten, Anfangs- und Randwerten und variablenabhängigen Koeffizienten einführen. Von Interesse ist dabei die Behandlung von δ-Distributionen in den Ecken der betrachteten Gebiete. Wir schließen Kapitel zwei mit einer Formulierung der von uns behandelten Problemstellungen.
Kapitel 3 enthält eine umfassende Betrachtung der Riemannfunktion der oberen Halbebene, die wesentliches Element der Lösungen der von uns betrachteten Probleme ist. Die von uns als Lösung eines distributiven Problems definierte Riemannfunktion kann mit Hilfe eines klassisch formulierten charakteristischen Problems, auch Goursatproblem genannt, beschrieben werden. Die Lösung des Goursatproblems wiederum ist gleich der Lösung einer Integralgleichung aus der ein System von Integralgleichungen zur Beschreibung des inversen Problems folgt. Über die Riemannfunktion und ihre Einschränkung auf Teilgebiete des $\mathbf{R}^2$ gelangen wir zur Darstellung von Lösungen der von uns betrachteten Viertelraum- und Halbstreifenprobleme. Die t-Ableitung der Riemannfunktion wird später für die Herleitung der nichtlinearen Gel'fand-Levitan-Gleichung genutzt. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels geben wir eine Basislösung der rechten Halbebene an, die zur Herleitung der linearen Gel'fand-Levitan-Gleichung wichtig ist.
In **Kapitel 4** beantworten wir Existenz- und Eindeutigkeitsfragen bezüglich der Lösungen von uns betrachteter direkter und inverser Probleme. Die Vorgehensweise basiert auf einer klassischen Formulierung als gemischtes Problem und als System von Integralgleichungen. Eine Stabilitätsanalyse im letzten Teil dieses Kapitels deutet auf eine Schlechtgestelltheit zweiter bzw. erster Ordnung der untersuchten inversen Probleme hin.
Die erste numerische Betrachtung in dieser Arbeit erfolgt in **Kapitel 5**. Wir stellen Differenzenverfahren zur approximativen Lösung der klassischen gemischten direkten Probleme vor und sind in der Lage, über diesen Zugang die distributiven Problemformulierungen sinnvoll zu diskretisieren. Insbesondere folgt eine sinnvolle Diskretisierung der Diracschen δ-Distribution und der Integration über Charakteristikenabschnitte. So, wie die Lösung des gemischten Problems die Lösung eines Systems von Integralgleichungen ist, so leiten wir abschließend in diesem Kapitel aus den Differenzensternen Summenformeln her, die Diskretisierungen dieser Integralgleichungen entsprechen.
In **Kapitel 6** beschreiben wir auf Differenzensternen zur Lösung der direkten Probleme beruhende rekursive Algorithmen zur approximativen Lösung der inversen Probleme. Sie folgen dem Prinzip des sogenannten „layer-stripping“ oder auch dem „downward continuation“ Ansatz.
Zum Vergleich mit den numerischen Resultaten der Lösungen zu Kapitel 6 ziehen wir eine Lösung über die lineare Gel'fand-Levitan-Gleichung heran. Dazu leiten wir in **Kapitel 7** die Gel'fand-Levitan-Gleichungen mit distributiven Überlegungen her.
Als Grundlage für die numerische Lösung der linearen Gel'fand-Levitan-Gleichung nutzen wir das Nyström-Verfahren, welches wir in **Kapitel 8** vorstellen und mit Fehlerabschätzungen versehen. Wir geben einen auf der Cholesky-Zerlegung beruhenden Algorithmus zur Lösung der linearen Gel'fand-Levitan-Gleichung an. Es folgen Fehlerabschätzungen zu den Lösungen der inversen Probleme mit diesem Ansatz. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels können wir die distributive Herleitung der linearen Gel'fand-Levitan-Gleichung aus Kapitel 7 in eine diskrete Betrachtung übertragen und setzen so die Differenzenverfahren und die Diskretisierung der linearen Gelfand-Levitan-Gleichung in Beziehung zueinander. Dazu nutzen wir die Diskretisierung der distributiven Probleme aus Kapitel 5.
In **Kapitel 9** stellen wir weitere Ansätze zur Lösung der inversen Probleme vor. Eine Linearisierung der inversen Probleme führt zu Born-Approximationen. Sie sind die Ergebnisse des ersten Iterationsschrittes der danach vorgestellten quasi Newton-Verfahren. Die Methode der Trennung der Variablen ist mehr zur Vervollständigung angegeben. Sie führt zu einer aus der Quantenmechanik stammenden Problemstellung, die mit den in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren approximativ gelöst werden kann.
Kapitel 10 enthält die Vorstellung und Diskussion numerischer Ergebnisse der implementierten Algorithmen. Es spiegelt sich die Schlechtgestelltheit der inversen Probleme in den Beispielrechnungen wieder. Die Lösung über das Nyström-Verfahren und die rekursive Auflösung mit dem Differenzenverfahren liefern vergleichbare Ergebnisse.

Die Theorie zum inversen Problem der eindimensionalen Wellengleichung mit Potentialterm entwickelte sich im wesentlichen aus zwei Interessengebieten.

Zum einen haben Gel'fand und Levitan in ihrem klassischen Artikel [20] eine Verbindung zu einem inversen Streuproblem der Quantenmechanik hergestellt. Sie gehen von einem inversen Sturm-Liouville Problem aus, welches darin besteht, aus einer gegebenen Spektralverteilungsfunktion den Differentialoperator zweiter Ordnung zu bestimmen, dem diese Spektralverteilungsfunktion zugeordnet ist. Siehe auch Neumark [40] Kap. VIII für eine umfassende Überarbeitung dieses Themas. Die Eigenfunktionen zweier Differentialoperatoren mit entsprechenden Randbedingungen werden mit Hilfe orthogonalisierender Kerne aus den Eigenfunktionen des jeweils anderen Differentialoperators dargestellt. Diese Darstellung entspricht den als Integraloperatoren vorliegenden Transmutationen aus Natterer [39], aufbauend auf einer Idee, die Carroll [12], Preface, auf zwei Arbeiten aus dem Jahre 1938, eine von Delsarte und eine von Friedrichs [19], zurückführt. Wählt man als einen dieser Operatoren den gesuchten, und als den anderen denjenigen mit gesuchtem Koeffizienten identisch Null, so genügen die Kerne jeweils einem in der oberen bzw. in der rechten Halbebene formulierten Goursatproblem und der linearen bzw. nichtlinearen Gel'fand-Levitanschen Integralgleichung. Aus diesen Kernen läßt sich der Differentialoperator rekonstruieren. Diese Theorie des inversen Sturm-Liouville Problems ist bereits eingehend in Textbüchern beschrieben, vergleiche Neumark [40] Kap. VIII, Carroll [12], Gladwell [22] Chapt. 9, Marchenko [34] Chapt. 1, Chapt. 2, Levitan [32] Chapt. 1, Chapt. 2. In Lavrent'ev, Reznitskaya und Yakhno [31] p. 64 ist eine kurze und prägnante Darstellung des Zusammenhangs zwischen der Spektralverteilungsfunktion und dem Koeffizienten des Differentialoperators gegeben. Aus dem Gebiet der Spektraltheorie mit einer ähnlichen Problemstellung leitete Marchenko die sogenannte Marchenko-Integralgleichung her, siehe [34], wo zahlreiche weitere Literatur zu diesem Thema angegeben ist.

Erste Ansätze zur Übertragung dieser Theorie in numerische Formulierungen mit Hilfe von Diskretisierungsverfahren finden sich Case und Kac [13]. Dort wird die Schrödingergleichung durch finite Differenzen diskretisiert. Die aus der resultierenden Dreitermrekursion folgenden Polynome werden analog zur Gel'fand-Levitanschen Darstellung orthogonalisierender Kerne mit Hilfe von Summenformeln zu anderen Polynomen in Beziehung gesetzt. Die Koeffizienten dieser Summendarstellung erfüllen selber Summenformeln, die an die lineare Gel'fand-Levitansche Integralgleichung angelehnt sind.

Berryman und Greene [7] diskretisieren sowohl die Schrödingergleichung, als auch die Marchenkosche Integralgleichung. Das Ergebnis der Diskretisierung der Marchenkoschen Integralgleichung ist mit einem rekursiven Algorithmus analog dem Levinson-Algorithmus für Toeplitzmatrizen lösbar.

Rundell und Sacks lösen das Problem der Gewinnung eines Sturm-Liouville Operators aus Spektraldaten dadurch, daß sie aus den Daten Randwerte einer Goursatschen Problemformulierung herleiten. Diese ist mit dem Charakteristikenverfahren in eine Integralgleichung übertragbar, aus der sie das Potential mit iterativen Verfahren bestimmen, siehe [47] und darin angegebene Literatur.

Aus der Sicht der im Zeitraum formulierten Wellengleichung, dem zweiten Interessengebiet, sind die inversen Sturm-Liouville Probleme im Frequenzraum gestellt. Letztere werden generell nicht mehr betrachtet, wenn die gegebenen Daten bereits im Zeitraum vorliegen. Diese Situation liegt z. B. in der Seismik vor, wenn nicht mehr Reflexionen ebener Wellen beobachtet werden, sondern man stattdessen die Auswirkungen eines erzeugten Impulses über ein Zeitintervall mißt. Es liegt mit diesen Daten der Randwert der Lösung eines gemischten Problems vor, der den Kern und die Inhomogenität bzw. nur die Inhomogenität der linearen Gel'fand-Levitan-Gleichung bzw. der nichtlinearen Gel'fand-Levitan-Gleichung bildet.

Die bisher genaueste Angabe einer Definition eines distributiven Viertelraumproblems mit variablenabhängigen Koeffizienten in der Literatur erfolgt in Lavrent'ev, Reznitskaya und Yakhno [31] Chapt. III §1. Die Autoren definieren einen Spezialfall eines Viertelraumproblems im rechten oberen Quadranten mit homogener Gleichung und Differentialoperator $P(D) = \frac{d^2}{dt^2} - c^2(x)\frac{d^2}{dx^2}$ zusammen mit den Anfangswerten $u(0,x) = 0$, $u_t(0,x) = \delta(x)$ und dem Randwert $u_x(x,0) = 0$. Der $(x_0 \searrow 0)$-Grenzwert der Lösungen mit dem Anfangswert $\delta(x - x_0)$ in der ersten Ableitung wird als Lösung dieses Problems betrachtet. Dabei wird $u_x = 0$ durch die Formulierung des Problems auf der oberen Halbebene unter der Bedingung, daß eine Lösung im ersten Argument gerade ist, ersetzt. Daneben wird verlangt, daß eine Lösung u Element aus $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^{\geq 0} \times \mathbf{R}) \cap C_t^1([0,\infty); \mathcal{E}'(\mathbf{R})) \cap C_x^1(\mathbf{R}, \mathcal{D}'(\mathbf{R}))$ ist, entsprechende Einschränkungen auf zur x-Achse parallelen Geraden existieren und die Anfangswerte dann als Grenzwert $t \searrow 0$ angenommen werden.

Gopinath und Sondhi leiten aus einem im Zeitraum zu einem Problem der Sprachanalyse formulierten System erster Ordnung in zwei Variablen eine Integralgleichung her, siehe [50]. Bube und Burridge [9] betrachten diese beiden Probleme in diskreten Formulierungen. Blagoveshchenskij [8] leitet die Gopinath-Sondhische Integralgleichung aus einer distributiven Formulierung mit dem Differentialoperator $\frac{d^2}{dt^2} - c^2(x)\frac{d^2}{dx^2}$ her.

Symes [52] folgt der Linie des Artikels von Gel'fand und Levitan und betont dabei den Zusammenhang zwischen der t-Ableitung der Riemannfunktion der oberen Halbebene in der distributiven Formulierung und der nichtlinearen Gel'fand-Levitan-Gleichung.

Burridge [10] motiviert die Herleitung der Gel'fand-Levitanschen und der Marchenkoschen Integralgleichung ebenfalls aus einer Formulierung mit der Riemannfunktionen.

In einer Reihe von Artikeln konzentriert sich Symes auf die nichtlineare Gelfand-Levitan-Gleichung. Den Zusammenhang zwischen der Goursatschen Problemformulierung und der nichtlinearen Integralgleichung nutzt er zur Herleitung von Kriterien für eine Funktion f, $(x = 0)$-Randwert einer t-Ableitung der Riemannfunktion zu einem Potential q zu sein, Symes [52] Thm. II. Daneben kommt er zu einer Aussage über die Stetigkeit einer Abbildung $F: W^{m+1,1}([0,2]) \to W^{m,1}([0,1])$, $F(f) = q$, Thm. III. Wesentlich für den Beweis von Thm. II ist dabei, daß nach Addition der Identität auf beiden Seiten der nichtlinearen Gel'fand-Levitan-Gleichung der Term mit der unbekannten Funktion bezüglich Funktionen aus $L^2([0,T])$ als Produkt eines invertierbaren Integraloperators mit seinem adjungierten Operator geschrieben werden kann und sich die Bedingung ergibt, daß die Eigenwerte des Produktes durch eine von T unabhängige Konstante aus $\mathbf{R}^{\geq 0}$ von unten abgeschätzt werden können. Diese Operatorzerlegung findet bei der numerischen Behandlung der nichtlinearen Gelfand-Levitan-Gleichung in Symes [53] ihre Entsprechung in einer Cholesky-Zerlegung der durch Diskretisierung erhaltenen Gleichungen. In einem weiteren Artikel zeigt Symes [54] die Äquivalenz der nichtlineare Gel'fand-Levitan-Gleichung zu einer gemischten Problemformulierung mit Differentialoperator $\frac{d^2}{dt^2} - c^2(x)\frac{d^2}{dx^2}$. Er leitet dazu Darstellungen der Riemannfunktion her, führt eine Stabilitätsanalyse durch und entwickelt das Charakteristikenverfahren für nicht gerade Charakteristiken.

Bube und Burridge legen mit [9] einen umfassenden Artikel zur Lösung eines inversen hyperbolischen Problems im Zeitraum vor, der auch verschiedene Methoden zur numerischen Lösung enthält. Die analytische Betrachtung konzentriert sich auf ein lineares System erster Ordnung in zwei Variablen, welches in einen Spezialfall der von uns behandelten Gleichung überführt werden kann. Für die Randwerte setzen sie in einer Funktion die δ-Distribution an und leiten daraus durch Faltung in der Zeitvariablen Darstellungen für allgemeinere Randwerte her. So gelangen sie insbesondere zur Gopinath-Sondhischen Integralgleichung. Die von ihnen vorgestellten diskreten Verfahren umfassen den sogenannten „downward continuation“ Algorithmus basierend auf Differenzensternen, der auch als „layer-stripping“ bekannt ist, und eine Diskretisierung der Gopinath-Sondhischen Integralgleichung. Die Toeplitz-Struktur der auftretenden Matrizen erlaubt die Anwendung rekursiver Algorithmen zur approximativen Lösung des inversen Problems mit $O(n^2)$ Operationen für n unbekannte Werte des Koeffizienten.

Ein Differenzenverfahren zur Lösung der inversen Probleme über eine klassische Goursatsche Problemformulierung wurde von Symes [53] vorgestellt. Verglichen mit diskretisierten Integralgleichungsmethoden gewinnt das Verfahren in der Anzahl der Rechenoperationen eine Ordnung. Wir beziehen uns in unseren Diskretisierungen darauf. In dem Artikel leitet er durch Summation der Differenzensterne einen Zusammenhang zur Diskretisierung der nichtlinearen Gel'fand-Levitan-Gleichung her.

Zhu und Jin [65] und Zhu [66] geben auf der Basis dikretisierter Sturm-Liouville Probleme formal diskrete Analoga zu Goursatproblemen und den Gel'fand-Levitanschen Integralgleichungen an. Es fehlt eine Fehleranalyse.

Fawcett [18] nutzt das Differenzenverfahren nach Symes [53] für die Berechnung numerische Beispiele. Sein Hauptaugenmerk in den Rechnungen liegt auf dem Verhalten der Lösungen der inversen Probleme, wenn bestimmte Frequenzen in den Randwerten fehlen. Er stellt fest, daß beim Fehlen hoher Frequenzen die Resultate um die exakte Lösung oszillieren, während beim Fehlen niedriger Frequenzen selbst die Grobstruktur nicht rekonstruiert wird. Dies wird von Carrion [11], ohne daß die Autoren aufeinander verweisen, in der Theorie bestätigt. Bezüglich der hohen Frequenzen macht Carrion noch die zusätzliche Annahme, daß diese auch im erzeugten Impuls, d.h. im Anfangswert, fehlen. Fawcett führt keine Fehleranalyse bezüglich der Schrittweite des Verfahrens durch. Er bemerkt

lediglich, daß er für eine Problemstellung so lange verschiedene Schrittweiten wählte, bis sich die Resultate stabilisierten.
Im analytisch Teil zeigt Fawcett über die lineare Gel'fand-Levitan-Gleichung eine Stabilitätseigenschaft. Mit der Differenz zweier Randwerte zum inversen Problem in der Maximumnorm geht auch der Fehler $\| \int_0^x (q_1 - q_2)(\xi) d\xi \|_\infty$ der zugehörigen Potentiale gegen Null.

Kabanikhin [27] zeigt mit Hilfe von Fixpunktmethoden die Stabilität der aus einer speziellen Goursatschen Problemformulierung herleitbaren Volterraschen Integralgleichungen. Er überträgt die Methode auf Diskretisierungen der Integralgleichungen. Seine Aussagen und Methoden sind mit Krasnosel's-kii [29] verallgemeinerbar. Dieser Artikel ist zudem eine gute Quelle für Literaturangaben russischer Autoren zum Thema der Koeffizientenbestimmung in hyperbolischen Gleichungen.

Optimierungsmethoden, unter anderem vertreten durch Bamberger, Chavent und Lailly [4], werden in dieser Arbeit nicht weiter betrachtet.

Die Bedeutung der Arbeit weiterer Autoren folgt aus Verweisen im Text.

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die mich bei der Erstellung meiner Dissertation unterstützt haben. Insbesondere gilt mein Dank Prof. Dr. Frank Natterer für die Themenstellung und die Betreuung der Arbeit. Danken möchte ich Herrn Dipl.–Math. Oliver Dorn, Herrn Dipl.–Math. Helmut Sielschott und Herrn Dr. Frank Wübbeling, die sich jeweils Teilen des Manuskriptes zur Durchsicht gewidmet haben.

1.1 Notationen

Seien $m,\ n \in \mathbf{N}$.

Für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ sei $\mathbf{C^m(\Omega)}$ der Raum der m-mal stetig differenzierbaren Funktionen über Ω und $\mathbf{C^m(\overline{\Omega})}$ der Raum der Funktionen aus $C^m(\Omega)$, welche samt ihren Ableitungen bis zur Ordnung m stetig auf $\partial\Omega$ fortsetzbar sind.

$\mathcal{D}'(\mathbf{R^n})$ sie die Menge der Distributionen und $\mathcal{E}'(\mathbf{R^n})$ die Menge der Distributionen mit kompaktem Träger.

Es gelte

$$\begin{aligned}
\|f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)\|_{\infty, x_i \in J} &= \sup_{x_i \in J} |f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)|, \\
\|f(x_1, ..., x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, ..., x_n)\|_{\infty, J} &= \sup_{x_i \in J} |f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)|, \\
\|f(x_1, ..., x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, ..., x_n)\|_{\infty} &= \sup_{x_i \in I} |f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)|,
\end{aligned}$$

wobei I das Definitionsgebiet von f bezüglich x_i sei und $J \subset I$ gelte.

Für zwei Banachräume X, Y sei $\mathbf{L(X, Y)}$ die Menge der stetigen linearen Operatoren $X \to Y$ und $\mathbf{L(X)} = L(X, X)$. Es wird jeweils aus dem Zusammenhang klar, welche Norm durch $\| \cdot \|$ bezeichnet wird.

1.2 Physikalische Bedeutung der betrachteten Gleichungen

Die dieser Arbeit zugrundeliegende partielle Differentialgleichung dient der Modellierung verschiedener physikalischer Prozesse oder deren Reduktion auf Gedankenexperimente. Einige seien hier vorgestellt.

Transversale Schwingungen eines in einem Medium eingebetteten Seiles
Wir betrachten die **Schwingungen eines eindimensional gedachten Seiles** nach Tychonoff und Samarski [58] Kap. II §1, Rubinstein und Rubinstein [44] Chapt. 2 Sect. 1. Das Seil habe die Dichte $\rho = \rho(x)$. Bei kleinen Auslenkungen ist die Spannung des Seiles annähernd konstant $T = T_0$. Die Auslenkung eines transversal in einer Ebene schwingenden Seiles am Ort x zur Zeit t für $x \in I$, I Intervall in $\mathbf{R}$, und $t > 0$, wird dann durch die Lösung $u = u(x,t)$ der partiellen Differentialgleichung

$$\rho(x)u_{tt} - T_0 u_{xx} = 0$$

annähernd beschrieben. T_0 ist gleich dem Elastizitätsmodul. Diese Gleichung ist eine eindimensionale **Wellengleichung**. Ihre Herleitung erfolgt mittels des Hookeschen Gesetzes und des zweiten Newtonschen Gesetzes. Wirkt zusätzlich eine Kraft $f = f(x,t)$, so gilt

$$\rho(x)u_{tt} - T_0 u_{xx} = f,$$

häufig auch geschrieben als

$$\frac{1}{c^2(x)}u_{tt} - u_{xx} = f.$$

Die Funktion c wird als die Ausbreitungsgeschwindigkeit bezeichnet, aus physikalischen Gründen ist sie nicht negativ. Bei konstanter Dichte ergibt sich nach Variablentransformation

$$u_{tt} - u_{xx} = f.$$

Ist das Seil in einem Medium eingebettet, das eine ortsabhängige auslenkungsproportionale Rückstellkraft $f = -q(x)u$ auf das Seil ausübt, so wird die Auslenkung beschrieben durch

$$u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = 0.$$

Das von uns behandelte Problem

$$u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = 0 \qquad \text{in } (0,1) \times (0,\infty), \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \delta(x) \qquad \text{auf } [0,1], \tag{1.2}$$

$$u_x(0,t) = h_1 u(0,t),\ u_x(1,t) = -h_2 u(1,t) \qquad \text{auf } [0,\infty), \tag{1.3}$$

modelliert die Schwingungen kleiner Amplitude eines Seiles der Länge 1 in einem Medium. Das Seil ist zur Zeit $t = 0$ nicht ausgelenkt. Es erfährt zur Zeit $t = 0$ ein Punktereignis in $x = 0$ in der Form, daß die Auslenkungsgeschwindigkeit an $x = 0$ unendlich groß, an anderen Punkten jedoch gleich Null ist. In Tychonoff und Samarski [58] Anw. zu Kap. II Abschnitt I wird die Anfangsbedingung motiviert durch die Modellierung eines Schlages auf eine ruhende Klaviersaite, es existiert keine Anfangsauslenkung, aber eine Anfangsgeschwindigkeit. Bei einem Zupfinstrument erfährt die Saite eine Anfangsauslenkung, ohne eine Anfangsgeschwindigkeit zu besitzen. Für eine Punktauslenkung entspricht dies den Anfangswerten

$$u(x,0) = \delta(x), u_t(x,0) = 0. \tag{1.4}$$

Die Randbedingungen modellieren elastische auslenkungsabhängige Krafteinwirkungen an den Rändern. Unter $h_1 = \infty$ bzw. $h_2 = \infty$ verstehen wir die Randbedingung $u(0,t) = 0$ bzw. $u(1,t) = 0$, diese modelliert fest eingeklemmte Enden. $h_1 = 0$ oder $h_2 = 0$ bedeutet, daß ein frei schwingendes Ende vorliegt.

Wir untersuchen die Probleme (1.1), (1.2), (1.3) und (1.1), (1.4), (1.3), für die wir in Kapitel 2 noch eine mathematisch genauere Formulierung angeben werden.

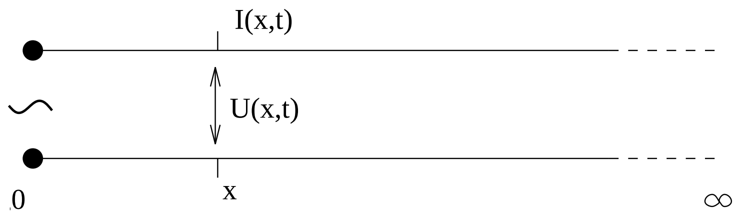

Abbildung 1.1: Elektrische Doppelleitung mit Strom-Spannungs-Impuls Quelle im Nullpunkt.

Ein verwandtes Problem ist die Modellierung der **Schwingungen einer Gas- oder Flüssigkeitssäule**, Schwartz [49] Chapt. 7 Sect. 1. Für die longitudinalen Schwingungen gilt ebenfalls bei konstanter Ausbreitungsgeschwindigkeit die Gleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = 0.$$

Zwei offene Enden mit $u_x = 0$ an einer gasgefüllten Säule können sinnvoll interpretiert werden als die Modellierung eines gleichmäßigen Gasflusses durch die Säule, der eine periodische Auslenkungsfunktion trägt, Schwartz [49] Chapt. 7 Sect. 1.

Weitere Modelle lassen sich mit den Methoden des folgenden Abschnitts oder durch Reduktion auf eine Ortsdimension auf das von uns betrachtete Problem zurückführen.

Die Telegraphengleichung
Die Telegraphengleichung modelliert das Verhalten von Stromstärke und Spannung in einer elektrischen Leitung, Doetsch [17] Kap. 18 §3, Tychonoff und Samarski [58] Kap. II §1, Bergmann und Schaefer [6] Kap. VI §54. Eine elektrische Doppelleitung bestehe aus jeweils unendlich langer Hin- und Rückleitung mit konstanter Kapazität C, Ableitung G, Induktivität L und ohmschem Widerstand R. Die Größen seien jeweils pro Längeneinheit angegeben. Zur Zeit $t \in \mathbf{R}^{\geq 0}$ seien am Ortspunkt $x \in \mathbf{R}^{\geq 0}$ $I(x,t)$ die Stromstärke und $U(x,t)$ die Spannung zwischen Hin- und Rückleitung, siehe Abbildung 1.1. Das Verhalten von I und U wird modelliert durch das System

$$-\frac{dU}{dx} = RI + L\frac{dI}{dt},$$

$$-\frac{dI}{dx} = GU + C\frac{dU}{dt},$$

woraus durch Differenzieren und wechselseitiges Einsetzen die **Telegraphengleichung**

$$a\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{d^2u}{dx^2} + b\frac{du}{dt} + cu = 0$$

mit $a = LC, b = RC+LG, c = RG$, für $u \in \{I, U\}$ folgt. Aus physikalischen Gründen ist a positiv. Für die Transformation dieser Gleichung in die von uns behandelte Form siehe den folgenden Abschnitt. Die Telegraphengleichung folgt aus einem Spezialfall der Maxwellschen Gleichungen, Weise [63] Kap. 6 §22. Im verlustfreien Fall, $R = 0$, $G = 0$, entfällt der Dämpfungsterm $b\frac{du}{dt}$ und es folgt die Wellengleichung

$$a\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{d^2u}{dx^2} = 0.$$

Die Bewegungsgleichung für Druckwellen in einem flüssigen Medium
Sie lautet bei kleiner Auslenkung und unter Vernachlässigung der Dämpfung

$$\frac{d^2p}{dt^2} - c^2\nabla_x^2 p = 0,$$

Morse und Feshbach [35] Chapt. 2 §2.3. Es ist hierin $p(x,t)$ die Druckänderung, c die Schallgeschwindigkeit mit $c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}$, P der Gleichgewichtsdruck und ρ die Dichte des Mediums.

Für $c = c(x) > 0$ und Ortsdimension eins lautet die Gleichung

$$\frac{1}{c^2(x)}\frac{d^2p}{dt^2} - \frac{d^2p}{dx^2} = 0.$$

Die Bewegungsgleichungen für akustische Wellen in einem homogenen isotropen elastischen Medium ohne Volumenkräfte
Sie werden in Morse und Feshbach [35] Chapt. 2 §2.2, Tychonoff und Samarski [58] Anw. zu Kap. V Abschnitt I und Müller [36] A-19 beschrieben. Für die Verschiebung $u = (u_1, u_2, u_3)$ im dreidimensionalen Ortsraum gilt bei kleinen Auslenkungen

$$\rho\frac{d^2u}{dt^2} \;=\; (\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot u) - \mu \operatorname{rot}\operatorname{rot} u \;=\; (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot u) + \mu\Delta u,$$

mit $\operatorname{rot} u = (\frac{du_3}{dx_2} - \frac{du_2}{dx_3}, \frac{du_1}{dx_3} - \frac{du_3}{dx_1}, \frac{du_2}{dx_1} - \frac{du_1}{dx_2})$, $\nabla(\nabla\cdot u) = \nabla(\sum \frac{du_j}{dx_j}) = (\frac{d}{dx_1}\sum\frac{du_j}{dx_j}, \frac{d}{dx_2}\sum\frac{du_j}{dx_j}, \frac{d}{dx_3}\sum\frac{du_j}{dx_j})$, $\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)$ und $\operatorname{rot}\operatorname{rot} u = \nabla\times(\nabla\times u) = \nabla(\nabla\cdot u) - \Delta u$. u heißt auch das Auslenkungsfeld, $\rho = \rho(x)$ ist die Dichte und λ, μ sind die Laméschen Parameter des Mediums.
Das Auslenkungsfeld kann in einen sogenannten longitudinalen Teil $\operatorname{grad}\phi$ und einen transversalen Teil $\operatorname{rot}\psi$ zerlegt werden:

$$u = \operatorname{grad}\phi + \operatorname{rot}\psi,$$

wobei ϕ die Gleichung

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = c_l^2\Delta\phi$$

mit $c_l^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$ und ψ die Gleichung

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = c_t^2\Delta\psi$$

mit $c_t^2 = \frac{\mu}{\rho}$ löst. Dies sind zwei Wellengleichungen.

Eine sehr schöne Tabelle zum Vergleich der Größen dieser offenbar alle mit der Wellengleichung verknüpften physikalischen Systeme findet sich in Tychonoff und Samarski [58] Anw. zu Kap. II Abschnitt VI.

1.3 Transformationen verwandter Gleichungen

Die Allgemeinheit der von uns betrachteten Gleichung (1.1) läßt sich durch die Vielfalt der mit Hilfe mathematischer Transformationen darauf zurückführbaren Gleichungen erfassen.

i) In Erweiterung von Romanov [43] und Tychonoff und Samarski [58] Kap. II §5 betrachten wir die Gleichung

$$u_{tt} - u_{xx} + a(t)u_t + b(x)u_x + c(x,t)u = f(x,t) \qquad \text{mit } a, b \in C^1(\mathbf{R}).$$

Es sei

$$v(x,t) = e^{\alpha\int^t a(\tau)d\tau + \beta\int^x b(\xi)d\xi}u(x,t) \qquad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} u_t &= (-\alpha a(t)v + v_t)e^{-(\alpha\int^t a(\tau)d\tau + \beta\int^x b(\xi)d\xi)} \\ u_{tt} &= (-\alpha(a' - \alpha a^2)v - 2\alpha a v_t + v_{tt})e^{-(\alpha\int^t a(\tau)d\tau + \beta\int^x b(\xi)d\xi)}. \end{aligned}$$

Analoge Behandlung der x-Ableitungen und Einsetzen der Resultate in obige Gleichung für u liefert folgende Gleichung für v

$$\begin{aligned} &v_{tt} - v_{xx} + (1-2\alpha)av_t + (1+2\beta)bv_x + (c + \alpha^2a^2 - \alpha a' - \alpha a^2 - \beta^2b^2 + \beta b' - \beta b^2)v \\ &\qquad = \; fe^{\alpha\int^t a(\tau)d\tau + \beta\int^x b(\xi)d\xi}. \end{aligned}$$

Mit $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\beta = -\frac{1}{2}$ gilt somit

$$v_{tt} - v_{xx} + \frac{1}{4}(4c - a^2 - 2a' + b^2 - 2b')v = fe^{\frac{1}{2}\int^t a(\tau)d\tau - \frac{1}{2}\int^x b(\xi)d\xi}.$$

ii) Nach Burridge [10], Corvi [14] und Ware und Aki [62] können wir weitere Resultate herleiten.

1. Wir formen die Gleichung
$$\rho(x)u_{tt} - (\rho(x)c^2(x)u_x)_x = 0,$$
$\rho(x), c(x) > 0$, um, indem wir als neue Variable die sogenannte Laufzeit-Koordinate $z(x) = \int_0^x \frac{1}{c(\xi)}d\xi$, dazu die akustische Impedanz $\eta(z) = (\rho(x)c(x))^{\frac{1}{2}}$ und das Potential $\tilde{q}(z) = \frac{1}{\eta}\frac{d^2\eta}{dz^2}$ einführen. Dies ist die sogenannte **Liouville-Transformation**, Hellwig [25] Kap. IV §2.1. Es gilt
$$\begin{array}{rrcll} & \rho(x)u_{tt} - (\rho(x)c^2(x)u_x)_x & = & 0 & | \cdot c(x) \\ \Leftrightarrow & \rho(x)c(x)u_{tt} - c(x)(\rho(x)c^2(x)u_x)_x & = & 0 & \\ \Leftrightarrow & \eta^2 u_{tt} - (\eta^2 u_z)_z & = & 0 & | \cdot \frac{1}{\eta} \\ \Leftrightarrow & \eta u_{tt} - (\eta_{zz}u + 2\eta_z u_z + \eta u_{zz}) + \frac{1}{\eta}\eta_{zz}\eta u & = & 0 & \\ \Leftrightarrow & U_{tt} - U_{zz} + \tilde{q}(z)U & = & 0 & \end{array}$$
für $U(z,t) = \eta(z)u(x(z),t)$, dies ist Gleichung (1.1).

Bemerkung 1.3.1 *Die neue Variable z dient dazu, die Gleichung so zu transformieren, daß sie in der neuen Variablen gradlinige Charakteristiken hat. Aus*
$$u_{tt} - c^2(x)u_{xx} + q(x)u = f(x,t)$$
folgt nach der Transformation $z(x) = \int_0^x \frac{1}{c(\xi)}d\xi$ mit $v(z,t) = u(x(z),t)$ und $b(z) = c(x(z))$ die Gleichung
$$v_{tt} - v_{zz} + \frac{b'}{b}v_z + q(x(z))v = f(x(z),t).$$

2. Fourier-Transformation der Gleichung für U bezüglich der Variablen t ergibt mit der abkürzenden Schreibweise $U(z,k)$ für $(U(z,t))^{\wedge_t}(k)$ das **Schrödinger Eigenwertproblem**
$$k^2U(z,k) + U_{zz}(z,k) - \tilde{q}(z)U(z,k) = 0, \tag{1.5}$$
worin k^2 als gesuchter Eigenwert betrachtet wird. Multiplizieren wir diese Gleichung mit dem Ausdruck $-\frac{\hbar^2}{2m}$, so erhalten wir
$$-\frac{\hbar^2}{2m}U_{zz}(z,k) + \frac{\hbar^2}{2m}\tilde{q}(z)U(z,k) = \frac{\hbar^2}{2m}k^2U(z,k).$$
Dies ist eine Darstellung der **Schrödingergleichung**. Für festes k beschreibt sie die eindimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m und der totalen Energie $\frac{\hbar^2}{2m}k^2$ in einem äußeren Feld $F(z) = \frac{\hbar^2}{2m}\tilde{q}(z)$. $\hbar$ ist die Plancksche Konstante. $|U(z,k)|^2$ ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit dieses Teilchens am Ort z, Zakhariev und Suzko [64] p. 2, Neumark [40] Kap. 7 §24.6.

Bemerkung 1.3.2 *Das Problem (1.1) heißt im Zeitraum und das Problem (1.5) im Frequenzraum formuliert, Burridge [10]. Gel'fand und Levitan entwickeln in ihrem klassischen Artikel [20] eine Theorie zur Lösung eines inversen Problems zu Gleichung (1.5), welches aus einer Bestimmung von q bei gegebener Spektralfunktion besteht. Die Formulierung im Zeitraum hat den Vorteil, daß das Lösungsverfahren nach q auf $x \in [0,1]$ auch durchgeführt werden kann, wenn die Funktionswerte $u(0,t)$ nur auf dem endlichen Intervall $t \in [0,2]$ bekannt sind. Wir werden das inverse Problem im Zeitraum behandeln und dabei auf die Gel'fand-Levitan-Theorie aus [20] zurückgreifen können.*

3. Fourier-Transformation der Bewegungsgleichung für Druckwellen in flüssigen Medien bezüglich der Variablen t ergibt mit der abkürzenden Schreibweise $p(x,k)$ für $(p(x,t))^{\wedge_t}(k)$ und $\frac{c(x)}{c_0}$ statt $c(x)$, c_0 eine Referenzschallgeschwindigkeit,

$$\begin{aligned} \frac{d^2p}{dx^2}(x,k) + \frac{c_0^2}{c^2(x)}k^2p(x,k) &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad \frac{d^2p}{dx^2}(x,k) + k^2(1-s(x))p(x,k) &= 0, \qquad s(x) = \frac{c^2(x)-c_0^2}{c^2(x)}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

4. Es gilt (1.5) $\Leftrightarrow$ (1.6) mit $U(z,k) = p(x,k)\frac{1}{r(z)}$. Hierin sei r nach Corvi [14] so gewählt, daß $\frac{1}{r}\frac{dr}{dz} = \frac{1}{4}(1-s)^{-\frac{3}{2}}\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2}\frac{c'(x)}{c_0}$. Die Laufzeit-Koordinate z sei mit $\frac{c(x)}{c_0}$ statt mit $c(x)$ gebildet. Dann gilt $\frac{dz}{dx} = \frac{c_0}{c(x)}$. Eine umfangreiche Rechnung führt zu den Äquivalenzen

$$\begin{aligned} \tfrac{d^2p}{dx^2}(x,k) + k^2(1-s(x))p(x,k) &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad k^2\tfrac{p(x,k)}{r} + \tfrac{1}{r}(1-s)^{-1}\tfrac{d^2p}{dx^2}(x,k) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad k^2U(z,k) + \tfrac{d^2U}{dz^2}(z,k) - \tilde{q}(z)U(z,k) &= 0. \end{aligned}$$

iii) Die **Telegraphengleichung** wird auch oft in der Gestalt

$$v_{\xi\tau}(\xi,\tau) + a(\xi,\tau)v(\xi,\tau) = 0$$

geschrieben. Diese Gleichung ist aus der Gleichung

$$u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = 0 \tag{1.7}$$

herleitbar. Mit charakteristischen Koordinaten $\xi = t - x$, $\tau = t + x$ und äquivalent dazu $x = \frac{\tau-\xi}{2}$, $t = \frac{\tau+\xi}{2}$ folgt bekanntermaßen für

$$v(\xi,\tau) = u(x(\xi,\tau), t(\xi,\tau)) = u(\frac{\tau-\xi}{2}, \frac{\tau+\xi}{2})$$

die Gleichung

$$v_{\xi\tau} + \frac{1}{4}q(\frac{\tau-\xi}{2})v = 0. \tag{1.8}$$

Aus der Darstellung (1.8) folgt umgekehrt die Gleichung (1.7).

Kapitel 2

Distributive Problemformulierungen

In unseren Problemformulierungen wollen wir zur Modellierung eines Punktereignisses distributive Anfangs- und Randwerte sowie distributive Lösungen zulassen. In diesem Kapitel führen wir zuerst distributive Formulierungen des Cauchyproblems, des Viertelraum- und des Halbstreifenproblems ein. Bei Viertelraum- und Halbstreifenproblemen beziehen wir singuläre Distributionen mit Trägern in den Ecken der zugrundeliegenden Bereiche mit ein. Anschließend erweitern wir die Probleme durch symmetrische und antisymmetrische Spiegelung. In Abschnitt 2.6.1 sehen wir, wie eine Spiegelung auf δ-Distributionen mit Träger in der Ecke eines Bereiches wirkt. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels ist dann eine mathematisch sinnvolle Definition der betrachteten direkten und inversen Probleme möglich.

2.1 Das distributive Cauchyproblem

Wir betrachten die klassische Formulierung des Cauchyproblems. Gesucht ist eine Lösung $u \in C^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{>0}) \cap C^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\geq 0})$ der Wellengleichung mit Potentialterm

$$u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = f(x,t) \qquad \text{in } \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{>0} \tag{2.1}$$

mit den Anfangswerten

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \qquad \text{in } \mathbf{R}. \tag{2.2}$$

Es seien f stetig auf $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\geq 0}$, u_0 stetig differenzierbar in $\mathbf{R}$ und u_1 und q stetig in $\mathbf{R}$.

Wir definieren eine distributive Lösung des Cauchyproblems (2.1), (2.2) analog zur distributiven Lösung der Wellengleichung ohne Potentialterm und mit konstanten Koeffizienten in Triebel [57] Kap. 3 §15. Dabei werden die Anfangswerte der klassischen Formulierung in die Inhomogenität der partiellen Differentialgleichung der distributiven Formulierung übertragen und Einschränkungen für den Träger einer distributiven Lösung gemacht.

Definition 2.1.1 *Es seien $U_0, U_1 \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ und $F \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ mit $\operatorname{supp} F \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\geq 0}$. δ sei die Diracsche δ-Distribution bezüglich der jeweils angegebenen Variablen. Als* **distributive Lösung des Cauchyproblems** *bezeichnen wir jede Distribution $U \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ mit $\operatorname{supp} U \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\geq 0}$, für die $q(x)U \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ sinnvoll existiert, und die die distributive Gleichung*

$$U_{tt} - U_{xx} + q(x)U = F + U_0(x) \otimes (\frac{d}{dt}\delta)(t) + U_1(x) \otimes \delta(t) \tag{2.3}$$

löst.

Bemerkung 2.1.2 *Für $q \in C^\infty(\mathbf{R})$ und $U \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ ist qU über die Multiplikation von Distributionen mit Funktionen definiert. Ist U von der Ordnung n, so ist diese Multiplikation auch für $q \in C^n(\mathbf{R})$ sinnvoll definiert, vergleiche hierzu Bemerkung 3.2.1.*
In Abschnitt 3.5 untersuchen wir die Riemannfunktion zu diesem Problem. Dort stellen wir fest, daß die Stetigkeit von q für die Behandlung unserer Probleme hinreichend ist, um qU für alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ sinnvoll als $< qU, \phi > = < U, q\phi >$ zu definieren.
Für distributives $q \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ kann die Multiplikation qU nach Hörmander [26] Chapt. VIII Sect. 8.2 Thm. 8.2.10 unter den dort angegebenen Voraussetzungen erklärt werden.

Bemerkung 2.1.3 *Das in Definition 2.1.1 formulierte Problem werden wir auch oft in der Form (2.1), (2.2) mit distributiven f, u_0 und u_1 schreiben und weiterhin von Anfangswerten sprechen. Das Problem ist dann entsprechend Definition 2.1.1 zu interpretieren.*

Die klassische Problemformulierung ist in dieser Definition enthalten. Das zeigt das folgende Lemma.

Lemma 2.1.4 *U sei eine distributive Lösung des Cauchyproblems. Die auftretenden Distributionen seien regulär. Es seien $U_0 = u_0 \in C^1(\mathbf{R})$, $U_1 = u_1 \in C^0(\mathbf{R})$ und $F = f(x,t) \in C^0(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\geq 0})$. $U = u(x,t)$ sei aus $C^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{>0}) \cap C^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\geq 0})$. Dann ist u eine klassische Lösung des Cauchyproblems. Eine klassische Lösung u ist auch eine Lösung im Sinne obiger Definition, wenn u außerhalb von $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\geq 0}$ mit 0 fortgesetzt wird.*

Die Koeffizienten der im Differentialoperator obiger Gleichung auftretenden Ableitungen von u sind alle konstant. Daher ist der Beweis dieses Lemmas eine einfache Verallgemeinerung des Beweises zum analogen Lemma für das Cauchyproblem zur Wellengleichung ohne Potentialterm in Triebel [57] Kap. 3 §15, partielle Integration ist möglich, ohne daß Ableitungen variabler Koeffizienten auftreten. Wir werden den Beweis in ähnlicher Form für das Viertelraumproblem in Lemma 2.2.2 durchführen. Es wird darin auch offensichtlich, wie diese Art der distributiven Problemformulierung auf andere Differentialoperatoren und auf andere Cauchyprobleme, z.B. formuliert in der rechten Halbebene, übertragen werden kann.

2.2 Das distributive Viertelraumproblem

Die Anfangswert-Randwert-Probleme auf einem Quadranten nennen wir Viertelraumprobleme. Wir schreiben Viertelraumprobleme auf $[0,\infty) \times [0,\infty)$ in distributive Formulierungen auf dem ganzen Raum $\mathbf{R}^2$ um, indem die Anfangs- und Randwerte wie bei der Cauchyproblemformulierung in die Inhomogenität der Differentialgleichung übertragen werden. Es wird die Einschränkung gemacht, daß der Träger einer Lösung im Abschluß des Viertelraums liegt.

Betrachten wir das überbestimmte klassische Viertelraumproblem der Art

$$u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = f(x,t) \qquad \text{in } \mathbf{R}^{>0} \times \mathbf{R}^{>0} \tag{2.4}$$

mit den Anfangswerten

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \qquad \text{auf } \mathbf{R}^{\geq 0} \tag{2.5}$$

und den Randwerten

$$u(0,t) = u_2(t),\ u_x(0,t) = u_3(t), \qquad \text{auf } \mathbf{R}^{\geq 0}. \tag{2.6}$$

Gesucht ist eine Lösung $u \in C^2(\mathbf{R}^{>0} \times \mathbf{R}^{>0}) \cap C^1(\mathbf{R}^{\geq 0} \times \mathbf{R}^{\geq 0})$ für auf $\mathbf{R}^{\geq 0} \times \mathbf{R}^{\geq 0}$ stetiges f, $u_0 \in C^1(\mathbf{R}^{\geq 0})$, $u_1, q \in C^0(\mathbf{R}^{\geq 0})$ und analog für u_2 und u_3. Auch für das nicht überbestimmte klassische Problem müssen die üblichen Konsistenzbedingungen in der Ecke $(0,0)$ gelten, um Lösbarkeit zu gewährleisten. Für eine stetige Lösung ist dies $u_0(0) = u_2(0)$, soll auch u_x stetig sein, so muß gelten $(\frac{d}{dx}u_0)(0) = u_3(0)$ und entsprechend für andere Ableitungen und höhere Regularität der Lösung.

Distributiv läßt sich dieses Problem, siehe Abbildung 2.1, wie in der folgenden Definition formulieren.

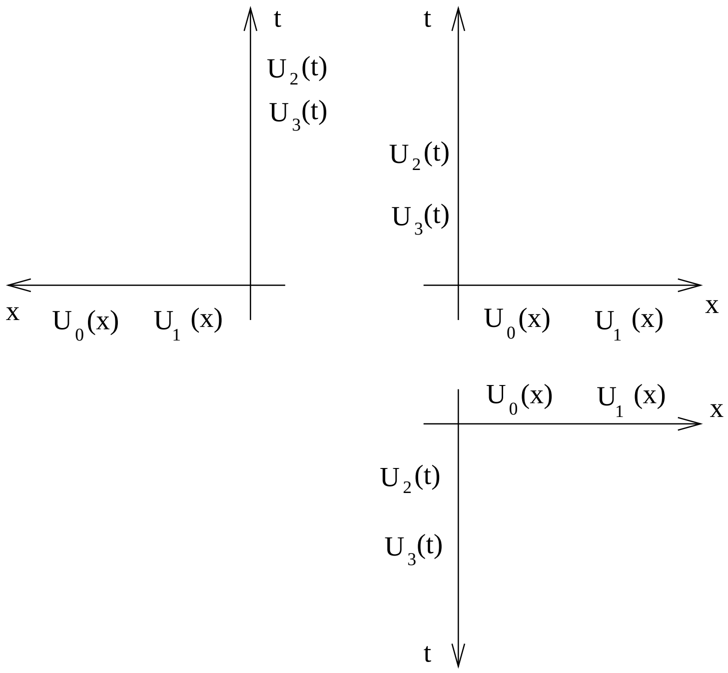

Abbildung 2.1: Anfangs- und Randwerte zu den Viertelraumproblemen. Die Indizes entsprechen im klassischen Fall den Ableitungen analog zu den Gleichungen (2.5) und (2.6).

Definition 2.2.1 *Es seien* $U_i \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}), \quad 0 \leq i \leq 3, \quad F \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$, *mit* $\operatorname{supp} U_i \subset \mathbf{R}^{\geq 0}$ *und* $\operatorname{supp} F \subset \mathbf{R}^{\geq 0} \times \mathbf{R}^{\geq 0}$. *Als* **distributive Lösung des Viertelraumproblems im rechten oberen Quadranten** *bezeichnen wir jede Distribution* $U \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ *mit* $\operatorname{supp}(U) \subset \mathbf{R}^{\geq 0} \times \mathbf{R}^{\geq 0}$, *für die* $q(x)U \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ *sinnvoll existiert, und die die distributive Gleichung*

$$\begin{aligned} U_{tt} - U_{xx} + q(x)U &= F + U_0(x) \otimes (\frac{d}{dt}\delta)(t) + U_1(x) \otimes \delta(t) \\ &\quad -(\frac{d}{dx}\delta)(x) \otimes U_2(t) - \delta(x) \otimes U_3(t) \end{aligned} \tag{2.7}$$

löst.

Nach den Definitionen 2.1.1 und 2.2.1 ist eine distributive Lösung des Viertelraumproblems im rechten oberen Quadranten zu Gleichung (2.7) auch eine Lösung des Cauchyproblems auf der oberen Halbebene zur selben Gleichung. Die in Satz 3.5.15 formulierte Aussage zur Eindeutigkeit der Lösung des Cauchyproblems beinhaltet damit auch eine Eindeutigkeitsaussage zum Viertelraumproblem.

Das folgende Lemma zeigt die Übereinstimmung der distributiven mit der klassischen Problemformulierung.

Lemma 2.2.2 *U sei eine distributive Lösung des Viertelraumproblems im rechten oberen Quadranten. Die auftretenden Distributionen seien regulär. Es gelte* $U_i = u_i$, $0 \leq i \leq 3$, *mit* $\operatorname{supp} U_i \subset \mathbf{R}^{\geq 0}$, $U_0|_{[0,\infty)}, U_2|_{[0,\infty)} \in C^1(\mathbf{R}^{\geq 0})$ *und* $U_1|_{[0,\infty)}, U_3|_{[0,\infty)} \in C^0(\mathbf{R}^{\geq 0})$. *Es sei* $F = f(x,t)$ *mit* $\operatorname{supp} F \subset \mathbf{R}^{\geq 0} \times \mathbf{R}^{\geq 0}$ *aus* $C^0(\mathbf{R}^{\geq 0} \times \mathbf{R}^{\geq 0})$. $U = u(x,t)$ *sei aus* $C^2(\mathbf{R}^{>0} \times \mathbf{R}^{>0}) \cap C^1(\mathbf{R}^{\geq 0} \times \mathbf{R}^{\geq 0})$ *und sei identisch* 0 *außerhalb* $\mathbf{R}^{\geq 0} \times \mathbf{R}^{\geq 0}$.
Dann ist u eine klassische Lösung des Viertelraumproblems. Eine klassische Lösung u ist auch eine distributive Lösung, wenn u außerhalb von $\mathbf{R}^{\geq 0} \times \mathbf{R}^{\geq 0}$ *mit* 0 *fortgesetzt wird.*

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Anwendung auf geeignet gewählte Testfunktionen. Es folgt aus der Gleichung (2.7) und der Definition der Distributionen für alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$

$$\begin{aligned}
& < U_{tt} - U_{xx} + q(x)U, \phi > \\
= \; & < F, \phi > + < U_0(x) \otimes (\tfrac{d}{dt}\delta)(t) + U_1(x) \otimes \delta(t), \phi > - < (\tfrac{d}{dx}\delta)(x) \otimes U_2(t) + \delta(x) \otimes U_3(t), \phi > \\
= \; & \textstyle\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,t)\phi(x,t)dtdx \\
& \textstyle - \int_0^\infty u_0(x)\phi_t(x,0)dx + \int_0^\infty u_1(x)\phi(x,0)dx + \int_0^\infty u_2(t)\phi_x(0,t)dt - \int_0^\infty u_3(t)\phi(0,t)dt.
\end{aligned}$$

Ebenso gilt mit der Definition der Ableitungen von Distributionen und partieller Integration

$$\begin{aligned}
< U_{tt} - U_{xx} + q(x)U, \phi > &= \int_0^\infty \int_0^\infty u(\phi_{tt} - \phi_{xx} + q(x)\phi)dtdx \\
= \int_0^\infty \int_0^\infty & (u_{tt} - u_{xx} + q(x)u)\phi dtdx - \int_0^\infty u(x,0)\phi_t(x,0)dx \\
+ \int_0^\infty & u_t(x,0)\phi(x,0)dx + \int_0^\infty u(0,t)\phi_x(0,t)dt - \int_0^\infty u_x(0,t)\phi(0,t)dt. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Für $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{>0} \times \mathbf{R}^{>0})$ folgt aus den beiden obigen Darstellungen $u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = f$ auf $\mathbf{R}^{>0} \times \mathbf{R}^{>0}$. Es gilt somit für $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$

$$\begin{aligned}
0 \;=\; & \int_0^\infty (u_0(x) - u(x,0))\phi_t(x,0)dx - \int_0^\infty (u_1(x) - u_t(x,0))\phi(x,0)dx \\
& - \int_0^\infty (u_2(t) - u(0,t))\phi_x(0,t)dt + \int_0^\infty (u_3(t) - u_x(0,t))\phi(0,t)dt.
\end{aligned}$$

Zur Interpretation der Annahme der Anfangs- und Randwerte wählen wir spezielle Funktionen ϕ:

1. Sei $\eta(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ mit $\eta(t) = 1$ für $|t| \leq \frac{1}{2}$ und sei $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{\geq 0})$, dann gilt für $\phi = t\eta\psi$:
$$\phi(x,0) = 0, \quad \phi_t(x,0) = \psi, \quad \phi(0,t) = 0, \quad \phi_x(0,t) = 0.$$
Somit zeigen obige Integrale, daß $\int_0^\infty (u_0(x) - u(x,0))\psi(x)dx = 0$ für alle $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{\geq 0})$ gilt. Es folgt $u_0(x) = u(x,0)$ in $(0,\infty)$.

2. Wie im vorigen Punkt, mit $\phi = \eta\psi$:
$$\phi(x,0) = \psi, \quad \phi_t(x,0) = 0, \quad \phi(0,t) = 0, \quad \phi_x(0,t) = 0.$$
Daher gilt $\int_0^\infty (u_1(x) - u_t(x,0))\psi(x)dx = 0$ für alle $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{\geq 0})$. Es folgt $u_1(x) = u_t(x,0)$ in $(0,\infty)$.

3. Sei $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ mit $\psi(x) = 1$ für $|x| \leq \frac{1}{2}$ und sei $\eta(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{\geq 0})$. Setze $\phi = x\eta\psi$, dann gilt:
$$\phi(x,0) = \phi_t(x,0) = \phi(0,t) = 0, \;\; \phi_x(0,t) = \eta.$$
Es folgt $u_2(t) = u(0,t)$ in $(0,\infty)$.

4. Wie im vorigen Punkt, mit $\phi = \eta\psi$, dann gilt:
$$\phi(x,0) = \phi_t(x,0) = \phi_x(0,t) = 0, \;\; \phi(0,t) = \eta.$$
Es folgt $u_3(t) = u_x(0,t)$ in $(0,\infty)$.

Auf diese Art folgt die Annahme der Anfangs- und Randwerte auf $(0,\infty) \times \{0\}$ bzw. $\{0\} \times (0,\infty)$. Die Testfunktionen nehmen in der Ecke immer den Wert Null an. Dennoch erhalten wir auch die Annahme der Anfangs- und Randwerte durch u und deren Konsistenz dort, und zwar aufgrund der Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsvoraussetzungen, die u und $u_i, 0 \leq i \leq 3$, erfüllen müssen.

Sei u nun eine klassische Lösung. Definieren wir die reguläre Distribution U durch

$$U = \begin{cases} u(x,t) & \text{auf } \mathbf{R}^{\geq 0} \times \mathbf{R}^{\geq 0}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so gilt (2.8). Mit

$$F = \begin{cases} f(x,t) & \text{auf } \mathbf{R}^{\geq 0} \times \mathbf{R}^{\geq 0}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und $U_0 = H(x)u(x,0), U_1 = H(x)u_t(x,0), U_2 = H(t)u(0,t), U_3 = H(t)u_x(0,t)$ folgt dann (2.7).

□

Bemerkung 2.2.3 *Viertelraumprobleme in den anderen Quadranten lassen sich auf die gleiche Art formulieren. Für die Notation in den Viertelraumproblemen siehe Abbildung 2.1.*

- *Für den linken oberen Quadranten schreiben wir*

$$\begin{aligned} U_{tt} - U_{xx} + q(x)U &= F + U_0(x) \otimes (\frac{d}{dt}\delta)(t) + U_1(x) \otimes \delta(t) \\ &\quad + (\frac{d}{dx}\delta)(x) \otimes U_2(t) + \delta(x) \otimes U_3(t). \end{aligned} \tag{2.9}$$

- *Für den rechten unteren Quadranten schreiben wir*

$$\begin{aligned} U_{tt} - U_{xx} + q(x)U &= F - U_0(x) \otimes (\frac{d}{dt}\delta)(t) - U_1(x) \otimes \delta(t) \\ &\quad - (\frac{d}{dx}\delta)(x) \otimes U_2(t) - \delta(x) \otimes U_3(t). \end{aligned} \tag{2.10}$$

- *Die Gleichung für den linken unteren Quadranten läßt sich entsprechend schreiben, sie wird im folgenden jedoch nicht benötigt.*

Bemerkung 2.2.4 *Folgende Punkte seien noch angesprochen.*

1. *In der Formulierung (2.7) können für ein direktes Problem im allgemeinen nicht alle U_i als bekannt vorausgesetzt werden, da das Problem dann schon im klassischen Fall überbestimmt wäre. Ist die rechte Seite der Gleichung (2.7) nicht vollständig bekannt, dann kann die Lösung des Viertelraumproblems auch nicht mit Hilfe der Riemannfunktion der oberen Halbebene bestimmt werden, wie es nach Satz 3.5.12 sonst möglich wäre. In Abschnitt 2.6 werden wir daher spezielle Anfangswerte und Randwerte betrachten, die durch Spiegelung eine leichte Erweiterung auf einen Halbraum zulassen. Dann können wir die Halbraumtheorie nutzen und durch anschließende Einschränkung des Ergebnisses das Viertelraumproblem lösen.*

2. *In der klassischen Problemformulierung ist die Konsistenz der Anfangs- und Randwerte in den Ecken notwendige Voraussetzung, um eine hinreichend oft stetig differenzierbare Lösung zu erhalten. In der distributiven Sichtweise sind solche Punktauswertungen sinnlos. Physikalisch ist die punktweise Konsistenz der Anfangs- und Randwerte ebenfalls keine notwendige Voraussetzung, vergleiche dazu die Argumentation in Doetsch [17] S. 15.*

3. *Im Gegensatz zu regulären Anfangs- und Randwerten in den Ecken bedürfen Singularitäten in den Ecken noch einer weiteren Überlegung. In den unten angegebenen Spezialfällen kommt es zu Mehrdeutigkeiten beim Übergang zwischen der Anfangswert-Randwert-Formulierung, Abbildung 2.1, und der distributiven Formulierung des Viertelraumproblems, Definition 2.2.1 und Bemerkung 2.2.3. Später werden wir auf die Annahme der Anfangs- und Randwerte durch Einschränkung auf zur x- und t-Achse parallelen Hyperflächen und anschließende Grenzwertbildung eingehen. Es sei dazu auf das Beispiel 3.6.2 verwiesen. Wir sehen die verschiedenen Anfangswert-Randwert-Formulierungen für die distributive Problemformulierung mit Singularitäten in den Ecken als äquivalent an und beachten dabei, daß letztere dann nicht wie im klassischen Fall mit einer Grenzwertbetrachtung übereinstimmt.*
   Es führen die Anfangs- und Randwerte für ein Viertelraumproblem im rechten oberen Quadranten mit
   $$U_1 = \delta(x), U_3 = 0 \quad \textit{bzw.} \quad U_1 = 0, U_3 = -\delta(t)$$
   zur selben distributiven Problemformulierung. Das gilt ebenso für
   $$\begin{array}{llcll} U_0 = \delta(x) & U_3 = 0 & \textit{bzw.} & U_0 = 0 & U_3 = -\frac{d}{dt}\delta(t), \\ U_0 = \frac{d}{dx}\delta(x) & U_2 = 0 & \textit{bzw.} & U_0 = 0 & U_2 = -\frac{d}{dt}\delta(t), \\ U_1 = \frac{d}{dx}\delta(x) & U_2 = 0 & \textit{bzw.} & U_1 = 0 & U_2 = -\delta(t). \end{array}$$
   Vergleiche dazu Beispiel 3.6.2 und Bemerkung 3.6.4.

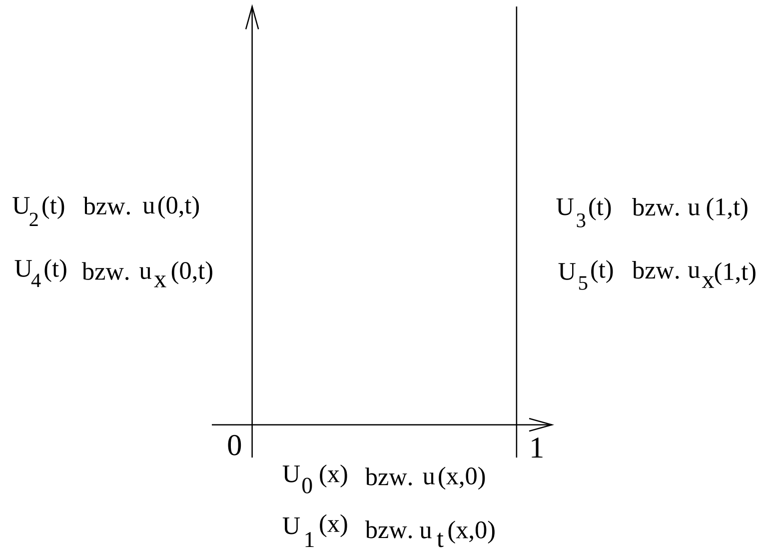

Abbildung 2.2: Das überbestimmte Halbstreifenproblem. Distributive Notation und die Entsprechungen in der klassischen Formulierung.

2.3 Das distributive Halbstreifenproblem

Betrachten wir das überbestimmte Anfangswert-Randwert-Problem, oder auch Halbstreifenproblem genannt, der Art

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + q(x)u(x,t) = f \qquad \text{in } \Omega = \{(x,t)|0 < x < 1, t > 0\}$$

mit den Anfangswerten

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in [0,1],$$

und den Randwerten

$$u(0,t) = u_2(t), u(1,t) = u_3(t), u_x(0,t) = u_4(t), u_x(1,t) = u_5(t), \qquad t \in \mathbf{R}^{\geq 0},$$

welche im klassischen Fall die üblichen Regularitäts- und Konsistenzbedingungen erfüllen müssen, um Lösbarkeit zu ermöglichen. Es gelte $q \in C^0([0,1])$.

Wir führen folgende Definition für die Lösung dieses Halbstreifenproblems ein.

Definition 2.3.1 *Es seien* $U_i \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}), \quad 0 \leq i \leq 5, \quad F \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$*, mit* $\operatorname{supp} U_i \subset [0,1]$ *für* $i \in \{0,1\}$, $\operatorname{supp} U_i \subset \mathbf{R}^{\geq 0}$ *für* $2 \leq i \leq 5$ *und* $\operatorname{supp} F \subset [0,1] \times \mathbf{R}^{\geq 0}$*. Als* **distributive Lösung des Halbstreifenproblems** *bezeichnen wir jede Distribution* $U \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ *mit* $\operatorname{supp}(U) \subset [0,1] \times \mathbf{R}^{\geq 0}$*, für die* $q(x)U \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ *sinnvoll existiert, und die die distributive Gleichung*

$$\begin{aligned} U_{tt} - U_{xx} + q(x)U &= F + U_0(x) \otimes (\frac{d}{dt}\delta)(t) + U_1(x) \otimes \delta(t) \\ &\quad -(\frac{d}{dx}\delta)(x) \otimes U_2(t) + (\frac{d}{dx}\delta)(x-1) \otimes U_3(t) \\ &\quad -\delta(x) \otimes U_4(t) + \delta(x-1) \otimes U_5(t) \end{aligned} \tag{2.11}$$

löst.

Die Verbindung zur klassischen Problemformulierung zeigt wieder ein Lemma.

Lemma 2.3.2 *U sei eine distributive Lösung des Halbstreifenproblems. Die auftretenden Distributionen seien regulär. Es gelte $U_i = u_i, 0 \leq i \leq 5$, mit $\operatorname{supp} U_0, \operatorname{supp} U_1 \subset [0,1]$, $U_0|_{[0,1]} \in C^1([0,1])$, $U_1|_{[0,1]} \in C^0([0,1])$, $\operatorname{supp} U_2, \operatorname{supp} U_3 \subset \mathbf{R}^{\geq 0}$, $U_2, U_3 \in C^1(\mathbf{R}^{\geq 0})$ und $\operatorname{supp} U_4, \operatorname{supp} U_5 \subset \mathbf{R}^{\geq 0}$ mit $U_4, U_5 \in C^0(\mathbf{R}^{\geq 0})$. Es sei $F = f(x,t)$ mit $\operatorname{supp} F \subset [0,1] \times \mathbf{R}^{\geq 0}$ aus $C^0([0,1] \times \mathbf{R}^{\geq 0})$. $U = u(x,t)$ sei aus $C^2((0,1) \times \mathbf{R}^{>0}) \cap C^1([0,1] \times \mathbf{R}^{\geq 0})$ und sei identisch 0 außerhalb $[0,1] \times \mathbf{R}^{\geq 0}$.*
Dann ist u eine klassische Lösung des Halbstreifenproblems. Eine klassische Lösung u ist auch eine distributive Lösung im Sinne obiger Definition, wenn u außerhalb von $[0,1] \times \mathbf{R}^{\geq 0}$ mit 0 fortgesetzt wird.

Beweis: Es folgt aus der Gleichung und der Definition der Distributionen für alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$

$$\begin{aligned}
& < U_{tt} - U_{xx} + q(x)U, \phi > \\
= \; & < F, \phi > + < U_0(x) \otimes (\tfrac{d}{dt}\delta)(t) + U_1(x) \otimes \delta(t), \phi > \\
& + < -(\tfrac{d}{dx}\delta)(x) \otimes U_2(t) + (\tfrac{d}{dx}\delta)(x-1) \otimes U_3(t), \phi > + < -\delta(x) \otimes U_4(t) + \delta(x-1) \otimes U_5(t), \phi > \\
= \; & \textstyle\int_0^1 \int_0^\infty f(x,t)\phi(x,t)dtdx - \int_0^1 u_0(x)\phi_t(x,0)dx + \int_0^1 u_1(x)\phi(x,0)dx \\
& \textstyle + \int_0^\infty u_2(t)\phi_x(0,t)dt - \int_0^\infty u_3(t)\phi_x(1,t)dt - \int_0^\infty u_4(t)\phi(0,t)dt + \int_0^\infty u_5(t)\phi(1,t)dt.
\end{aligned}$$

Ebenso gilt mit der Definition der Ableitungen von Distributionen und partieller Integration

$$\begin{aligned}
< U_{tt} - U_{xx} + q(x)U, \phi > &= \int_0^1 \int_0^\infty u(\phi_{tt} - \phi_{xx} + q(x)\phi)dtdx \\
= \; & \int_0^1 \int_0^\infty (u_{tt} - u_{xx} + q(x)u)\phi dtdx \\
& - \int_0^1 u(x,0)\phi_t(x,0)dx + \int_0^1 u_t(x,0)\phi(x,0)dx + \int_0^\infty u(0,t)\phi_x(0,t)dt \\
& - \int_0^\infty u(1,t)\phi_x(1,t)dt - \int_0^\infty u_x(0,t)\phi(0,t)dt + \int_0^\infty u_x(1,t)\phi(1,t)dt. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Für $\phi \in C_0^\infty((0,1) \times \mathbf{R}^{>0})$ folgt aus den beiden obigen Darstellungen $u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = f$ auf $(0,1) \times \mathbf{R}^{>0}$. Für $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 \; = \; & \textstyle\int_0^1 (u_0(x) - u(x,0))\phi_t(x,0)dx - \int_0^1 (u_1(x) - u_t(x,0))\phi(x,0)dx \\
& \textstyle - \int_0^\infty (u_2(t) - u(0,t))\phi_x(0,t)dt + \int_0^\infty (u_3(t) - u(1,t))\phi_x(1,t)dt \\
& \textstyle + \int_0^\infty (u_4(t) - u_x(0,t))\phi(0,t)dt - \int_0^\infty (u_5(t) - u_x(1,t))\phi(1,t)dt.
\end{aligned}$$

Zur Interpretation der Annahme der Anfangs- und Randwerte wählen wir spezielle Funktionen ϕ:

1. Sei $\eta(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ mit $\eta(t) = 1$ für $|t| \leq \frac{1}{2}$ und sei $\psi(x) \in C_0^\infty([0,1])$, dann gilt für $\phi = \eta\psi$:

   $$\phi(x,0) = \psi, \quad \phi_t(x,0) = 0, \quad \phi(\xi,t) = 0, \quad \phi_x(\xi,t) = 0 \quad \text{für } \xi \in \{0,1\}.$$

   Somit zeigen obige Integrale, daß $\int_0^1 (u_1(x) - u_t(x,0))\psi(x)dx = 0$ für alle $\psi(x) \in C_0^\infty([0,1])$ gilt. Es folgt $u_1(x) = u_t(x,0)$ in $(0,1)$.

2. Wie im vorigen Punkt, mit $\phi = t\eta\psi$, dann gilt:

   $$\phi(x,0) = 0, \quad \phi_t(x,0) = \psi, \quad \phi(\xi,t) = 0, \quad \phi_x(\xi,t) = 0 \quad \text{für } \xi \in \{0,1\}.$$

   Es folgt $u_0(x) = u(x,0)$ in $(0,1)$.

3. Sei $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ mit $\psi(x) = 1$ für $|x| \leq \frac{1}{2}$, $\psi(x) = 0$ für $|x| \geq \frac{3}{4}$ und sei $\eta(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{\geq 0})$. Setze $\phi = \eta\psi$, dann gilt:

   $$\phi(x,0) = \phi_t(x,0) = \phi_x(0,t) = \phi(1,t) = \phi_x(1,t) = 0, \;\; \phi(0,t) = \eta.$$

   Es folgt $u_4(t) = u_x(0,t)$ in $\mathbf{R}^{>0}$.

4. Wie im vorigen Punkt, mit $\phi = x\eta\psi$, dann gilt

   $$\phi(x,0) = \phi_t(x,0) = \phi(0,t) = \phi(1,t) = \phi_x(1,t) = 0, \;\; \phi_x(0,t) = \eta.$$

   Es folgt $u_2(t) = u(0,t)$ in $\mathbf{R}^{>0}$.

5. Sei $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ mit $\psi(x) = 1$ für $|x-1| \leq \frac{1}{2}$, $\psi(x) = 0$ für $|x-1| \geq \frac{3}{4}$ und sei $\eta(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{\geq 0})$. Setze $\phi = \eta\psi$, dann gilt:

$$\phi(x,0) = \phi_t(x,0) = \phi(0,t) = \phi_x(0,t) = \phi_x(1,t) = 0, \quad \phi(1,t) = \eta.$$

   Es folgt $u_5(t) = u_x(1,t)$ in $\mathbf{R}^{>0}$.

6. Wie im vorigen Punkt, mit $\phi = (x-1)\eta\psi$, dann gilt:

$$\phi(x,0) = \phi_t(x,0) = \phi(0,t) = \phi_x(0,t) = \phi(1,t) = 0, \quad \phi_x(1,t) = \eta.$$

   Es folgt $u_3(t) = u(1,t)$ in $\mathbf{R}^{>0}$.

Es folgt auf diese Art die Annahme der Anfangs- und Randwerte auf $(0,1) \times \{0\}$ bzw. $\{0\} \times (0,\infty)$ und $\{1\} \times (0,\infty)$.
Die Testfunktionen nehmen in den Ecken immer den Wert Null an. Dennoch erhalten wir auch die Annahme der Anfangs- und Randwerte durch u in den Ecken, und deren Konsistenz dort, und zwar aufgrund der Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsvoraussetzungen, die u und $u_i, 0 \leq i \leq 5$, erfüllen müssen.

Sei u nun eine klassische Lösung. Definieren wir die reguläre Distribution U durch

$$U = \begin{cases} u(x,t) & \text{auf } [0,1] \times [0,\infty), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so gilt (2.12) . Mit

$$F = \begin{cases} f(x,t) & \text{auf } [0,1] \times [0,\infty), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$U_0 = H(1-x)H(x)u(x,0), U_1 = H(1-x)H(x)u_t(x,0)$ und analog für die Randwerte, gemäß Abbildung 2.2, folgt dann (2.11).

□

2.4 Variablentransformation für Distributionen

Liegen symmetrische oder antisymmetrische Randbedingungen vor, so lassen sich klassisch formulierte Viertelraum- oder Halbstreifenprobleme durch Spiegelung in Halbraumprobleme überführen, deren Theorie dann genutzt werden kann. Wir übertragen diesen Ansatz auf die von uns definierten distributiven Problemformulierungen. Intuitive Ansätze hierzu finden sich für die Gleichung $u_{tt} - c^2(x)u_{xx} = 0$ in Blagoveshchenskij [8], die dortigen Resultate stimmen mit den von uns in den Abschnitten 2.5, 2.6 und 2.7 hergeleiteten überein. Wir führen die Erweiterung mit Hilfe der hier vorgestellten Variablentransformation durch.

Für eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ ist die Verkettung mit einem Diffeomorphismus $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ durch

$$< u \circ h, \phi > = < u, |\det Dh^{-1}|\, \phi \circ h^{-1} > \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$$

wohldefiniert.

Sei h definiert durch

$$h(\xi,\tau) = (a\xi + b, c\tau + d),$$

$a,b,c,d \in \mathbf{R}$, $a,c \neq 0$. Es gilt $h^{-1}(x,t) = (\frac{x-b}{a}, \frac{t-d}{c})$, $|\det Dh^{-1}| = \frac{1}{|ac|}$. Für jede Distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ ist $u \circ h \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ definiert durch

$$< (u \circ h)(\xi,\tau), \phi(\xi,\tau) > = < u(x,t), |ac|^{-1}\phi(\frac{x-b}{a}, \frac{t-d}{c}) > \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2).$$

Für einen Differentialoperator $P_{(\xi,\tau)}(D) = \sum_{\alpha \in I} k_\alpha \partial_\xi^{\alpha_1} \partial_\tau^{\alpha_2}$, $I \subset \mathbf{N}^2$ endlich, mit konstanten Koeffizienten $k_\alpha \in \mathbf{R}$ folgt

$$< P_{(\xi,\tau)}(D)(u \circ h), \phi > = < (\tilde{P}_{(x,t)}(D)u(x,t)) \circ h, \phi >,$$

wobei $\tilde{P}_{(x,t)}(D) = \sum_{\alpha\in I} k_\alpha a^{\alpha_1} c^{\alpha_2} \partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2}$.

Wir werden in den folgenden Abschnitten gegebene Halbraum-, Viertelraum- und Halbstreifenprobleme translatieren und symmetrisch oder antisymmetrisch spiegeln. In allen Fällen gilt $\{a, c\} \subset \{-1, 1\}$. Es seien für alle $\alpha \in I$ α_1 und α_2 gerade oder gleich Null. Dann gilt $\tilde{P}_{(x,t)}(D) = P_{(x,t)}(D)$ und

$$< P_{(\xi,\tau)}(D)(u \circ h), \phi > \; = \; < (P_{(x,t)}(D)u(x,t)) \circ h, \phi > .$$

Löst u die distributive Gleichung

$$P_{(x,t)}(D)u(x,t) = F(x,t), \tag{2.13}$$

so erfüllt $u \circ h$ die Gleichung

$$P_{(\xi,\tau)}(D)(u \circ h) = (P_{(x,t)}(D)u(x,t)) \circ h = F \circ h \tag{2.14}$$

und umgekehrt.

Für $P_{(\xi,\tau)}(D) = \frac{d^2}{d\tau^2} - \frac{d^2}{d\xi^2} + q(\xi)$ gilt mit $\{a, c\} \subset \{-1, 1\}$ für alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$

$$\begin{aligned} < P_{(\xi,\tau)}(D)(u \circ h), \phi > \; &= \; < u(x,t), |ac|^{-1}(P_{(\xi,\tau)}(D)\phi)(\frac{x-b}{a}, \frac{t-d}{c}) > \\ &= \; < \Big(\frac{d^2}{dt^2} - \frac{d^2}{dx^2} + q(\frac{x-b}{a})\Big)u(x,t), \phi \circ h^{-1} > . \end{aligned}$$

Die Gleichung (2.14) ist jetzt offenbar nur erfüllt, wenn $q(\frac{x-b}{a}) = q(x)$ gilt.

In den folgenden Abschnitten sei $P_{(x,t)}(D) = \frac{d^2}{dt^2} - \frac{d^2}{dx^2} + q(x)$.

2.5 Erweiterung von Problemen auf einer Halbebene in die ganze Ebene

Wir gehen von einem Cauchyproblem auf der oberen Halbebene aus. Mit Hilfe der Variablentransformation erzeugen wir durch symmetrische bzw. antisymmetrische Spiegelung an der $(t = 0)$-Achse Cauchyprobleme auf der unteren Halbebene. Durch Addition bzw. Subtraktion der Lösungen dieser Probleme erhalten wir Lösungen der Differentialgleichung auf dem ganzen Raum.

U_0, U_1 und F seien wie in Definition 2.1.1, es gelte $q \in C^0(\mathbf{R})$.

2.5.1 Symmetrische Spiegelung an der $(t = 0)$-Achse.

Das durch symmetrische Spiegelung an der $(t = 0)$-Achse in der unteren Halbebene $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\leq 0}$ erzeugte Cauchyproblem sei

$$U_{tt}^1 - U_{xx}^1 + q(x)U^1 \;\; = \;\; F(x,-t) - U_0(x) \otimes (\frac{d}{dt}\delta)(t) + U_1(x) \otimes \delta(t). \tag{2.15}$$

Korollar 2.5.1 *Eine Distribution $U^1 = U^1(x,t) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ ist genau dann eine Lösung des Problems (2.15) auf $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\leq 0}$, wenn die Distribution $U(x,t) = U^1(x,-t)$ eine Lösung des Problems (2.3) auf $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\geq 0}$ ist.*

Beweis : Der Beweis erfolgt mit Hilfe der Variablentransformation für Distributionen. Es sei $U(x,t)$ Lösung des Cauchyproblems (2.3). Sei $h(\xi,\tau) = (\xi,-\tau)$. Dann folgt mit (2.14)

$$\begin{aligned} P_{(\xi,\tau)}(D)(U(\xi,-\tau)) \;\; &= \;\; P_{(\xi,\tau)}(D)(U \circ h(\xi,\tau))) \\ &= \;\; F(\xi,-\tau) + U_0(\xi) \otimes (\frac{d}{dt}\delta)(-\tau) + U_1(\xi) \otimes \delta(-\tau). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Umbenennung der Variablen zeigt, daß $U^1 = U \circ h$ die Gleichung (2.15) löst. Die Träger der auftretenden Distributionen liegen in den korrekten Bereichen. Die Umkehrung verläuft analog.

$\square$

Sei $\tilde{U}(x,t) := U^1(x,t) + U(x,t)$, dann löst $\tilde{U}$ auf $\mathbf{R}^2$ die Gleichung

$$\tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{xx} + \tilde{q}(x)\tilde{U} = \tilde{F}(x,t) + 2U_1(x) \otimes \delta(t),$$

mit $\tilde{F}(x,t) := F(x,t) + F(x,-t)$. Bei dieser Symmetriewahl ist im klassischen Fall $U_1 \equiv 0$. Für $U_1 \equiv 0$ folgt

$$\tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{xx} + \tilde{q}(x)\tilde{U} = \tilde{F}(x,t).$$

2.5.2 Antisymmetrische Spiegelung an der $(t = 0)$-Achse.

Das durch antisymmetrische Spiegelung an der $(t = 0)$-Achse auf $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\leq 0}$ erzeugte Cauchyproblem sei

$$U^1_{tt} - U^1_{xx} + q(x)U^1 \quad = \quad -F(x,-t) + U_0(x) \otimes (\frac{d}{dt}\delta)(t) - U_1(x) \otimes \delta(t). \tag{2.17}$$

Korollar 2.5.2 *Eine Distribution $U^1 = U^1(x,t) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ ist genau dann eine Lösung des Problems (2.17) auf $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\leq 0}$, wenn die Distribution $U(x,t) = -U^1(x,-t)$ eine Lösung des Problems (2.3) auf $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\geq 0}$ ist.*

Beweis: Multipliziere die Gleichung (2.15) mit (-1) und beachte Korollar 2.5.1.

$\square$

Die Distribution $\tilde{U} := U^1 + U$ ist dann Lösung der Gleichung

$$\tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{xx} + q(x)\tilde{U} = \tilde{F} + 2U_0(x) \otimes (\frac{d}{dt}\delta)(t)$$

auf $\mathbf{R}^2$ mit $\tilde{F}(x,t) = F(x,t) - F(x,-t)$. Bei dieser Symmetriewahl ist im klassischen Fall $U_0 \equiv 0$. Wir erhalten für $U_0 \equiv 0$ eine Lösung der Gleichung

$$\tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{xx} + q(x)\tilde{U} = \tilde{F}.$$

2.6 Erweiterung von Problemen auf einem Quadranten in eine Halbebene

Wir betrachten Probleme auf dem rechten oberen Quadranten. Durch symmetrische bzw. antisymmetrische Spiegelung an der $(x = 0)$-Achse läßt sich das Viertelraumproblem zu einem Cauchyproblem auf der oberen Halbebene erweitern. Ebenso an der $(t = 0)$-Achse zu einem Cauchyproblem der rechten Halbebene. Dazu überführen wir das Problem des rechten oberen Quadranten in das jeweils andere Viertelraumproblem mittels Variablentransformation nach (2.14) und Definition des Koeffizienten q auf den erweiterten Bereich, und erhalten das Cauchyproblem durch Addition bzw. Subtraktion beider Probleme.
Im ersten Abschnitt gelangen wir bereits zu einem Ergebnis bei der Spiegelung von δ-Distributionen in den Ecken betrachteter Bereiche. Beispiele zu ausgewählten, in den folgenden Kapiteln wichtigen Viertelraumproblemen sind im letzten der folgenden Abschnitte angegeben.

$U_i,\ 0 \leq i \leq 3$, und F seien wie in Definition 2.2.1, es gelte $q \in C^0(\mathbf{R}^{\geq 0})$.

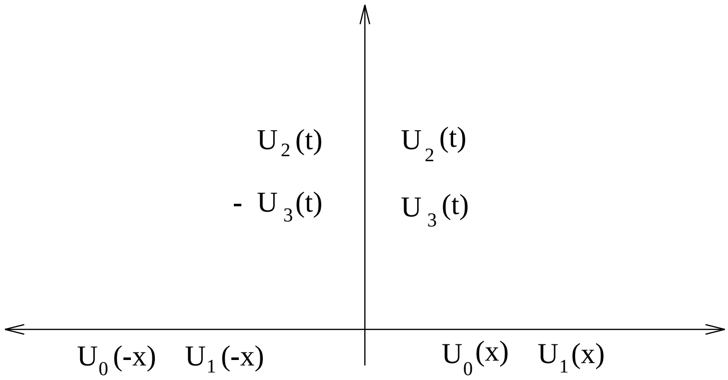

Abbildung 2.3: Anfangs- und Randwerte des an der Zeitachse gerade gespiegelten Viertelraumproblems. Die Indizes entsprechen im klassischen Fall den Ableitungen analog zu den Gleichungen (2.5) und (2.6).

2.6.1 Symmetrische Spiegelung an der $(x = 0)$-Achse.

Das durch symmetrische Spiegelung an der $(x = 0)$-Achse auf $(-\infty, 0] \times \mathbf{R}^{\geq 0}$ erzeugte Viertelraumproblem, vergleiche Abbildung 2.3, sei

$$\begin{aligned} U^1_{tt} - U^1_{xx} + q(-x)U^1 &= F(-x,t) + U_0(-x) \otimes (\frac{d}{dt}\delta)(t) + U_1(-x) \otimes \delta(t) \\ &\quad + (\frac{d}{dx}\delta)(x) \otimes U_2(t) - \delta(x) \otimes U_3(t). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Korollar 2.6.1 *Eine Distribution $U^1 = U^1(x,t) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ ist genau dann eine Lösung des Problems (2.18) auf $(-\infty, 0] \times \mathbf{R}^{\geq 0}$, wenn die Distribution $U(x,t) = U^1(-x,t)$ eine Lösung des Problems (2.7) auf $\mathbf{R}^{\geq 0} \times \mathbf{R}^{\geq 0}$ ist.*

Beweis: Der Beweis erfolgt mit Hilfe der Variablentransformation für Distributionen. Es sei $U(x,t)$ Lösung des Viertelraumproblems (2.7). Sei $h(\xi,\tau) = (-\xi,\tau)$. Dann folgt mit (2.14)

$$\begin{aligned} P_{(\xi,\tau)}(D)(U(-\xi,\tau)) &= P_{(\xi,\tau)}(D)(U \circ h(\xi,\tau)) \\ &= F(-\xi,\tau) + U_0(-\xi) \otimes (\frac{d}{dt}\delta)(\tau) + U_1(-\xi) \otimes \delta(\tau) \\ &\quad - (\frac{d}{dx}\delta)(-\xi) \otimes U_2(\tau) - \delta(-\xi) \otimes U_3(\tau). \end{aligned}$$

Umbenennung der Variablen zeigt, daß $U^1 = U \circ h$ die Gleichung (2.18) löst. Die Träger der auftretenden Distributionen liegen in den korrekten Bereichen. Die Umkehrung verläuft analog.

□

Der Träger der Distribution $\tilde{U} := U^1 + U$ liegt im Abschluß der oberen Halbebene. $\tilde{U}$ löst das auf $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\geq 0}$ formulierte Cauchyproblem

$$\tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{xx} + \tilde{q}(x)\tilde{U}$$

$$= \tilde{F} + (U_0(-x) + U_0(x)) \otimes (\frac{d}{dt}\delta)(t) + (U_1(-x) + U_1(x)) \otimes \delta(t) - 2\delta(x) \otimes U_3(t).$$

Hierin sei $\tilde{q}(x)$ derart, daß die Gleichung

$$\tilde{q}(x)\tilde{U} = q(x)U(x,t) + q(-x)U^1(x,t) \tag{2.19}$$

gilt, und $\tilde{F}$ ist definiert durch

$$\tilde{F}(x,t) = F(x,t) + F(-x,t).$$

Wegen der Gestalt der Träger von U und U^1 erfüllt $\tilde{q} = \begin{cases} q(x) & x \geq 0, \\ q(-x) & x < 0 \end{cases}$ die Gleichung (2.19).

Läßt sich F bezüglich der x-Variablen in 0 in einen singulären und einen regulären Teil aufspalten mit einer Darstellung der Form

$$F(x,t) = \sum_{k=0}^{m} (\frac{d^k}{dx^k}\delta)(x) \otimes F_k(t) + F^r(x,t),$$

$m \in \mathbf{N}$, $F_k \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ und $F^r \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ regulär in einer Umgebung von $x = 0$, dann hat $\tilde{F}$ die Gestalt

$$\tilde{F}(x,t) = 2\sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]} (\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}\delta)(x) \otimes F_{2k}(t) + F^r(x,t) + F^r(-x,t),$$

wobei $[\frac{m}{2}] = n$ für $m \in \{2n, 2n+1\}$.

Sofern die Einschränkungen und Grenzwerte existieren, gilt

$$\tilde{U}|_{x\searrow 0} = U|_{x\searrow 0} \quad \text{und} \quad \tilde{U}|_{x\nearrow 0} = U^1|_{x\nearrow 0}.$$

Bei dieser Symmetriewahl ist im klassischen Fall $U_3 \equiv 0$ und wir erhalten speziell dafür auf $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\geq 0}$ $\tilde{U}$ als Lösung des Cauchyproblems

$$\tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{xx} + \tilde{q}(x)\tilde{U} \;=\; \tilde{F} + (U_0(-x) + U_0(x)) \otimes (\frac{d}{dt}\delta)(t) + (U_1(-x) + U_1(x)) \otimes \delta(t).$$

Die Verdopplung in den Anfangswerten bei symmetrischer Spiegelung wirkt nur bezüglich δ-Anteilen in der $(0,0)$-Ecke.

2.6.2 Antisymmetrische Spiegelung an der $(x = 0)$-Achse.

Das durch antisymmetrische Spiegelung an der $(x = 0)$-Achse auf $(-\infty, 0] \times \mathbf{R}^{\geq 0}$ erzeugte Viertelraumproblem sei

$$\begin{aligned} U^1_{tt} - U^1_{xx} + q(-x)U^1 \;&=\; -F(-x,t) - U_0(-x) \otimes (\frac{d}{dt}\delta)(t) - U_1(-x) \otimes \delta(t) \\ &\quad -(\frac{d}{dx}\delta)(x) \otimes U_2(t) + \delta(x) \otimes U_3(t). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Korollar 2.6.2 *Eine Distribution $U^1 = U^1(x,t) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ ist genau dann eine Lösung des Problems (2.20) auf $(-\infty, 0] \times \mathbf{R}^{\geq 0}$, wenn die Distribution $U(x,t) = -U^1(-x,t)$ eine Lösung des Problems (2.7) auf $\mathbf{R}^{\geq 0} \times \mathbf{R}^{\geq 0}$ ist.*

Beweis: Multipliziere die Gleichung (2.18) mit (-1) und beachte Korollar 2.6.1.

□

Die Distribution $\tilde{U} = U^1 + U$ ist Lösung des auf der oberen Halbebene formulierten Problems

$$\begin{aligned} &\tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{xx} + \tilde{q}(x)\tilde{U} \\ =\;& \tilde{F} + (-U_0(-x) + U_0(x)) \otimes (\frac{d}{dt}\delta)(t) + (-U_1(-x) + U_1(x)) \otimes \delta(t) - 2(\frac{d}{dx}\delta)(x) \otimes U_2(t) \end{aligned}$$

mit $\tilde{q}(x) = \begin{cases} q(x) & x \geq 0, \\ q(-x) & x < 0 \end{cases}$ und $\tilde{F}(x,t) = F(x,t) - F(-x,t)$.
Bei dieser Symmetriewahl ist im klassischen Fall $U_2 \equiv 0$ und wir erhalten dafür die Gleichung

$$\tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{xx} + \tilde{q}(x)\tilde{U} \;=\; \tilde{F} + (-U_0(-x) + U_0(x)) \otimes (\frac{d}{dt}\delta)(t) + (-U_1(-x) + U_1(x)) \otimes \delta(t).$$

2.6.3 Symmetrische Spiegelung an der $(t = 0)$-Achse.

Das durch symmetrische Spiegelung an der $(t = 0)$-Achse auf $\mathbf{R}^{\geq 0} \times (-\infty, 0]$ erzeugte Viertelraumproblem sei

$$\begin{aligned} U^1_{tt} - U^1_{xx} + q(x)U^1 &= F(x,-t) - U_0(x) \otimes (\frac{d}{dt}\delta)(t) + U_1(x) \otimes \delta(t) \\ &\quad -(\frac{d}{dx}\delta)(x) \otimes U_2(-t) - \delta(x) \otimes U_3(-t). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Korollar 2.6.3 *Eine Distribution $U^1 = U^1(x,t) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ ist genau dann eine Lösung des Problems (2.21) auf $\mathbf{R}^{\geq 0} \times (-\infty, 0]$, wenn die Distribution $U(x,t) = U^1(x,-t)$ eine Lösung des Problems (2.7) auf $\mathbf{R}^{\geq 0} \times \mathbf{R}^{\geq 0}$ ist.*

Beweis: Variablentransformation mit $h(\xi,\tau) = (\xi, -\tau)$.

□

Die Distribution $\tilde{U} = U^1 + U$ löst das Problem

$$\begin{aligned} &\tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{xx} + q(x)\tilde{U} \\ =\; &\tilde{F} + 2U_1(x) \otimes \delta(t) - (\frac{d}{dx}\delta)(x) \otimes (U_2(t) + U_2(-t)) - \delta(x) \otimes (U_3(t) + U_3(-t)) \end{aligned}$$

auf der rechten Halbebene mit $\tilde{F}(x,t) = F(x,t) + F(x,-t)$. Bei dieser Symmetriewahl ist im klassischen Fall $U_1 \equiv 0$ und wir erhalten mit dieser Bedingung eine Lösung $\tilde{U}$ der Gleichung

$$\tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{xx} + q(x)\tilde{U} \;=\; \tilde{F} - (\frac{d}{dx}\delta)(x) \otimes (U_2(t) + U_2(-t)) - \delta(x) \otimes (U_3(t) + U_3(-t)).$$

2.6.4 Antisymmetrische Spiegelung an der $(t = 0)$-Achse.

Das durch antisymmetrische Spiegelung an der $(t = 0)$-Achse auf $\mathbf{R}^{\geq 0} \times (-\infty, 0]$ erzeugte Viertelraumproblem sei

$$\begin{aligned} U^1_{tt} - U^1_{xx} + q(x)U^1 &= -F(x,-t) + U_0(x) \otimes (\frac{d}{dt}\delta)(t) - U_1(x) \otimes \delta(t) \\ &\quad +(\frac{d}{dx}\delta)(x) \otimes U_2(-t) + \delta(x) \otimes U_3(-t). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Korollar 2.6.4 *Eine Distribution $U^1 = U^1(x,t) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ ist genau dann eine Lösung des Problems (2.22) auf $\mathbf{R}^{\geq 0} \times (-\infty, 0]$, wenn die Distribution $U(x,t) = -U^1(x,-t)$ eine Lösung des Problems (2.7) auf $\mathbf{R}^{\geq 0} \times \mathbf{R}^{\geq 0}$ ist.*

Beweis: Multipliziere die Gleichung (2.21) mit (-1) und beachte Korollar 2.6.3.

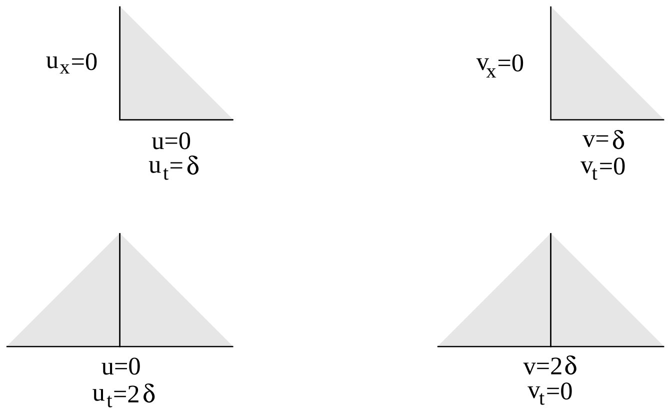

Abbildung 2.4: Viertelraumprobleme und ihre Spiegelungen zu Cauchyproblemen des oberen Halbraumes.

□

Die Distribution $\tilde{U} = U^1 + U$ ist Lösung des auf der rechten Halbebene formulierten Problems

$$\tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{xx} + q(x)\tilde{U}$$

$$= \tilde{F} + 2U_0(x) \otimes (\frac{d}{dt}\delta)(t) - (\frac{d}{dx}\delta)(x) \otimes (U_2(t) - U_2(-t)) - \delta(x) \otimes (U_3(t) - U_3(-t))$$

mit $\tilde{F}(x,t) = F(x,t) - F(x,-t)$. Bei dieser Symmetriewahl ist im klassischen Fall $U_0 \equiv 0$ und wir erhalten für diesen Anfangswert die Gleichung

$$\tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{xx} + q(x)\tilde{U} = \tilde{F} - (\frac{d}{dx}\delta)(x) \otimes (U_2(t) - U_2(-t)) - \delta(x) \otimes (U_3(t) - U_3(-t)).$$

2.6.5 Beispiele zu Erweiterungen spezieller Viertelraumprobleme

Wir geben für die folgenden Kapitel wichtige Beispiele an. Die Probleme seien mit dem Differentialoperator $P(D) = \frac{d^2}{dt^2} - \frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ gebildet und es gelte $q \in C^0(\mathbf{R}^{\geq 0})$. Die Abbildung 2.4 stellt die Problemstellungen der folgenden ersten beiden Beispiele bildlich dar, die Abbildung 2.5 gibt die Problemstellungen der letzten beiden Beispiele wieder.

Beispiel 2.6.5 *Ein mit den Anfangs- und Randwerten*

$$u^{or}(x,0) = 0,\ u_t^{or}(x,0) = \delta(x),\ \ u_x^{or}(0,t) = 0$$

auf dem rechten oberen Viertelraum gegebenes Problem $P(D)u^{or} = 0$ wird mittels gerader Spiegelung an der t-Achse auf ein Cauchyproblem mit den Anfangswerten

$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 2\delta(x)$$

auf der oberen Halbebene erweitert. Die distributive Gleichung lautet für $F = 0$

$$u_{tt} - u_{xx} + \tilde{q}(x)u = 2\delta(x) \otimes \delta(t)$$

mit $\tilde{q} = \begin{cases} q(x) & \text{für } x \geq 0, \\ q(-x) & \text{für } x < 0. \end{cases}$

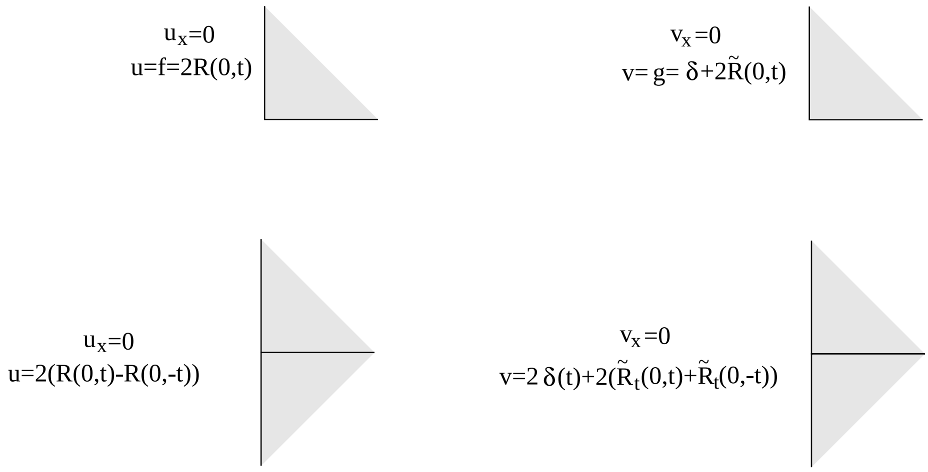

Abbildung 2.5: Die durch Spiegelung entstandenen Probleme auf dem rechten Halbraum.

Beispiel 2.6.6 *Ein mit den Anfangs- und Randwerten*

$$v^{or}(x,0) = \delta(x),\ v_t^{or}(x,0) = 0,\ v_x^{or}(0,t) = 0$$

auf dem rechten oberen Viertelraum gegebenes Problem $P(D)v^{or} = 0$ *wird mittels gerader Spiegelung an der* t*-Achse auf ein Cauchyproblem mit den Anfangswerten*

$$v(x,0) = 2\delta(x),\ v_t(x,0) = 0$$

auf der oberen Halbebene erweitert. Die distributive Gleichung lautet

$$v_{tt} - v_{xx} + \tilde{q}(x)v = 2\delta(x) \otimes \frac{d}{dt}\delta(t)$$

mit gerade gespiegeltem Koeffizienten q*. Gilt* $q \in C^1(\mathbf{R}^{\geq 0})$*, dann ist das gerade gespiegelte* q *zwar noch stetig, aber nicht notwendig mehr stetig differenzierbar.*

Beispiel 2.6.7 *Es sei das Problem aus Beispiel 2.6.5 mit Randwert* $u^{or}(0,t) = f(t) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$, $\operatorname{supp} f \subset \mathbf{R}^{\geq 0}$*, im rechten oberen Quadranten gegeben, siehe Abbildung 2.5 mit einer speziellen Wahl von* f *für die erneute Behandlung in Abschnitt 3.8. Das Problem wird durch ungerade Spiegelung an der* x*-Achse zu einem Problem auf der rechten Halbebene mit den Werten*

$$u(0,t) = f(t) - f(-t),\ u_x(0,t) = 0.$$

Die distributive Gleichung lautet für $F = 0$

$$u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = -\frac{d}{dx}\delta(x) \otimes (f(t) - f(-t)).$$

Eine Lösung ist $u = u^{or}(x,t) - u^{or}(x,-t)$.

Beispiel 2.6.8 *Es sei das Problem aus Beispiel 2.6.6 mit Randwert* $v^{or}(0,t) = g(t) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$, $\operatorname{supp} g \subset \mathbf{R}^{\geq 0}$*, im rechten oberen Quadranten gegeben, siehe Abbildung 2.5 mit einer speziellen Wahl von* g *für die erneute Behandlung in Abschnitt 3.8. Das Problem wird durch gerade Spiegelung an der* x*-Achse zu einem Problem auf der rechten Halbebene mit den Werten*

$$v(0,t) = g(t) + g(-t),\ v_x(0,t) = 0.$$

Die distributive Gleichung lautet für $F = 0$

$$v_{tt} - v_{xx} + q(x)v = -\frac{d}{dx}\delta(x) \otimes (g(t) + g(-t)).$$

Eine Lösung ist $v = v^{or}(x,t) + v^{or}(x,-t)$.

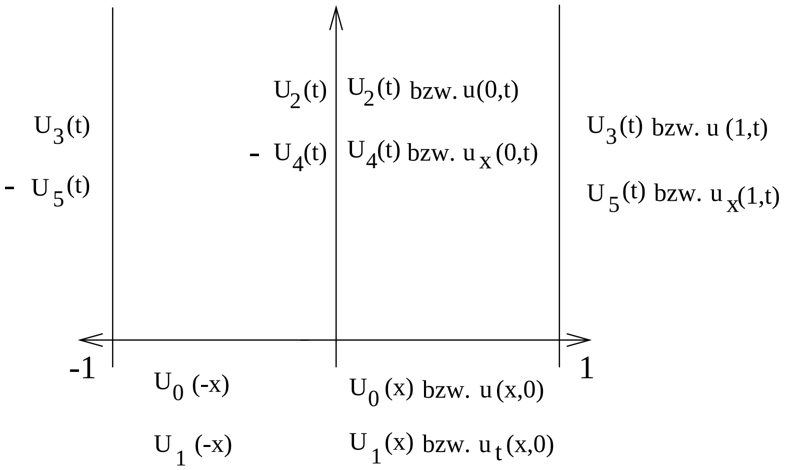

Abbildung 2.6: Das gerade gespiegelte Halbstreifenproblem. Distributive Notation und die Entsprechungen in der klassischen Formulierung.

2.7 Erweiterung von Problemen auf einem Halbstreifen in eine Halbebene

Durch symmetrische bzw. antisymmetrische Spiegelung an den $(x = 0)$- und $(x = 1)$-Achsen läßt sich das Halbstreifenproblem in ein Cauchyproblem überführen.

$U_i,\ 0 \le i \le 5$, und F seien wie in Definition 2.3.1, es gelte $q \in C^0([0,1])$.

Das durch **symmetrische Spiegelung an der** $(x = 0)$**-Achse** auf $[-1,0] \times \mathbf{R}^{\ge 0}$ erzeugte Halbstreifenproblem, vgl. Abbildung 2.6, sei

$$
\begin{aligned}
U^1_{tt} - U^1_{xx} + q(-x)U^1 \quad = \quad & F(-x,t) + U_0(-x) \otimes (\frac{d}{dt}\delta)(t) + U_1(-x) \otimes \delta(t) \\
& -(\frac{d}{dx}\delta)(1+x) \otimes U_3(t) + (\frac{d}{dx}\delta)(x) \otimes U_2(t) \\
& -\delta(1+x) \otimes (-U_5(t)) - \delta(x) \otimes U_4(t). \qquad (2.23)
\end{aligned}
$$

Korollar 2.7.1 *Eine Distribution $U^1 = U^1(x,t) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ ist genau dann eine Lösung des Problems (2.23) auf $[-1,0] \times \mathbf{R}^{\ge 0}$, wenn die Distribution $U(x,t) = U^1(-x,t)$ eine Lösung des Problems (2.11) auf $[0,1] \times \mathbf{R}^{\ge 0}$ ist.*

Beweis: Der Beweis erfolgt mit Hilfe der Variablentransformation für Distributionen. Es gelte die Gleichung (2.11) , und es sei $P_{(x,t)}(D) = \frac{d^2}{dt^2} - \frac{d^2}{dx^2} + q(x)$. Sei $h(\xi,\tau) = (-\xi,\tau)$. Es folgt mit (2.14)

$$
\begin{aligned}
P_{(\xi,\tau)}(D)(U(-\xi,\tau)) \quad &= \quad P_{(\xi,\tau)}(D)(U \circ h(\xi,\tau)) \\
&= \quad F(-\xi,\tau) + U_0(-\xi) \otimes (\frac{d}{dt}\delta)(\tau) + U_1(-\xi) \otimes \delta(\tau) \\
& \qquad -(\frac{d}{dx}\delta)(-\xi) \otimes U_2(\tau) + (\frac{d}{dx})\delta(-\xi-1) \otimes U_3(\tau) \\
& \qquad -\delta(-\xi) \otimes U_4(\tau) + \delta(-\xi-1) \otimes U_5(\tau).
\end{aligned}
$$

Umbenennung der Variablen zeigt, daß $U^1 = U \circ h$ die Gleichung (2.23) löst. Die Umkehrung folgt analog.

□

Die Distribution $\tilde{U} = U^1 + U$ löst das auf $[-1,1] \times \mathbf{R}^{\geq 0}$ formulierte Problem

$$\begin{aligned} & \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{xx} + \tilde{q}(x)\tilde{U} \\ = \quad & \tilde{F} + (U_0(-x) + U_0(x)) \otimes (\tfrac{d}{dt}\delta)(t) + (U_1(-x) + U_1(x)) \otimes \delta(t) \\ & -((\tfrac{d}{dx}\delta)(1+x) - (\tfrac{d}{dx}\delta)(x-1)) \otimes U_3(t) - 2\delta(x) \otimes U_4(t) + (\delta(1+x) + \delta(x-1)) \otimes U_5(t), \end{aligned}$$

wobei $\tilde{q}(x) = \begin{cases} q(x) & x \in [0,1], \\ q(-x) & x \in [-1,0) \end{cases}$ und $\tilde{F}(x,t) = F(x,t) + F(-x,t)$.

Für $U_0(x) = 0$, $U_1(x) = \delta(x)$ und $F = 0$ lautet das Problem daher

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{xx} + \tilde{q}(x)\tilde{U} \quad = \quad & 2\delta(x) \otimes \delta(t) - 2\delta(x) \otimes U_4(t) - ((\tfrac{d}{dx}\delta)(1+x) - (\tfrac{d}{dx}\delta)(x-1)) \otimes U_3(t) \\ & +(\delta(1+x) + \delta(x-1)) \otimes U_5(t). \end{aligned}$$

Man beachte die Verdopplung des $\delta(x,t)$-Terms.

Die Vorgehensweise bei antisymmetrischen Randbedingungen $U_2 \equiv 0$ oder $U_3 \equiv 0$ ist analog. Liegen an $x = 0$ und $x = 1$ jeweils symmetrische oder antisymmetrische Randbedingungen vor, so läßt sich das Verfahren derart iterieren, daß wir ein Cauchyproblem auf dem oberen Halbraum erhalten. Die erhaltenen Cauchydaten sind Distributionen.

Beispiel 2.7.2 *Für $F \equiv 0$, $U_0 \equiv 0$, $U_1 = \delta(x)$ und $U_3 \equiv U_4 \equiv 0$ erhalten wir aus dem Halbstreifenproblem durch Spiegelung auf der oberen Halbebene das Problem*

$$U_{tt} - U_{xx} + q(x)U = 2\delta(t) \otimes \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \delta(x - 2l),$$

mit $q(2l + x) = q(x)$ und $q(2l + 1 + x) = q(1 - x)$ für $l \in \mathbf{Z}, x \in [0,1]$. Als Cauchyproblem geschrieben ist dies gleich

$$u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = 0 \qquad \text{in } \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{>0},$$

$$u(x,0) = 0, \;\; u_t(x,0) = 2\sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \delta(x - 2l) \qquad \text{in } \mathbf{R}.$$

Bemerkung 2.7.3 *In allen Spiegelungen, sowohl den symmetrischen als auch den antisymmetrischen, in denen der Definitionsbereich der Koeffizientenfunktion q erweitert werden mußte, geschah dies durch gerade Spiegelung des Koeffizienten. Liegt im Ursprungsproblem ein stetiges q vor, so bleibt q natürlich stetig, stetige Differenzierbarkeit bleibt im allgemeinen jedoch nicht erhalten.*

2.8 Die direkten und die inversen Probleme DP1, DP2, IP1 und IP2

In diesem Abschnitt geben wir die von uns untersuchten direkten und inversen Probleme an. Sie beziehen sich auf die in der physikalischen Betrachtung in Abschnitt 1.2 angegebenen Probleme (1.1), (1.2), (1.3) und (1.1), (1.4), (1.3).

Es seien $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $h_1, h_2 \in \mathbf{R}$, und es löse u die partielle Differentialgleichung

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + q(x)u(x,t) = 0 \qquad \text{in } (0,1) \times \mathbf{R}^{>0}, \tag{2.24}$$

$q(x) \in C^0([0,1])$, mit den Randwerten

$$(u_x - h_1 u)(0,t) = (u_x + h_2 u)(1,t) = 0 \qquad \text{für } t \geq 0 \tag{2.25}$$

und den Anfangswerten

$$u(x,0) = 0, \; u_t(x,0) = \frac{k}{2}\delta(x) \qquad \text{für } x \in [0,1]. \tag{2.26}$$

Die distributive Formulierung dieses Problems lautet nach Definition 2.3.1: $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ mit $\operatorname{supp} u \subset [0,1] \times \mathbf{R}^{\geq 0}$ löse

$$\begin{aligned} P(D)u &= \frac{k}{2}\delta(x,t) - \frac{d}{dx}\delta(x) \otimes u(0,t) - \delta(x) \otimes h_1 u(0,t) \\ &\quad + \frac{d}{dx}\delta(x-1) \otimes u(1,t) - \delta(x-1) \otimes h_2 u(1,t). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Definition 2.8.1 *Das* **direkte Problem DP1_HS** *auf dem Halbstreifen lautet:*
Bei gegebenen h_1, h_2 und q ist eine Lösung u von (2.24), (2.25), (2.26) bzw. von (2.27) zu bestimmen.

Definition 2.8.2 *Das* **inverse Problem IP1_HS** *auf dem Halbstreifen lautet:*
Bei gegebenem $u(0,t) = f(t), t > 0$, sind q und h_1 von (2.24), (2.25), (2.26) bzw. von (2.27) zu bestimmen.

Wir betrachten ein weiteres Problem mit anderen Anfangswerten. Es löse v die partielle Differentialgleichung (2.24) mit den Randwerten (2.25) und den Anfangswerten

$$v(x,0) = \frac{k}{2}\delta(x), \; v_t(x,0) = 0 \qquad \text{für } x \in [0,1]. \tag{2.28}$$

Die distributive Formulierung dieses Problems lautet nach Definition 2.3.1: $v \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ mit $\operatorname{supp} v \subset [0,1] \times \mathbf{R}^{\geq 0}$ löse

$$\begin{aligned} P(D)v &= \frac{k}{2}\delta(x) \otimes \frac{d}{dt}\delta(t) - \frac{d}{dx}\delta(x) \otimes v(0,t) - \delta(x) \otimes h_1 v(0,t) \\ &\quad + \frac{d}{dx}\delta(x-1) \otimes v(1,t) - \delta(x-1) \otimes h_2 v(1,t). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Analog zu Definition 2.8.1 bzw. Definition 2.8.2 sprechen wir vom **direkten Problem DP2_HS** bzw. **inversen Problem IP2_HS**.

Bemerkung 2.8.3 *Mit einer Lösung u des Problems DP1_HS ist durch Ableitung nach t bereits eine Lösung v des distributiven Problems DP2_HS gegeben.*

Mit den in den Abschnitten 2.6 und 2.7 vorgestellten Methoden können diese Probleme in Viertelraum- und Halbraumprobleme überführt werden. Wir werden mit Hilfe von Einschränkungen auf Viertelräume zeigen, daß für $h_1 = 0$ die Lösungen des direkten Problems DP1_HS, des Problems (2.7) mit $U_0 \equiv 0$, $U_1 = \frac{k}{2}\delta(x)$, $U_2 = u(0,t)$, $U_3 \equiv 0$ und des Problems (2.3) mit $U_0 \equiv 0$, $U_1 = k\delta(x)$ auf $\Omega = \{(x,t) | \, x \in [0,1], \, x \leq t \leq 2-x\}$ gleich sind, sofern die entsprechenden Koeffizienten q auf $[0,1]$ übereinstimmen und für das Cauchyproblem $q(-x) = q(x)$, $x \in [0,1]$, gilt.

Eine auf Ω eingeschränkte Betrachtung der Problemformulierung ist auch für das inverse Problem möglich, die theoretische Behandlung zur Lösung nach q kann allein mit $u|_\Omega$ durchgeführt werden. Wir können daher IP1_HS auch mit entsprechend lokal betrachteten Viertelraum- und Halbstreifenproblemen identifizieren und sprechen oft einfach von DP1, DP2 und IP1, IP2.

Nach den Definitionen distributiver Probleme wenden wir uns im folgenden Kapitel der Lösung spezieller Halbraumprobleme zu.

Kapitel 3

Lösungen direkter distributiver Probleme

Aus den Halbstreifenproblemen DP1_HS und DP2_HS für $h_1 = 0$ und $h_2 \in \{0, \infty\}$ folgen durch gerade bzw. ungerade Spiegelung Cauchyprobleme der oberen Halbebene. Mit der Riemannfunktion der oberen Halbebene, die wir in Abschnitt 3.1 einführen, sind die Lösungen dieser Probleme darstellbar. Die Riemannfunktion dient in Kapitel 7 zur Herleitung der nichtlinearen Gel'fand-Levitan-Gleichung.

In Abschnitt 3.3 geben wir die Riemannfunktion für $q \equiv k^2$, $k \in \mathbf{R}$, an. Damit sind für diesen Spezialfall die Randwerte an $x = 0$ für das inverse Problem exakt angebbar. Abschnitt 3.4 stellt das Verfahren der Entwicklung in Singularitätenfunktionen vor, welches eine Aufteilung der Riemannfunktion in singuläre und reguläre Teile ermöglicht. Der Abschnitt 3.5 enthält verschiedene Zugänge zur Riemannfunktion bei von einer Variablen abhängigem Koeffizienten $q = q(x)$ und Aussagen zur Bedeutung der Riemannfunktion als Mittel zur Lösung von Cauchyproblemen. Wichtig ist die Darstellung mit Hilfe der Lösung eines Goursatproblems, welches ein klassisch formuliertes Problem mit charakteristischen Randbedingungen ist, und über eine mit dem Charakteristikenverfahren hergeleitete Integralgleichung. Im darauffolgenden Abschnitt 3.6 erklären wir die Anfangswertannahme für die Riemannfunktion mittels Grenzprozeß. Die Lösung durch Spiegelung erhaltener Cauchyprobleme mit der Riemannfunktion und die Einschränkung der Riemannfunktion auf den rechten oberen Viertelraum werden in den vorletzten beiden Abschnitten behandelt. Ein Resultat ist die auf $\{(x,t) | 0 \le x \le 1,\ 0 \le t < 2 - x\}$ geltende Gleichheit der Lösung des Halbstreifen-, des Viertelraum- und des durch entsprechende Spiegelung erhaltenen Cauchyproblems. In Abschnitt 3.9 erfolgt die Herleitung einer Basislösung der rechten Halbebene, mit der in Kapitel 7 die lineare Gel'fand-Levitan-Gleichung gewonnen wird.

3.1 Die Riemannfunktion

Sei $(x_0, t_0) \in \mathbf{R}^2$ und $q : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine stückweise stetige Funktion. Eine von den Parametern x_0 und t_0 abhängende Lösung $R = R(x, t, x_0, t_0) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ von

$$R_{tt} - R_{xx} + q(x)R = \delta(x - x_0) \otimes \delta(t - t_0) \tag{3.1}$$

mit Träger in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\ge t_0}$ nennen wir **Riemannfunktion** des Differentialoperators $P(D) = \frac{d^2}{dt^2} - \frac{d^2}{dx^2} + q(x)$. Sei $R^1 = R^1(x, t, x_0, t_0) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ eine Lösung von

$$R^1_{tt} - R^1_{xx} + q(x)R^1 = \delta(x - x_0) \otimes \frac{d}{dt}\delta(t - t_0), \tag{3.2}$$

ebenfalls mit Träger in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\ge t_0}$. Analog zu Definition 2.1.1 und Bemerkung 2.1.3 lauten die zugehörigen Formulierungen als Cauchyproblem

$$R_{tt} - R_{xx} + q(x)R = 0 \qquad \text{auf } \mathbf{R} \times [t_0, \infty), \tag{3.3}$$

$$R(x, t_0, x_0, t_0) = 0,\ R_t(x, t_0, x_0, t_0) = \delta(x - x_0) \qquad \text{in } \mathbf{R}, \tag{3.4}$$

und

$$R^1_{tt} - R^1_{xx} + q(x)R^1 = 0 \qquad \text{auf } \mathbf{R} \times [t_0, \infty), \tag{3.5}$$

$$R^1(x, t_0, x_0, t_0) = \delta(x - x_0),\ R^1_t(x, t_0, x_0, t_0) = 0 \qquad \text{in } \mathbf{R}, \tag{3.6}$$

wobei der Träger von R und R^1 jeweils in $t \geq t_0$ liegt.

Da die Koeffizienten der Differentialgleichung nicht von t abhängen, ist mit einer Lösung für $t_0 = 0$ eine Lösung für beliebiges $t_0 \in \mathbf{R}$ gegeben durch

$$R(x, t, x_0, t_0) = R(x, t - t_0, x_0, 0) \quad \text{bzw.} \quad R^1(x, t, x_0, t_0) = R^1(x, t - t_0, x_0, 0)$$

und umgekehrt.
Wir benutzen die abkürzenden Schreibweisen $R(x, t, x_0)$ für $R(x, t, x_0, 0)$, $R(x, t)$ für $R(x, t, 0, 0)$ und analog für R^1. Im Fall $t_0 = 0$ nennen wir R auch die Riemannfunktion der oberen Halbebene.

Für den Begriff der Riemannfunktion siehe auch Courant und Hilbert [15] Chapt. 5 §5. Dort wird die Riemannfunktion für Differentialoperatoren mit Hauptteil $\frac{d^2}{dxdt}$ ausführlich behandelt.

Der Differentialoperator P(D) ist linear, so daß mit einer Lösung R von (3.3), (3.4) durch $R^1 = \frac{d}{dt}R$ eine Lösung des Problems (3.5), (3.6) gegeben ist.

3.2 Distributionen mit Träger auf Charakteristikenabschnitten

Bei der Darstellung der Riemannfunktion und ihrer Ableitungen greifen wir wiederholt auf einige Distributionen mit Träger auf Charakteristikenabschnitten zurück. So gilt beispielsweise für $q \equiv 0$ $R^1(x, t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}H(t - |x|)$ mit

$$< \frac{d}{dt}H(t - |x|), \phi(x, t) > = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, |x|)dx \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2).$$

Für eine abkürzende Darstellung dieser Distributionen beziehen wir uns auf Definitionen aus Gel'fand und Schilow [21] Chapt. III §1.

Es sei H die Heaviside-Funktion mit $H(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{für } \xi \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$ Sei $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion mit $\operatorname{grad} g \neq 0$ für alle $(x, t) \in \mathbf{R}^2$ mit $g(x, t) = 0$. Dann ist mit $H(g(x, t))$ definiert durch

$$< H(g(x, t)), \phi(x, t) > = \int_{g(x,t) \geq 0} \phi(x, t)dxdt \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$$

eine Distribution aus $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ gegeben. Gel'fand und Schilow definieren die Distribution $\delta(g) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$. Aus ihrer Definition folgt

$$\frac{d}{dx}H(g(x, t)) = g_x\delta(g) \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dt}H(g(x, t)) = g_t\delta(g).$$

$\delta(g)$ kann damit auch über $H(g)$ definiert werden. Wir benutzen die Heaviside-Funktion auch mit den Argumenten $g(x, t) = x - |t|$ bzw. $g(x, t) = t \pm |x|$ und definieren $\delta(x - |t|) = \frac{d}{dx}H(x - |t|)$, $\delta(t - |x|) = \frac{d}{dt}H(t - |x|)$, $\delta(t + |x|) = \frac{d}{dt}H(t + |x|)$ und $\delta(t - |x|)H(x) = \frac{d}{dt}(H(t - |x|)H(x))$. Für die Distribution $\frac{d}{dx}H(x - |t|)$ benutzen wir auch die suggestive Schreibweise $(\delta(x - t) + \delta(x + t))H(x)$.

Bemerkung 3.2.1 *Sei $q \in C^1(\mathbf{R}^{\geq 0})$. Dann erfüllt die Distribution $q(x)\frac{d}{dx}H(x-|t|)$ für alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ die Gleichungen*

$$< q(x)\frac{d}{dx}H(x-|t|), \phi > = < \frac{d}{dx}H(x-|t|), q(x), \phi > = \int_0^\infty q(x)\Big(\phi(x,x)+\phi(x,-x)\Big)dx.$$

Durch die rechte Seite der letzten Gleichung ist die eindeutige Fortsetzung von $q(x)\frac{d}{dx}H(x-|t|)$ auf C_0^0 gegeben. Diese ist auch für in $\mathbf{R}^{\geq 0}$ stückweise stetiges q mit endlich vielen Sprüngen definiert.

3.3 Exakte Lösungen für konstantes Potential

Für konstantes Potential $q \equiv k^2,\ k \in \mathbf{R}^{\geq 0}$, läßt sich die Riemannfunktion der oberen Halbebene mit Hilfe einer Besselfunktion erster Art explizit angeben.

3.3.1 Cauchyproblem und Lösungen

Wir betrachten das Cauchyproblem zur Bestimmung einer Lösung u von

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + q(x)u(x,t) = 0 \qquad \text{in } \mathbf{R}\times\mathbf{R}^{>0}, \tag{3.7}$$

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = \delta(x) \qquad \text{in } \mathbf{R}. \tag{3.8}$$

Mit Hilfe von **Laplace-** und **Fourier-Transformation** leiten wir eine Lösung des Cauchyproblems her, ohne zunächst die Anwendbarkeit dieser Transformationen zu untersuchen.

Sei u Lösung des Cauchyproblems für (3.7) mit den Anfangswerten

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Sei $\tilde{u}(x,s) = \int_0^\infty u(x,t)e^{-st}dt$ die Laplace-Transformation von u bezüglich t. Dann gilt unter der Voraussetzung $\lim_{t\to\infty} u(x,t)e^{-st} = \lim_{t\to\infty} u_t(x,t)e^{-st} = 0$ für $Re(s) > 0,\ x \in \mathbf{R}$ fest,

$$\int_0^\infty u_{tt}(x,t)e^{-st}dt \ = \ -u_t(x,0) - su(x,0) + s^2\tilde{u}(x,s).$$

Die Laplace-transformierte Gleichung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung in x, die die Anfangswerte enthält:

$$-\tilde{u}_{xx}(x,s) + (q(x)+s^2)\tilde{u}(x,s) = sf(x) + g(x).$$

Sei nun $q \equiv k^2,\ k \in \mathbf{R}^{\geq 0}$. Die Gleichung (3.7) wird in diesem Fall auch Klein-Gordon Gleichung genannt, vergleiche Vladimirov [59] Chapt. 1 §2.8 oder Vvedensky [60] Chapt. 7 Problem 41. Die Fourier-Transformierte $\hat{h}$ einer Funktion h über $\mathbf{R}$ sei formal definiert durch $\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^\infty h(x)e^{-i\omega x}dx$. Mit geeigneten Voraussetzungen an h existiert $\hat{h}$. Unter geeigneten Voraussetzungen an $\hat{h}$ gilt die Inversionsformel $h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \hat{h}(\omega)e^{i\omega x}d\omega$. Eine formale Fourier-Transformation der Laplace-transformierten Gleichung bezüglich x ergibt

$$(\omega^2 + k^2 + s^2)\hat{\tilde{u}}(\omega,s) = s\hat{f}(\omega) + \hat{g}(\omega),$$

oder

$$\hat{\tilde{u}}(\omega,s) = \frac{s\hat{f}(\omega)+\hat{g}(\omega)}{\omega^2+k^2+s^2}.$$

Formale Inversion sowohl der Fourier- als auch der Laplace-Transformation liefert

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{r\to\infty}\int_{v-ir}^{v+ir}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{s\hat{f}(\omega)+\hat{g}(\omega)}{\omega^2+k^2+s^2}e^{i\omega x}d\omega\Big)e^{st}ds,$$

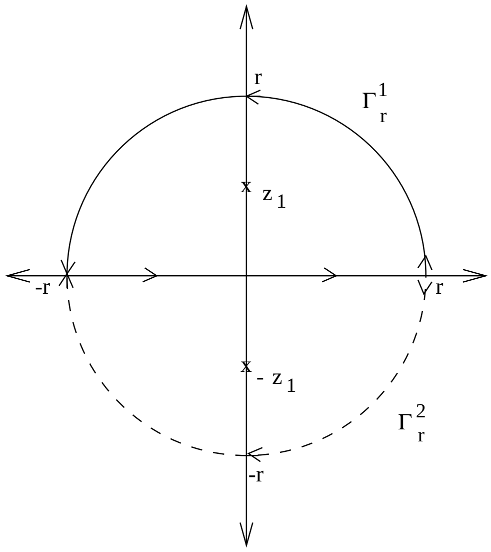

Abbildung 3.1: Integrationskurven zur Berechnung der inversen Fourier-Transformation.

für $v \in \mathbf{R}^{>0}$.

Die folgende Behandlung dieser Darstellung von u führen wir für die speziellen Anfangswerte $f \equiv 0$, $g = \delta(x)$ durch. Es gilt $\hat{f} \equiv 0$, $\hat{g} \equiv 1$ und damit

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{r\to\infty} \int_{v-ir}^{v+ir} (\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + k^2 + s^2} e^{i\omega x} d\omega) e^{st} ds.$$

Die Pole des Integranden liegen in $\omega = \pm i\sqrt{k^2+s^2}$. Das innere Integral läßt sich mit Hilfe des Residuensatzes auswerten. Mit der Kurvenwahl gemäß Abbildung 3.1 um die Pole $z_1 = i\sqrt{k^2+s^2}$ und $-z_1$ folgt für $x \geq 0$

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\Gamma_r^1} \frac{1}{\omega^2 + k^2 + s^2} e^{i\omega x} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + k^2 + s^2} e^{i\omega x} d\omega = \pi \frac{e^{-x\sqrt{k^2+s^2}}}{\sqrt{k^2+s^2}},$$

und für $x \leq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + k^2 + s^2} e^{i\omega x} d\omega = \pi \frac{e^{-(-x)\sqrt{k^2+s^2}}}{\sqrt{k^2+s^2}}.$$

Es gilt für $x \geq 0$ nach Abramowitz und Stegun [1] die Gleichung

$$(\frac{e^{-x\sqrt{k^2+s^2}}}{\sqrt{k^2+s^2}})|^{\check{}} = H(t-x) J_0(k\sqrt{t^2-x^2})$$

mit der Darstellung der Besselfunktion aus Natterer [37],

$$J_0(k\sqrt{t^2-x^2}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{k(-x\cos(\theta)+it\sin(\theta))} d\theta \qquad \text{für } t^2 \geq x^2.$$

Für obige Darstellung von u folgt damit für $x \geq 0$

$$u(x,t) \;=\; \tfrac{1}{4\pi i} \lim_{r\to\infty} \int_{v-ir}^{v+ir} \tfrac{e^{-x\sqrt{k^2+s^2}}}{\sqrt{k^2+s^2}} e^{st} ds \;=\; \tfrac{1}{2} H(t-x) J_0(k\sqrt{t^2-x^2}),$$

und für $x \leq 0$

$$u(x,t) \;=\; \tfrac{1}{4\pi i} \lim_{r\to\infty} \int_{v-ir}^{v+ir} \tfrac{e^{-(-x)\sqrt{k^2+s^2}}}{\sqrt{k^2+s^2}} e^{st} ds \;=\; \tfrac{1}{2} H(t-(-x)) J_0(k\sqrt{t^2-x^2}).$$

Insgesamt

$$u(x,t) = \frac{1}{2} H(t-|x|) J_0(k\sqrt{t^2-x^2}) \qquad \text{auf } \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\geq 0},$$

vergleiche auch Bleistein [5] Chapt. 4 §4.4. Dies ist eine formale Herleitung einer Darstellung für u bei der die Erfüllung der Voraussetzungen und die Existenz der Integrale nicht untersucht wurde. In welchem Sinne das Ergebnis dieser Herleitung eine Lösung des Cauchyproblems ist, zeigt der folgende

Satz 3.3.1 *Es ist*

$$U(x,t) = \frac{1}{2}H(t-|x|)J_0(k\sqrt{t^2-x^2}) \tag{3.9}$$

eine reguläre Distribution mit $\operatorname{supp} U \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\geq 0}$, *die die distributive Gleichung*

$$U_{tt} - U_{xx} + k^2 U = \delta(x,t)$$

löst.

Beweis: U ist lokal integrierbar und damit eine reguläre Distribution aus $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$. Es gilt $\operatorname{supp} U \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\geq 0}$. Für $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ folgt

$$< U_{tt} - U_{xx} + k^2 U, \phi > = < U, \phi_{tt} - \phi_{xx} + k^2\phi >$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(t-|x|)J_0(k\sqrt{t^2-x^2})\Big(\phi_{tt}(x,t) - \phi_{xx}(x,t) + k^2\phi(x,t)\Big)dxdt.$$

Die Integrale existieren, da ϕ einen kompakten Träger hat. Mit einer Einschränkung der Integration auf das Gebiet $t > |x|$, partieller Integration und einigen Umformungen erhalten wir die Gleichheit dieses Terms zu

$$-\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \tfrac{d}{ds}(J_0(k\sqrt{(s+0)^2-s^2})\phi(s,s) + J_0(k\sqrt{(s+0)^2-(-s)^2})\phi(-s,s))ds$$

$$= \quad -\tfrac{1}{2}\lim_{s\searrow 0}(-\phi(s,s) - \phi(-s,s)) \quad = \quad \phi(0,0) \quad = \; < \delta(x,t), \phi > .$$

Dies war zu zeigen.

□

Der Differentialoperator ist für $q \equiv k^2,\ k \in \mathbf{R}^{\geq 0}$, invariant gegenüber Translation der Variablen. $V(x,t) = U(x-x_0, t-t_0)$ löst damit

$$V_{tt} - V_{xx} + k^2 V = \delta(x-x_0, t-t_0)$$

und $\operatorname{supp} V \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\geq t_0}$. Mit der modifizierten Besselfunktion I_0 und $k \in \mathbf{R}^{\geq 0}$ ist $U(x,t) = \frac{1}{2}H(t-|x|)I_0(k\sqrt{t^2-x^2})$ eine Lösung von $U_{tt} - U_{xx} - k^2 U = \delta(x,t)$. Der Beweis erfolgt analog zum Beweis des Satzes 3.3.1, wobei $I_0(z) = J_0(iz)$ gilt.

Korollar 3.3.2 *Es ist für* $k \in \mathbf{R}^{\geq 0}$ *durch* $U(x,t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}H(t-|x|)J_0(k\sqrt{t^2-x^2})\right)$ *eine distributive Lösung der Gleichung*

$$U_{tt} - U_{xx} + k^2 U = \frac{d}{dt}\delta(x,t)$$

mit Träger im Abschluß der oberen Halbebene gegeben. Es ist

$$U = \frac{1}{2}\delta(t-|x|) - \frac{1}{2}H(t-|x|)\frac{kt}{\sqrt{t^2-x^2}}J_1(k\sqrt{t^2-x^2}).$$

Auch hier folgt eine Lösung von $V_{tt} - V_{xx} + k^2 V = \frac{d}{dt}\delta(x-x_0, t-t_0)$ *durch einfache Translation.*

Bemerkung 3.3.3 *Derselbe Ansatz ist mit einer verallgemeinerten Fourier-Transformation unter Einführung einer Spektralverteilungsfunktion möglich. Es folgt auch für nicht konstantes Potential eine Darstellung der Lösung u mit Hilfe der Spektralverteilungsfunktion und den Lösungen entsprechender Sturm-Liouville Probleme. Für eine Vorstellung der verallgemeinerten Fourier-Transformation siehe Lavrent'ev, Reznitskaya und Yakhno [31] Appendix §4, für eine Anwendung siehe Gel'fand und Levitan [20]. Die Behandlung ist ein Analogon zur Trennung der Variablen, Abschnitt 9.3, wobei Riemann-Stieltjes Integrale mit der Spektralverteilungsfunktion der Superposition entsprechen, vergleiche Romanov [42] Chapt. 2 Sect. 2.6.*

3.3.2 Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit der Lösungen von der Inhomogenität und den Anfangswerten

Die Lösung eines Cauchyproblems mit $q \equiv k^2$, allgemeiner Inhomogenität aus $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ und Anfangswerten aus $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ erhalten wir durch Zufaltung der rechten Seite der distributiven Problemformulierung zu der oben gewonnenen Lösung U aus (3.9), sofern die Faltung existiert. Die Faltung ist dann mit dem Differentialoperator vertauschbar. Dieses ist die Grundlage für den Beweis des folgenden Satzes über die Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit der Lösung des direkten Problems von der Inhomogenität und den Anfangswerten. Der Beweis kann analog zum Beweis des Satzes 15.1 zur Lösung der eindimensionalen Wellengleichung in Triebel [57] durchgeführt werden.

Satz 3.3.4 *Das Cauchyproblem aus Definition 2.1.1 ist für $q \equiv k^2$ eindeutig lösbar. Die Lösung U ist von den Distributionen $U_i, 0 \leq i \leq 1$, und F stetig abhängig:*
Für alle Funktionen $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ und $\phi(x,t) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ seien die Distributionen $U_i^m \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}), F^m \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2), m \in \mathbf{N}$, derart, daß $< U_i^m, \psi > \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} < U_i, \psi >$ und $< F^m, \phi > \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} < F, \phi >$ gilt. Sei U^m die Lösung des Problems aus Definition 2.1.1 mit U_i^m, F^m statt U_i und F. Dann gilt $< U^m, \phi > \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} < U, \phi >$.

Bemerkung 3.3.5 *Sei $q \equiv k^2$. $\{g^m\}_{m\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ sei eine Folge mit $g^m \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} \delta(x)$. Aus dem vorigen Satz folgt dann insbesondere, daß die Lösungen $\{u^m\}_{m\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ von (3.7) mit $u^m(x,0) = 0$, $u_t^m(x,0) = g^m(x)$ für $x \in \mathbf{R}$ eindeutig existieren und gegen die Lösung $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ von (3.7), (3.8) konvergieren. Die distributiven Formulierungen der Cauchyprobleme gemäß Definition 2.1.1 sind leicht aufzustellen.*

3.4 Entwicklung in Singularitätenfunktionen

Singularitäten in der Lösung der Wellengleichung breiten sich entlang der Charakteristiken aus. Diese sind für jedes konstante $c \in \mathbf{R}$ die $(t = x + c)$- und die $(t = -x + c)$-Achsen. In den von uns behandelten Problemen DP1_HS und DP2_HS folgen Singularitäten aus den Anfangswerten und dem Potential q. Die Charakteristiken sind die der Wellengleichung und es können die Singularitäten innerhalb einer Lösung geschlossen als Singularitätenfunktionen angegeben werden. Die Lösung wird aufgeteilt in einen singulären und einen regulären Teil. Dies erleichtert in späteren Abschnitten sowohl die analytische als auch die numerische Behandlung des Problems.

3.4.1 Der Ansatz der Entwicklung in Singularitätenfunktionen

Diese Methode wird in Courant und Hilbert [15] Chapt. VI §4 vorgestellt und in engerem Bezug zur Wellengleichung in Burridge [10] aufgegriffen. Sie besteht darin, eine Lösung $u(x,t)$ eines Problems entsprechend der Anzahl der Charakteristiken als Summe von Funktionen $u^k(x,t)$ darzustellen, deren Phasenfunktionen $\phi^k(x,t)$ durch die Charakteristiken bestimmt werden:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{N} u^k(x,t), \tag{3.10}$$

wobei

$$u^k(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k}(x,t) f_n(\phi^k(x,t)).$$

Die Phasenfunktionen werden so gewählt, daß durch $\phi^k(x,t) = konst$ Charakteristikenabschnitte dargestellt werden. Für die Funktionen f_n gelte $f_n' = f_{n-1}$. Der Verlust an Regularität durch Differentiation führt dazu, daß in unseren Beispielen der Hauptteil des Differentialoperators zusammen mit den ersten Entwicklungsfunktionen die Singularitäten in der Inhomogenität der Differentialgleichung erzeugt.
Sowohl die asymptotische Darstellung der u^k als auch die Differentiation müssen jeweils für den Fall

der Anwendung interpretiert werden.
Ein Einsetzen der Darstellung (3.10) in das Problem

$$P(D)u = F$$

mit einem Differentialoperator $P(D)$ ergibt Gleichungen für die Koeffizientenfunktionen $a_{n,k}(x,t)$, indem die Ableitungen der Entwicklungsfunktionen f_n mittels der Gleichung $f_n' = f_{n-1}$ ersetzt werden und die Koeffizienten dieser Funktionen identisch verschwinden müssen. Der Ausdruck f_0' wird generell mit der Inhomogenität abgeglichen.
Da die Regularität der Enwicklungsfunktionen durch die Bedingung $f_n' = f_{n-1}$ mit wachsendem n zunimmt reicht es oft, die Koeffizientenfunktionen bis zu einem bestimmten Index zu ermitteln, um eine Lösung u schreiben zu können als

$$u(x,t) = U(x,t) + v(x,t),$$

wobei U als singulärer Teil bestimmt wurde und v hinreichend regulär ist. D.h. es gilt

$$P(D)v = g$$

mit regulärem g und mit glatten Anfangs- und Randwerten, so daß für v eine einfachere Theorie angewendet werden kann.

3.4.2 Entwicklung der Riemannfunktion der oberen Halbebene in Singularitätenfunktionen

Für eine Darstellung der Riemannfunktion der oberen Halbebene wählen wir $N = 1$, die Entwicklungsfunktionen

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} x^n H(x)$$

und als Phasenfunktion

$$\phi(x,t) = t - |x - x_0|.$$

Zu dem formalen asymptotischen Ansatz

$$R(x,t,x_0) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \frac{(t - |x - x_0|)^n}{n!} \Big) H(t - |x - x_0|)$$

für eine Lösung R der Gleichung (3.1) mit $t_0 = 0$ führen wir im folgenden explizit die Rechnungen durch, die eine Bestimmung der Koeffizientenfunktionen $a_n(x)$ ermöglichen.

Der Träger von R ist nach diesem Ansatz Teilmenge von $\{(x,t)|\; t \geq |x - x_0|\}$. Die folgenden Abschnitte enthalten das Handwerkszeug zur Herleitung einer klassisch formulierten charakteristischen Randwertaufgabe für den regulären Teil der Riemannfunktion, wie sie in Satz 3.5.1 angegeben ist. Vergleiche dazu speziell (3.11) und (3.15) für die charakteristischen Randwerte. Die Methode wird auch für R^1 angewandt, dabei folgen die charakteristischen Randwerte (3.32) aus (3.12).

Darstellungen der Funktionen a_n werden nach Einsetzen der Entwicklung von R in die Differentialgleichung durch Koeffizientenvergleich hergeleitet. Dazu müssen die Entwicklungsfunktionen differenziert werden. Dies führen wir im folgenden Abschnitt unter besonderer Berücksichtigung der Sprünge an $t = |x - x_0|$ durch.

3.4.2.1 Ableitungen der Summanden der Entwicklung

Wir bestimmen zunächst die distributiven Ableitungen nach x und t des Terms

$$E_n = a_n(x) \frac{(t - |x - x_0|)^n}{n!} H(t - |x - x_0|).$$

Dazu setzen wir voraus, daß a_n mit Ausnahme der Stellen $\{\xi_i\}_{i \in I_0}$, $I_0 \subset \mathbf{N}$ endlich, stetig differenzierbar ist und an ξ_i links- und rechtsseitig stetig und stetig differenzierbar fortgesetzt werden kann.

Die gleichen Bedingungen sollen für $\frac{d}{dx}a_n$ an den Stellen $\{\eta_i\}_{i\in I_1}$, $I_1 \subset \mathbf{N}$ endlich, gelten. $\tilde{a}_n'$ und $\tilde{\tilde{a}}_n''$ seien Funktionen, die bis auf die Stellen in $\{\xi_i\}$ bzw. $\{\eta_i\}$ mit $\frac{d}{dx}a_n$ bzw. $\frac{d^2}{dx^2}a_n$ übereinstimmen und in $\{\xi_i\}$ bzw. $\{\eta_i\}$ endliche Werte annehmen.

Bestimmung der Ableitungen von E_n nach t

Für die distributiven Ableitungen eines Terms E_n nach t erhalten wir das per Induktion beweisbare

Lemma 3.4.1 *Für $m \in \mathbf{N}^{\geq 1}$ gilt*

$$\frac{d^m}{dt^m}\Big(a_n(x)\frac{(t-|x-x_0|)^n}{n!}H(t-|x-x_0|)\Big) = \begin{cases} \frac{d^{m-1-n}}{dt^{m-1-n}}(\delta(t-|x-x_0|)) & n \leq m-1 \\ a_n(x)\frac{(t-|x-x_0|)^{n-m}}{(n-m)!}H(t-|x-x_0|) & n > m-1. \end{cases}$$

Ableitungen an Sprungstellen

Die Voraussetzungen an a_n lassen Sprünge zu. Für distributive Ableitungen gilt das durch partielle Integration und Induktion beweisbare

Lemma 3.4.2 *Sei $u = u(x,t) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ regulär, und es existiere $\frac{d^k u}{dx^k}$ für jedes $k \in \mathbf{N}$ mit $1 \leq k \leq m$ als klassische Ableitung auf $\mathbf{R}^2$ bis auf eine endliche Zahl von Stellen $\{\xi_i^k\}_{i\in I_k} \subset \mathbf{R}$ in der ersten Variablen, an denen $\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}u$ in x rechts- und linksseitig stetig ergänzbar sei. Sei $u^{(k)} = \frac{d^k u}{dx^k}$ in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x,t)|x \in \{\xi_i^k\}_{i\in I_k}\}$ und sonst endlich. Dann gilt*

$$\frac{d^m}{dx^m}u = u^{(m)}$$

$$+\sum_{l=0}^{m-1}\frac{d^l}{dx^l}\Big(\sum_{i\in I_{m-1-l}}\delta(x-\xi_i^{m-1-l})\otimes(u^{m-1-l}(\xi_i^{m-1-l}+0,t)-u^{m-1-l}(\xi_i^{m-1-l}-0,t))\Big).$$

Wir benutzen lediglich die Darstellung der ersten und zweiten Ableitung.

Lemma 3.4.3 *Sei $u = u(x,t) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ regulär, und es gelte für alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$*

$$< u, \phi(x,t) >= \int_{I_t}\int_{I_x} u\phi \, dxdt$$

mit zwei Intervallen $I_t, I_x \subseteq \mathbf{R}$. u sei bezüglich x stetig differenzierbar mit Ausnahme des Punktes x_0 und dort links- und rechtsseitig stetig ergänzbar. Es sei $v \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ derart, daß gilt $v|_{\mathbf{R}\setminus\{x_0\}\times\mathbf{R}} = \frac{du}{dx}$ und $v(x_0,t)$ sei endlich. Dann folgt

$$\begin{aligned} < \frac{d}{dx}u, \phi > &= -\int_{I_t}\Big((u(x_0-0,t)-u(x_0+0,t))\phi(x_0,t) - \int_{I_x} v\phi dx\Big)dt \\ &= < \delta(x-x_0)\otimes\Big(u(x_0+0,t)-u(x_0-0,t)\Big)+v, \phi > . \end{aligned}$$

v habe in x die gleichen Eigenschaften wie u mit der zusätzlichen Sprungstelle x_1 von v und es gelte analog $w(x,t)|_{(\mathbf{R}\setminus\{x_0,x_1\})\times\mathbf{R}} = \frac{dv}{dx}$, sonst endlich. Dann folgt für die zweite Ableitung von u mit derselben Argumentation angewandt auf v

$$\begin{aligned} < \frac{d^2}{dx^2}u, \phi > &= -< \delta(x-x_0)\otimes(u(x_0+0,t)-u(x_0-0,t))+v, \phi_x > \\ &= < \frac{d}{dx}\Big(\delta(x-x_0)\otimes(u(x_0+0,t)-u(x_0-0,t))\Big), \phi > \\ &\quad + < \delta(x-x_1)\otimes(v(x_1+0,t)-v(x_1-0,t))+w, \phi > . \end{aligned}$$

Eine Herleitung über die partielle Integration zeigt, daß die Darstellungen in Lemma 3.4.3 auch erlaubt sind, wenn x_0 oder x_1 sinnvoll von t abhängen. Die Aussage verallgemeinert sich analog zu der in Lemma 3.4.2, falls mehrere Punkte der Art x_0 oder x_1 vorliegen.

Bestimmung der ersten Ableitung von E_n nach x

Für festes $t > 0$ sind die Sprungstellen von E_n bezüglich x die Sprungstellen $\{\xi_i\}$ von a_n und $\{x_0 - t, x_0, x_0 + t\}$. Mit Ausnahme dieser Stellen ist die Ableitung des Terms nach x gegeben durch

$$E_n^{(1)} = H(t - |x - x_0|) \left(\tilde{a}_n'(x)\frac{(t - |x - x_0|)^n}{n!} - (1 - \delta_{0,n})sgn(x - x_0)a_n(x)\frac{(t - |x - x_0|)^{n-1}}{(n-1)!}\right),$$

mit $\delta_{i,m} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = m \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$

Nach obigen Lemmata gilt

$$\frac{d}{dx}E_n = \sum_{\xi \in \{\xi_i\} \cup \{x_0 - t, x_0, x_0 + t\}} \delta(x - \xi) \otimes (E_n(\xi + 0, t) - E_n(\xi - 0, t)) + E_n^{(1)}.$$

Bestimmung der zweiten Ableitung von E_n nach x

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}E_n = & \sum_{\xi \in \{\xi_i\} \cup \{x_0 - t, x_0, x_0 + t\}} \frac{d}{dx}\delta(x - \xi) \otimes (E_n(\xi + 0, t) - E_n(\xi - 0, t)) \\ & + \sum_{\eta \in \{\eta_i\} \cup \{x_0 - t, x_0, x_0 + t\}} \Big(\delta(x - \eta) \otimes (\ (E_n^{(1)})|_{\eta - 0, t}^{\eta + 0, t}\ )\Big) \\ & + H(t - |x - x_0|)\Big(\tilde{\tilde{a}}_n''\frac{(t - |x - x_0|)^n}{n!} - (1 - \delta_{0,n})2\tilde{a}_n'(x)sgn(x - x_0)\frac{(t - |x - x_0|)^{n-1}}{(n-1)!} \\ & + (1 - max_{0 \le i \le 1}\{\delta_{i,n}\})a_n(x)\frac{(t - |x - x_0|)^{n-2}}{(n-2)!}\Big).\end{aligned}$$

3.4.2.2 Bestimmung der Koeffizienten der Entwicklung

Wir setzen die Reihenentwicklung für R in die Differentialgleichung ein und führen einen Koeffizientenvergleich durch. Dazu nutzen wir die Ergebnisse des vorigen Abschnitts.

Unter der Annahme der Existenz der Reihe und der Vertauschbarkeit von Summation und Differentiation erhalten wir mit den Ergebnissen des vorigen Abschnitts die folgenden Entwicklungen

$$\begin{aligned}\frac{d^2R}{dt^2} &= a_0(x)\frac{d}{dt}\delta(t - |x - x_0|) + a_1(x)\delta(t - |x - x_0|) \\ &\quad + \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(x)\frac{(t - |x - x_0|)^n}{n!}\Big)H(t - |x - x_0|)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{d^2R}{dx^2} = & \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{\xi \in \{\xi_i\} \cup \{x_0 - t, x_0, x_0 + t\}} \frac{d}{dx}\delta(x - \xi) \otimes (E_n(\xi + 0, t) - E_n(\xi - 0, t))\Big) \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{\eta \in \{\eta_i\} \cup \{x_0 - t, x_0, x_0 + t\}} \Big(\delta(x - \eta) \otimes \\ & \quad ((\tilde{a}_n'(x) - sgn(x - x_0)a_{n+1}(x))\frac{(t - |x - x_0|)^n}{n!}H(t - |x - x_0|))|_{\eta - 0, t}^{\eta + 0, t}\Big)\ \Big) \\ & + \Big(\sum_{n=0}^{\infty}(\tilde{\tilde{a}}_n - 2\tilde{a}_{n+1}(x)sgn(x - x_0) + a_{n+2}(x))\frac{(t - |x - x_0|)^n}{n!}\Big)\ H(t - |x - x_0|).\end{aligned}$$

Aus der Gleichung

$$< \frac{d^2R}{dt^2} - \frac{d^2R}{dx^2} + q(x)R, \phi > = < \delta(x - x_0, t), \phi >$$

leiten wir durch Koeffizientenvergleich eine rekursive Darstellung der a_n her. Auch wenn wir bei den obigen Differentiationen an der Berücksichtigung der Sprungstellen $\{\xi_i\}, \{\eta_i\}$ festgehalten haben, so lassen sich mit der Phasenfunktion $t - |x - x_0|$ und mit $H(t - |x - x_0|)$ bei der Koeffizientenbestimmung im wesentlichen doch nur die Stellen $x_0 - t$, x_0 und $x_0 + t$ berücksichtigen. Auf diese schränken wir uns daher im folgenden ein.

1. Koeffizientenvergleich an den führenden Singularitäten ermöglicht eine **Bestimmung von $\mathbf{a_0}$**. Es wird a_0 so gewählt, daß

$$\begin{aligned} \phi(x_0, 0) &= < \delta(x - x_0, t), \phi > \\ &= -\textstyle\int_{-\infty}^{\infty} a_0(x)\phi_t(x, |x - x_0|)dx \\ &\quad +(a_0(x_0 + 0) - a_0(x_0 - 0)) \textstyle\int_0^{\infty} \phi_x(x_0, t)dt \\ &\quad -\textstyle\int_0^{\infty} a_0'(x_0 - t)\phi(x_0 - t, t) - a_0'(x_0 + t)\phi(x_0 + t, t)dt \\ &\quad -\textstyle\int_0^{\infty} -a_0(x_0 - t)\phi_x(x_0 - t, t) + a_0(x_0 + t)\phi_x(x_0 + t, t)dt \end{aligned}$$

gilt. Mit einiger hier nicht angeführter Rechnung folgt das leicht nachweisbare Ergebnis

$$\mathbf{a_0} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}. \tag{3.11}$$

2. Zur **Bestimmung von $\mathbf{a_1}$**: Es muß gelten

$$\int_0^{\infty} \int_{x_0 - t}^{x_0 + t} (a_0 q(x) + 2\tilde{a}_1' sgn(x - x_0))\phi \, dxdt = 0.$$

Das bedeutet im Fall $x < x_0$

$$\tilde{a}_1' = \frac{1}{2}q(x)a_0 \;\Rightarrow\; a_1(x) = c_1 + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} q(\xi)a_0(\xi)d\xi$$

und im Fall $x > x_0$

$$\tilde{a}_1' = -\frac{1}{2}q(x)a_0 \;\Rightarrow\; a_1(x) = c_2 - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} q(\xi)a_0 d\xi$$

mit zwei Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Aus den zu erfüllenden Gleichungen

$$(a_1(x_0 + 0) + a_1(x_0 - 0)) \int_0^{\infty} \phi(x_0, t)dt = 0$$

und

$$(a_1(x_0 + 0) - a_1(x_0 - 0)) \int_0^{\infty} t\phi_x(x_0, t)dt = 0$$

folgt

$$a_1(x_0 - 0) = c_1 = a_1(x_0 + 0) = c_2 = 0.$$

Unter Verwendung von (3.11) erhalten wir

$$\mathbf{a_1(x)} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\mathbf{sgn(x - x_0)} \int_{\mathbf{x_0}}^{\mathbf{x}} \mathbf{q(\xi)d\xi}. \tag{3.12}$$

3. Zur Herleitung einer **rekursiven Darstellung der $\mathbf{a_n}$** für $n \geq 1$ setzen wir mit Koeffizientenvergleich

$$a_n(x)q(x) - \tilde{\tilde{a}}_n'' + 2\tilde{a}_{n+1}' sgn(x - x_0) = 0$$

also

$$\tilde{a}'_{n+1} = \frac{sgn(x-x_0)}{2}(\tilde{\tilde{a}}''_n - a_n(x)q(x)).$$

Dies ist äquivalent zu

$$\tilde{a}'_{n+1} = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\tilde{\tilde{a}}''_n - a_n(x)q(x)) & \text{für } x < x_0, \\ \frac{1}{2}(\tilde{\tilde{a}}''_n - a_n(x)q(x)) & \text{für } x > x_0. \end{cases}$$

Somit gilt mit zwei Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$

$$\tilde{a}_{n+1} = \frac{sgn(x-x_0)}{2}\int_{x_0}^{x} \tilde{\tilde{a}}''_n(\xi) - a_n(\xi)q(\xi)d\xi + c_1\chi_{(-\infty,x_0)} + c_2\chi_{(x_0,\infty)}.$$

Wir betrachten den Term

$$\int_{x_0}^{x} \tilde{\tilde{a}}''_n(\xi)d\xi \;=\; (\frac{d}{d\xi}\tilde{a}_n)(x) - \begin{cases} (\frac{d}{dx}\tilde{a}_n)(x_0+0) & \text{für } x > x_0, \\ (\frac{d}{dx}\tilde{a}_n)(x_0-0) & \text{für } x < x_0. \end{cases}$$

Für a_{n+1} gilt demnach die Gleichung

$$a_{n+1} = \frac{sgn(x-x_0)}{2}\Big(\frac{d}{dx}\tilde{a}_n(x) - (\frac{d}{dx}\tilde{a}_n)(x_0 + sgn(x-x_0)0) - \int_{x_0}^{x} a_n(\xi)q(\xi)d\xi\Big)$$

$$+c_1\chi_{(-\infty,x_0)} + c_2\chi(x_0,\infty).$$

Mit der Bedingung

$$-(a_n(x_0+0) - a_n(x_0-0))\int_0^\infty \frac{t^n}{n!}\phi_x(x_0,t)dt = 0$$

folgt hieraus

$$c_1 = c_2.$$

Aus dem Koeffizientenvergleich von $\int_0^\infty \frac{t^n}{n!}\phi(x_0,t)dt$ und $\int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\phi(x_0,t)dt$ folgt

$$(\tilde{a}'_n(x_0+0) - \tilde{a}'_n(x_0-0)) - (a_{n+1}(x_0+0) + a_{n+1}(x_0-0)) = 0.$$

Dies bedeutet

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{2}(\tilde{a}'_n(x_0+0) - \tilde{a}'_n(x_0-0)).$$

Insgesamt gilt

$$\mathbf{a_{n+1}(x) = -\frac{sgn(x-x_0)}{2}\Big(\tilde{a}'_n(x_0 - sgn(x-x_0)0) - \tilde{a}'_n(x) + \int_{x_0}^{x} q(\xi)a_n(\xi)d\xi\Big)}. \quad (3.13)$$

Die Entwicklung in Singularitätenfunktionen ist eine formale Reihenentwicklung, deren Ergebnis erst noch als sinnvoll verifiziert werden muß. So zeigt Gleichung (3.13) auch, daß die Entwicklung je nach Regularität von q oft schon nach den ersten Termen abgebrochen wird. In Bemerkung 3.5.3 geben wir an, inwieweit die Regularität von q mit der von R korrespondiert.

Die Gleichungen (3.11) und (3.12) werden im folgenden wieder genutzt. Dabei werden verschiedene Konstanten eingeführt. So ist bei einer Darstellung der Riemannfunktion $R = \frac{1}{2}(1+cK)H(t-|x-x_0|)$ der erste Koeffizient einer Entwicklung von K nach (3.12) gleich $-\frac{1}{2c}sgn(x-x_0)\int_{x_0}^{x} q(\xi)d\xi$.

3.4.3 Eine formale Reihenentwicklung der Bessellösung als Beispiel

Wir vergleichen im Fall $q \equiv k^2$ die mittels der Entwicklung in Singularitätenfunktionen hergeleitete Lösung mit der exakten Lösung. Alle Umformungen erfolgen dabei rein formal.

Sei $x_0 \in \mathbf{R}$. Für $q \equiv k^2$, $k \in \mathbf{R}^{\geq 0}$, hat die Riemannfunktion die Gestalt

$$R(x,t;x_0) = \frac{1}{2} H(t - |x - x_0|) J_0(k\sqrt{t^2 - |x - x_0|^2}).$$

Die Besselfunktion besitzt nach Abramowitz und Stegun [1], 9.1.10, die Reihendarstellung

$$J_0(x) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{(l!)^2} (\frac{x}{2})^{2l}.$$

Mit dem in der Riemannfunktion vorliegenden Argument gilt auf $t > |x - x_0|$

$$\begin{aligned} & J_0(k\sqrt{t^2 - |x - x_0|^2}) \\ = \; & \textstyle\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{(l!)^2} \frac{k^{2l}(t^2 - |x-x_0|^2)^l}{2^{2l}} \\ = \; & \textstyle\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{(l!)^2} (\frac{k}{2})^{2l} ((t - |x - x_0|)((t - |x - x_0|) + 2|x - x_0|))^l \\ = \; & \textstyle\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{(l!)^2} (\frac{k}{2})^{2l} \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} (2|x - x_0|)^{l-j} (t - |x - x_0|)^{l+j}. \end{aligned}$$

Formal haben wir

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{l} a_{l,j} x^{l+j} \; = \; \sum_{m=0}^{\infty} x^m (\sum_{i=0}^{[\frac{m}{2}]} a_{m-i,i})$$

mit $[\frac{m}{2}] = \begin{cases} \frac{m}{2} & \text{falls } m \text{ gerade ,} \\ \frac{m-1}{2} & \text{falls } m \text{ ungerade .} \end{cases}$

Sei

$$a_{l,j} = (-1)^l \frac{1}{(l!)^2} (\frac{k}{2})^{2l} \binom{l}{j} (2|x - x_0|)^{l-j},$$

dann folgt formal

$$J_0(k\sqrt{t^2 - |x - x_0|^2}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(t - |x - x_0|)^m}{m!} \Big(\sum_{i=0}^{[\frac{m}{2}]} \binom{m}{i} \frac{(-1)^{m-i}}{(m-2i)!} (\frac{k}{2})^{2(m-i)} (2|x - x_0|)^{m-2i} \Big).$$

Die aus der Entwicklung in Singularitätenfunktionen hergeleitete Reihe besitzt für $q \equiv k^2$ folgende Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{2} \\ a_1 &= -\tfrac{k^2}{4}|x - x_0| \\ &= -\tfrac{k^2}{4} sgn(x - x_0)(x - x_0) \\ a_2 &= -\tfrac{k^2}{4} + \tfrac{1}{2} sgn(x - x_0) \textstyle\int_{x_0}^{x} (-a_1 k^2) d\xi \\ &= -\tfrac{k^2}{4} + \tfrac{k^4}{16}(x - x_0)^2 \\ a_{m+1} &= -\tfrac{sgn(x-x_0)}{2} \big(\tilde{a}'_m(x_0 - sgn(x - x_0)0) - \tilde{a}'_m(x) + \textstyle\int_{x_0}^{x} q(\xi) a_m(\xi) d\xi \big) \quad \text{für } m \geq 1. \end{aligned}$$

Behauptung: Es gilt formal

$$a_m = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{[\frac{m}{2}]} \binom{m}{i} \frac{(-1)^{m-i}}{(m-2i)!} (\frac{k}{2})^{2(m-i)} (2|x - x_0|)^{m-2i}.$$

Beweis: Der Beweis erfolgt per Induktion nach m. Der Fall $m = 0$ ist klar. Für $m \to m + 1$ gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\tilde{a}'_m(x_0 + 0) = \begin{cases} 0 & m \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2} \binom{m}{[\frac{m}{2}]} \frac{(-1)^{m-[\frac{m}{2}]}}{(m-2[\frac{m}{2}])!} (\frac{k}{2})^{2(m-[\frac{m}{2}])} 2 & m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Es gilt für ungerades m:

$$m - 2[\tfrac{m}{2}] = [\tfrac{m}{2}] + 1 = [\tfrac{m+1}{2}] = \tfrac{m+1}{2} - [\tfrac{m+1}{2}] \text{ und } \tilde{a}'_m(x_0 - 0) = -\tilde{a}'_m(x_0 + 0).$$

Aus der rekursiven Formel für a_{m+1} und der Induktionsvoraussetzung folgt nun für gerades m:

$$\begin{aligned} a_{m+1} \quad = \quad & \tfrac{sgn(x-x_0)}{2}\big(\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=0}^{[\frac{m+1}{2}]-1} \binom{m}{i} \tfrac{(-1)^{m-i}}{(m-2i)!}(\tfrac{k}{2})^{2(m-i)} 2sgn(x-x_0)(m-2i)(2|x-x_0|)^{m-2i-1} \\ & -k^2 \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i=0}^{[\frac{m}{2}]} \binom{m}{i} \tfrac{(-1)^{m-i}}{(m-2i)!}(\tfrac{k}{2})^{2(m-i)} \tfrac{1}{2} sgn(x-x_0) \tfrac{1}{m-2i+1}(2|x-x_0|)^{m-2i+1}\big). \end{aligned}$$

Für gerade m gilt $[\frac{m+1}{2}] = [\frac{m}{2}]$ und daher

$$\begin{aligned} a_{m+1} \quad = \quad & \tfrac{1}{2}\big(\textstyle\sum_{i=1}^{[\frac{m+1}{2}]} \binom{m}{i-1} \tfrac{(-1)^{m+1-i}}{(m+1-2i+1)!}(\tfrac{k}{2})^{2(m+1-i)}(m+1-2i+1)(2|x-x_0|)^{m+1-2i} \\ & +k^2 \tfrac{1}{4} \textstyle\sum_{i=0}^{[\frac{m+1}{2}]} \binom{m}{i} \tfrac{(-1)^{m+1-i}}{(m-2i)!}(\tfrac{k}{2})^{2(m-i)} \tfrac{1}{m-2i+1}(2|x-x_0|)^{m-2i+1}\big) \\ = \quad & \tfrac{1}{2}\big(\textstyle\sum_{i=1}^{[\frac{m+1}{2}]} \binom{m+1}{i} \tfrac{(-1)^{m+1-i}}{(m+1-2i)!}(\tfrac{k}{2})^{2(m+1-i)}(2|x-x_0|)^{m+1-2i}\big). \end{aligned}$$

Dies ist die Zieldarstellung von a_{m+1} für gerades m. Die Herleitung für ungerades m verläuft analog.

□

Somit führt in diesem Beispiel die Entwicklung in Singularitätenfunktionen formal zu einem gültigen Resultat.

3.5 Die Riemannfunktion für das Cauchyproblem auf der oberen Halbebene

Sei in diesem Abschnitt $q \in C^0(\mathbf{R})$ und $P(D) = \frac{d^2}{dt^2} - \frac{d^2}{dx^2} + q(x)$.

Mit Hilfe der Riemannfunktion lassen sich Lösungen mit allgemeinen Anfangswerten und Inhomogenitäten darstellen. Bei einem linearen Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten werden die Anfangswerte in die Inhomogenität übertragen und die Lösung folgt durch Zufaltung der Inhomogenität zur Riemannfunktion, sofern die Faltung existiert, vergleiche Triebel [57] Satz 14.1. Bei variablen Koeffizienten gehen wir anders vor, siehe Abschnitt 3.5.4. Zunächst führen wir in Abschnitt 3.5.1 ein Goursatproblem ein und leiten durch Umformung in eine Integralgleichung Eigenschaften der Lösung her. Anschließend klären wir in Abschnitt 3.5.2 die Existenz einer Riemannfunktion und zeigen ihre Herleitung aus der Goursatschen Problemformulierung.

3.5.1 Goursatproblem und Integralgleichungen, Darstellung des Koeffizienten

Eine Problemformulierung zum Differentialoperator $P(D)$, in der die Daten entlang zweier verschiedener, sich nur in einem Punkt kreuzender Charakteristiken vorliegen, nennen wir nach Rubinstein und Rubinstein [44] Chapt. 6 ein **Goursatproblem**. Klassisch formuliert ist es ein Problem mit charakteristischen Randwerten. Es gilt der

Satz 3.5.1 *Sei $q \in C^0(\mathbf{R})$ und sei $x_0 \in \mathbf{R}$ fest. Dann existiert genau eine auf $t > |x - x_0|$ zweimal stetig differenzierbare und an $t = |x - x_0|$ stetig fortsetzbare Lösung des Goursatproblems*

$$u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = 0 \qquad \text{in } t > |x - x_0| \tag{3.14}$$

mit

$$u(x, |x - x_0|) = \frac{1}{2} \qquad \text{in } x \in \mathbf{R}. \tag{3.15}$$

Beweis: Dieser Satz ist ein Spezialfall von Kamke [28] §9 Satz 1 und Satz 3.

□

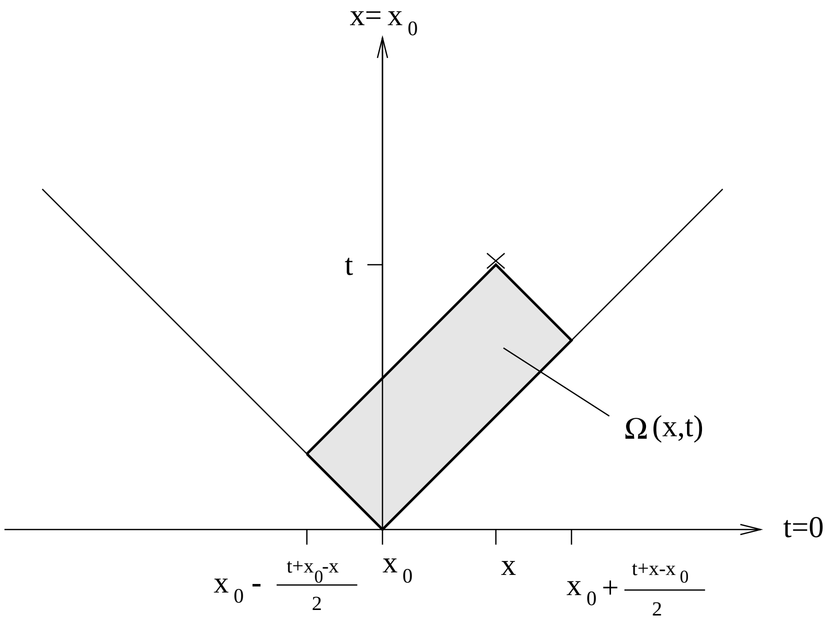

Abbildung 3.2: Integrationsgebiet, die angegebenen Koordinaten gelten für alle x und t mit $t > |x - x_0|$.

Wir leiten aus der Goursatschen Problemformulierung ein System von Integralgleichungen für u, u_t und q her. Damit erhalten wir auch eine direkte Darstellung von q durch Ableitungswerte von u, siehe (3.19) und (3.20). Diese Darstellung ist für die numerische Lösung des inversen Problems wichtig.

Satz 3.5.2 *Sei $q \in C^0(\mathbf{R})$, $x_0 \in \mathbf{R}$ fest und sei u die Lösung des Goursatproblems (3.14), (3.15). Dann löst (u, u_t, q) auf $t > |x - x_0|$ die drei Integralgleichungen*

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2} + \int_0^{\frac{x-x_0-t}{2}} \int_0^{\frac{t+x-x_0}{2}} q(x_0+\xi+\eta)u(x_0+\xi+\eta, -\xi+\eta)\,d\eta\, d\xi, && (3.16)\\
u_t(x,t) &= \frac{1}{2}\Big(-\int_{\frac{x-x_0-t}{2}}^{x-x_0} q(x_0+\eta)u(x_0+\eta, -(x-x_0-t)+\eta)\,d\eta \\
&\quad + \int_{\frac{t+x-x_0}{2}}^{x-x_0} q(x_0+\xi)u(x_0+\xi, -\xi+t+x-x_0)\,d\xi\Big), && (3.17)\\
q(x_0+x) &= -4sgn(x)(u_{xt}(x_0,2x) + sgn(x)u_{tt}(x_0,2x) \\
&\quad + \int_0^x q(x_0+\xi)u_t(x_0+\xi, 2x-\xi)\,d\xi). && (3.18)
\end{aligned}
$$

Umgekehrt ist jede Lösung $u \in C^0(\{(x,t)|t \geq |x-x_0|\})$ der Integralgleichung (3.16) auch eine Lösung des Goursatproblems (3.14), (3.15).

Beweis: Zuerst gelangen wir durch Integration entlang Charakteristiken zu Gleichung (3.16). Anschließend leiten wir daraus in Anlehnung an Romanov [42] Chapt. 2 die Gleichungen (3.17) und (3.18) her.

Die Funktion f werde über das in Abbildung 3.2 angegebene Gebiet $\Omega(x,t) = \{(\xi,\eta)|\eta > |\xi - x_0|, \eta - t < -|\xi - x|\}$, $t \geq |x - x_0|$, integriert. Das Resultat ist bis auf ein Vorzeichen gleich

$$2\int_0^{-\frac{t-x+x_0}{2}} \int_0^{\frac{t+x-x_0}{2}} f(x_0+\xi+\eta, -\xi+\eta)\,d\eta\, d\xi.$$

Dies ist eine zur Betonung der Integration entlang Charakteristiken gebräuchliche Darstellung, wie sie z.B. auch in Marchenko [34] Chapt. 1 genutzt wird. Mit

$$f = u_{tt} - u_{xx} = (\frac{d}{dt} + \frac{d}{dx})(\frac{d}{dt} - \frac{d}{dx})u$$

und einer Lösung u des Goursatproblems für die $u(x, |x - x_0|) = \frac{1}{2}$ gilt, ist dies nach Multiplikation mit $\frac{1}{2}$ gleich

$$\begin{aligned} & \int_0^{-\frac{t-x+x_0}{2}} (\tfrac{d}{dt} - \tfrac{d}{dx})\Big(u(x_0 + \tfrac{t+x-x_0}{2} + \xi, \tfrac{t+x-x_0}{2} - \xi) - u(x_0 + \xi, -\xi)\Big) d\xi \\ = \quad & -u(x,t) + u(x_0 + \tfrac{t+x-x_0}{2}, \tfrac{t+x-x_0}{2}) + u(x_0 - \tfrac{t-x+x_0}{2}, \tfrac{t-x+x_0}{2}) - u(x_0, 0) \\ = \quad & -u(x,t) + \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Für die Lösung u des Goursatproblems (3.14) und (3.15) erhalten wir so aus der Differentialgleichung die Integralgleichung

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \int_0^{\frac{x-x_0-t}{2}} \int_0^{\frac{t+x-x_0}{2}} q(x_0 + \xi + \eta) u(x_0 + \xi + \eta, -\xi + \eta) d\eta d\xi,$$

wobei das Integral gleich $\frac{1}{2} \int_{\Omega(x,t)} qud\Omega$ ist.

Dies ist nichts anderes als das Ergebnis der Integration der Gleichung $v_{\xi\eta} + \frac{1}{4} q(x_0 + \frac{\xi+\eta}{2})v = u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = 0$ nach der Koordinatentransformation $\tilde{x} = x - x_0$, $\xi = \tilde{x} - t$, $\eta = \tilde{x} + t$ und mit der Definition $v(\xi, \eta) = u(x_0 + \frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2})$. Für eine weitere Behandlung dieser Art siehe auch Marchenko [34].

Differentiation der beiden Seiten der Gleichung (3.16) nach x ist erlaubt und ergibt

$$\begin{aligned} u_x(x,t) \quad = \quad & \tfrac{1}{2}(\int_0^{\frac{t+x-x_0}{2}} q(x_0 + \tfrac{x-x_0-t}{2} + \eta) u(x_0 + \tfrac{x-x_0-t}{2} + \eta, -\tfrac{x-x_0-t}{2} + \eta) d\eta \\ & + \int_0^{\frac{x-x_0-t}{2}} q(x_0 + \xi + \tfrac{t+x-x_0}{2}) u(x_0 + \xi + \tfrac{t+x-x_0}{2}, -\xi + \tfrac{t+x-x_0}{2}) d\xi) \\ = \quad & \tfrac{1}{2}(\int_{\frac{x-x_0-t}{2}}^{x-x_0} q(x_0 + \eta) u(x_0 + \eta, -(x - x_0 - t) + \eta) d\eta \\ & + \int_{\frac{t+x-x_0}{2}}^{x-x_0} q(x_0 + \xi) u(x_0 + \xi, -\xi + t + x - x_0) d\xi). \end{aligned}$$

Für $x > x_0$ folgt

$$u_x(x, x - x_0 + 0) = \frac{1}{2} \int_0^{x-x_0} q(x_0 + \eta) u(x_0 + \eta, \eta) d\eta = \frac{1}{4} \int_0^{x-x_0} q(x_0 + \eta) d\eta = \frac{1}{4} \int_{x_0}^{x} q(\xi) d\xi,$$

für $x < x_0$

$$u_x(x, x_0 - x + 0) = \frac{1}{2} \int_0^{x-x_0} q(x_0 + \xi) u(x_0 + \xi, -\xi) d\xi = \frac{1}{4} \int_0^{x-x_0} q(x_0 + \xi) d\xi,$$

und es gilt

$$\lim_{t \searrow 0} u_x(x_0, t) = 0.$$

Somit folgt

$$\frac{d}{dx}(u_x(x, |x - x_0| + 0)) = \frac{1}{2} q(x) u(x, |x - x_0|) = \frac{1}{4} q(x). \tag{3.19}$$

Differentiation der Gleichung (3.16) nach t ergibt wegen der bis auf ein Vorzeichen gegebenen Symmetrie des Ausdrucks für u in x und t

$$\begin{aligned} u_t(x,t) \quad = \quad & \tfrac{1}{2}(-\int_0^{\frac{t+x-x_0}{2}} q(x_0 + \tfrac{x-x_0-t}{2} + \eta) u(x_0 + \tfrac{x-x_0-t}{2} + \eta, -\tfrac{x-x_0-t}{2} + \eta) d\eta \\ & + \int_0^{\frac{x-x_0-t}{2}} q(x_0 + \xi + \tfrac{t+x-x_0}{2}) u(x_0 + \xi + \tfrac{t+x-x_0}{2}, -\xi + \tfrac{t+x-x_0}{2}) d\xi) \\ = \quad & \tfrac{1}{2}(-\int_{\frac{x-x_0-t}{2}}^{x-x_0} q(x_0 + \eta) u(x_0 + \eta, -(x - x_0 - t) + \eta) d\eta \\ & + \int_{\frac{t+x-x_0}{2}}^{x-x_0} q(x_0 + \xi) u(x_0 + \xi, -\xi + t + x - x_0) d\xi). \end{aligned}$$

Für $x > x_0$ folgt

$$u_t(x, x - x_0 + 0) = -\frac{1}{2}\int_0^{x-x_0} q(x_0+\eta)u(x_0+\eta,\eta)d\eta = -\frac{1}{4}\int_0^{x-x_0} q(x_0+\eta)d\eta,$$

für $x < x_0$

$$u_t(x, x_0 - x + 0) = \frac{1}{2}\int_0^{x-x_0} q(x_0+\xi)u(x_0+\xi,-\xi)d\xi = \frac{1}{4}\int_0^{x-x_0} q(x_0+\xi)d\xi,$$

und außerdem

$$\lim_{t\searrow 0} u_t(x_0, t) = 0.$$

Somit gilt

$$\frac{d}{dx}(u_t(x, |x-x_0|+0)) = -\frac{1}{2}sgn(x-x_0)q(x)u(x,|x-x_0|) = -\frac{1}{4}sgn(x-x_0)q(x). \tag{3.20}$$

Wir leiten mit den bisherigen Ergebnissen eine Integralgleichung für q her. Es gilt

$$\begin{aligned} u_{tx}(x,t) \ = \\ \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}q(\frac{x+x_0-t}{2})u(\frac{x+x_0-t}{2}, -\frac{x-x_0-t}{2}) + \int_{\frac{x-x_0-t}{2}}^{x-x_0} q(x_0+\eta)u_t(x_0+\eta, -(x-x_0-t)+\eta)d\eta \\ -\frac{1}{2}q(\frac{x+x_0+t}{2})u(\frac{x+x_0+t}{2}, \frac{t+x-x_0}{2}) + \int_{\frac{t+x-x_0}{2}}^{x-x_0} q(x_0+\xi)u_t(x_0+\xi, -\xi+t+x-x_0)d\xi\Big). \end{aligned} \tag{3.21}$$

und

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) \ = \\ \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}q(\frac{x+x_0-t}{2})u(\frac{x+x_0-t}{2}, -\frac{x-x_0-t}{2}) - \int_{\frac{x-x_0-t}{2}}^{x-x_0} q(x_0+\eta)u_t(x_0+\eta, -(x-x_0-t)+\eta)d\eta \\ -\frac{1}{2}q(\frac{t+x+x_0}{2})u(\frac{t+x+x_0}{2}, \frac{t+x-x_0}{2}) + \int_{\frac{t+x-x_0}{2}}^{x-x_0} q(x_0+\xi)u_t(x_0+\xi, -\xi+t+x-x_0)d\xi\Big). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Es sei bemerkt, daß somit die Gleichung

$$\lim_{\epsilon\searrow 0}(u_{xt} + sgn(x-x_0)u_{tt})(x, |x-x_0|+\epsilon) = \frac{d}{dx}(\lim_{\epsilon\searrow 0} u_t(x, |x-x_0|+\epsilon))$$

gilt. Es folgt für die Summe der beiden Terme

$(u_{xt} + u_{tt})(x,t) = -\frac{1}{2}q(\frac{t+x+x_0}{2})u(\frac{t+x+x_0}{2}, \frac{t+x-x_0}{2}) + \int_{\frac{t+x-x_0}{2}}^{x-x_0} q(x_0+\xi)u_t(x_0+\xi, -\xi+t+x-x_0)d\xi.$

Für $x \geq 0$ erhalten wir eine Integralgleichung für q, diese lautet

$$q(x_0+x)u(x_0+x,x) = -2((u_{xt}+u_{tt})(x_0,2x) + \int_0^x q(x_0+\xi)u_t(x_0+\xi, 2x-\xi)d\xi). \tag{3.23}$$

Wegen $u(x_0+x,x) = \frac{1}{2}$ folgt für $x > 0$

$$q(x_0+x) = -4(u_{xt}(x_0,2x) + u_{tt}(x_0,2x) + \int_0^x q(x_0+\xi)u_t(x_0+\xi, 2x-\xi)d\xi).$$

Analog erhalten wir für die Differenz

$(u_{xt} - u_{tt})(x,t) = \frac{1}{2}q(\frac{x+x_0-t}{2})u(\frac{x+x_0-t}{2}, -\frac{x-x_0-t}{2}) + \int_{\frac{x-x_0-t}{2}}^{x-x_0} q(x_0+\eta)u_t(x_0+\eta, -(x-x_0-t)+\eta)d\eta.$

Für $x > 0$ folgt

$$q(x_0-x)u(x_0-x,x) = 2((u_{xt}-u_{tt})(x_0,2x) - \int_x^0 q(x_0+\eta)u_t(x_0+\eta, x+\eta)d\eta), \tag{3.24}$$

und daraus

$$q(x_0 - x) = 4(u_{xt}(x_0, 2x) - u_{tt}(x_0, 2x) + \int_0^x q(x_0 + \eta)u_t(x_0 + \eta, x + \eta)d\eta).$$

Damit sind die Integralgleichungen (3.16) - (3.18) hergeleitet.

Für eine in $t > |x - x_0|$ stetige Lösung u der Integralgleichung (3.16) ist die Gültigkeit der Gleichung (3.14) direkt nachprüfbar, der charakteristische Randwert (3.15) wird offensichtlich ebenfalls angenommen.

□

Aus Satz 3.5.1 folgt für stetiges q die eindeutige Lösbarkeit der Integralgleichung (3.16) im Raum der stetigen Funktionen.

Bemerkung 3.5.3

1. *Für eine Lösung u des Goursatproblems (3.14), (3.15) mit $q \in C^m(\mathbf{R})$ gilt $u \in C^{m+2}(\{(x,t)|t \geq |x - x_0|\})$. Der Beweis kann nach Art der Darstellungen der Ableitungen von u aus dem Beweis des vorigen Satzes induktiv geführt werden oder mittels Gleichung (3.16) erfolgen, indem u im Integral hinreichend oft sukzessive ersetzt wird, vergleiche (3.26) mit R ersetzt durch u.*

2. *Sei nun q stückweise stetig und an jedem Punkt links- und rechtsseitig stetig ergänzbar. Dann existiert die Lösung u der Integralgleichung (3.16) immer noch eindeutig in $C^0(\{(x,t)|t \geq |x - x_0|\})$, und für die zweiten Ableitungen gelten (3.21), (3.22) und $u_{xx} = u_{tt} - q(x)u$ in $t > |x - x_0|$. Eine Unstetigkeitsstelle ξ von q pflanzt sich demnach in u_{xt} und u_{tt} entlang den Charakteristiken $x + x_0 - t = \xi$ und $x + x_0 + t = \xi$ fort und in u_{xx} zusätzlich in $x = \xi$.*

Bemerkung 3.5.4 *Für das direkte Problem ($q \Rightarrow u$) ist die Born-Approximation gegeben durch*

$$u_B(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{x-x_0-t}{2}} \int_0^{\frac{t+x-x_0}{2}} q(x_0 + \xi + \eta)d\eta d\xi.$$

Dies ist die linearisierte Lösung bezüglich kleiner Abweichungen von $q_0 \equiv 0$ und $u_0 \equiv \frac{1}{2}$ auf $t > |x - x_0|$. Sie stimmt mit dem Ergebnis des ersten Schrittes der sukzessiven Approximation überein. Zu dieser Methode vergleiche den Beweis des Satzes 4.1.1.

Bemerkung 3.5.5 *Die Integralgleichungen für u, u_t und q bilden ein System zur Bestimmung von q im inversen Problem, siehe die Sätze 4.1.1, 4.2.1.*

3.5.2 Goursatproblem und Riemannfunktion

Der folgende Satz liefert einen Zusammenhang zwischen einem Goursatproblem und der distributiven Problemformulierung für die Riemannfunktion in (3.1) mit Träger in $t \geq t_0 = 0$. Dies ist von Bedeutung, weil das Goursatproblem numerisch wesentlich einfacher zu behandeln ist.

Satz 3.5.6 *Sei $q \in C^0(\mathbf{R})$, $x_0 \in \mathbf{R}$ fest und u die Lösung des Goursatproblems (3.14), (3.15). Dann ist die reguläre Distribution*

$$R(x, t, x_0) = H(t - |x - x_0|)u \tag{3.25}$$

Riemannfunktion des Differentialoperators $P(D)$, vergleiche (3.1) mit $t_0 = 0$.

Beweis: Sei $t_0 = 0$. R ist eine reguläre Distribution mit Träger im Abschluß der oberen Halbebene. Das Produkt $q(x)R$ ist als reguläre Distribution sinnvoll definiert. Der Beweis der Gleichung (3.1) erfolgt durch Anwendung auf Testfunktionen. Sei $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$. Dann gilt

$$< R, \phi >= \int_{t>|x-x_0|} u\phi dx dt$$

und

$$< P(D)R, \phi >= \int_{t>|x-x_0|} u(\phi_{tt} - \phi_{xx} + q(x)\phi) dx dt.$$

Im einzelnen führen wir eine partielle Integration durch:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{|x-x_0|}^{\infty} u\phi_{tt} dt dx \\ = \; & -\int_{-\infty}^{\infty} u(x, |x-x_0|)\phi_t(x, |x-x_0|)dx + \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, |x-x_0|)\phi(x, |x-x_0|)dx + \int_{|x-x_0|}^{\infty} u_{tt}\phi dt dx. \end{aligned}$$

Ebenso folgt

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{x_0-t}^{x_0+t} u\phi_{xx} dx dt \\ = \; & \int_{x_0}^{\infty} u(t, t-x_0)\phi_x(t, t-x_0)dt - \int_{-\infty}^{x_0} u(t, x_0-t)\phi_x(t, x_0-t)dt \\ & -\int_{x_0}^{\infty} u_x(t, t-x_0)\phi(t, t-x_0)dt + \int_{-\infty}^{x_0} u_x(t, x_0-t)\phi(t, x_0-t)dt + \int_0^\infty \int_{x_0-t}^{x_0+t} u_{xx}\phi dx dt. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir unter Ausnutzung der partiellen Differentialgleichung (3.14) auf $t > |x - x_0|$ und mit den Darstellungen von u_x und u_t an $t = |x - x_0|$ aus dem Beweis zu Satz 3.5.2

$$\begin{aligned} < P(D)R, \phi > \; = \; & -\int_{x_0}^{\infty} u(x, x-x_0)\tfrac{d}{dx}(\phi(x, x-x_0))dx + \int_{-\infty}^{x_0} u(x, x-x_0)\tfrac{d}{dx}(\phi(x, x-x_0))dx \\ & +\int_{x_0}^{\infty} \tfrac{d}{dx}(u(x, x-x_0))\phi dx - \int_{-\infty}^{x_0} \tfrac{d}{dx}(u(x, x_0-x))\phi dx \\ = \; & -\tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{\infty} \tfrac{d}{dx}(\phi(x, x-x_0))dx + \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{x_0} \tfrac{d}{dx}(\phi(x, x-x_0))dx \\ = \; & < \delta(x-x_0, t), \phi > . \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen.

□

Mit (3.25) ist auch die Abhängigkeit der Riemannfunktion vom Parameter x_0 klar.

Bemerkung 3.5.7 *Zur Bestimmung einer Lösung des distributiven Problems (3.1) mit* $t_0 = 0$ *und Träger von* R *im Abschluß der oberen Halbebene reicht die Lösung des klassisch formulierten Goursatproblems (3.14), (3.15) aus. Eine numerische Approximation ist für das Goursatproblem einfacher herzuleiten, als für die distributive Formulierung. Insbesondere ist keine Überlegung zur Approximation einer* δ*-Distribution oder zur Schockbehandlung an den Charakteristikenabschnitten* $t = |x - x_0|$ *erforderlich. In Abschnitt 5.1 werden wir sehen, wie eine Diskretisierung des Goursatproblems eine Diskretisierung des distributiven Problems motiviert.*

Bemerkung 3.5.8 *Satz 3.5.6 läßt sich verallgemeinern: Sei* $q \in C^0(\mathbf{R})$, $x_0 \in \mathbf{R}$, *und seien* $f \in C^1(\mathbf{R}^{\leq x_0})$, $g \in C^1(\mathbf{R}^{\geq x_0})$ *mit* $f(x_0) = g(x_0)$. *Dann existiert nach Kamke [28] §9 Satz 1 und Satz 3 genau eine auf* $t > |x - x_0|$ *zweimal stetig differenzierbare und an* $t = |x - x_0|$ *stetig fortsetzbare Lösung des Goursatproblems*

$$u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = 0 \qquad in\ t > |x - x_0|$$

mit

$$u(x, x_0 - x) = f(x) \ \ \text{für } x \leq x_0 \quad \text{und} \quad u(x, x - x_0) = g(x) \ \ \text{für } x \geq x_0.$$

Ist diese Lösung u *zweimal stetig differenzierbar auf den Rand* $t = |x - x_0|$ *fortsetzbar, so gilt für die reguläre Distribution* $S(x, t, x_0) = H(t - |x - x_0|)u$

$$P(D)S = (g(0) + f(0))\delta(x, t) + 2(g'(x)H(x)\delta(x - t) - f'(x)H(-x)\delta(x + t)).$$

Diese Aussage beweist man mit denselben Methoden wie Satz 3.5.6.

Bemerkung 3.5.9 *Die Riemannfunktion der oberen Halbebene erfüllt im Bereich $t > |x - x_0|$ die Integralgleichung*

$$R(x,t,x_0) = \frac{1}{2} + \int_0^{\frac{x-x_0-t}{2}} \int_0^{\frac{t+x-x_0}{2}} q(x_0+\eta+\xi)R(x_0+\eta+\xi, -\xi+\eta, x_0)d\eta d\xi.$$

Wie in der Methode der sukzessiven Approximation kann R in der rechten Seite durch ebendiese Formel wieder ersetzt werden. Das Ergebnis ist

$$\begin{gathered} R(x,t,x_0) = \frac{1}{2} \\ + \int_0^{\frac{x-x_0-t}{2}} \int_0^{\frac{t+x-x_0}{2}} q(x_0+\eta+\xi) \\ \Big(\frac{1}{2} + \int_0^{\xi} \int_0^{\eta} q(x_0+\eta_1+\xi_1)R(x_0+\eta_1+\xi_1, -\xi_1+\eta_1, x_0)d\eta_1 d\xi_1\Big) \\ d\eta d\xi, \end{gathered} \tag{3.26}$$

eine Gleichung, die wir zur Herleitung eines quasi Newton-Verfahrens benutzen werden.

3.5.3 Die t-Ableitung der Riemannfunktion

Wir leiten für $R^1 = \frac{d}{dt}R$ zu Satz 3.5.1 und Satz 3.5.6 analoge Aussagen her. Es erfolgt eine distributive Differentiation des Sprunges von R an den $(t = |x|)$-Charakteristiken mit einem Resultat, welches mit einer Goursatschen Problemformulierung nicht mehr zu erfassen ist. Wir führen daher den ersten Schritt einer Entwicklung in Singularitätenfunktionen an R durch, indem wir von R die Distribution $\frac{1}{2}H(t - |x|)$ abspalten. Diesen Term differenzieren wir distributiv. Wir erhalten für den Restterm $\frac{d}{dt}(R - \frac{1}{2}H(t-|x|))$ dann wieder ein Goursatproblem, (3.31), (3.32). Der Ansatz folgt daher, daß $\frac{1}{2}H(t - |x|)$ Lösung der Gleichung $w_{tt} - w_{xx} = \delta(x,t)$ der oberen Halbebene ist.

u löse (3.14), (3.15). Wir definieren $K = K(x,t)$ für $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ auf $t > |x - x_0|$ mittels

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(1 + cK(x,t)). \tag{3.27}$$

Durch Einsetzen in das Goursatproblem für u folgt für K auf $t > |x - x_0|$ die Gleichung

$$K_{tt} - K_{xx} + qK = -\frac{1}{c}q(x). \tag{3.28}$$

K läßt sich mit

$$K(x, |x - x_0|) = 0 \tag{3.29}$$

für $x \in \mathbf{R}$ stetig auf den Rand von $t > |x - x_0|$ fortsetzen und hat auf $t > |x - x_0|$ die Regularität von u. $H(t - |x - x_0|)K$ löst das distributive Cauchyproblem

$$P(D)K = -\frac{1}{2}q(x)H(t - |x - x_0|)$$

auf der oberen Halbebene. Als Cauchyproblem formuliert gilt

$$K_{tt} - K_{xx} + qK = -\frac{1}{c}q(x)H(t - |x - x_0|),$$
$$K(x,0) = K_t(x,0) = 0.$$

Da u das Goursatproblem löst, ist nach den Ergebnissen des vorigen Abschnitts $R(x,t,x_0) = H(t - |x - x_0|)u$ eine Riemannfunktion. Es gilt mit $w(x,t,x_0) = \frac{c}{2}K(x,t,x_0)$ nach (3.25) und (3.27)

$$R(x,t,x_0) = \frac{1}{2}H(t - |x - x_0|) + w(x,t,x_0)H(t - |x - x_0|). \tag{3.30}$$

Es gilt

$$w(x,t,x_0) = (u - \frac{1}{2})H(t - |x - x_0|)$$

$$= \int_0^{\frac{x-x_0-t}{2}} \int_0^{\frac{t+x-x_0}{2}} q(x_0+\eta+\xi)u(x_0+\eta+\xi, -\xi+\eta, x_0)d\eta d\xi H(t-|x-x_0|)$$

$$\in C^2(\{(x,t)|\, t > |x-x_0|\}) \cap C^1(\{(x,t)|\, t \geq |x-x_0|\}).$$

Eine Lösung R^1 von (3.2) kann ebenfalls mit der Lösung eines Goursatproblems dargestellt werden.

Satz 3.5.10 *Sei $q \in C^1(\mathbf{R})$. Sei $x_0 \in \mathbf{R}$ und $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Dann existiert genau eine Lösung $K^1 \in C^2(\{(x,t)|\, x \in \mathbf{R},\, t > |x-x_0|\}) \cap C^0(\{(x,t)|\, x \in \mathbf{R},\, t \geq |x-x_0|\})$ des Goursatproblems*

$$K^1_{tt} - K^1_{xx} + q(x)K^1 = 0 \qquad \text{in } t > |x-x_0| \tag{3.31}$$

mit den charakteristischen Randbedingungen

$$K^1(x, |x-x_0|) = -sgn(x-x_0)\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} q(\xi)d\xi \qquad \text{in } x \in \mathbf{R}. \tag{3.32}$$

Die Distribution

$$R^1(x,t,x_0) = \frac{1}{2}(\delta(t-|x-x_0|) + cH(t-|x-x_0|)K^1)$$

löst die Gleichung

$$R^1_{tt} - R^1_{xx} + q(x)R^1 = \frac{d}{dt}\delta(x-x_0,t). \tag{3.33}$$

Es gilt mit der Riemannfunktion R aus Satz 3.5.6 $R^1 = \frac{d}{dt}R$.

Beweis: Die Lösung des Goursatproblems existiert eindeutig nach Kamke [28] §9 Satz 1 und Satz 3. Der Beweis der Gleichung (3.33) kann durch Anwendung auf Testfunktionen geführt werden. Einfacher ist der Schluß über Satz 3.5.6 mit (3.27), (3.29), distributive Differentiation nach t und die Ergebnisse aus dem Beweis des Satzes 3.5.2, denn $K^1 = \frac{2}{c}u_t = K_t$ in $t > |x-x_0|$.

□

Bemerkung 3.5.11 *Mit dem Charakteristikenverfahren läßt sich aus dem Goursatproblem (3.31), (3.32) ebenfalls eine Integralgleichung herleiten. Für $q \in C^0(\mathbf{R}) \setminus C^1(\mathbf{R})$ existieren die ersten, jedoch im allgemeinen nicht die zweiten Ableitungen der Lösung K^1 dieser Integralgleichung im klassischen Sinn in $t > |x-x_0|$, siehe den Beweis zu Satz 3.5.2. Mit einer Herleitung über Satz 3.5.2 gilt die Gleichung (3.31) noch distributiv, die Annahme der charakteristischen Randbedingung (3.32) erfolgt weiterhin klassisch.*

3.5.4 Die Riemannfunktion zur Darstellung von Lösungen zu Problemen mit Inhomogenitäten und allgemeinen Anfangswerten

Mit Hilfe der Riemannfunktion können wir distributiv formulierte Cauchyprobleme lösen.

Satz 3.5.12 *Sei $q \in C^0(\mathbf{R})$. Sei $\bar{t}_0 \in \mathbf{R}$ und $F \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ mit* $\operatorname{supp} F \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\geq \bar{t}_0}$. *Falls durch die Darstellung*

$$U(x,t) \ = \ll R(x,t,x_0,t_0), F(x_0,t_0) \gg_{(x_0,t_0)}, \tag{3.34}$$

definiert durch

$$< U(x,t), \phi(x,t) > = < F(x_0,t_0), < R(x,t,x_0,t_0), \phi(x,t) >_{(x,t)} >_{(x_0,t_0)}$$

$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, *eine Distribution* $U \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ *gegeben ist, dann löst* U *die distributive Differentialgleichung*

$$P(D)U = F$$

und es gilt $\operatorname{supp} U \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\geq \bar{t}_0}$.

Beweis: Es gelte $U \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$. Die Differentialgleichung für U ist erfüllt, denn es gilt für alle ϕ aus $C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$

$$\begin{aligned} < P(D)U, \phi > &= < U, \overline{P}(D)\phi > \\ &= < F(x_0,t_0), < R(x,t,x_0,t_0), \overline{P}(D)\phi(x,t) >> \\ &= < F(x_0,t_0), < P(D)R(x,t,x_0,t_0), \phi(x,t) >> \\ &= < F(x_0,t_0), < \delta(x-x_0, t-t_0), \phi(x,t) >> \\ &= < F, \phi > . \end{aligned}$$

Hierin ist $\overline{P}(D)$ der zu $P(D)$ adjungierte Differentialoperator. Zur Bestimmung des Trägers von U wählen wir $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ mit $\operatorname{supp}\phi \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{<\bar{t}_0}$. Dann gilt wegen $\operatorname{supp}_{(x,t)} R(x,t,x_0,t_0) \subset \{(x,t) | t - t_0 - |x-x_0| \geq 0\}$, siehe Satz 3.5.6,

$$\operatorname{supp}_{(x_0,t_0)} < R(x,t,x_0,t_0), \phi(x,t) > \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{<\bar{t}_0}.$$

Da $\operatorname{supp} F \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\geq \bar{t}_0}$, folgt

$$< U, \phi >= 0.$$

□

Spezialfälle dieses Satzes sind Teil der Standardliteratur:

Beispiele 3.5.13

1. *Für reguläres* F *ist* U *aus (3.34) von der Gestalt*

$$U(x,t) = \int\int_{\{(x_0,t_0) | (\bar{t}_0 \leq t_0) \wedge (t_0 \leq x_0 - x + t) \wedge (t_0 \leq -x_0 + x + t)\}} F(x_0,t_0) R(x,t,x_0,t_0) dx_0 dt_0.$$

2. *Für* $q \equiv k^2 \in \mathbf{R}$ *gilt* $R(x,t,x_0,t_0) = R(x-x_0, t-t_0)$ *und es folgt bei Existenz der Faltung für alle* $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$

$$\begin{aligned} < U(x,t), \phi(x,t) > &= < F(x_0,t_0), < R(x,t,x_0,t_0), \phi(x,t) >> \\ &= < F(x_0,t_0), < R(x-x_0, t-t_0), \phi(x,t) >> \\ &= < F(x_0,t_0), < R(x,t), \phi(x_0+x, t_0+t) >> \\ &= < ((F(x_0,t_0)) * (R(x_0,t_0)))(x,t), \phi(x,t) > \\ &= < ((R(x_0,t_0)) * (F(x_0,t_0)))(x,t), \phi(x,t) > . \end{aligned}$$

Der vorige Satz erlaubt eine Existenzaussage für eine Lösung eines distributiven Cauchyproblems und liefert eine mögliche Darstellung einer Lösung. Für eine homogene Gleichung mit $F \equiv 0$ läßt sich die Darstellung vereinfachen.

Korollar 3.5.14 *Sei* $q \in C^0(\mathbf{R})$. *Wir betrachten für* $t_0 \in \mathbf{R}$ *das distributive Cauchyproblem*

$$u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = 0 \qquad \textit{in } \mathbf{R} \times (t_0, \infty)$$

mit den Anfangswerten

$$u(x,t_0) = u_0(x),\ u_t(x,t_0) = u_1(x) \qquad \textit{in } \mathbf{R},$$

welches analog zu Definition 2.1.1 definiert sei. Sei

$$u(x,t) \;= \ll R^1(x,t,x_0,t_0), u_0(x_0) \gg_{x_0} + \ll R(x,t,x_0,t_0), u_1(x_0) \gg_{x_0}, \tag{3.35}$$

wobei die Terme der rechten Seite für alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ *definiert seien durch*

$$<\ll R^1(x,t,x_0,t_0), u_0(x_0) \gg_{x_0}, \phi(x,t) > = < u_0(x_0), < R^1(x,t,x_0,t_0), \phi(x,t) >>_{x_0}$$

und

$$<\ll R(x,t,x_0,t_0), u_1(x_0) \gg_{x_0}, \phi(x,t) > = < u_1(x_0), < R(x,t,x_0,t_0), \phi(x,t) >>_{x_0} .$$

Dann ist bei Existenz dieser Darstellungen u *eine Lösung des Cauchyproblems.*

Beweis: Das Cauchyproblem $P(D)u = 0$ mit $u(x,\bar{t}_0) = u_0(x)$ und $u_t(x,\bar{t}_0) = u_1(x)$ für ein $\bar{t}_0 \in \mathbf{R}$ ist analog Definition 2.1.1 auf $t > \bar{t}_0$ distributiv formuliert als

$$P(D)u = u_1(x) \otimes \delta(t-\bar{t}_0) + u_0(x) \otimes \frac{d}{dt}\delta(t-\bar{t}_0),$$

$\operatorname{supp} u \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\geq \bar{t}_0}$. Nach Satz 3.5.12 ist bei Existenz der Darstellung

$$u \;= \ll R(x,t,x_0,t_0), u_1(x_0) \otimes \delta(t_0-\bar{t}_0) + u_0(x_0) \otimes \frac{d}{dt}\delta(t_0-\bar{t}_0) \gg_{(x_0,t_0)} \tag{3.36}$$

eine Lösung des Problems. Es gilt für alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$

$$< u, \phi > = < u_1(x_0) \otimes \delta(t_0-\bar{t}_0) + u_0(x_0) \otimes \frac{d}{dt}\delta(t_0-\bar{t}_0), < R(x,t,x_0,t_0), \phi(x,t) >_{(x,t)} >_{(x_0,t_0)} .$$

Dies ist bei Existenz gleich

$$< u_1(x_0), < R(x,t,x_0,\bar{t}_0), \phi(x,t) >>_{x_0} - < u_0(x_0) \otimes \delta(t_0-\bar{t}_0), \frac{d}{dt_0} < R(x,t,x_0,t_0), \phi(x,t) >>_{(x_0,t_0)}$$

$$= < u_1(x_0), < R(x,t,x_0,\bar{t}_0), \phi(x,t) >>_{x_0} - < u_0(x_0), < \frac{d}{dt_0} R(x,t,x_0,t_0), \phi(x,t) > |_{t_0=\bar{t}_0} >_{x_0}$$

$$= < u_1(x_0), < R(x,t,x_0,\bar{t}_0), \phi(x,t) >>_{x_0} + < u_0(x_0), < R^1(x,t,x_0,\bar{t}_0), \phi(x,t) >>_{x_0} \tag{3.37}$$

Die letzte Gleichung gilt, denn wegen $R(x,t,x_0,t_0) = R(x,t-t_0,x_0,0)$ folgt $R^1(x,t,x_0,t_0) = \frac{d}{dt}R(x,t,x_0,t_0) = -\frac{d}{dt_0}R(x,t,x_0,t_0)$. Der Beweis kann auch direkt über die Integraldarstellung von $< R(x,t,x_0,t_0), \phi(x,t) >$ geführt werden. Nach Umbenennung von $\bar{t}_0$ in (3.37) folgt die Behauptung.

□

Mit Hilfe der Riemannfunktion läßt sich eine Eindeutigkeitsaussage zur distributiven Lösung von Cauchyproblemen formulieren.

Satz 3.5.15 *Sei* $q \in C^0(\mathbf{R})$ *und* $F \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ *mit* $\operatorname{supp} F \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\geq 0}$. *Eine Lösung* $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ *von* $P(D)u = F$ *mit Träger im Abschluß der oberen Halbebene ist bei Existenz eindeutig.*

Beweis: Seien $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ Lösungen des Problems. Dann gilt mit der Diracschen δ-Distribution $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$

$$(u_1 - u_2)(x,t) = (\delta * (u_1 - u_2))(x,t).$$

Die Faltung ist für jede Funktion ϕ aus $C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ definiert als

$$< \delta * (u_1 - u_2), \phi > = < \delta(x,t), < (u_1-u_2)(\xi,\tau), \phi(x+\xi, t+\tau) >_{(\xi,\tau)} >_{(x,t)} .$$

Es gilt

1. $V(x,t) := < (u_1 - u_2)(\xi,\tau), \phi(x+\xi, t+\tau) > \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$. Sei $\operatorname{supp}\phi \subset [-X,X] \times [-T,T]$. Wegen $t+\tau \in [-T,T] \Leftrightarrow \tau \in [-T-t, T-t]$ und $\operatorname{supp} u_i \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\geq 0}$, folgt $V(x,t)|_{t>T} \equiv 0$. Somit gilt $\operatorname{supp} V \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\leq T}$.

2. Es existiert eine Riemannfunktion $R(x,t,0,0)$ zu $P(D)$ mit $\operatorname{supp} R(x,t,0,0) \subset \{(x,t) \in \mathbf{R}^2 | \, t \geq |x|\}$, siehe Satz 3.5.6.

Es gilt $< \delta, V > = < P(D)R, V >$. Dies ist wohldefiniert, da $\delta \in \mathcal{E}'$ und $V \in C^\infty$. Die Übertragung der Ableitungen aus $P(D)$ auf das Argument $V \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$ ist aber nicht ohne weiteres erlaubt, da $R \in \mathcal{D}'$ und $R \notin \mathcal{E}'$. Wir führen deswegen eine weitere Funktion ein.
Aus den beiden obigen Punkten folgt $\Omega_0 := \operatorname{supp} R \cap \operatorname{supp} V = \{(x,t) \in \mathbf{R}^2 | T \geq t \geq |x|\}$. Sei $\Omega_0 \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega_2$, $|\Omega_2| < \infty$. Dann existiert eine Funktion $\chi_{\Omega_1,\Omega_2} \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ derart, daß $\chi_{\Omega_1,\Omega_2} = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{in} & \Omega_1 \\ 0 & \text{in} & \Omega_2^c. \end{array} \right.$ Es gilt $\chi_{\Omega_1,\Omega_2} V(x,t) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ und da R regulär ist

$$\begin{aligned} < \delta * (u_1 - u_2), \phi > &= < \delta(x,t), \chi_{\Omega_1,\Omega_2} V(x,t) > \\ &= < P(D)R(x,t,0,0), \chi_{\Omega_1,\Omega_2} V(x,t) > \\ &= < R, \overline{P}(D) \chi_{\Omega_1,\Omega_2} V(x,t) > \\ &= < R, \overline{P}(D) V > \\ &= < R, < (u_1 - u_2)(\xi,\tau), \overline{P}(D)\phi(x+\xi, t+\tau) >> \\ &= < R, < 0, \phi >> \\ &= 0. \end{aligned}$$

Hierin ist $\overline{P}(D)$ der adjungierte Differentialoperator zu $P(D)$. Da in unserer Anwendung die Ordnungen der Ableitungen gerade und die Koeffizienten zu den Termen mit Ableitungen konstant sind, gilt $\overline{P}(D) = P(D)$. Damit ist die Eindeutigkeit bewiesen.

□

Bemerkung 3.5.16 *Eine Lösung eines Viertelraumproblems nach Definition 2.2.1 ist auch eine Lösung des Cauchyproblems nach Definition 2.1.1 zur selben Gleichung. Satz 3.5.15 enthält damit auch eine Eindeutigkeitsaussage zur Lösung des Viertelraumproblems.*

Die Lösung eines Viertelraumproblems kann in der Regel nicht über (3.34) bestimmt werden, da die Problemformulierung überbestimmt ist und im allgemeinen nicht die gesamte Inhomogenität vorliegt.

Bemerkung 3.5.17 *Die Frage nach der stetigen Abhängigkeit einer Lösung eines Cauchyproblems von den Anfangswerten richtet sich bei Existenz einer Riemannfunktion nach der Frage der Existenz der Darstellung (3.35) und der stetigen Abhängigkeit derselben. So lassen sich auch distributive Anfangswerte u_0, u_1 dann erklären, wenn Folgen $\{u_i^m\}_{m \in \mathbf{N}} \subset C_0^\infty(\mathbf{R})$ mit $u_i^m \to u_i$ in $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, $i \in \{0,1\}$, zusammen mit entsprechenden klassischen Lösungen u^m aus Gleichung (3.35) existieren und in $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ konvergieren, $u^m \to u$. Ausgehend von der Riemannfunktion ist es möglich, diese selbst als distributiven Grenzwert von Lösungen mit C_0^∞ Anfangswerten g^m, die gegen die δ-Distribution konvergieren, zu definieren,*

$$\Big(u^m(x,0) = 0,\, u_t^m(x,0) = g^m \to \delta(x)\Big) \;\Rightarrow\; \Big(u^m(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x,t,\xi) g^m(\xi) d\xi \to R(x,t)\Big)$$

mit $< u^m, \phi > = \int_{\operatorname{supp}\phi} \int_{x-t}^{x+t} R(x,t,\xi) g^m(\xi) d\xi \phi(x,t) dx dt$ *und* $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$.

3.5.5 Stetige Abhängigkeit der Riemannfunktion von dem Potential

Wir leiten eine Abschätzung der Riemannfunktion in der Maximumnorm her und zeigen die stetige Abhängigkeit der Riemannfunktion von dem Potential. Wir werden diese Abschätzung bei der Herleitung eines quasi Newton-Verfahrens in Abschnitt 9.2 verwenden.

Eine Funktion $w(x,t,x_0)$, die auf $t < |x - x_0|$ identisch verschwindet und auf $t \geq |x - x_0|$ der Integralgleichung

$$w(x,t,x_0) = \int_0^{\frac{x-x_0-t}{2}} \int_0^{\frac{t+x-x_0}{2}} q(x_0+\eta+\xi)(\frac{1}{2} + w(x_0+\eta+\xi, -\xi+\eta, x_0))d\eta d\xi$$

genügt, ist nach (3.30) Lösung des Goursatproblems (3.28), (3.29) mit $c = 2$. Es gilt in ganz $\mathbf{R}^2$ die Integralgleichung

$$w(x,t,x_0) = -\frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x-t-\tau} q(\xi)(\frac{1}{2}H(\tau - |\xi - x_0|) + w(\xi,\tau,x_0))d\xi d\tau. \tag{3.38}$$

Dies ist eine wesentlich suggestivere Schreibweise, die die Anwendung der d'Alembertschen Formel deutlich zeigt. Hieraus läßt sich analog zu Sacks [48] eine Abschätzung für w herleiten.

Satz 3.5.18 *Sei $T \in \mathbf{R}^{\geq 0}$ und $x_0 \in \mathbf{R}$. Sei $q \in C^0(\mathbf{R})$ beschränkt und $w \in C^0(\mathbf{R}^2)$ identisch Null auf $t \leq |x - x_0|$ Lösung von (3.38). Dann gilt für alle $t \leq T$ die Abschätzung*

$$\|w(\cdot,t,x_0)\|_\infty \leq \frac{1}{8}T^2\|q\|_\infty e^{T\|q\|_\infty t}. \tag{3.39}$$

Beweis: Es folgt aus der Integralgleichung (3.38) für $a, b \in \mathbf{R}$, $a \leq b$,

$$\|w(\cdot,t,x_0)\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{1}{8}t^2\|q\|_{\infty,[a-t,b+t]} + t\|q\|_{\infty,[a-t,b+t]}\int_0^t \|w(\cdot,\tau,x_0)\|_{\infty,[a-t,b+t]}d\tau,$$

und damit

$$\|w(\cdot,t,x_0)\|_\infty \leq \frac{1}{8}t^2\|q\|_\infty + t\|q\|_\infty \int_0^t \|w(\cdot,\tau,x_0)\|_\infty d\tau.$$

Nach Anwendung des Lemmas von Gronwall, Walter [61] Kap. V §29, folgt für $t \leq T$

$$\|w(\cdot,t,x_0)\|_\infty \leq \frac{1}{8}T^2\|q\|_\infty e^{T\|q\|_\infty t}.$$

□

Durch Differenzieren obiger Integralgleichung nach x und t und analoges Vorgehen zum Vorausgegangenen ergeben sich ebenfalls Abschätzungen für $w_x(\cdot,t,x_0)$ und $w_t(\cdot,t,x_0)$.

Aus (3.39) folgt mit (3.30) eine Abschätzung für die Riemannfunktion.

Zur stetigen Abhängigkeit der Lösung des direkten Problems gegenüber der Koeffizientenfunktion gilt der folgende

Satz 3.5.19 *Sei $T \in \mathbf{R}^{\geq 0}$ und $x_0 \in \mathbf{R}$. Seien $q_1, q_2 \in C^0(\mathbf{R})$ mit $\|q_i\|_\infty \leq M \in \mathbf{R}$. Seien w_1, w_2 die zugehörigen Lösungen der Gleichung (3.38). Dann existiert eine Konstante $C(M,T)$, so daß die Abschätzung*

$$\|(w_1 - w_2)(\cdot,t,x_0)\|_\infty \leq C(M,T)\|q_1 - q_2\|_{\infty,[x_0-t,x_0+t]} \qquad \forall t \leq T \tag{3.40}$$

gilt.

Beweis: Subtraktion der Integralgleichungen (3.38) für w_i voneinander und Berücksichtigung von $w_i(x,t,x_0) = 0$ für $t < |x - x_0|$ ergibt zusammen mit dem Ergebnis von Satz 3.5.18 die Abschätzung

$$\|(w_1 - w_2)(\cdot,t,x_0)\|_\infty \leq C(T)\|q_1 - q_2\|_{\infty,[x_0-t,x_0+t]} + C(M,T)\int_0^t \|(w_1 - w_2)(\cdot,\tau,x_0)\|_\infty d\tau.$$

$\|(w_1 - w_2)(\cdot,t,x_0)\|_\infty$ ist stetig in t und mit dem Lemma von Gronwall folgt die Behauptung.

□

Hieraus folgt die stetige Abhängigkeit der Riemannfunktion vom Potential in demselben Sinn wie (3.40).

3.6 Anfangswertannahme für die Riemannfunktion der oberen Halbebene durch Grenzprozesse

In diesem Abschnitt erklären wir die Annahme der distributiven Anfangswerte für die Riemannfunktion der oberen Halbebene und ihre t-Ableitung $R^1 = \frac{d}{dt}R$ mittels Einschränkung auf zur x-Achse parallelen Geraden und Grenzwertbildung gegen die $(t = 0)$-Achse. Ziel ist ein Vergleich mit den distributiven Definitionen für unsere Probleme und die Gewinnung weiterer Eigenschaften der distributiven Lösung, um später Diskretisierungen dieser Lösungen besser begründen zu können. Dazu nutzen wir die feinere Beschreibung von Singularitäten durch Wellenfronten (**Wave-Front-Sets**, abkürzend **WFS**). Für die Begriffsbildung verweisen wir aus Platzgründen auf Hörmander [26] Chapt. VIII Sections 8.1-8.3.

3.6.1 Bestimmung der Wave-Front-Sets für Beispiele

Die t-Ableitung der Riemannfunktion kann als Summe einer singulären und einer regulären Distribution geschrieben werden. Für den singulären Anteil und dessen erste t-Ableitung geben wir die WFS an.

1. Bestimmung der Wellenfront $WF(\delta(x,t))$ von $\delta(x,t)$:
   Es gilt $\operatorname{singsupp}\delta = (0,0)$. Es ist $\delta \in \mathcal{E}'$ und für die Fourier-Transformierte gilt $\hat{\delta} = 1$, damit $\Sigma(\delta) = \mathbf{R}^2 \setminus 0$. Da wegen $\delta \in \mathcal{E}'$ die Projektion der zweiten Argumente von $WF(\delta(x,t))$ gleich $\Sigma(\delta)$ ist, folgt
   $$WF(\delta(x,t)) = \{(0,0)\} \times (\mathbf{R}^2 \setminus 0) = T_0^* \setminus 0.$$

2. Bestimmung von $WF(\frac{d}{dt}\delta(x,t))$:
   Es gilt $\operatorname{singsupp}\frac{d}{dt}\delta(x,t) = (0,0)$. Es ist $\frac{d}{dt}\delta(x,t) \in \mathcal{E}'$ und $(\frac{d}{dt}\delta(x,t))^\wedge = -t$, damit $\Sigma(\delta) = \mathbf{R}^2 \setminus 0$. Da wegen $\delta \in \mathcal{E}'$ die Projektion der zweiten Argumente von $WF(\delta(x,t))$ gleich $\Sigma(\delta)$ ist, folgt
   $$WF(\frac{d}{dt}\delta(x,t)) = \{(0,0)\} \times (\mathbf{R}^2 \setminus 0).$$

3. Bestimmung von $WF(\delta(t-|x|))$:
   In Hörmander [26] Theorem 8.1.5 wird die WFS für die Integration über einen linearen Unterraum bestimmt. Die Analyse mit Hilfe der WFS ist lokal, aufbauend auf den Mengen $\Sigma_x(u) = \cap_{\phi,\phi(x)\neq 0}\Sigma(\phi u)$. Entfernt von $(0,0)$ hat obige Distribution die gleiche Gestalt mit Träger auf einem Charakteristikensegment. Es gilt mit gleicher Argumentation wie in Hörmander [26] Theorem 8.1.5 für $x \neq 0$:
   $$\begin{array}{rcll} \Sigma_{(x,x)}(\delta(t-|x|)) &=& \{c(1,-1) | c \in \mathbf{R}\setminus 0\} & \text{für } x > 0, \\ \Sigma_{(x,-x)}(\delta(t-|x|)) &=& \{c(1,1) | c \in \mathbf{R}\setminus 0\} & \text{für } x < 0, \\ \Sigma_{(x,t)}(\delta(t-|x|)) &=& \emptyset & \text{für } t \neq |x|. \end{array}$$
   Zur Bestimmung von $\Sigma_{(0,0)}(\delta(t-|x|))$ benutzen wir, daß die Gleichung
   $$(\frac{d^2}{dt^2} - \frac{d^2}{dx^2})\delta(t-|x|) = \frac{d}{dt}\delta(x,t)$$
   gilt. Für einen linearen Differentialoperator P mit konstanten Koeffizienten gilt $WF(Pu) \subset WF(u)$. Es folgt
   $$\{(0,0)\} \times (\mathbf{R}^2 \setminus 0) = WF(\frac{d}{dt}\delta(x,t)) \subset WF(\delta(t-|x|)).$$
   Wegen der Ergebnisse für $\Sigma_{(x,t)}, (x,t) \neq 0$, folgt
   $$\{(0,0)\} \times (\mathbf{R}^2 \setminus 0) \subset \Sigma_{(0,0)}(\delta(t-|x|)).$$
   Größer als die linke Seite kann $\Sigma_{(0,0)}(\delta(t-|x|))$ aber nicht sein. Wir erhalten damit
   $$\Sigma_{(0,0)}(\delta(t-|x|)) = \{(0,0)\} \times (\mathbf{R}^2 \setminus 0) = T_0^* \setminus 0.$$

Insgesamt folgt

$$WF(\delta(t-|x|)) = T_0^* \setminus 0 \;\cup$$
$$\{(x,t,\xi,\tau)|\; (t = x > 0 \wedge \tau = -\xi \neq 0) \;\vee\; (t = -x > 0 \wedge \tau = \xi \neq 0)\}.$$

Translation in der x-Variablen erlaubt die Bestimmung von

$$WF(\delta(t-|x-x_0|)) = T_{(x_0,0)}^* \setminus 0 \;\cup$$
$$\{(x,t,\xi,\tau)|\; (t = x - x_0 > 0 \wedge \tau = -\xi \neq 0) \;\vee\; (t = x_0 - x > 0 \wedge \tau = \xi \neq 0)\}.$$

3.6.2 Anfangswertannahme für die Riemannfunktion

Wir stellen kurz eine Sichtweise zur Annahme von Anfangswerten in unseren Cauchyproblemen vor, die auf der Einschränkung von Distributionen auf zur x-Achse parallelen Geraden und anschließendem Grenzprozeß beruht. Sei $q \in C^0(\mathbf{R})$. Wir definieren für die Riemannfunktion R aus (3.3) und für ihre t-Ableitung R^1 die Einschränkung auf $t = \epsilon > 0$, welche Distributionen bezüglich der x-Variablen sind, und betrachten den Grenzwert $\epsilon \searrow 0$. Es existieren die Darstellungen

$$R(x,t,x_0) = \frac{1}{2}H(t-|x-x_0|) + w(x,t,x_0)H(t-|x-x_0|)$$

und wegen $w(x,|x-x_0|,x_0) = 0$

$$R^1(x,t,x_0) = \frac{d}{dt}R(x,t,x_0) = \frac{1}{2}\delta(t-|x-x_0|) + w_t(x,t,x_0)H(t-|x-x_0|).$$

3.6.2.1 Einschränkung der Lösungen der linearisierten Probleme auf zur x-Achse parallelen Hyperflächen

Die distributive Lösung der Gleichung

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{d^2u}{dx^2} = \delta(x-x_0,t)$$

mit Träger im Abschluß der oberen Halbebene ist

$$\frac{1}{2}H(t-|x-x_0|).$$

Die distributive Lösung von

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dt}\delta(x-x_0,t)$$

mit Träger im Abschluß der oberen Halbebene ist damit

$$\frac{1}{2}\delta(t-|x-x_0|).$$

Dies sind jeweils die führenden singulären Terme der Distributionen R und R^1. Für die **Wave-Front-Sets** dieser Terme gilt

$$WF(H(t-|x-x_0|))$$
$$= \{(x,t,\xi,\tau)|(t = x-x_0 > 0 \wedge \tau = -\xi \neq 0) \vee (t = x_0 - x > 0 \wedge \tau = \xi \neq 0)\} \cup T_0^* \setminus 0,$$
$$WF(\delta(t-|x-x_0|)) = WF(H(t-|x-x_0|)).$$

Die letzte Gleichung folgt trotz der suggestiven Schreibweise nicht zwingend daraus, daß $\delta(t-|x-x_0|) = \frac{d}{dt}H(t-|x-x_0|)$ gilt. Es gilt auch $WF(\frac{d}{dt}(\delta(t-|x-x_0|))) \subset WF(\delta(t-|x-x_0|))$.

Die **Einschränkung** dieser Distributionen auf die zur x-Achse parallelen Geraden $t = \epsilon > 0$ ist damit laut Hörmander [26] Theorem 8.2.4 definiert.

Für $\frac{1}{2}H(t-|x-x_0|)$ ist die Einschränkung gleich

$$\frac{1}{2}H(\epsilon-|x-x_0|)$$

und für $\frac{1}{2}\delta(t-|x-x_0|)$ hat sie die Gestalt

$$\frac{1}{2}(\delta(x-x_0+\epsilon)+\delta(x-x_0-\epsilon)),$$

jeweils als Distribution bezüglich x. Beide Distributionen sind daher zeitstetig in $t=0$ ergänzbar in dem Sinne, daß für alle $\phi \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ die folgenden Grenzwerte wohldefiniert sind:

$$\lim_{t\searrow 0} < \frac{1}{2}H(t-|x-x_0|), \phi(x) > = \ 0,$$

$$\lim_{t\searrow 0} < \frac{1}{2}\delta(t-|x-x_0|), \phi(x) > = \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{2} < \delta(x-x_0+t)+\delta(x-x_0-t), \phi > = < \delta(x-x_0), \phi > .$$

Die Distribution $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\delta(t-|x-x_0|)$ ist der führende singuläre Term der Distribution $\frac{d}{dt}R^1$; für sie ist die Einschränkung auf $t=\epsilon$ ebenfalls wohldefiniert. Um im folgenden Abschnitt zeigen zu können, daß die Annahme des Randwertes $\frac{d}{dt}R^1(x,0)=0$ auch mit dieser Methode erfolgt, leiten wir diese Einschränkung explizit her. Das Resultat wird in Abschnitt 7.2.2 benötigt.

Satz 3.6.1 *Es gilt*

$$\begin{aligned} < (\tfrac{d}{dt}\delta(t-|x-x_0|))|_{t=\epsilon>0}, \phi(x) > &= - < \tfrac{d}{dx}\Big(\delta(x-(x_0+\epsilon))-\delta(x-(x_0-\epsilon)) \Big), \phi(x) > \\ &= \phi'(x_0+\epsilon)-\phi'(x_0-\epsilon), \end{aligned}$$

wobei nur die erste Gleichung noch zu zeigen ist.

Beweis: Der Beweis erfolgt nach den Methoden aus Hörmander [26] Theorem 8.2.3 und Theorem 8.2.4. Seien

$$\chi_j = \chi_j(x,t) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2): \ \forall K \subset\subset \mathbf{R}^2 \ \exists j_0: \ \chi_j|_K \equiv 1 \ \forall j \geq j_0,$$

$$\phi_j = \phi_j(x,t) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2): \ \operatorname{supp}\phi_j \subset [-\epsilon_j,\epsilon_j]^2, \ \epsilon_j \searrow 0, \ \phi_j \geq 0, \ \int_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}} \phi_j = 1.$$

Dann gilt für $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ in $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$

$$(\chi_j u) * \phi_j \to u,$$

wobei $(\chi_j u)*\phi_j \in C_0^\infty$. Eine Einschränkung von u auf $t=\epsilon$ ist dann wohldefiniert, wenn ein von den Folgen $\{\chi_j\}$ und $\{\phi_j\}$ unabhängiges $v \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ existiert mit

$$v = \lim_{j\to\infty}((\chi_j u) * \phi_j|_{t=\epsilon}).$$

v wird dann als die Einschränkung von u auf $t=\epsilon$ betrachtet.

Für $u = \frac{d}{dt}\delta(t-|x-x_0|)$ gilt

$$((\chi_j u) * \phi_j)(y_1,y_2) \ = < u, \chi_j(x,t)\phi_j(y_1-x, y_2-t) >_{(x,t)}$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} (\chi_j)_t(x,|x-x_0|)\phi_j(y_1-x,y_2-|x-x_0|) - \chi_j(x,|x-x_0|)(\phi_j)_t(y_1-x,y_2-|x-x_0|)dx.$$

Sei nun v_j definiert als die rechte Seite obiger Gleichung eingeschränkt auf $y_2=\epsilon$. Da $(\chi_j u)*\phi_j \in C_0^\infty$, ist dies für jedes j wohldefiniert. Somit gilt

$$v_j = -\int_{-\infty}^{\infty} (\chi_j)_t(x,|x-x_0|)\phi_j(y_1-x,\epsilon-|x-x_0|) - \chi_j(x,|x-x_0|)(\phi_j)_t(y_1-x,\epsilon-|x-x_0|)dx.$$

Als Distribution bezüglich y_1 angewandt auf eine Testfunktion $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ gilt

$$< v_j, \psi(y_1) > = -\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} (\chi_j)_t(x, |x-x_0|)\phi_j(y_1 - x, \epsilon - |x-x_0|)$$

$$-\chi_j(x, |x-x_0|)(\phi_j)_t(y_1 - x, \epsilon - |x-x_0|)dx\Big) \; \psi(y_1)dy_1.$$

Das innere Integral hat die Gestalt

$$\int_{-\infty}^{x_0} (\chi_j)_t(x, x_0 - x)\phi_j(y_1 - x, \epsilon - x_0 + x) - \chi_j(x, x_0 - x)(\phi_j)_t(y_1 - x, \epsilon - x_0 + x)dx$$

$$+ \int_{x_0}^{\infty} (\chi_j)_t(x, x - x_0)\phi_j(y_1 - x, \epsilon - x + x_0) - \chi_j(x, x - x_0)(\phi_j)_t(y_1 - x, \epsilon - x + x_0)dx.$$

i) Wir betrachten zuerst den Term

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_0}^{\infty} (\chi_j)_t(x, x - x_0)\phi_j(y_1 - x, \epsilon - x + x_0) - \chi_j(x, x - x_0)(\phi_j)_t(y_1 - x, \epsilon - x + x_0)dx\psi(y_1)dy_1.$$

Es gilt: $\forall \epsilon > 0 \, \exists j_0 > 0 \, \forall j > j_0$:

$$x_0 < x_0 + \epsilon - \epsilon_j < x_0 + \epsilon + \epsilon_j, \text{ d.h. } [x_0 + \epsilon - \epsilon_j, x_0 + \epsilon + \epsilon_j] \subset (x_0, \infty).$$

Somit ist das innere Integral von x_0 bis ∞ gleich dem Integral von $x_0 + \epsilon - \epsilon_j$ bis $x_0 + \epsilon + \epsilon_j$. Aus

$$\exists j_1 > 0 \, \forall j \geq j_1 \;\; \chi_j|_{(x_0+\epsilon-\epsilon_j, x_0+\epsilon+\epsilon_j)\times((x_0+\epsilon-\epsilon_j, x_0+\epsilon+\epsilon_j)-x_0)} \equiv 1$$

folgt

$$(\chi_j)_t|_{(x_0+\epsilon-\epsilon_j, x_0+\epsilon+\epsilon_j)\times((x_0+\epsilon-\epsilon_j, x_0+\epsilon+\epsilon_j)-x_0)} \equiv 0$$

und daraus

$$\int_{x_0+\epsilon-\epsilon_j}^{x_0+\epsilon+\epsilon_j} (\chi_j)_t(x, x - x_0)\phi_j(y_1 - x, \epsilon - x + x_0) - \chi_j(x, x - x_0)(\phi_j)_t(y_1 - x, \epsilon - x + x_0)dx$$

$$= \int_{x_0+\epsilon-\epsilon_j}^{x_0+\epsilon+\epsilon_j} (\phi_j)_t(y_1 - x, \epsilon - x + x_0)dx.$$

Damit gilt

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_0+\epsilon-\epsilon_j}^{x_0+\epsilon+\epsilon_j} (\phi_j)_t(y_1 - x, \epsilon - x + x_0)dx\psi(y_1)dy_1$$

$$= -\int_{x_0+\epsilon-2\epsilon_j}^{x_0+\epsilon+2\epsilon_j} \int_{x_0+\epsilon-\epsilon_j}^{x_0+\epsilon+\epsilon_j} (\phi_j)_t(y_1 - x, \epsilon - x + x_0)dx\psi(y_1)dy_1.$$

Das Integral ist gleich

$$\begin{aligned}
& \textstyle\int_{x_0+\epsilon-2\epsilon_j}^{x_0+\epsilon+2\epsilon_j} \int_{x_0+\epsilon-\epsilon_j}^{x_0+\epsilon+\epsilon_j} \frac{d}{dx}(\phi(y_1 - x, \epsilon - x + x_0))\psi(y_1) \\
& + \tfrac{d}{dy_1}(\phi(y_1 - x, \epsilon - x + x_0)\psi(y_1)) - \phi(y_1 - x, \epsilon - x + x_0)\psi_{y_1}(y_1)dxdy_1 \\
= \; & \textstyle\int_{x_0+\epsilon-2\epsilon_j}^{x_0+\epsilon+2\epsilon_j} \psi(y_1)(\phi_j(y_1 - x_0 - \epsilon - \epsilon_j, -\epsilon_j) - \phi_j(y_1 - x_0 - \epsilon + \epsilon_j, \epsilon_j))dy_1 \\
& + \textstyle\int_{x_0+\epsilon-\epsilon_j}^{x_0+\epsilon+\epsilon_j} (\phi_j(x_0 + \epsilon + 2\epsilon_j - x, \epsilon - x + x_0)\psi(x_0 + \epsilon + 2\epsilon_j) \\
& -\phi_j(x_0 + \epsilon - 2\epsilon_j - x, \epsilon - x + x_0)\psi(x_0 + \epsilon - 2\epsilon_j))dx \\
& -\psi_{y_1}(y^j) \textstyle\int_{x_0+\epsilon-2\epsilon_j}^{x_0+\epsilon+2\epsilon_j} \int_{x_0+\epsilon-\epsilon_j}^{x_0+\epsilon+\epsilon_j} \phi(y_1 - x, \epsilon - x + x_0)dxdy_1,
\end{aligned}$$

für ein $y^j \in [x_0 + \epsilon - 2\epsilon_j, x_0 + \epsilon + 2\epsilon_j]$. Die Voraussetzung $\phi_j \geq 0$ erlaubt diese Darstellung. Das erste Integral ist Null, wegen des zweiten Argumentes des Integranden. Im zweiten Integral wird über ein Gebiet integriert, welches so beschaffen ist, daß die Argumente des Integranden alle nicht im Träger des Integranden liegen. Das letzte Integral ist identisch 1, der Koeffizient strebt für $j \to \infty$ gegen $-\psi'(x_0 + \epsilon)$.

ii) Mit analoger Argumentation für den zweiten Term folgt für diesen mit j gegen ∞ die Konvergenz gegen $\psi'(x_0 - \epsilon)$.

Insgesamt existiert der Grenzwert für festes ϵ:

$$\lim_{j\to\infty} < v_j, \psi(y_1) > = \ -\psi'(x_0 - \epsilon) + \psi'(x_0 + \epsilon).$$

Damit ist der Satz bewiesen.

$\square$

Somit existiert der Anfangswert $\lim_{t\searrow 0} \frac{d}{dt}\delta(t - |x - x_0|) = 0$.

3.6.2.2 Einschränkung der Lösungen zu stetigem q auf zur x-Achse parallelen Hyperflächen

Wir geben zuerst ein einfaches Beispiel zur Einschränkung einer Lösung einer partiellen Differentialgleichung auf Hyperflächen.

Beispiel 3.6.2 *Für $q \equiv 0$ ist $u = \frac{1}{2}H(t - |x|)$ Lösung von*

$$u_{tt} - u_{xx} = \delta(x, t)$$

mit Träger im Abschluß der oberen Halbebene. Es gilt für $t > 0$

$$u(0, t) = \frac{1}{2}, \ \ u_x(0, t) = 0.$$

Als Grenzwert existieren in $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$

$$\lim_{x\searrow 0} u(x, t) = \frac{1}{2}H(t) \quad und \quad \lim_{x\searrow 0} u_x(x, t) = -\frac{1}{2}\delta(t).$$

Für die Anfangswerte erhalten wir

$$\lim_{t\searrow 0} u(x, t) = 0 \quad und \quad \lim_{t\searrow 0} u_t(x, t) = \delta(x).$$

Eingeschränkt auf den rechten oberen Quadranten, also für $u^{or}(x, t) = \frac{1}{2}H(x)H(t - |x|)$, gilt

$$u^{or}_{tt} - u^{or}_{xx} = \frac{1}{2}\delta(x, t) - \frac{d}{dx}\delta(x) \otimes \frac{1}{2}H(t). \tag{3.41}$$

Der Beweis dieser Gleichung erfolgt durch Anwendung auf Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ und partielle Integration. An $x = 0, t > 0$ werden hier ebenfalls die Randwerte

$$u^{or}(0, t) = \frac{1}{2} \quad und \quad u^{or}_x(0, t) = 0$$

und die Grenzwerte

$$\lim_{x\searrow 0} u^{or}(x, t) = \frac{1}{2}H(t) \quad und \quad \lim_{x\searrow 0} u^{or}_x(x, t) = -\frac{1}{2}\delta(t)$$

angenommen. Für die Anfangswerte gilt jedoch

$$\lim_{t\searrow 0} u^{or}(x, t) = 0 \quad und \quad \lim_{t\searrow 0} u^{or}_t(x, t) = \frac{1}{2}\delta(x).$$

Für die distributive Problemformulierung (3.41) mit $\operatorname{supp} u^{or} \subset \mathbf{R}^{\geq 0} \times \mathbf{R}^{\geq 0}$ *erhalten wir zwei Anfangswert-Randwert Schreibweisen auf dem rechten oberen Quadranten, einmal mit*

$$u^{or}(0,t) = \frac{1}{2},\ u_x^{or}(0,t) = 0,\ u^{or}(x,0) = 0,\ u_t^{or}(x,0) = \frac{1}{2}\delta(x)$$

und einmal mit

$$u^{or}(0,t) = \frac{1}{2},\ u_x^{or}(0,t) = -\frac{1}{2}\delta(t),\ u^{or}(x,0) = 0,\ u_t^{or}(x,0) = 0.$$

Dies stimmt mit den Grenzwerten überein, denn es gilt

$$\lim_{t \searrow 0} u_t^{or}(x,t) = \frac{1}{2}\delta(x) \quad \textit{und} \quad \lim_{x \searrow 0} u_x^{or}(x,t) = -\frac{1}{2}\delta(t).$$

Sei $q \in C^0(\mathbf{R})$, dann existiert die Darstellung

$$R(x,t,x_0) = \frac{1}{2}H(t-|x-x_0|) + w(x,t,x_0)H(t-|x-x_0|)$$

mit auf $t > |x-x_0|$ stetig differenzierbarem w. Es gilt $w(x, |x-x_0|+0, x_0) = 0$. Die Einschränkung auf $t = \epsilon > 0$ ist klar, der Grenzwert $t \searrow 0$ existiert eindeutig und ist die Nulldistribution. Weiterhin gilt mit $w_t(x,t,x_0) = \frac{d}{dt}(w(x,t,x_0))$ in $t > |x-x_0|$ und auf $\mathbf{R}^2$ identisch Null fortgesetzt

$$R^1(x,t,x_0) = \frac{1}{2}\delta(t-|x-x_0|) + w_t(x,t,x_0)H(t-|x-x_0|).$$

Mit den Ergebnissen des vorigen Abschnitts ist auch hier die Einschränkung auf $t = \epsilon > 0$ klar, mit für t gegen 0 eindeutigem Grenzwert $\delta(x-x_0)$. Es existiert $w_{tt}(x,t,x_0) = \frac{d^2}{dt^2}(w(x,t,x_0))$ in $t > |x-x_0|$ stetig und dies sei mit Null auf $\mathbf{R}^2$ fortgesetzt. Dann folgt

$$\frac{d}{dt}R^1(x,t,x_0) \;=\; \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\delta(t-|x-x_0|) + w_{tt}(x,t,x_0)H(t-|x-x_0|) + w_t(x,t,x_0)\delta(t-|x-x_0|).$$

Analog zu vorher folgen die Einschränkung und der Grenzwert für t gegen 0. Dieser ist wegen $\lim_{\epsilon \searrow 0} w_t(x_0 \pm \epsilon, \epsilon, x_0) = 0$ identisch Null.

Bemerkung 3.6.3 *Vladimirov [59] Chapt. 3 §11.1 führt für den Fall* $q \equiv 0$ *eine ähnliche Betrachtung der Anfangswertannahme durch und kommt in diesem Spezialfall zu denselben Resultaten. Für* $q \equiv 0$ *folgt wegen der konstanten Koeffizienten die Lösung der Wellengleichung mit den Anfangswerten* $u_0, u_1 \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ *durch Zufaltung der entsprechenden Inhomogenität zur Riemannfunktion. Auch dann werden die Anfangswerte beim Grenzprozeß* $t \searrow 0$ *angenommen, Vladimirov [59] Chapt. 3 §11.4.*

Die folgende Bemerkung erklärt die Lösung des Viertelraumproblems im rechten oberen Quadranten mit $u_0 = 0,\ u_1 = \delta(x),\ u_3 = 0$ als Grenzwert $x_0 \searrow 0$ der Lösungen zu $u_0 = 0,\ u_1 = \delta(x-x_0),$ für $x_0 > 0,\ u_3 = 0$ und gibt Auffassungen zur Randwertannahme wieder.

Bemerkung 3.6.4 *Sei auf* $(\mathbf{R}^{\geq 0})^2$ *für* $x_0 > 0$ *das Viertelraumproblem mit den Anfangs- und Randwerten* $u_0^{x_0} = 0,\ u_1^{x_0} = \delta(x-x_0),\ u_3^{x_0} = 0$ *gegeben. Das aus einer geraden Spiegelung an der* $(x=0)$*-Achse resultierende Cauchyproblem auf der oberen Halbebene besitzt die Lösung*

$$u^{x_0}(x,t) = R(x,t,-x_0) + R(x,t,x_0), \tag{3.42}$$

siehe Abbildung 3.3 für die Begrenzungen der Träger. Es existiert der distributive Grenzwert

$$\lim_{x_0 \searrow 0} u^{x_0} = 2R(x,t),$$

der das gerade gespiegelte Viertelraumproblem mit den Anfangs- und Randwerten $u_0 = 0,\ u_1 = 2\delta(x)$ *und* $u_3 = 0$ *löst.*

Eine Untersuchung der Randwertannahme mit Einschränkungen auf zur t*-Achse parallelen Geraden ergibt:*

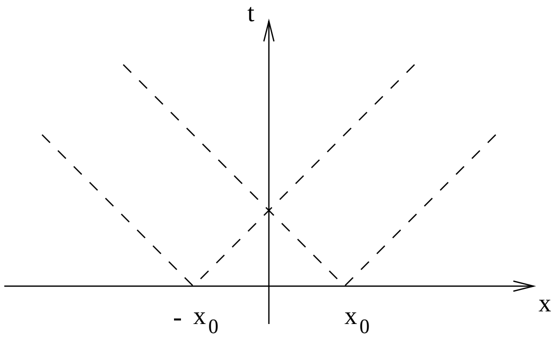

Abbildung 3.3: Die Ränder der Träger von $R(x,t,-x_0)$ und $R(x,t,x_0)$.

1. *Es gilt für* $\epsilon \in (0,x_0)$*:* $(u^{x_0})_x(\epsilon,t) = \frac{1}{2}\delta(t-(x_0-\epsilon)) - c_\epsilon\delta(t-(x_0+\epsilon)) + v_\epsilon(t)$ *mit* v_ϵ *regulär und* $\lim_{\epsilon\searrow 0} c_\epsilon = \frac{1}{2}$*, vergleiche Abbildung 3.3 zusammen mit Gleichung (3.42), und es existiert der Grenzwert*
$$g^{x_0}(t) := \lim_{\epsilon\searrow 0}(u^{x_0})_x(\epsilon,t).$$
g^{x_0} *ist regulär mit* $g^{x_0}(t) = 0$ *für* $t < x_0$ *und es gilt* $g^{x_0} \in C^1([x_0,\infty))$*. Es existiert*
$$g(t) := \lim_{x_0\searrow 0} g^{x_0}(t).$$
g *ist regulär mit* $g(t) = 0$ *für* $t < 0$ *und es gilt* $g \in C^1([0,\infty))$*.*

2. *Es existiert der Grenzwert*
$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\searrow 0}\Big(\frac{d}{dx}\big(\lim_{x_0\searrow 0} u^{x_0}\big)\Big)(\epsilon,t) &= \lim_{\epsilon\searrow 0}(2R_x)(\epsilon,t) = \lim_{\epsilon\searrow 0}(-\delta(t-\epsilon) + 2\tilde{R}_x(\epsilon,t)) \\ &= -\delta(t) + 2\tilde{R}_x(0,t) = -\delta(t),\end{aligned}$$
wobei $\tilde{R}_x(\epsilon,t) = \begin{cases} (\frac{d}{dx}R)(\epsilon,t) & \text{für } t > \epsilon, \\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$

3.7 Die Lösung auf die obere Halbebene gespiegelter Halbstreifenprobleme

Mit der Riemannfunktion erhalten wir Lösungen für die Cauchyprobleme, die durch symmetrische oder antisymmetrische Spiegelungen aus Viertelraum- oder Halbstreifenproblemen entstanden sind.

Beispiel 1:

Korollar 3.7.1 *Es sei* $q \in C^0(\mathbf{R})$ *gemäß Beispiel 2.7.2 derart, daß* $q(2l+x) = q(x)$ *und* $q(2l+1+x) = q(1-x)$ *für* $l \in \mathbf{Z}, x \in [0,1]$*. Es sei* R *die Riemannfunktion zu* $P(D)$ *auf der oberen Halbebene. Dann ist durch*
$$U(x,t) = 2\sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^l R(x-2l,t) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$$
eine Lösung des Problems aus Beispiel 2.7.2 gegeben.

Ein Beispiel ist in Abbildung 3.4 zu sehen.

Beispiel 2:

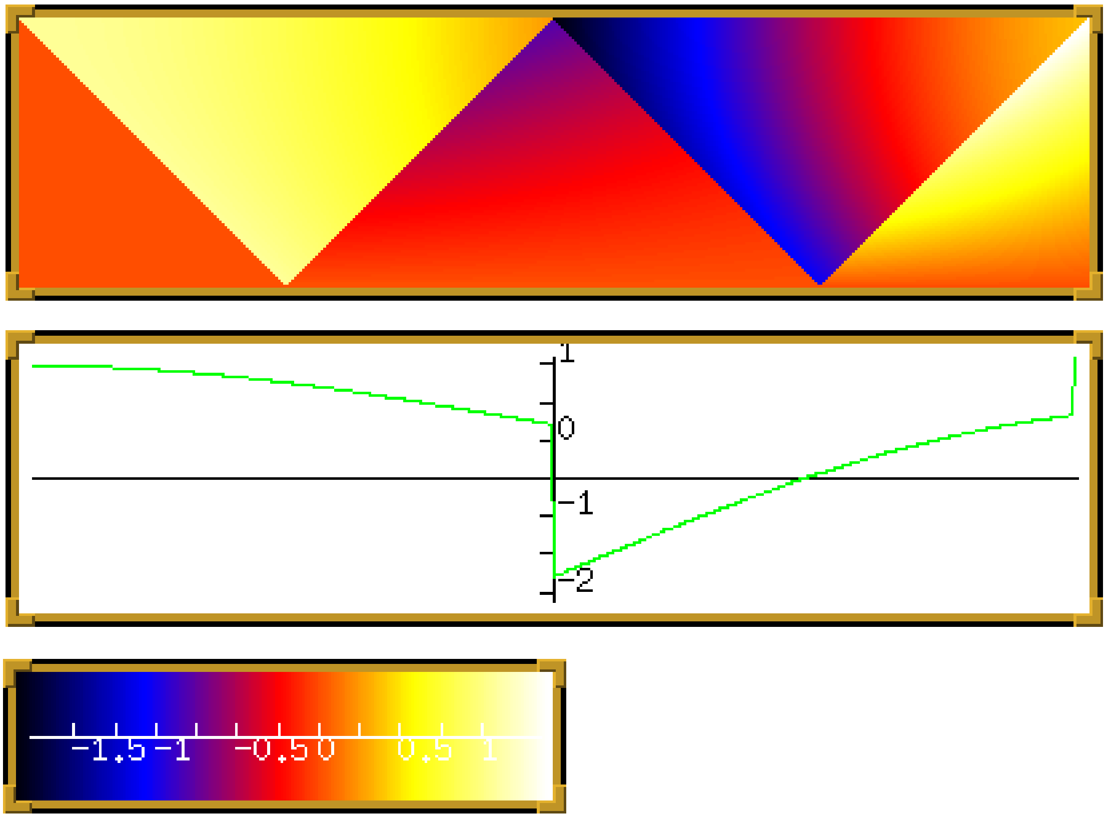

Abbildung 3.4: Die Lösung u des Halbstreifenproblems aus Beispiel 2.7.2 und Korollar 3.7.1 für $q \equiv 1$ auf $(x,t) \in [0,1] \times [0,4]$ mit $u(0,t)$ und Farbkeil. Die x-Achse verläuft vertikal, die t-Achse horizontal und der Nullpunkt liegt in der linken oberen Ecke.

Speziell für $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$ und $q \equiv k^2$ erhalten wir durch Translation und Superposition das

Korollar 3.7.2 *Sei die Distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ definiert durch*

$$u(x,t) = H(t-|x|)J_0(k\sqrt{t^2-x^2})$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(H(t-|x+2n|)J_0(k\sqrt{t^2-(x+2n)^2}) + H(t-|x-2n|)J_0(k\sqrt{t^2-(x-2n)^2})).$$

Dann gilt $\operatorname{supp} u \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\geq 0}$ *und es löst u die Gleichung*

$$u_{tt} - u_{xx} + k^2 u = 2\delta(t) \otimes \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(x-2l).$$

Es ist u gebietsweise stetig. Setzen wir u außerhalb von $[0,1]\times[0,\infty)$ identisch Null, so löst die reguläre Distribution $U = H(x)H(1-x)H(t)u$ das Halbstreifenproblem

$$u_{tt} - u_{xx} + k^2 u = 0 \qquad \text{in } (0,1) \times \mathbf{R}^{>0}$$

mit den Randwerten

$$u_x(0,t) = 0 = u_x(1,t) \qquad \text{in } \mathbf{R}^{>0}$$

und den Anfangswerten

$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \delta(x) \qquad \text{in } \mathbf{R}$$

im Sinne der Anfangs- und Randwertannahme gemäß Abschnitt 3.6.

Für ungerade oder gemischt gerade und ungerade Randbedingungen ändern sich die Vorzeichen in der Summendarstellung von u entsprechend.

Mit Hilfe der distributiven Darstellung haben wir damit gezeigt, daß die Lösungen der Halbstreifenprobleme DP1_HS und DP2_HS für $h_1 = 0$, $h_2 \in \{0, \infty\}$ und $k = 2$ auf dem Gebiet $\{(x,t)| \, 0 < x < 1, \, 0 < t < 2 - x\}$ gleich den Distributionen $2R$ bzw. $2R^1$ sind, wenn für $x \in [0,1]$ $q(-x) = q(x)$ gilt. Insbesondere hat die rechte Randbedingung an $x = 1$ keinen Einfluß auf die Lösung in diesem Gebiet.

3.8 Einschränkung der Riemannfunktion zur oberen Halbebene auf den rechten oberen Viertelraum $x \geq x_0$

In den Abschnitten 2.6 und 2.7 haben wir gezeigt, wie spezielle Viertelraum- und Halbstreifenprobleme durch Spiegelung in Cauchyprobleme überführt werden können. Wir schränken nun die Riemannfunktion R der oberen Halbebene und deren t-Ableitung R^1 durch Multiplikation mit $H(x - x_0)$ auf den rechten oberen Viertelraum ein und wenden den Differentialoperator $P(D) = \frac{d^2}{dt^2} - \frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ auf die resultierenden Distributionen an. Für $x_0 = 0$ stellen wir die Einschränkung mittels Lösungen von auf $0 \leq x \leq t$ formulierten gemischten Problemen dar.

Ein einfaches Beispiel zur Einschränkung einer Lösung einer partiellen Differentialgleichung auf den rechten oberen Viertelraum und die entsprechende Viertelraumproblemformulierung liegt mit Beispiel 3.6.2 bereits vor.

Sei $x_0 \in \mathbf{R}$ fest. Die Riemannfunktion sei in diesem Abschnitt dargestellt als

$$R(x,t,x_0) = \frac{1}{2}(1 + w(x,t,x_0))H(t - |x - x_0|) \tag{3.43}$$

mit $\operatorname{supp} w \subset \{(x,t)| \, t > |x - x_0|\}$. Sei eine Einschränkung auf einen rechten oberen Viertelraum definiert durch

$$R^v = RH(x - x_0).$$

Dieses Produkt zweier Distributionen ist wohldefiniert, da beide gebietsweise stetig sind.

Satz 3.8.1 *Sei $q \in C^0(\mathbf{R})$, dann gilt*

$$P(D)R^v = \frac{1}{2}\delta(x - x_0, t) - \delta_x(x - x_0) \otimes R(x_0, t, x_0) - \frac{1}{2}\delta(x - x_0) \otimes w_x(x_0, t, x_0). \tag{3.44}$$

Hierin ist $R(x_0,t,x_0) = \begin{cases} \lim_{x \searrow x_0} R(x,t,x_0) & \textit{für } t > 0, \\ 0 & \textit{sonst,} \end{cases}$ *ebenso sei $w_x(x_0,t,x_0)$ aufgefaßt. Der Grenzwert existiert im klassischen Sinn für stetige Funktionen.*

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Anwendung auf Testfunktionen und partielle Integration. Es wird berücksichtigt, daß nach (3.28) die Gleichung $w_{tt} - w_{xx} + qw = -q$ auf $t > |x - x_0|$ im klassischen Sinne gilt und die Grenzwerte $\lim_{\epsilon \searrow 0} w(x, x - x_0 + \epsilon, x_0) = 0$ für $x > x_0$ und $\lim_{\epsilon \nearrow 0} w(x_0 + t - \epsilon, t, x_0) = 0$ für $t > 0$ existieren. Sei $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, dann gilt mit umfangreichen Rechnungen

$$\begin{aligned}
& < P(D)R^v, \phi > \\
= \; & \frac{1}{2}\Big(\int_{x_0}^{\infty} \int_{x-x_0}^{\infty} (1 + w(x,t,x_0))\phi_{tt} dt dx - \int_0^{\infty} \int_{x_0}^{x_0+t} (1 + w(x,t,x_0))\phi_{xx} dx dt + < qR^v, \phi > \Big) \\
= \; & \frac{1}{2}\Big(\int_{x_0}^{\infty} (-1)\phi_t(x, x - x_0) - (-w_t(x, x - x_0, x_0)\phi(x, x - x_0) - \int_{x-x_0}^{\infty} w_{tt}\phi dt) dx \\
& - \int_0^{\infty} \phi_x(x_0 + t, t) - (1 + w(x_0, t, x_0))\phi_x(x_0, t) - (w_x(x_0 + t, t, x_0)\phi(x_0 + t, t)
\end{aligned}$$

$$-w_x(x_0,t,x_0)\phi(x_0,t) - \int_{x_0}^{x_0+t} w_{xx}(x,t,x_0)\phi dx)dt + \; < qR^v, \phi > \Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\phi(x_0,0) + \int_0^\infty (1+w(x_0,t,x_0))\phi_x(x_0,t) - w_x(x_0,t,x_0)\phi(x_0,t)dt\Big)$$

$$= \frac{1}{2} < \delta(x-x_0,t) - \delta_x(x-x_0)\otimes 2R(x_0,t,x_0)H(t) - \delta(x-x_0)\otimes H(t)w_x(x_0,t,x_0)\;,\;\phi > . \tag{3.45}$$

□

Eine Einschränkung

$$R^{1v} = R^1 H(x-x_0)$$

ist sinnvoll definiert als

$$R^{1v} = \frac{1}{2}\Big(\delta(t-|x-x_0|)H(x-x_0) + w_t(x,t,x_0)H(t-|x-x_0|)H(x-x_0)\Big). \tag{3.46}$$

Korollar 3.8.2 *Es gilt*

$$\begin{aligned} P(D)R^{1v} &= \frac{1}{2}\delta_t(x-x_0,t) - \delta_x(x-x_0)\otimes\Big(\frac{1}{2}\delta(t) + \tilde{R}_t(x_0,t,x_0)\Big) \\ &\quad -\frac{1}{2}\delta(x-x_0)\otimes\frac{d}{dt}\Big(w_x(x_0,t,x_0)\Big), \end{aligned} \tag{3.47}$$

mit $\tilde{R}_t(x_0,t,x_0) = \begin{cases} R_t(x_0,t,x_0) & \textit{für } t>0, \\ 0 & \textit{sonst,} \end{cases}$ $w_x(x_0,t,x_0) = H(t)w_x(x_0,t,x_0)$ *und distributiver Differentiation* $\frac{d}{dt}(w_x(x_0,t,x_0)) = \frac{d}{dt}(H(t)w_x(x_0,t,x_0))$.

Beweis: Die Anwendung des Differentialoperators auf R^{1v} liefert

$$P(D)R^{1v} = P(D)(\frac{d}{dt}R^v) = \frac{d}{dt}(P(D)R^v)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\;\delta_t(x-x_0,t) - \delta(x-x_0)\otimes\frac{d}{dt}(w_x(x_0,t,x_0))$$

$$-\delta_x(x-x_0)\otimes(2(R(x_0,0+,x_0)H(0+) - R(x_0,0-,x_0)H(0-))\delta(t) + 2\tilde{R}_t(x_0,t,x_0)H(t))\;\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\;\delta_t(x-x_0,t) - \delta_x(x-x_0)\otimes(\delta(t) + 2\tilde{R}_t(x_0,t,x_0)H(t)) - \delta(x-x_0)\otimes\frac{d}{dt}(w_x(x_0,t,x_0))\;\Big).$$

□

Bemerkung 3.8.3 *Mit den Methoden aus Abschnitt 3.6 folgt, inwieweit die rechten Seiten der Gleichungen (3.44) und (3.47) der Randwertannahme als Grenzwert zeit- bzw. ortsstetiger Distributionen entsprechen.*

Beispiele 3.8.4

1. *Für das gerade an der* $(x=0)$*-Achse gespiegelte Viertelraumproblem auf dem rechten oberen Quadranten mit den Anfangs- und Randwerten* $u^{or}(x,0)=0$, $u_t^{or}(x,0)=\frac{k}{2}\delta(x)$, $u_x^{or}(0,t)=0$ *setzen wir* $x_0=0$. *Die Lösung des Cauchyproblems* $P(D)u = k\delta(x)$ *ist* $u = kR = kR(x,t,0)$. *Da der Koeffizient q gerade fortgesetzt wird, folgt* $w_x(x_0,t,0)=0$. *Die Einschränkung* u^{or} *der Lösung des Cauchyproblems auf den rechten oberen Quadranten erfüllt somit die Gleichung*

$$P(D)u^{or} = \frac{k}{2}\delta(x,t) - \delta_x(x)\otimes u^{or}(0,t) = \frac{k}{2}\delta(x,t) - \delta_x(x)\otimes(kR)(0,t).$$

2. *Für das gerade an der $(x = 0)$-Achse gespiegelte Viertelraumproblem mit den Anfangs- und Randwerten $v^{or}(x,0) = \frac{k}{2}\delta(x)$, $v_t^{or}(x,0) = 0$, $v_x^{or}(0,t) = 0$ setzen wir $x_0 = 0$. Die Lösung des Cauchyproblems $P(D)v = k\delta_t(x,t)$ ist dann $v = kR^1 = k\frac{d}{dt}R$. Es gilt für w aus (3.43)*

$$\frac{d}{dt}(w_x(0,t)) = (\lim_{t\searrow 0} w_x(0,t))\delta(t) + w_{xt}(0,t)H(t) = 0.$$

Die Einschränkung v^{or} der Lösung des Cauchyproblems auf den rechten oberen Quadranten erfüllt somit die Gleichung

$$P(D)v^{or} = \frac{k}{2}\delta_t(x,t) - \delta_x(x) \otimes (\frac{k}{2}\delta(t) + \tilde{v}_t^{or}(0,t)) = k(\frac{1}{2}\delta_t(x,t) - \delta_x(x) \otimes (\frac{1}{2}\delta(t) + \tilde{R}_t(0,t))),$$

wobei $\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \textit{für } t > 0, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$

Die Riemannfunktion R der oberen Halbebene und ihre t-Ableitung R^1 lassen sich für gerades q mit Hilfe von Lösungen entsprechender Goursatprobleme darstellen, vergleiche Satz 3.5.6 und Satz 3.5.10.

Sei $x_0 = 0$ und sei $q \in C^0(\mathbf{R})$ gerade. Dann ist $u = \frac{1}{2}(1 + w(x,t,0))H(x)$ mit w aus (3.43) Lösung des gemischten Problems

$$u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = 0 \qquad \text{in } 0 < x < t \tag{3.48}$$

mit charakteristischen Randwerten

$$u(x,x) = \frac{1}{2} \qquad \text{auf } x \in \mathbf{R}^{\geq 0} \tag{3.49}$$

und Randwert

$$u_x(0,t) = 0 \qquad \text{auf } t \in \mathbf{R}^{\geq 0}. \tag{3.50}$$

Es gilt außerdem $\frac{d}{dx}(u_x(x,x)) = \frac{1}{4}q(x)$ und $\frac{d}{dx}(u_t(x,x)) = -\frac{1}{4}q(x)$, vergleiche (3.19) und (3.20). Der Beweis erfolgt mit Satz 3.5.1, denn es gilt $u = \frac{1}{2}(1 + w(x,t,0))$. Es ist u bei geradem q gerade in x.

Definition 3.8.5 *Wir bezeichnen das gemischte Problem (3.48), (3.49), (3.50) als* **DP1_GEP**. *Ist $u(0,t) = f(t)$ für $t > 0$ gegeben und die Koeffizientenfunktion q nicht, so bezeichnen wir das Problem der Bestimmung von q als* **IP1_GEP**.

Sei $x_0 = 0$ und $q \in C^0(\mathbf{R}) \cap C^1(\mathbf{R}^{\geq 0})$ gerade.

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung des Goursatproblems (3.14), (3.15) gilt $u(x,t) = u(-x,t)$. Damit ist auch u_t gerade in x. Aus den Gleichungen (3.21), (3.22) und $u_{xx} = u_{tt} + q(x)u$ folgt, daß u in $t > |x|$ zweimal, aber nicht notwendig dreimal, stetig differenzierbar und in $0 < x < t$ dreimal , aber nicht notwendig viermal, stetig differenzierbar ist.

Es folgt, daß $v = \frac{1}{2}w_t(x,t,0)H(x)$ mit w_t aus (3.46) klassische Lösung des gemischten Problems

$$v_{tt} - v_{xx} + q(x)v = 0 \qquad \text{in } 0 < x < t \tag{3.51}$$

mit charakteristischen Randwerten

$$v(x,x) = -\frac{1}{4}\int_0^x q(\xi)d\xi \qquad \text{auf } x \in \mathbf{R}^{\geq 0} \tag{3.52}$$

und Randwert

$$v_x(0,t) = 0 \qquad \text{auf } t \in \mathbf{R}^{\geq 0} \tag{3.53}$$

ist. Der Beweis folgt mit Satz 3.5.10 für $c = 1$, denn es gilt $K^1 = w_t(x,t,0)$, welches mit geradem q und $x_0 = 0$ gerade ist.

Definition 3.8.6 *Wir bezeichnen das gemischte Problem (3.51), (3.52), (3.53) als* **DP2_GEP**. *Ist $v(0,t) = f(t)$ für $t > 0$ bekannt und die Koeffizientenfunktion q nicht, so bezeichnen wir das Problem der Bestimmung von q als* **IP2_GEP**.

Nach den Ergebnissen dieses Abschnitts sind die Randwerte in den Beispielen 2.6.7 und 2.6.8 mit Abbildung 2.5 gerade die Resultate der Einschränkungen zu den Lösung aus den Beispielen 2.6.5 und 2.6.6 mit Abbildung 2.4, wenn q gerade fortgesetzt wird, denn es gilt dann $u^{or} = 2R^v$ und $v^{or} = 2R^{1v}$. Probleme der Art DP1_GEP, DP2_GEP und IP1_GEP, IP2_GEP lösen wir mit Differenzenverfahren beruhend auf dem 5-Punkt Differenzenstern approximativ, siehe Kapitel 5 bzw. Kapitel 6.

3.9 Eine Basislösung der rechten Halbebene

Wir führen eine Basislösung der Wellengleichung mit Potentialterm in der rechten Halbebene ein. Sie ist darstellbar als Summe einer singulären und einer regulären Distribution, wobei der reguläre Teil ein Goursatproblem in der rechten Halbebene löst. Die Herleitung der linearen Gel'fand-Levitan-Gleichung beruht auf der Basislösung und dieser Zerlegung.

Die Riemannfunktion der Wellengleichung der rechten Halbebene ist in der folgenden Bemerkung angegeben.

Bemerkung 3.9.1 *Es ist $-\frac{1}{2}H(x-|t|)$ eine Lösung von*

$$u_{tt} - u_{xx} = \delta(x,t)$$

mit Träger im Abschluß der rechten Halbebene. Damit ist die Distribution $-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}H(x-|t|)$ eine Lösung der Gleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = \frac{d}{dx}\delta(x) \otimes \delta(t)$$

mit Träger im Abschluß der rechten Halbebene. Der Beweis erfolgt für die erste Behauptung durch Anwendung auf Testfunktionen und einfaches Nachrechnen. Aus der ersten folgt die zweite Behauptung direkt durch distributive Differentiation nach x.

Die Lösung des im folgenden Satz formulierten Goursatproblems wird bei der Darstellung der Lösung einer Wellengleichung mit Potentialterm in der rechten Halbebene nützlich sein.

Satz 3.9.2 *Sei $q \in C^1(\mathbf{R}^{\geq 0})$ und $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Das Goursatproblem*

$$K_{tt} - K_{xx} + q(x)K = 0 \qquad \text{in } x > |t| \tag{3.54}$$

mit den charakteristischen Randwerten

$$K(x,x) = K(x,-x) = \frac{1}{2c}\int_0^x q(\xi)d\xi \qquad \text{auf } x \geq 0 \tag{3.55}$$

ist in $C^2(\{(x,t)|\, x > |t|\}) \cap C^0(\{(x,t)|\, x \geq |t|\})$ eindeutig lösbar. Die Lösung K ist in $C^1(\{(x,t)|x \geq |t|\})$ und gerade im zweiten Argument.
Wir setzen K außerhalb $x \geq |t|$ identisch Null auf $\mathbf{R}^2$ fort. K ist dann eine reguläre Distribution aus $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$, die die Gleichung

$$K_{tt} - K_{xx} + q(x)K = -q(x)\frac{1}{c}\frac{d}{dx}H(x-|t|) \tag{3.56}$$

löst.

Beweis: Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Goursatproblems (3.54), (3.55) in $C^2(\{(x,t)|x > |t|\}) \cap C^0(\{(x,t)|x \geq |t|\})$ folgt nach Kamke [28] §9 Satz 1 und Satz 3. Aus dem Beweis dieses Theorems und aus der Art der Randbedingung (3.55) folgt, daß die Lösung in $C^1(\{(x,t)|x \geq |t|\})$ liegt. Die Voraussetzungen an q sind für den Beweis in Kamke notwendig. Sie gelten sowohl für q als Koeffizienten, als auch dafür, daß die charakteristischen Randwerte für $x > 0$ stetig differenzierbar und in $x = 0$ stetig sind.
Die Funktion $\tilde{K}(x,t) := K(x,-t)$ löst ebenfalls das Goursatproblem (3.54), (3.55) in $C^2(\{(x,t)|x > |t|\}) \cap C^0(\{(x,t)|x \geq |t|\})$. Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt $\tilde{K} = K$ und damit ist K gerade in t. Den Nachweis der Gültigkeit der Gleichung (3.56) führen wir durch Anwendung auf Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$. Es gilt

$$< P(D)K, \phi > = \int_0^\infty \int_{-x}^x K\phi_{tt}dtdx - \int_{-\infty}^\infty \int_{|t|}^\infty K\phi_{xx}dxdt + \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty qK\phi dxdt.$$

Eine Anwendung partieller Integration auf das erste Integral ergibt
$\int_0^\infty (K(x,x)\phi_t(x,x) - K(x,-x)\phi_t(x,-x) - K_t(x,x)\phi(x,x) + K_t(x,-x)\phi(x,-x) + \int_{-x}^x K_{tt}\phi dt)dx,$
und angewandt auf das zweite Integral ergibt unter Berücksichtigung, daß K das Goursatproblem löst,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^\infty (-K(|t|,t)\phi_x(|t|,t) + K_x(|t|,t)\phi(|t|,t) + \int_{|t|}^\infty K_{xx}\phi dt)dx \\ = \; & \int_0^\infty -K(t,t)\phi_x(t,t) + K_x(t,t)\phi(t,t)dt + \int_0^\infty -K(t,-t)\phi_x(t,-t) + K_x(t,-t)\phi(t,-t)dt \\ & + \int_{-\infty}^\infty \int_{-x}^x K_{tt}\phi dtdx + \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty qK\phi dxdt. \end{aligned}$$

Es gilt damit

$$\begin{aligned} & < P(D)K, \phi > \\ = \; & \int_0^\infty K(x,x)\tfrac{d}{dx}(\phi(x,x)) + K(x,-x)\tfrac{d}{dx}(\phi(x,-x)) - \tfrac{d}{dx}(K(x,x))\phi(x,x) - \tfrac{d}{dx}(K(x,-x))\phi(x,-x)dx \\ = \; & -2\int_0^\infty \tfrac{d}{dx}(K(x,x))\phi(x,x) + \tfrac{d}{dx}(K(x,-x))\phi(x,-x)dx - 2K(0,0)\phi(0,0) \\ = \; & -\tfrac{1}{c}\int_0^\infty q(x)(\phi(x,x) + \phi(x,-x))dx, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

□

Für die Distribution K aus Satz 3.9.2 läßt sich mit dem Charakteristikenverfahren eine Integralgleichung herleiten.

Korollar 3.9.3 *Sei $q \in C^1(\mathbf{R}^{\geq 0})$. Sei K Lösung des Goursatproblems (3.54), (3.55). Dann löst K auf $x > |t|$ die Integralgleichung*

$$K(x,t) \;=\; \frac{1}{2c}\Big(\int_0^{\frac{x-t}{2}} q(\xi)d\xi + \int_0^{\frac{t+x}{2}} q(\xi)d\xi\Big) + \int_0^{\frac{t-x}{2}} \int_0^{\frac{t+x}{2}} q(\tau-\xi)K(\tau-\xi,\tau+\xi)d\tau d\xi. \quad (3.57)$$

Umgekehrt ist jede Lösung $K \in C^2(\{(x,t)|x > |t|\}) \cap C^0(\{(x,t)|x \geq |t|\})$ der Integralgleichung (3.57) eine Lösung des Goursatproblems (3.54), (3.55).

Beweis: Die Herleitung der Integralgleichung (3.57) erfolgt mit dem Charakteristikenverfahren auf dem Bereich $x > |t|$. Anwendung des Differentialoperators aus (3.54) auf eine Lösung der Integralgleichung (3.57) und Grenzwertbildung gegen den Rand $x > |t|$ beweisen die Umkehrung.

□

Eine Lösung der Integralgleichung (3.57) für nur stetiges q ist nicht notwendig zweimal stetig differenzierbar.

K tritt bei dem inversen Spektralproblem als orthogonalisierender Kern auf. Gel'fand und Levitan [20] haben in ihrer Problemstellung bereits eine Grenzwertbetrachtung eingeführt, die für sie eine Lösung des inversen Problems mit ihrem Verfahren auch für stetiges q erlaubt. Diese Betrachtung führen wir ebenfalls durch.

Korollar 3.9.4 *Sei $q \in C^0(\mathbf{R}^{\geq 0})$. Sei $\{q^n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset C^1(\mathbf{R}^{\geq 0})$ eine Folge, die gleichmäßig gegen q konvergiert, und seien die Lösungen des Goursatproblems (3.54), (3.55) zu q^n mit K^n bezeichnet. Dann existiert ein $K \in C^1(\{(x,t)|\ x \geq |t|\})$, gegen das die Folge $\{K^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ in $x > |t|$ lokal gleichmäßig konvergiert. Die auf $x < |t|$ mit Null fortgesetzte Funktion K löst die distributive Gleichung (3.56).*

Beweis: Mit dem Charakteristikenverfahren können wir analog zu dem Problem auf der oberen Halbebene für jede Funktion K^n auf $x > |t|$ eine Integralgleichung herleiten. Diese Integralgleichung ist für $q \in C^0(\mathbf{R}^{\geq 0})$ im Raum der auf $x > |t|$ stetigen Funktionen eindeutig lösbar, und die Lösung liegt in $C^1(\{(x,t)|\ x \geq |t|\})$. Die Lösung ist in der Maximumnorm lokal stetig abhängig von den Koeffizienten. Daraus folgt die lokal gleichmäßige Konvergenz $K^n \to K$, wobei K die Integralgleichung mit q löst. Es bleibt zu zeigen, daß K Gleichung (3.56) löst. Es gilt

$$K^n_{tt} - K^n_{xx} + q^n(x)K^n = -\frac{1}{c}q^n(x)\frac{d}{dx}H(x-|t|).$$

Anwendung auf eine Testfunktion $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ ergibt

$$< K^n, \phi_{tt} - \phi_{xx} > + < q^n(x)K^n, \phi > = \ -\frac{1}{c}\int_0^\infty q^n(x)(\phi(x,x) + \phi(x,-x))dx.$$

Die auftretenden Distributionen der linken Seite sind alle regulär, und K^n konvergiert lokal gleichmäßig gegen K. Da $q^n \to q$ in C^0, folgt

$$< K, \phi_{tt} - \phi_{xx} + q(x)\phi > = \ -\frac{1}{c}\int_0^\infty q(x)(\phi(x,x) + \phi(x,-x))dx.$$

Dies war zu zeigen.

□

Es folgt

Satz 3.9.5 *Sei $q \in C^1(\mathbf{R}^{\geq 0})$. Sei K die mit Null fortgesetzte Lösung des Goursatproblems (3.54), (3.55) mit $c \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$. Dann ist die Distribution*

$$U = -\frac{1}{2}(\frac{d}{dx}H(x-|t|) + cK) \tag{3.58}$$

eine Lösung der Gleichung

$$U_{tt} - U_{xx} + q(x)U = \frac{d}{dx}\delta(x,t). \tag{3.59}$$

Der Träger von U liegt im Abschluß der rechten Halbebene.

Beweis: Einsetzen der Darstellung (3.58) in die linke Seite der Gleichung (3.59) liefert mit den Ergebnissen aus Bemerkung 3.9.1 und mit (3.56) die gewünschte Gleichung.

□

Dieser Satz gilt für $q \in C^0(\mathbf{R}^{\geq 0})$ im Sinne von Korollar 3.9.4.

Bei der Herleitung von (3.58) und dem Goursatproblem (3.54), (3.55) sind wir von einer Entwicklung in Singularitätenfunktionen ausgegangen. Der erste Term folgt aus der Lösung der Wellengleichung, vergleiche Bemerkung 3.9.1, und die Hinzunahme eines weiteren Terms liefert gerade das Goursatproblem (3.54), (3.55).

Wir nennen die Distribution U aus (3.58) eine **Basislösung** der rechten Halbebene. Die Problemformulierung (3.59) auf der rechten Halbebene entspricht der Cauchyproblemformulierung

$$U_{tt} - U_{xx} + q(x)U = 0,$$

$$U(0,t) = -\delta(t),\ \ U_x(0,t) = 0$$

auf der rechten Halbebene.

Kapitel 4

Die direkten und die inversen Probleme

Wir betrachten die beiden Probleme DP1_HS und IP1_HS auf der Menge $\Omega = \{(x,t) \in \mathbf{R}^2 |\, 0 < x < 1,\ 0 < t < 2-x\}$. Dies ist, wie wir sehen werden, hinreichend zur Lösung des inversen Problems. Auf einem Teilgebiet von Ω formulieren wir eine Integralgleichung und ein gemischtes Problem, deren Lösungen in den angegebenen Räumen eindeutig existieren und übereinstimmen, und die auf $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x,t)|0 \leq x \leq 1, t \geq 2-x\}$ eine distributive Lösung von DP1_HS liefern. Aus der Integralgleichung leiten wir ein System von Integralgleichungen her, welches die Grundlage für eine theoretische Behandlung des inversen Problems IP1_HS bildet. Es folgt unter den unten angegebenen Voraussetzungen die lokale Existenz und die globale Eindeutigkeit einer Lösung von IP1_HS. Der vorletzte Satz dieses Kapitels enthält eine Stabilitätsanalyse zum inversen Problem mit dem Resultat, daß sich bei fehlerbehaftetem Randwert $u(0,t)$ der Fehler in der Lösung des inversen Problems durch die erste und zweite Ableitung des Fehlers im Randwert abschätzen läßt. Im darauf folgenden Satz geben wir für IP2_HS eine analoge Abschätzung an.

4.1 Zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines direkten Problems

In Abschnitt 3.5 zur Riemannfunktion der oberen Halbebene haben wir bereits gesehen, wie eine Integralgleichung und ein Goursatproblem zur Lösung des distributiven Problems herangezogen werden können. Wir zeigen in diesem Abschnitt, daß für das direkte distributive Problem DP1_HS auf Ω eine analoge Beziehung zu einer Integralgleichung und einem gemischten Problem existiert. Für letztere können Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung mit klassischen Methoden gezeigt werden. Da sich für das inverse Problem die Betrachtung auf $\{(x,t)|0 \leq x \leq 1, x \leq t \leq 2-x\}$ als hinreichend erweisen wird, schränken wir uns hier bereits darauf ein.

Es seien $h_1, h_2 \in \mathbf{R}$ und $q \in C^0([0,1])$ gegeben. Wir betrachten das direkte Problem getrennt auf den beiden Gebieten

$$\Omega_1 = \{(x,t)|0 < x < 1, 0 < t < x\} \quad \text{und} \quad \Omega_2 = \{(x,t)|0 < x < 1, x < t < 2-x\}.$$

Satz 4.1.1 *Sei $h_1 \in \mathbf{R}$, $q \in C^0([0,1])$. Dann hat die Integralgleichung*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{k}{2}e^{h_1(x-t)} - \int_0^{t-x} e^{h_1(\tau-t+x)} \int_0^{\frac{\tau}{2}} q(\xi)u(\xi,\tau-\xi)d\xi d\tau \\ &\quad - \int_{t-x}^{t} \int_{\tau-t+x}^{\tau-\frac{t-x}{2}} q(\xi)u(\xi,2\tau-\xi-t+x)d\xi d\tau, \end{aligned} \tag{4.1}$$

$(x,t) \in \Omega_2$, in $C^0(\Omega_2)$ eine eindeutige Lösung. Diese ist auf Ω_2 zweimal stetig differenzierbar und sowohl u als auch die ersten Ableitungen von u sind auf $\partial\Omega_2$ stetig fortsetzbar. Es löst u das gemischte

Problem

$$P(D)u = 0 \qquad \textit{in } \Omega_2$$

mit den charakteristischen Randwerten

$$u(x,x) = \frac{k}{2} \qquad \textit{auf } x \in [0,1]$$

und den Randwerten

$$(u_x - h_1 u)(0,t) = 0 \qquad \textit{auf } t \in [0,2].$$

Bemerkung 4.1.2

1. *Die Integralgleichung (4.1) ist Romanov, [42] Chapt. 2 Sect. 2.5, bekannt. Wir leiten sie in Satz 4.1.7 explizit und auf andere Art als Romanov her, indem wir die δ-Distribution in der distributiven Formulierung durch klassische Anfangswerte approximieren.*

2. *Es folgt* $\lim_{\epsilon_i \searrow 0} u(x-\epsilon_1, x+\epsilon_2) = \frac{k}{2}$ *und* $h_1 = -\lim_{t\searrow 0} \frac{2}{k} u_t(0,t)$.

3. *Seien für* $(x,t) \in \Omega_2$ $D_1(x,t)$ *und* $D_2(x,t)$ *definiert als*

$$D_1(x,t) = \{(\xi,\tau) | 0 < \xi < \frac{t-x}{2}, \xi < \tau < t-x-\xi\},$$

$$D_2(x,t) = \{(\xi,\tau) | \tau > \xi > 0,\ \tau < \xi + t - x,\ \tau < t + x - \xi,\ \tau > t - x - \xi\},$$

siehe Abbildung 4.1. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\int_0^{t-x} \int_0^{\frac{\tau}{2}} q(\xi) u(\xi, \tau-\xi) d\xi d\tau| &= |\int\int_{D_1(x,t)} q(\xi) u(\xi,\eta) d\xi d\eta| \\ |\int_{t-x}^{t} \int_{\tau-t+x}^{\tau-\frac{t-x}{2}} q(\xi) u(\xi, 2\tau-\xi-t+x) d\xi d\tau| &= |\tfrac{1}{2} \int\int_{D_2(x,t)} q(\xi) u(\xi,\eta) d\xi d\eta|. \end{aligned}$$

Beweis des Satzes: Das Verfahren zum Beweis der Existenz und Eindeutigkeit beruht auf der Methode der sukzessiven Approximation. Romanov [42] Chapt. 2 Sect. 2.3 wendet sie auf die d'Alembertsche Formel an, um die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Cauchyproblems mit $u(x,0) = 0$ und $u_t(x,0) = \delta(x)$ zu zeigen. Dies entspricht dem Vorgehen im Beweis der Sätze 1 und 3 zur Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Goursatproblems in Kamke [28] §9.

Mit $u_0(x,t) = \frac{k}{2} e^{h_1(x-t)}$ definieren wir für $n \geq 1$ und $(x,t) \in \Omega_2$:

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= -\int_0^{t-x} e^{h_1(\tau+x-t)} \int_0^{\frac{\tau}{2}} q(\xi) u_{n-1}(\xi, \tau-\xi) d\xi d\tau \\ &\quad - \int_{t-x}^{t} \int_{\tau-t+x}^{\tau-\frac{t-x}{2}} q(\xi) u_{n-1}(\xi, 2\tau-\xi-t+x) d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Wegen $u_0 \in C^0(\overline{\Omega}_2)$ gilt mit $q \in C^0([0,1])$, daß $u_n \in C^0(\overline{\Omega}_2)$. Es ist u_n damit auf Ω_2 beschränkt.

Wir reduzieren durch Maximumbildung die Integralgleichung um eine Variable. Sei $(x,t) \in \Omega_2$ und $I_{t_1}(x,t) = [\max(0, t_1 - (t-x)), \min(t_1, -t_1 + t + x)]$, siehe Abbildung 4.2. Wir definieren für $0 \leq t_1 \leq t$

$$U_n(t_1) = \max_{x_1 \in I_{t_1}(x,t)} |u_n(x_1,t_1)|$$

und für $l \in \{0,1,2\}$

$$\|u\|_l = \sum_{|\alpha| \leq l} \max_{(x_1,t_1) \in D_1(x,t) \cup D_2(x,t)} |D^\alpha u(x_1,t_1)|, \tag{4.2}$$

mit $D_1(x,t)$ und $D_2(x,t)$ aus Bemerkung 4.1.2. Es folgt für ein $\overline{x} \in I_{t_1}(x,t)$, siehe Abbildung 4.2,

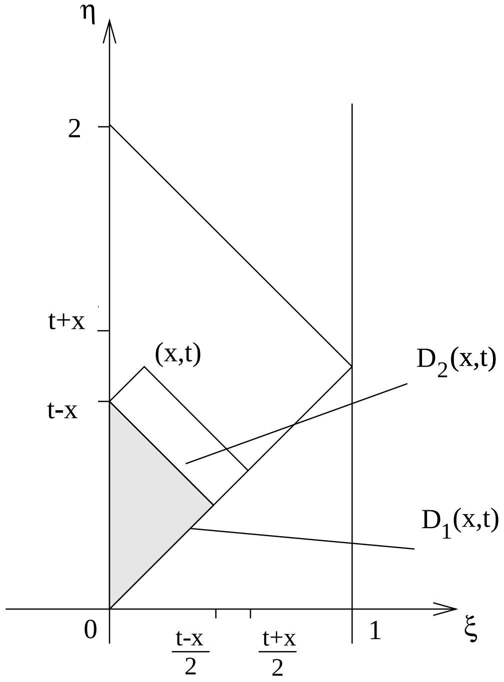

Abbildung 4.1: Integrationsgebiete zum Beweis des Satzes 4.1.1.

$$\begin{aligned}
U_n(t_1) &= \Big| -\int_0^{t_1-\overline{x}} e^{h_1(\tau-t_1+\overline{x})} \int_0^{\frac{\tau}{2}} q(\xi)u_{n-1}(\xi,\tau-\xi)d\xi d\tau \\
&\quad -\int_{t_1-\overline{x}}^{t_1} \int_{\tau-t_1+\overline{x}}^{\tau-\frac{t_1-\overline{x}}{2}} q(\xi)u_{n-1}(\xi,2\tau-\xi-t_1+\overline{x})d\xi d\tau\Big| \\
&\leq C_1\|q\|_\infty \int\int_{D_1(\overline{x},t_1)\cup D_2(\overline{x},t_1)} |u_{n-1}(\xi,\eta)|d\xi d\eta \\
&= C_1\|q\|_\infty \int_0^{t_1}\int_{I_\eta(\overline{x},t_1)} |u_{n-1}(\xi,\eta)|d\xi d\eta \\
&\leq C_1\|q\|_\infty \int_0^{t_1} U_{n-1}(\eta)|I_\eta(\overline{x},t_1)|d\eta, \qquad \text{da } I_\eta(\overline{x},t_1)\subset I_\eta(x,t) \\
&\leq C_1\|q\|_\infty \int_0^{t_1} \eta U_{n-1}(\eta)d\eta.
\end{aligned}$$

Induktiv folgt

$$U_n(t_1) \leq (C_1\|q\|_\infty)^n \frac{t_1^{2n}}{2^n n!}\|u_0\|_\infty \qquad \text{für } n\geq 1.$$

Es gilt $C_1 \leq 2$. Mit dem Ansatz $u(x_1,t_1) = \sum_{n=0}^\infty u_n(x_1,t_1)$ haben wir eine auf $D_1(x,t)\cup D_2(x,t)$ gleichmäßig konvergente Reihe, da sie durch die Reihe $\|u_0\|_\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{(\|q\|_\infty t^2)^n}{n!}$ majorisiert wird. Die so definierte Funktion erfüllt die Integralgleichung. Sie ist die eindeutige Lösung der Integralgleichung in $C^0(D_1(x,t)\cup D_2(x,t))$, wie wir im folgenden zeigen werden.
Sei $u_1 \in C^0(D_1(x,t)\cup D_2(x,t))$ Lösung der homogenen Integralgleichung

$$\begin{aligned}
u_1(x,t) &= -\int_0^{t-x} e^{h_1(\tau+x-t)} \int_0^{\frac{\tau}{2}} q(\xi)u_1(\xi,\tau-\xi)d\xi d\tau \\
&\quad -\int_{t-x}^{t}\int_{\tau-t+x}^{\tau-\frac{t-x}{2}} q(\xi)u_1(\xi,2\tau-\xi-t+x)d\xi d\tau.
\end{aligned}$$

Sei $U(t_1) = \max_{x_1\in I_{t_1}(x,t)} |u_1(x_1,t_1)|$. Dann folgt

$$U(t_1) \leq \|q\|_\infty c_1 \int_0^{t_1} \eta U(\eta)d\eta$$

$$\Rightarrow t_1U(t_1) \leq 2\|q\|_\infty c_1 \int_0^{t_1} \eta U(\eta)d\eta \qquad \text{für } 0\leq t_1\leq 1.$$

Nach dem Lemma von Gronwall hat diese Ungleichung nur die Lösung $U\equiv 0$, somit gilt $u_1(x_1,t_1) = 0\ \forall(x_1,t_1)\in D_1(x,t)\cup D_2(x,t)$ und die Lösung der Gleichung (4.1) ist eindeutig in $C^0(D_1(x,t)\cup D_2(x,t))\,\forall(x,t)\in\Omega_2$, damit in $C^0(\Omega_2)$.

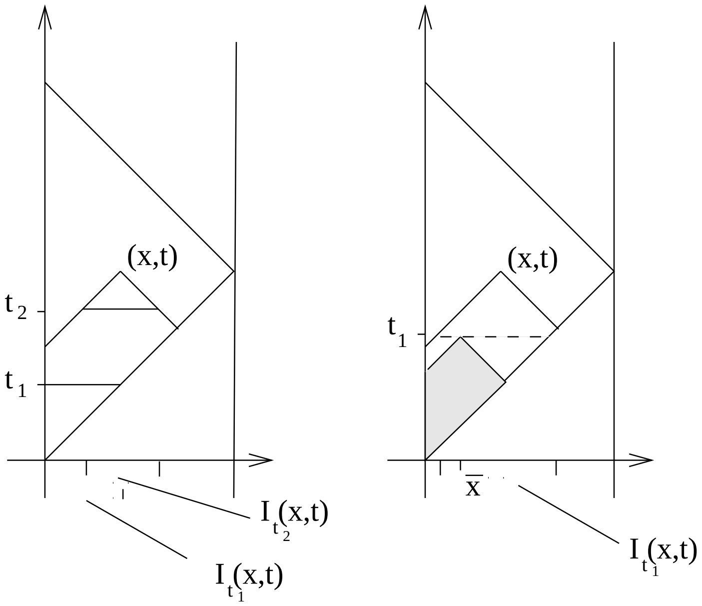

Abbildung 4.2: Intervalldefinitionen zum Beweis des Satzes 4.1.1.

Es lassen sich durch Differentiation Integralgleichungen für die Ableitungen von u herleiten. Diese zeigen, daß u auf Ω_2 mindestens zweimal stetig differenzierbar ist. Für spätere Anwendungen seien die Resultate hier angegeben. Es gilt

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \tfrac{k}{2}e^{h_1(x-t)} - \int_0^{t-x} e^{h_1(\tau-t+x)} \int_0^{\frac{\tau}{2}} q(\xi)u(\xi,\tau-\xi)d\xi d\tau \\ &\quad -\tfrac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x}\int_{\frac{1}{2}(\tau_1-t+x)}^{\frac{1}{2}\tau_1} q(\xi)u(\xi,\tau_1-\xi)d\xi d\tau_1. \end{aligned}$$

Die rechte Seite der Gleichung (4.1) ist stetig differenzierbar und es folgt

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= -\tfrac{k}{2}h_1 e^{h_1(x-t)} + h_1\int_0^{t-x} e^{h_1(\tau-t+x)} \int_0^{\frac{\tau}{2}} q(\xi)u(\xi,\tau-\xi)d\xi d\tau \\ &\quad -\int_0^{\frac{t-x}{2}} q(\xi)u(\xi,t-x-\xi)d\xi \\ &\quad -\tfrac{1}{2}\Big(\int_x^{\frac{t+x}{2}} q(\xi)u(\xi,t+x-\xi)d\xi - \int_0^{\frac{t-x}{2}} q(\xi)u(\xi,t-x-\xi)d\xi \\ &\quad +\tfrac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} q(\tfrac{\tau_1-t+x}{2})u(\tfrac{\tau_1-t+x}{2},\tau_1-\tfrac{\tau_1-t+x}{2})d\tau_1\Big). \end{aligned}$$

Damit

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= -\frac{k}{2}h_1 e^{h_1(x-t)} + h_1\int_0^{t-x} e^{h_1(\tau-t+x)} \int_0^{\frac{\tau}{2}} q(\xi)u(\xi,\tau-\xi)d\xi d\tau \\ &\quad -\frac{1}{2}\Big(\int_x^{\frac{t+x}{2}} q(\xi)u(\xi,t+x-\xi)d\xi + \int_0^{\frac{t-x}{2}} q(\xi)u(\xi,t-x-\xi)d\xi \\ &\quad +\int_0^x q(\tau)u(\tau,\tau+t-x)d\tau\Big). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Für die x-Ableitung gilt

$$\begin{aligned} u_x(x,t) &= \tfrac{k}{2}h_1 e^{h_1(x-t)} - h_1\int_0^{t-x} e^{h_1(\tau-t+x)} \int_0^{\frac{\tau}{2}} q(\xi)u(\xi,\tau-\xi)d\xi d\tau + \int_0^{\frac{t-x}{2}} q(\xi)u(\xi,t-x-\xi)d\xi \\ &\quad -\tfrac{1}{2}\Big(\int_x^{\frac{t+x}{2}} q(\xi)u(\xi,t+x-\xi)d\xi + \int_0^{\frac{t-x}{2}} q(\xi)u(\xi,t-x-\xi)d\xi \\ &\quad -\tfrac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} q(\tfrac{\tau_1-t+x}{2})u(\tfrac{\tau_1-t+x}{2},\tau_1-\tfrac{\tau_1-t+x}{2})d\tau_1\Big) \\ &= \tfrac{k}{2}h_1 e^{h_1(x-t)} - h_1\int_0^{t-x} e^{h_1(\tau-t+x)} \int_0^{\frac{\tau}{2}} q(\xi)u(\xi,\tau-\xi)d\xi d\tau \\ &\quad -\tfrac{1}{2}\Big(\int_x^{\frac{t+x}{2}} q(\xi)u(\xi,t+x-\xi)d\xi - \int_0^{\frac{t-x}{2}} q(\xi)u(\xi,t-x-\xi)d\xi - \int_0^x q(\tau)u(\tau,\tau+t-x)d\tau\Big). \end{aligned}$$

Die rechten Seiten der Gleichungen für u_x und u_t sind auf Ω_2 stetig und stetig differenzierbar. Es folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned}
u_{tt}(x,t) &= \frac{k}{2}h_1^2 e^{h_1(x-t)} - h_1^2\int_0^{t-x} e^{h_1(\tau-t+x)}\int_0^{\frac{\tau}{2}} q(\xi)u(\xi,\tau-\xi)d\xi d\tau \\
&\quad +h_1\int_0^{\frac{t-x}{2}} q(\xi)u(\xi,t-x-\xi)d\xi \\
&\quad -\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}q(\frac{t+x}{2})u(\frac{t+x}{2},\frac{t+x}{2}) + \int_x^{\frac{t+x}{2}} q(\xi)u_t(\xi,t+x-\xi)d\xi \\
&\quad +\frac{1}{2}q(\frac{t-x}{2})u(\frac{t-x}{2},\frac{t-x}{2}) + \int_0^{\frac{t-x}{2}} q(\xi)u_t(\xi,t-x-\xi)d\xi \\
&\quad +\int_0^x q(\tau)u_t(\tau,\tau+t-x)d\tau\Big), \qquad (4.4)\\
u_{xt}(x,t) &= -\frac{k}{2}h_1^2 e^{h_1(x-t)} + h_1^2\int_0^{t-x} e^{h_1(\tau-t+x)}\int_0^{\frac{\tau}{2}} q(\xi)u(\xi,\tau-\xi)d\xi d\tau \\
&\quad -h_1\int_0^{\frac{t-x}{2}} q(\xi)u(\xi,t-x-\xi)d\xi \\
&\quad -\frac{1}{4}q(\frac{t+x}{2})u(\frac{t+x}{2},\frac{t+x}{2}) + \frac{1}{2}q(x)u(x,t) - \frac{1}{2}\int_x^{\frac{t+x}{2}} q(\xi)u_t(\xi,t+x-\xi)d\xi \\
&\quad +\frac{1}{4}q(\frac{t-x}{2})u(\frac{t-x}{2},\frac{t-x}{2}) + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{t-x}{2}} q(\xi)u_t(\xi,t-x-\xi)d\xi \\
&\quad -\frac{1}{2}q(x)u(x,t) + \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)u_t(\tau,\tau+t-x)d\tau, \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{xx}(x,t) &= \tfrac{k}{2}h_1^2 e^{h_1(x-t)} - h_1^2\int_0^{t-x} e^{h_1(\tau-t+x)}\int_0^{\frac{\tau}{2}} q(\xi)u(\xi,\tau-\xi)d\xi d\tau \\
&\quad +h_1\int_0^{\frac{t-x}{2}} q(\xi)u(\xi,t-x-\xi)d\xi \\
&\quad -\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}q(\tfrac{t+x}{2})u(\tfrac{t+x}{2},\tfrac{t+x}{2}) - q(x)u(x,t) \\
&\quad +\int_x^{\frac{t+x}{2}} q(\xi)u_t(\xi,t+x-\xi)d\xi + \tfrac{1}{2}q(\tfrac{t-x}{2})u(\tfrac{t-x}{2},\tfrac{t-x}{2}) + \int_0^{\frac{t-x}{2}} q(\xi)u_t(\xi,t-x-\xi)d\xi \\
&\quad -q(x)u(x,t) + \int_0^x q(\tau)u_t(\tau,\tau+t-x)d\tau).
\end{aligned}$$

Somit existieren die zweiten partiellen Ableitungen nach x und t, und sie sind stetig auf Ω_2.

Es ist die Differentialgleichung in Ω_2 erfüllt, $u_{tt} - u_{xx} = -qu$. Sie gilt auch an $x = t$, wie durch direktes Einsetzen zu sehen ist. Der charakteristische Randwert $u(x,x) = \frac{k}{2}$ wird als Innenlimes aus Ω_2 angenommen und es gilt

$$u_x(0,t) = \frac{k}{2}h_1 e^{-h_1 t} - h_1\int_0^t e^{h_1(\tau-t)}\int_0^{\frac{\tau}{2}} q(\xi)u(\xi,\tau-\xi)d\xi d\tau = h_1 u(0,t)$$

für $t \geq 0$ ebenfalls als Innenlimes aus Ω_2. Damit löst u das gemischte Problem, und der Satz ist bewiesen.

□

Bemerkung 4.1.3

1. *Es folgt aus Gleichung (4.1), daß mit $q \in C^m([0,1])$ $u \in C^{m+2}(\overline{\Omega}_2)$ gilt. Die im Beweis zu Satz 4.1.1 angegebenen Ableitungen von u verdeutlichen den induktiven Ansatz zum Beweis dieser Aussage.*

2. Die Ausführungen im Beweis des obigen Satzes liefern für $(x,t) \in \Omega_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ die Abschätzung

$$\|u\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty e^{\|q\|_\infty t^2}. \tag{4.6}$$

Als Umkehrung zur Aussage von Satz 4.1.1 erhalten wir den folgenden

Satz 4.1.4 *Sei $h_1 \in \mathbf{R}$ und $q \in C^0([0,1])$. Sei $u \in C^2(\Omega_2) \cap C^1(\overline{\Omega}_2)$ eine Lösung des gemischten Problems*

$$P(D)u = 0 \qquad \text{in } \Omega_2$$

mit den charakteristischen Randwerten

$$u(x,x) = \frac{k}{2} \qquad \text{auf } x \in [0,1]$$

und den Randwerten

$$(u_x - h_1 u)(0,t) = 0 \qquad \text{auf } t \in [0,2].$$

Dann ist u eine Lösung der Integralgleichung (4.1).

Beweis: Wir leiten die Integralgleichung (4.1) mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens her. Es gilt

$$\begin{aligned}
& \int_0^x \int_0^{\frac{t-x}{2}} q(y+z)u(y+z,t-x+y-z)dzdy \\
= \;& \int_0^x \int_y^{y+\frac{t-x}{2}} q(\xi)u(\xi,-\xi+t-x+2y)d\xi dy, \qquad (\xi = y+z) \\
= \;& \int_{t-x}^t \int_{\tau-t+x}^{\tau-\frac{t-x}{2}} q(\xi)u(\xi,2\tau-\xi-t+x)d\xi d\tau, \qquad (\tau = y+t-x).
\end{aligned}$$

Somit folgt, wobei für die Integration über $D_2(x,t)$ die Integrationsrichtungen gemäß der rechten Seite der ersten Gleichung festgelegt seien,

$$\begin{aligned}
& -\tfrac{1}{2}\int\int_{D_2(x,t)} qud\tau d\xi \\
= \;& -\int_0^x \int_0^{\frac{t-x}{2}} q(\xi+\tau)u(\xi+\tau,t-x+\xi-\tau)d\tau d\xi \\
= \;& \int_0^x \int_0^{\frac{t-x}{2}} (\tfrac{\partial}{\partial t} - \tfrac{\partial}{\partial x})(\tfrac{\partial}{\partial t} + \tfrac{\partial}{\partial x})u(\xi+\tau,t-x+\xi-\tau)d\tau d\xi \\
= \;& \int_0^x (\tfrac{\partial}{\partial t} + \tfrac{\partial}{\partial x})u(\xi+\tfrac{t-x}{2},\xi+\tfrac{t-x}{2})d\xi + \int_0^x (\tfrac{\partial}{\partial t} + \tfrac{\partial}{\partial x})u(\xi,t-x+\xi)d\xi \\
= \;& u(x,t) - u(0,t-x).
\end{aligned}$$

Es gilt

$$2\int_0^{\frac{t-x}{2}} e^{h_1(2\tau-t+x)} \int_0^\tau q(\xi)u(\xi,2\tau-\xi)d\xi d\tau = \int_0^{t-x} e^{h_1(\tau-t+x)} \int_0^{\frac{\tau}{2}} q(\xi)u(\xi,\tau-\xi)d\xi dy.$$

Damit gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned}
& -\int_0^{\frac{t-x}{2}} e^{h_1(2\tau-t+x)} \int_0^\tau q(\xi)u(\xi,2\tau-\xi)d\xi d\tau \\
= \;& \int_0^{\frac{t-x}{2}} e^{h_1(2\tau-t+x)} \int_0^\tau (\tfrac{d}{dt} + \tfrac{d}{dx})(\tfrac{d}{dt} - \tfrac{d}{dx})u(\xi,2\tau-\xi)d\xi d\tau \\
= \;& -\int_0^{\frac{t-x}{2}} e^{h_1(2\tau-t+x)}(\tfrac{d}{dt} + \tfrac{d}{dx})(u(\tau,\tau) - u(0,2\tau))d\tau \\
= \;& \int_0^{\frac{t-x}{2}} e^{h_1(2\tau-t+x)}(u_x(0,2\tau) + \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{d\tau}(u(0,2\tau)))d\tau \\
= \;& \int_0^{\frac{t-x}{2}} e^{h_1(2\tau-t+x)}(h_1 u(0,2\tau) + \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{d\tau}u(0,2\tau))d\tau \\
= \;& \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{t-x}{2}} \tfrac{d}{d\tau}(e^{h_1(2\tau-t+x)}u(0,2\tau))d\tau \\
= \;& \tfrac{1}{2}(u(0,t-x) - e^{h_1(x-t)}u(0,0)).
\end{aligned}$$

Es gilt $\lim_{\epsilon\searrow 0} u(0,2\epsilon) = \frac{k}{2}$ und $\lim_{\epsilon\searrow 0} |\int_\epsilon^{\frac{t-x}{2}} e^{h_1(2\tau-t+x)} \int_0^\tau q(\xi)u(\xi,2\tau-\xi)d\xi d\tau| = |\frac{1}{2}\int\int_{D_1(x,t)} qud\xi d\tau|$. Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u(0,t-x) - \tfrac{1}{2}\int\int_{D_2(x,t)} qud\tau d\xi \\ &= \tfrac{k}{2}e^{h_1(x-t)} - \int_0^{t-x} e^{h_1(\tau-t+x)}\int_0^{\frac{\tau}{2}} q(\xi)u(\xi,\tau-\xi)d\xi d\tau \\ &\quad -\int_0^x \int_0^{\frac{t-x}{2}} q(\xi+\tau)u(\xi+\tau,t-x+\xi-\tau)d\tau d\xi \end{aligned}$$

Dies ist die Integralgleichung (4.1) für u.

□

Mit der Lösung des gemischten Problems aus Satz 4.1.4 können wir eine distributive Problemformulierung verbinden.

Satz 4.1.5 *Sei $h_1 \in \mathbf{R}$ und $q \in C^0([0,1])$. Sei die Lösung u der Integralgleichung (4.1) auf $\partial\Omega_2$ stetig fortgesetzt und außerhalb $\overline{\Omega}_2$ durch 0 auf ganz $\mathbf{R}^2$ erweitert. Dann ist u eine reguläre Distribution, die auf $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x,t)|0 \le x \le 1, t \ge 2-x\}$ die Gleichung (2.27) löst.*

Beweis: Es ist zu zeigen, daß die Gleichung (2.27) für alle Testfunktionen ϕ aus $C_0^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus \{(x,t)|0 \le x \le 1, t \ge 2-x\})$ gilt. Der Beweis erfolgt direkt durch partielle Integration. Dabei nutzen wir die Darstellungen der Ableitungen von u aus dem Beweis des Satzes 4.1.1. Es gilt

$$< P(D)u, \phi > = \int_{\Omega_2} u(\phi_{tt} - \phi_{xx} + q(x)\phi)dxdt.$$

Auf die Summanden der rechten Seite ist partielle Integration anwendbar.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} u\phi_{tt}dtdx &= \int_0^1\int_x^{2-x} u\phi_{tt}dtdx = \int_0^1 u\phi_t|_x^{2-x} - u_t\phi|_x^{2-x} + \int_x^{2-x} u_{tt}\phi dtdx \\ = \int_{\Omega_2} u_{tt}\phi dtdx &- \int_0^1 (u\phi_t)(x,x) - (u_t\phi)(x,x)dx. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt, weil die Menge $\{(x,2-x)|0 \le x \le 1\}$ nicht im Träger von ϕ liegt. Für die Ableitung nach x folgt

$$\int_{\Omega_2} u\phi_{xx}dxdt = \int_{\Omega_2} u_{xx}\phi dxdt - \int_0^2 (u\phi_x)(0,t) - (u_x\phi)(0,t)dt + \int_0^1 (u\phi_x)(t,t) - (u_x\phi)(t,t)dt.$$

Der Beweis des Satzes 4.1.1 zeigt, daß auf Ω_2 die Gleichung $u_{tt} - u_{xx} = -q(x)u$ gilt und die auftretenden Funktionen auf $\partial\Omega_2$ stetig fortsetzbar sind. Mit den Gleichungen

$$-\int_0^1 u(x,x)\frac{d}{dx}(\phi(x,x))dx = -\frac{k}{2}(\phi(1,1) - \phi(0,0)) = \frac{k}{2} < \delta(x,t), \phi >,$$

da $\phi(1,1) = 0$, und

$$\int_0^1 \frac{d}{dx}(u(x,x))\phi(x,x)dx = 0$$

folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} u(\phi_{tt} - \phi_{xx} + q(x)\phi)dxdt &= < \tfrac{k}{2}\delta(x,t) - \tfrac{d}{dx}\delta(x) \otimes \chi_{[0,2]}(t)u(0,t) - \delta(x) \otimes \chi_{[0,2]}(t)u_x(0,t), \phi > \\ &= < \tfrac{k}{2}\delta(x,t) - \tfrac{d}{dx}\delta(x) \otimes u(0,t) - \delta(x) \otimes u_x(0,t), \phi > . \end{aligned}$$

Aus der Integralgleichung für u_x aus dem Beweis des Satzes 4.1.1 folgt $u_x(0,t) = h_1 u(0,t)$. Damit gilt distributiv auf $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x,t)|0 \le x \le 1, t \ge 2-x\}$

$$P(D)u = \frac{k}{2}\delta(x,t) - \frac{d}{dx}\delta(x) \otimes u(0,t) - \delta(x) \otimes h_1 u(0,t).$$

Dies ist auf dem betrachteten Gebiet die gesuchte Gleichung.

□

Es folgt aus den vorigen Sätzen auch eine Aussage zu DP2_HS.

Bemerkung 4.1.6 *Eine Lösung des Problems DP1_HS liefert durch distributive Differentiation nach t eine Lösung des Problems DP2_HS.*
Sei $\underline{u_t}$ *auf* $\overline{\Omega}_2$ *gleich der auf* $\partial\Omega_2$ *stetig fortgesetzten t-Ableitung der Lösung u aus Satz 4.1.1 und auf* $\mathbf{R}\setminus\overline{\Omega}_2$ *gleich 0. Sei u aus Satz 4.1.5 und sei* $H(x)H(1-x)\delta(x-t)$ *definiert durch* $< H(x)H(1-x)\delta(x-t), \phi(x,t) > = \int_0^1 \phi(x,x)dx,\ \forall\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$. *Dann gilt* $\frac{d}{dt}u = \frac{k}{2}H(x)H(1-x)\delta(x-t) + u_t$ *auf* $\mathbf{R}^2\setminus\{(x,t)|0\le x\le 1, t\ge 2-x\}$. $v=\frac{d}{dt}u$ *ist auf* Ω_2 *für* $q\in C^1([0,1])$ *Lösung des gemischten Problems*

$$P(D)v = 0 \qquad \text{in } \Omega_2,$$

$$v(x,x) = -\frac{k}{2}h_1 - \frac{k}{4}\int_0^x q(\xi)d\xi \qquad \text{auf } x\in[0,1],$$

$$(v_x - h_1 v)(0,t) = 0 \qquad \text{auf } t\in[0,2]$$

und es gilt $v\in C^2(\Omega_2)\cap C^1(\overline{\Omega}_2)$.

Die Sätze 4.1.1 und 4.1.5 zeigen, daß mit einer Lösung der Integralgleichung (4.1) eine Lösung des Problems (2.27) angegeben werden kann.

Für $h_1 = 0$ folgt die Integralgleichung (4.1) aus der Gleichung (3.16) mit in x geradem q und u. Für $h_1 \neq 0$ folgt sie aus den Integralgleichungen für die Lösungen klassischer Probleme, in denen die δ-Distribution in den Anfangswerten durch C_0^∞-Funktionen approximiert wird. Es gilt dazu der folgende Satz.

Satz 4.1.7 *Seien* $h_1, h_2 \in \mathbf{R}$ *und* $k\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$. *Sei für jedes* $m\in\mathbf{N}$ *das klassische Problem*

$$(u_m)_{tt}(x,t) - (u_m)_{xx}(x,t) + q(x)u_m(x,t) = 0 \qquad \text{in } \Omega_2$$

mit $q(x)\in C^0([0,1])$, *den Randwerten*

$$((u_m)_x - h_1 u_m)(0,t) = 0, \qquad 0\le t\le 2,$$

$$((u_m)_x + h_2 u_m)(1,t) = 0, \qquad 0\le t\le 1,$$

und den Anfangswerten

$$u_m(x,0) = 0,\ (u_m)_t(x,0) = \frac{k}{2}g_m(x), \qquad x\in[0,1]$$

formuliert. Es sei $g_m\in C_0^\infty([0,1])$ *mit* $g_m\ge 0$, $\int_0^1 g_m(x)dx = 1$, $\operatorname{supp} g_m = [x_m^1, x_m^2]$ *mit* $0 < x_m^1 < x_m^2 < 1$ *und* $\lim_{m\to\infty} x_m^1 = \lim_{m\to\infty} x_m^2 = 0$. *Dann existiert* $\{u_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ *und es ist jedes* u_m *auf* $\partial\Omega$ *stetig und stetig differenzierbar fortsetzbar.* $\{u_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ *ist auf* $\overline{\Omega}$ *gleichmäßig beschränkt, d.h.* $\exists C\in\mathbf{R}$: $\forall m\in\mathbf{N}\ \forall(x,t)\in\overline{\Omega}_2\ |u_m(x,t)| < C$. *Mit der Lösung u der Integralgleichung (4.1) gilt*

$$\forall\omega\subset\subset\Omega_2\ \forall\epsilon>0\ \exists m_\epsilon:\ \forall m\ge m_\epsilon \sup_{(x,t)\in\omega}|u_m(x,t)-u(x,t)| < \epsilon.$$

Die Rechnungen zum Beweis dieses Satzes sind sehr umfangreich und wir beschränken uns auf die Schilderung der wesentlichen Ideen.

Beweisideen zum Satz: Die Herleitung von Integralgleichungen für klassische Lösungen u_m erfolgt durch Integration entlang Charakteristiken, so daß der Differentialoperator verschwindet. Dazu ist es notwendig, das Gebiet $\{(x,t)|\ 0<x<1,\ 0<t<2-x\}$ gemäß Abbildung 4.3 zu zerlegen und die Gebiete ω_i einzeln zu betrachten. Denn es werden jeweils zu berechnende Randwerte $u_m(0,t)$ und $u_m(1,t)$ für die Darstellungen benötigt. So gilt beispielsweise auf $\overline{\omega}_3\setminus\{(x,t)|\ x=t\}$
a) für $t\in(0,1]$ nach dem Charakteristikenverfahren

$$u_m(0,t) \;=\; \tfrac{k}{2}\int_0^t g_m(\xi)d\xi - h_1\int_0^t u_m(0,\xi)d\xi - \int_0^t\int_0^\tau q(\xi)u(\xi,\tau-\xi)d\xi d\tau.$$

Differenzieren wir beide Seiten dieser Gleichung nach t, multiplizieren mit $e^{h_1 t}$, ersetzen t durch τ und integrieren von 0 bis t nach τ, so läßt sich das Ergebnis auflösen zu

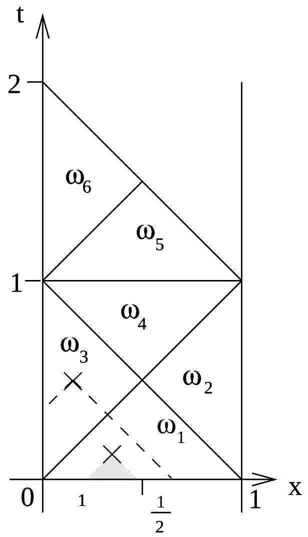

Abbildung 4.3: Gebietsaufteilung zum Beweis des Satzes 4.1.7.

$$u_m(0,t) \;=\; e^{-h_1 t}(\tfrac{k}{2}\int_0^t e^{h_1\tau} g_m(\tau)d\tau - \int_0^t e^{h_1\tau}\int_0^\tau q(\xi)u_m(\xi,\tau-\xi)d\xi d\tau).$$

b) und sonst

$$\begin{aligned} u_m(x,t) \;&=\; u_m(\tfrac{t+x}{2},\tfrac{t+x}{2}) - u_m(\tfrac{t-x}{2},\tfrac{t-x}{2}) + u_m(0,t-x) \\ &\quad - \int_0^{\frac{t-x}{2}}\int_0^x q(\xi+\tau)u_m(\xi+\tau,t-x-\xi+\tau)d\tau d\xi. \end{aligned}$$

Für $u_m(\frac{t+x}{2},\frac{t+x}{2})$ und $u_m(\frac{t-x}{2},\frac{t-x}{2})$ gelten die durch Anwendung der d'Alembertschen Formel hergeleiteten Darstellungen aus $\overline{\omega}_1$.
Diese Integralgleichungen motivieren Gleichung (4.1).

Analog zum Beweis zu Satz 4.1.1 ist nun mit Hilfe der sukzessiven Approximation die eindeutige Existenz der u_m in der Klasse der stetigen Funktionen zeigbar. u_m ist sogar zweimal stetig differenzierbar und auf den Rand stetig differenzierbar fortsetzbar. u_m erfüllt die Differentialgleichung und nimmt die Randwerte im klassischen Sinn an.

Mit einer Maximumbildung über die x-Variable reduzieren sich die Integralgleichungen für u_m um eine Variable, und es ist mit dem Lemma von Gronwall eine gemeinsame obere Schranke für $|u_m|$ herleitbar. Es folgt die Abschätzung des Satzes für $|u_m(x,t)-u(x,t)|$ unter besonderer Berücksichtigung der Sprungcharakteristik $x=t$ auf analoge Weise.

□

Bemerkung 4.1.8

1. *Für g_m aus Satz 4.1.7 gilt im distributiven Sinn $g_m(x) \to \delta(x)$.*

2. *Ein typisches Beispiel für eine Folge g_m zu Satz 4.1.7 ist*

$$g_m(x) = mg(mx-\frac{1}{2}),\ \textit{wobei}\ g(x) = \begin{cases} \kappa e^{\frac{1}{(2x)^2-1}} & |x|<\frac{1}{2}, \kappa\in\mathbf{R}\ \textit{s.d.}\ \int_{-\infty}^{\infty} g dx = 1, \\ 0 & |x|\geq\frac{1}{2}. \end{cases}$$

3. *Mit den Funktionen des vorigen Satzes gilt für $x>0$*

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to 0} u_m(x+\epsilon_1,x+\epsilon_2) = \frac{k}{4},$$

und für $x=0$

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{t\searrow 0} u_m(0,t) = 0.$$

Andererseits für $x > 0$

$$\lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to 0,\, x+\epsilon_1<x+\epsilon_2} u(x+\epsilon_1, x+\epsilon_2) = \lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to 0,\, x+\epsilon_1<x+\epsilon_2} \lim_{m\to\infty} u_m(x+\epsilon_1, x+\epsilon_2) = \frac{k}{2}.$$

Dieser Unterschied liefert eine Idee für die Diskretisierung des distributiven Ganzraumproblems, siehe Satz 5.1.8 und (5.15).

Satz 4.1.7 zeigt nicht nur die Herleitung der Integralgleichung (4.1), sondern auch, daß die Lösung eines Anfangswert-Randwert-Problems mit δ-Distribution in einer Ecke übereinstimmt mit dem distributiven Grenzwert der Lösungen der Problemformulierung mit glatten, gegen die δ-Distribution konvergierenden Anfangswerten g_m.

Der Ansatz aus Satz 4.1.7 bestätigt die in den distributiven Formulierungen beobachtete Verdopplung von Singularitäten in den Ecken bei gerader Spiegelung, vergleiche Abschnitt 2.6.1 und Beispiel 2.6.5, aus klassischer Sicht.

Für die Lösung u der Integralgleichung (4.1) aus Satz 4.1.1 gilt Satz 4.1.5. Der folgende Satz enthält eine zu Satz 4.1.5 analoge Aussage für u_m aus Satz 4.1.7 und kann auf die gleiche Art bewiesen werden.

Satz 4.1.9 *Es gelte $h_1, h_2 \in \mathbf{R}$ und $q \in C^0([0,1])$. Seien die Lösungen u_m aus Satz 4.1.7 auf $\partial\Omega$ stetig fortgesetzt und außerhalb $\overline{\Omega}$ durch 0 auf ganz $\mathbf{R}^2$ erweitert. Sei g_m für $m \in \mathbf{N}$ die Fortsetzung von g_m aus Satz 4.1.7 auf $\mathbf{R}$ durch 0. Dann ist jedes u_m eine reguläre Distribution, die auf $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x,t)|\, 0 \le x \le 1,\, t \ge 2-x\}$ die Gleichung*

$$\begin{aligned} P(D)u_m &= \frac{k}{2}g_m(x)\otimes\delta(t) - (\frac{d}{dx}\delta)(x)\otimes u_m(0,t) + (\frac{d}{dx}\delta)(x-1)\otimes u_m(1,t) \\ &\quad -h_1\delta(x)\otimes u_m(0,t) - h_2\delta(x-1)\otimes u_m(1,t) \end{aligned} \tag{4.7}$$

löst.

Eine rein distributive Grenzwertbeziehung zwischen u aus Satz 4.1.5 und u_m aus Satz 4.1.9 mit der distributiven Gleichung (2.27) auf $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x,t)|\, 0 \le x \le 1,\, t \ge 2-x\}$ und Gleichung (4.7) existiert in diesem Rahmen nicht. Die rechten Seiten der Gleichungen (2.27) und (4.7) sind jeweils nicht bekannt, da die Randwerte an $x = 0$ und $x = 1$ nicht vorliegen. Die Untersuchung einer stetigen Abhängigkeit der Lösungen u_m von g_m bezieht sich auf die Gleichung

$$\begin{aligned} P(D)u_m + (\frac{d}{dx}\delta)(x)\otimes u_m(0,t) - (\frac{d}{dx}\delta)(x-1)\otimes u_m(1,t) + h_1\delta(x)\otimes u_m(0,t) + h_2\delta(x-1)\otimes u_m(1,t) \\ = \frac{k}{2}g_m(x)\otimes\delta(t), \end{aligned}$$

in der die bekannten Werte auf der rechten Seite stehen.

Für spezielle Randwerte erhalten wir den folgenden Satz:

Satz 4.1.10 *Es gelte $h_1 = 0$ und $h_2 \in \{0,\infty\}$. Sei g_m für $m \in \mathbf{N}$ die Fortsetzung von g_m aus Satz 4.1.7 auf $\mathbf{R}$ durch 0. Die Problemstellung aus Satz 4.1.7 für u_m sei auf den Halbstreifen $\{(x,t)|0 < x < 1,\, t > 0\}$ erweitert, indem die Differentialgleichung auf dem gesamten Halbstreifen gelte, die Randwerte an $x \in \{0,1\}$ für $t \in [0,\infty)$ gelten und die Anfangswerte beibehalten werden. Dieses Halbstreifenproblem sei mit den Methoden aus Abschnitt 2.7 entsprechend der durch die Randwerte bestimmten Symmetrien in ein Cauchyproblem der oberen Halbebene überführt, dessen Lösung wir mit U^m bezeichnen. Dann konvergiert U^m im distributiven Sinn gegen*

$$2\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l R(x,t,2l)$$

mit $c_l = \begin{cases} (-1)^l & \text{für } h_2 = \infty, \\ 1 & \text{für } h_2 = 0. \end{cases}$

Beweis: Das Cauchyproblem der oberen Halbebene für U^m lautet

$$U_{tt}^m - U_{xx}^m + q(x)U^m \;=\; \delta(t) \otimes \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l(g_m(x-2l) + g_m(2l-x))$$

mit $q(2l+x) = q(x)$ und $q(2l+1+x) = q(1-x)$ für $l \in \mathbf{Z}$, $x \in [0,1]$.
Es ist Korollar 3.5.14 anwendbar, denn es existiert die rechte Seite der Gleichung (3.35): Für alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ gilt

$$\begin{aligned} & < \textstyle\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l(g_m(x_0-2l) + g_m(2l-x_0)), < R(x,t,x_0), \phi(x,t) > >_{x_0} \\ = \;& \textstyle\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,t) \int_{-\infty}^{\infty} R(x,t,x_0)(g_m(x_0-2l) + g_m(2l-x_0))dx_0\, dxdt \\ = \;& < \textstyle\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \int_{-\infty}^{\infty} R(x,t,x_0)(g_m(x_0-2l) + g_m(2l-x_0))dx_0,\; \phi(x,t) > . \end{aligned}$$

Damit folgt

$$U^m \;=\; \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \int_{-\infty}^{\infty} R(x,t,x_0)(g_m(x_0-2l) + g_m(2l-x_0))dx_0,$$

und dies konvergiert für $m \to \infty$ im distributiven Sinn gegen

$$2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l R(x,t,2l).$$

□

4.2 Zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines inversen Problems und eine Stabilitätsanalyse

Wir untersuchen das inverse Problem IP1_HS über ein System von Integralgleichungen für u, u_t und q, welches wir aus der Integralgleichung (4.1) herleiten. Es handelt sich um Volterrasche Integralgleichungen, die, nach Reduktion durch Maximumbildung auf eine Variable, eine Anwendung des Lemmas von Gronwall erlauben und so eine Stabilitätsaussage ermöglichen.

Satz 4.2.1 *Sei $h_1 \in \mathbf{R}$. Die Funktionen $u, v \in C^0(\overline{\Omega}_2)$ und $q \in C^0([0,1])$ sind auf Ω_2 genau dann Lösungen des Systems von Integralgleichungen*

$$\begin{aligned} u(x,t) \;&=\; u_0(x,t) - \int_0^{t-x} e^{h_1(\tau - t + x)} \int_0^{\frac{\tau}{2}} q(\xi)u(\xi, \tau-\xi)d\xi d\tau \\ &\quad - \int_{t-x}^{t} \int_{\tau-t+x}^{\tau - \frac{t-x}{2}} q(\xi)u(\xi, 2\tau - \xi - t + x)d\xi d\tau, \qquad (4.8) \\ v(x,t) \;&=\; (u_0)_t(x,t) + h_1 \int_0^{t-x} e^{h_1(\tau-t+x)} \int_0^{\frac{\tau}{2}} q(\xi)u(\xi,\tau-\xi)d\xi d\tau \\ &\quad - \frac{1}{2}\Big(\int_x^{\frac{t+x}{2}} q(\xi)u(\xi, t+x-\xi)d\xi + \int_0^{\frac{t-x}{2}} q(\xi)u(\xi, t-x-\xi)d\xi \\ &\quad + \int_0^x q(\xi)u(\xi, \xi+t-x)d\xi \Big), \qquad (4.9) \\ q(x) \;&=\; -\frac{2}{u(x,x+0)} \Big(u_{tt}(0,2x) + h_1 u_t(0,2x) + \int_0^x q(\xi)v(\xi, 2x-\xi)d\xi \Big), \qquad (4.10) \end{aligned}$$

wobei $u_0(x,t) = \frac{k}{2}e^{h_1(x-t)}$, $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, wenn u Lösung der Integralgleichung (4.1) ist und $v = u_t$ gilt.

Beweis: Da offensichtlich die Gleichung (4.8) mit der Gleichung (4.1) übereinstimmt, und die Integralgleichung (4.9) mit $v = u_t$ als Gleichung (4.3) schon in Satz 4.1.1 hergeleitet wurde, ist aus u nur

noch die Integralgleichung (4.10) herbeizuführen.
Mit der Integralgleichung (4.4) für u_{tt} und (4.5) für u_{xt} erhalten wir

$$u_{tt}(x,t) + u_{xt}(x,t) = -\frac{1}{2}q(\frac{t+x}{2})u(\frac{t+x}{2},\frac{t+x}{2}) - \int_x^{\frac{t+x}{2}} q(\xi)u_t(\xi,t+x-\xi)d\xi.$$

An $x=0$ ist das Differenzieren entlang der t-Achse für $t>0$ erlaubt, und wir erhalten

$$u_{tt}(0,t) = \frac{d^2}{dt^2}(u(0,t)) \quad \text{und} \quad u_{xt}(0,t) = \frac{d}{dt}(u_x(0,t)) = h_1\frac{d}{dt}(u(0,t)).$$

Ersetzen wir den Ausdruck $u(0,t)$ durch die rechte Seite der Integralgleichung für u, so erhalten wir nach Ausführung der Differentiation die Gültigkeit obiger Gleichung nicht nur in Ω_2, sondern auch für die Randwerte an $x=0$:

$$u_{tt}(0,t) + u_{xt}(0,t) = -\frac{1}{2}q(\frac{t}{2})u(\frac{t}{2},\frac{t}{2}) - \int_0^{\frac{t}{2}} q(\xi)u_t(\xi,t-\xi)d\xi.$$

Es gilt mit $f(t) := u(0,t), u_x(0,t) = h_1 f(t)$

$$f''(t) + h_1 f'(t) = -\frac{1}{2}q(\frac{t}{2})u(\frac{t}{2},\frac{t}{2}) - \int_0^{\frac{t}{2}} q(\xi)u_t(\xi,t-\xi)d\xi$$

$$\Rightarrow \quad q(x) = -\frac{2}{u(x,x+0)}(f''(2x) + h_1 f'(2x) + \int_0^x q(\xi)u_t(\xi,2x-\xi)d\xi).$$

Somit haben wir obiges System von Integralgleichungen aufgestellt.

□

Nach den Sätzen 4.1.1, 4.1.4 und 4.1.5 ist das inverse Problem IP1_HS äquivalent zur Lösung des Systems (4.8)- (4.10) von Integralgleichungen bei bekanntem $u(0,t) = f(t),\ t \in [0,2]$.

Bemerkung 4.2.2 *Für die Randwerte $f(t) = u(0,t)$ zum inversen Problem gilt*

$$\lim_{t\searrow 0} f(t) = \frac{k}{2} \quad \textit{und} \quad \lim_{t\searrow 0} f'(t) = -\frac{k}{2}h_1.$$

Bei gegebenem $f(t) \in C^1([0,2])$ sind $\frac{k}{2}$ und h_1 hierüber bestimmbar. Insbesondere ist u_0 aus Satz 4.2.1 dann bekannt.

Satz 4.2.3 *Sei $f \in C^2([0,t_0])$ für ein $t_0 \in (0,2]$. Gilt $\lim_{t\searrow 0} f(t) = \frac{k}{2}$ und $\lim_{t\searrow 0} f'(t) = -\frac{k}{2}h_1$, so existiert ein $t_1 \in (0,t_0]$, so daß das System von Integralgleichungen (4.8)- (4.10) in $(C^0(D_1(0,t_1)))^3$ mit $u(0,t) = f(t)$ eine eindeutige Lösung besitzt. Insbesondere existiert $q \in C^0([0,\frac{t_1}{2}))$.*

Beweis: Die drei Integralgleichungen bilden ein System nichtlinearer Volterrascher Integralgleichungen zweiter Art für $K = (u,v,q) : K = TK$. Wir zeigen, daß im Kleinen eine eindeutige Lösung existiert. Dabei gehen wir analog zu Romanov [42] Chapt. 2 Sect. 2.1 zum klassischen Cauchyproblem vor. Sei

$$\|K\|(t_0) = \max_{1\le l\le 3} \max_{(x,t)\in D_1(0,t_0)} |K_l(x,t)|,$$

und definiere

$$q_0(x) = -\frac{2}{u(x,x+0)}(f''(2x) + h_1 f'(2x)), \quad K_0(x,t) = (u_0,(u_0)_t,q_0)(x,t),$$

mit $u(x-0,x+0) = \frac{k}{2}$. Sei $\bar{t} \in (0,t_0]$ und sei $C_s(\bar{t}) \subset (C^0(D_1(0,\bar{t})))^3$ mit

$$K \in C_s(\bar{t}) \Leftrightarrow \|K - K_0\|(\bar{t}) \le \|K_0\|(t_0).$$

Zwischenbehauptung: Es existiert $t_1 \in (0, t_0]$, so daß für alle $0 < \bar{t} < t_1$ T auf $C_s(\bar{t})$ kontrahierend ist.

Die Zwischenbehauptung besagt, daß für kleine $\bar{t}$ die Abbildung T in einer Umgebung der Born-Approximation, siehe Bemerkung 9.1.2, kontrahierend ist.

Beweis der Zwischenbehauptung: Sei $0 < \bar{t} \leq t_0$. Dann gilt $K \in C_s(\bar{t}) \Rightarrow \|K\|(\bar{t}) \leq 2\|K_0\|(t_0)$ und es existieren Konstanten c_1, c_2, so daß die Abschätzungen

$$\|TK - K_0\|(\bar{t}) \;\leq\; c_1\|K\|^2(\bar{t})\max(\bar{t}^2, \bar{t}, \tfrac{\bar{t}}{u(x,x+0)}) \;\leq\; c_2\|K_0\|^2(t_0)\max(\bar{t}^2, \bar{t}, \tfrac{\bar{t}}{u(x,x+0)}) \;\leq\; \|K_0\|(t_0)$$

erfüllt sind, falls $\bar{t} \leq t_1 = \min(\frac{1}{(c_2\|K_0\|(t_0))^{\frac{1}{2}}}, \frac{\min(1,u(x,x+0))}{c_2\|K_0\|(t_0)}, t_0)$. Somit gilt $T : C_s(\bar{t}) \to C_s(\bar{t})$. Seien $K^1, K^2 \in C_s(\bar{t}), \bar{t} \leq t_1$. Es folgt für $1 \leq l, s \leq 3$

$$|K_l^1 K_s^1 - K_l^2 K_s^2| \;\leq\; |K_l^1 - K_l^2||K_s^1| + |K_l^2||K_s^1 - K_s^2| \;\leq\; 4\|K_0\|(t_0)\,\|K^1 - K^2\|(\bar{t}).$$

Somit

$$\|TK^1 - TK^2\|(\bar{t}) \;\leq\; c_2\|K_0\|(t_0)\,\|K^1 - K^2\|(\bar{t})\max(\bar{t}^2, \bar{t}, \tfrac{\bar{t}}{u(x,x+0)}) \;\leq\; \tfrac{\bar{t}}{t_1}\|K^1 - K^2\|(\bar{t}).$$

Demnach ist T auf $C_s(\bar{t})$ für $0 < \bar{t} < t_1$ eine kontrahierende Abbildung und die Zwischenbehauptung ist bewiesen.

Banachscher Fixpunktsatz und die Methode der sukzessiven Approximation liefern die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes $K \in C_s(\bar{t})$ und somit ein eindeutiges $q \in C_s(\bar{t})_3$. $q \in C_s(\bar{t})_3 \Rightarrow q \in C^0([0, \frac{\bar{t}}{2}])$.

□

Hieraus folgt nach einem Standardargument analog Romanov [42] Chapt. 2 Theorem 2.2 für das klassische Cauchyproblem, daß, falls auf einem Intervall $[0, \frac{T}{2}]$ eine stetige Lösung q existiert, diese eindeutig ist.

Romanov führt in [42] Chapt. 2 Sect. 2.1 eine Stabilitätsanalyse für das klassische Cauchyproblem durch. Dabei nutzt er die den Integralgleichungen (4.8), (4.9) und (4.10) entsprechenden Gleichungen des klassischen Cauchyproblems. Das Beweisverfahren ist auf die Gleichungen (4.8), (4.9) und (4.10) zum inversen Halbstreifenproblem übertragbar und wird im Beweis zu Satz 4.2.4 durchgeführt.

Für eine Stabilitätsanalyse des inversen Problems betrachten wir zwei Funktionen $f(t) = u(0,t)$ und $f^\epsilon(t) = u^\epsilon(0,t)$. Es sei für $(x_0, t_0) \in \Omega_2$

$$C_M^0(x_0, t_0) = \{q \in C^0([0,1])|\ \|q\|_{\infty,[0,\frac{t_0+x_0}{2}]} \leq M\}.$$

Satz 4.2.4 *Sei $k \in \mathbf{R}^{>0}$ und seien zwei Funktionen $f, f^\epsilon \in C^2([0,2])$ gegeben mit*

$$\lim_{t\searrow 0} f(t) = \lim_{t\searrow 0} f^\epsilon(t) = \frac{k}{2} \qquad \textit{und} \qquad \lim_{t\searrow 0} f'(t) = \lim_{t\searrow 0}(f^\epsilon)'(t) = -\frac{k}{2}h_1.$$

Das System (4.8) - (4.10) sei jeweils mit $u(0,t) = f(t)$ und $u^\epsilon(0,t) = f^\epsilon(t)$ in $(C^0(D_1(0,2)))^3$ eindeutig lösbar und die Lösungen seien mit (u,v,q) bzw. $(u^\epsilon, v^\epsilon, q^\epsilon)$ bezeichnet. Es gelte für ein $(x_0,t_0) \in \Omega_2$ $q, q^\epsilon \in C_M^0(x_0,t_0)$. Dann existiert eine Konstante C, so daß gilt

$$\|q - q^\epsilon\|_{\infty,[0,\frac{x_0+t_0}{2}]} \;\leq\; C\frac{4}{k}\Big(\|f'' - (f^\epsilon)''\|_{\infty,[0,x_0+t_0]} + h_1\|f' - (f^\epsilon)'\|_{\infty,[0,x_0+t_0]}\Big). \tag{4.11}$$

C hängt von M, x_0, t_0 und h_1 ab.

Beweis: Es seien $\overline{f} = f - f^\epsilon, \overline{u}_0 = u_0 - u_0^\epsilon, \overline{u} = u - u^\epsilon, \overline{v} = v - v^\epsilon$ und $\overline{q} = q - q^\epsilon$. Sei $D_1(t) = D_1(0,t) = \{(x,\tau)|0 < x < t, x < \tau < 2t - x\}$ und $\|u\|_{l,\Omega} = \sum_{|\alpha|\leq l}\sup_{(x,t)\in\Omega}|D^\alpha u(x,t)|, l = 0,1,2$. Es existiert eine Konstante $c_0 \in \mathbf{R}$ unabhängig von t, so daß die Abschätzungen

$$\|u_0\|_{0,D_1(t)}, \|u_0\|_{1,D_1(t)} \leq c_0 \qquad \forall t \in [0, \frac{x_0+t_0}{2}]$$

gelten. Mit $q \in C^0_M(x_0,t_0)$ folgt nach (4.6) mit einer Konstanten c_2 unabhängig von t

$$\|u\|_{0,D_1(t)} \leq \|u_0\|_{0,D_1(t)} e^{\frac{c_1 M}{2} t} \leq c_2 c_0,$$

und aus (4.9) mit einer Konstanten c_3 unabhängig von t $\|v\|_{0,D_1(t)} \leq c_3 c_0,\ 0 \leq t \leq \frac{x_0+t_0}{2}$.
Seien

$$u_\delta(t) = \max_{(\xi,\tau)\in D_1(t)} |\overline{u}(\xi,\tau)|,\ \ v_\delta(t) = \max_{(\xi,\tau)\in D_1(t)} |\overline{v}(\xi,\tau)|,\ \ q_\delta(t) = |\overline{q}(t)|.$$

Aus dem System von Integralgleichungen (4.8) - (4.10) lassen sich folgende Gleichungen für die Differenzen $\overline{u}, \overline{v}$ und $\overline{q}$ herleiten.

$$\begin{aligned}
\overline{u}(x,t) &= \overline{u}_0(x,t) - \int_0^{t-x} e^{h_1(\tau-t+x)} \int_0^{\frac{\tau}{2}} q(\xi)\overline{u}(\xi,\tau-\xi) + \overline{q}(\xi)u^\epsilon(\xi,\tau-\xi)d\xi d\tau \\
&\quad - \int_{t-x}^t \int_{\tau-t+x}^{\tau-\frac{t-x}{2}} q(\xi)\overline{u}(\xi,2\tau-\xi-t+x) + \overline{q}(\xi)u^\epsilon(\xi,2\tau-\xi-t+x)d\xi d\tau \\
\overline{v}(x,t) &= (\overline{u}_0)_t(x,t) + h_1 \int_0^{t-x} e^{h_1(\tau-t+x)} \int_0^{\frac{\tau}{2}} q(\xi)\overline{u}(\xi,\tau-\xi) + \overline{q}(\xi)u^\epsilon(\xi,\tau-\xi)d\xi d\tau \\
&\quad -\frac{1}{2}\Big(\int_x^{\frac{t+x}{2}} q(\xi)\overline{u}(\xi,t+x-\xi) + \overline{q}(\xi)u^\epsilon(\xi,t+x-\xi)d\xi \\
&\quad\quad + \int_0^{\frac{t-x}{2}} q(\xi)\overline{u}(\xi,t-x-\xi) + \overline{q}(\xi)u^\epsilon(\xi,t-x-\xi)d\xi \\
&\quad\quad + \int_0^x q(\xi)\overline{u}(\xi,\xi+t-x) + \overline{q}(\xi)u^\epsilon(\xi,\xi+t-x)d\xi\Big).
\end{aligned}$$

Für $\overline{q}$ erhalten wir mit $u(x,x+0) = u^\epsilon(x,x+0) = \frac{k}{2}$ die Gleichung

$$\overline{q}(x) = -\frac{2}{u(x,x+0)}\Big(\overline{f}''(2x) + h_1\overline{f}'(2x) + \int_0^x q(\xi)\overline{v}(\xi,2x-\xi) + \overline{q}(\xi)v^\epsilon(\xi,2x-\xi)d\xi\Big).$$

Es gilt somit für $0 \leq t \leq \overline{t}_0 := \frac{x_0+t_0}{2} \leq 1$ nach Maximumbildung

$$\begin{aligned}
u_\delta(t) &= \max_{(\xi,\tau)\in D_1(0,t)} |\overline{u}(\xi,\tau)| \ \leq\ \|\overline{u}_0\|_{2,D_1(0,\overline{t}_0)} + 2tM\int_0^t u_\delta(\tau)d\tau + 2tc_2c_0\int_0^t q_\delta(\tau)d\tau \\
q_\delta(t) &\leq \frac{2}{u(x,x+0)}\Big(\|\overline{f}''\|_{\infty,[0,2t]} + h_1\|\overline{f}'\|_{\infty,[0,2t]} + tMv_\delta(t) + c_3c_0\int_0^t q_\delta(\tau)d\tau\Big) \\
v_\delta(t) &\leq \|\overline{u}_0\|_{2,D_1(0,t)} + h_1 2tM\int_0^t u_\delta(\tau)d\tau + 2h_1tc_2c_0\int_0^t q_\delta(\tau)d\tau + 4tMu_\delta(t) + 2c_2c_0\int_0^t q_\delta(\tau)d\tau \\
&\leq (1+4\overline{t}_0M)\|\overline{u}_0\|_{2,D_1(0,\overline{t}_0)} + 2\overline{t}_0M(4\overline{t}_0M+h_1)\int_0^t u_\delta(\tau)d\tau \\
&\quad +2c_2c_0(1+h_1\overline{t}_0+4M\overline{t}_0^2)\int_0^t q_\delta(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Wir definieren $\phi(t) = \max(u_\delta(t), q_\delta(t))$ und erhalten durch eine weitere Abschätzung

$$\begin{aligned}
u_\delta(t) &\leq \|\overline{u}_0\|_{2,D_1(0,\overline{t}_0)} + 2t_0(M+c_2c_0)\int_0^t \phi(\tau)d\tau \\
v_\delta(t) &\leq (1+4\overline{t}_0M)\|\overline{u}_0\|_{2,D_1(0,\overline{t}_0)} + (2\overline{t}_0M(4\overline{t}_0M+h_1) + 2c_2c_0(1+h_1\overline{t}_0+4M\overline{t}_0^2))\int_0^t \phi(\tau)d\tau \\
q_\delta(t) &\leq \frac{2}{u(x,x+0)}\Big(\|\overline{f}''\|_{\infty,[0,2\overline{t}_0]} + h_1\|\overline{f}'\|_{\infty,[0,2\overline{t}_0]} + \overline{t}_0M(1+4\overline{t}_0M)\|\overline{u}_0\|_{2,D_1(0,\overline{t}_0)} \\
&\quad +(\overline{t}_0M(2\overline{t}_0M(4\overline{t}_0M+h_1) + 2c_2c_0(1+h_1\overline{t}_0+4M\overline{t}_0^2)) + c_3c_0)\int_0^t \phi(\tau)d\tau\Big).
\end{aligned}$$

Setzen wir

$$\begin{aligned}
\alpha &= \max\{\|\overline{u}_0\|_{2,D_1(0,\overline{t}_0)}, \tfrac{2}{u(x,x+0)}(\|\overline{f}''\|_{\infty,[0,2\overline{t}_0]} + h_1\|\overline{f}'\|_{\infty,[0,2\overline{t}_0]} + \overline{t}_0M(1+4\overline{t}_0M)\|\overline{u}_0\|_{2,D_1(0,\overline{t}_0)})\}, \\
\beta &= \max\{2\overline{t}_0(M+c_2c_0), \tfrac{2}{u(x,x+0)}(\overline{t}_0M(2\overline{t}_0M(4\overline{t}_0M+h_1) + 2c_2c_0(1+h_1\overline{t}_0+4M\overline{t}_0^2)) + c_3c_0)\},
\end{aligned}$$

so liefern obige Gleichungen sofort

$$\phi(t) \leq \alpha + \beta\int_0^t \phi(\tau)d\tau.$$

Nach dem Lemma von Gronwall gilt

$$\phi(t) \leq \alpha e^{\beta t} \leq \alpha e^{\beta\overline{t}_0}$$

und wir erhalten die Abschätzung

$$\|q-q^\epsilon\|_{\infty,[0,\frac{x_0+t_0}{2}]} \leq \frac{C}{u(x,x+0)}\Big(\|\overline{f}''\|_{\infty,[0,x_0+t_0]} + h_1\|\overline{f}'\|_{\infty,[0,x_0+t_0]} + \|\overline{u}_0\|_{2,D_1(0,\frac{x_0+t_0}{2})}\Big).$$

Es gilt $u_0 = u_0^\epsilon$ und damit folgt die Behauptung.

□

Mit der Ungleichung (4.11) haben wir eine obere Schranke für den Fehler in q bei fehlerbehaftetem Randwert f hergeleitet. Numerische Beispiele in Abschnitt 10 zeigen, daß diese Abschätzung keinesfalls zu grob, sondern scharf ist. Damit ist das Problem IP1 schlecht gestellt von zweiter Ordnung.

Vergleiche Natterer [37] Chapt. IV Sect. 1, Louis [33] und darin angegebene Literaturhinweise zum Thema schlecht gestellte Probleme.

Für eine Lösung v des Problems DP2 gilt auf $t > 0$ $v(0,t) = u_t(0,t) = f'(t)$. Daraus folgt für IP2 eine entsprechende Abschätzung des Fehlers mit der ersten Ableitung des Randwertes, $v_t(0,t)$, und mit dem Randwert selbst. Es gilt der

Satz 4.2.5 *Seien $h_1 \in \mathbf{R}$ und $k \in \mathbf{R}^{>0}$. Es seien zwei Funktionen $g, g^\epsilon \in C^1([0,2])$ gegeben mit $\lim_{t\searrow 0} g(t) = \lim_{t\searrow 0} g^\epsilon(t) = -\frac{k}{2}h_1$. Es sei das System*

$$\begin{aligned} v(x,t) &= -\tfrac{kh_1}{2}e^{h_1(x-t)} + h_1 \int_0^{t-x} e^{h_1(\tau-t+x)} \int_0^{\frac{\tau}{2}} q(\xi)(\tfrac{k}{2} + \int_\xi^{\tau-\xi} v(\xi,\tilde\tau)d\tilde\tau)d\xi d\tau \\ &\quad -\tfrac{1}{2}\Big(\int_x^{\frac{t+x}{2}} q(\xi)(\tfrac{k}{2} + \int_\xi^{t+x-\xi} v(\xi,\tilde\tau)d\tilde\tau)d\xi \\ &\qquad + \int_0^{\frac{t-x}{2}} q(\xi)(\tfrac{k}{2} + \int_\xi^{t-x-\xi} v(\xi,\tilde\tau)d\tilde\tau)d\xi + \int_0^x q(\xi)(\tfrac{k}{2} + \int_\xi^{\xi+t-x} v(\xi,\tilde\tau)d\tilde\tau)d\xi\Big), \\ q(x) &= -\tfrac{4}{k}\Big(g'(2x) + h_1 g(2x) + \int_0^x q(\xi)v(\xi,2x-\xi)d\xi\Big) \end{aligned}$$

in $(C^0(D_1(0,2)))^2$ mit $v(0,t) = g(t)$ eindeutig lösbar und dies ebenfalls für $(g^\epsilon, v^\epsilon, q^\epsilon)$ anstelle von (g,v,q). Es gelte für ein $(x_0,t_0) \in \Omega_2$ $q, q^\epsilon \in C^0_M(x_0,t_0)$. Dann existiert eine Konstante C, so daß gilt

$$\|q - q^\epsilon\|_{\infty,[0,\frac{x_0+t_0}{2}]} \leq C\frac{4}{k}\Big(\|g' - (g^\epsilon)'\|_{\infty,[0,x_0+t_0]} + h_1\|g - g^\epsilon\|_{\infty,[0,x_0+t_0]}\Big). \tag{4.12}$$

C hängt von M, x_0, t_0 und h_1 ab.

Kapitel 5

Differenzenverfahren zur Lösung der direkten Probleme

Die Bereitstellung der Randwerte an $x = 0$ zur Lösung der inversen Probleme erfolgt durch die Lösung der direkten Probleme. Für Koeffizientenfunktionen $q \equiv k^2$, $k \in \mathbf{R}^{\geq 0}$, sind die Lösungen oder die Randwerte an der t-Achse in geschlossener Form angebbar und auswertbar, ansonsten müssen wir auch hier numerische Verfahren zur Lösung der direkten Probleme entwickeln. Wir betrachten Probleme mit δ-Distribution in den Anfangswerten, einmal in der t-Ableitung der Funktion gemäß DP1, Abschnitt 5.1, ein anderes mal in der Funktion selbst gemäß DP2, Abschnitt 5.2. Die hier vorgestellten numerischen Verfahren zur approximativen Lösung der direkten Probleme beruhen auf einer Diskretisierung der kontinuierlichen Probleme in der Formulierung als gemischte Probleme DP1_GEP, DP2_GEP aus Abschnitt 3.8 durch finite Differenzen. Die Idee der Diskretisierung der gemischten Probleme durch finite Differenzen wurde von Symes [53] vorgestellt und insbesondere für die Lösung der inversen Probleme genutzt, siehe Kapitel 6. Verschiedene Autoren, darunter Fawcett [18], Zhu und Jin [65] und Zhu [66], wenden die gleiche Methode an. Dabei wird darauf hingewiesen, daß sich der Fehler bei der Lösung der direkten Probleme in der Lösung der inversen Probleme bemerkbar macht, ohne dies jedoch qualitativ zu beurteilen. Wir führen eine Diskretisierung der charakteristischen Randwerte ein, die für DP1_GEP die Konvergenzordnung am Rand um eins erhöht, und einen Zugang zur Diskretisierung der distributiven Probleme erlaubt. Wir stellen Diskretisierungen der distributiven Problemformulierungen vor. Sie erfahren ihre Rechtfertigung jeweils durch einen Vergleich mit den Resultaten der Differenzenverfahren für die gemischten Probleme. Es folgt mit unseren Verfahren auf natürliche Weise eine Diskretisierung der auftretenden δ-Distributionen.

5.1 Eine Diskretisierung für DP1

Zur Lösung des inversen Problems IP1 nach q ist die Angabe der Funktion $u(0,t)$ auf $t \in [0,2]$ hinreichend. Diese Funktion können wir nach Satz 3.5.6 und Abschnitt 3.8 bei bekanntem $q \in C^0([0,1])$ durch die Lösung des direkten gemischten Problems

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + q(x)u(x,t) = 0 \tag{5.1}$$

in $\Omega = \{(x,t) | 0 < x < 1, x < t < 2 - x\}$ mit der Randbedingung

$$u_x(0,t) = h_1 u(0,t) \qquad t \in [0,2]$$

und den charakteristischen Randwerten

$$u(x,x) = 1 \qquad x \in [0,1]$$

bestimmen, vergleiche Problem DP1_GEP.

Eine Lösung u ist nach Satz 4.1.4 und Satz 4.1.5 auf dem Gebiet Ω eine Lösung der Formulierung (2.24), (2.25) und (2.26) mit $k = 2$.

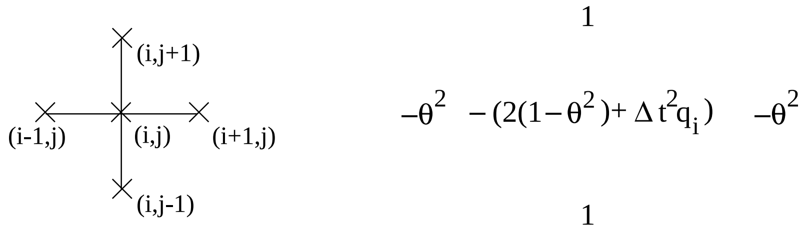

Abbildung 5.1: Der Differenzenstern zu Gleichung (5.2).

5.1.1 Ein konsistentes Differenzenverfahren für das gemischte Problem

Es seien $N \in \mathbf{N}^{\geq 1}$, $M \in \mathbf{N}^{\geq 2}$ und $\Delta x = \frac{1}{N}$, $\Delta t = \frac{2}{M-1}$. θ bezeichne den Quotienten $\theta = \frac{\Delta t}{\Delta x}$. Wir diskretisieren die Differentialgleichung auf einem Gitter $\Omega^{\Delta x, \Delta t} = \{(i\Delta x, j\Delta t) | -1 \leq i \leq N, -1 \leq j \leq M\}$ mit rechteckigen Maschen. Sei $q_i = q(i\Delta x)$ für $0 \leq i \leq N$. Die zweiten Ableitungen der Differentialgleichung seien durch zentrierte Differenzen approximiert, d.h. für eine Approximation $u^{\theta}_{i,j}$ zu $u(i\Delta x, j\Delta t)$, $1 \leq i \leq N-1$, $0 \leq j \leq M-1$, gelte die Differenzengleichung

$$\frac{u^{\theta}_{i,j+1} - 2u^{\theta}_{i,j} + u^{\theta}_{i,j-1}}{\Delta t^2} - \frac{u^{\theta}_{i+1,j} - 2u^{\theta}_{i,j} + u^{\theta}_{i-1,j}}{\Delta x^2} + q_i u^{\theta}_{i,j} = 0. \tag{5.2}$$

Sie ist äquivalent zu

$$u^{\theta}_{i,j+1} = \theta^2 u^{\theta}_{i+1,j} + 2(1-\theta^2) u^{\theta}_{i,j} + \theta^2 u^{\theta}_{i-1,j} - \Delta t^2 q_i u^{\theta}_{i,j} - u^{\theta}_{i,j-1}.$$

Der 5-Punkt Differenzenstern hat die Gestalt aus Abbildung 5.1. Für $q \in C^2([0,1])$, damit $u \in C^4(\Omega)$, ist die Gleichung (5.2) zur Differentialgleichung konsistent von der Ordnung zwei in Δx und Δt. Die Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung fordert $\theta \leq 1$ als notwendige Bedingung für die Stabilität des Verfahrens. Die Stabilität des Verfahrens untersuchen wir unten weiter.

Wir setzen $\theta = 1$ und $h = \Delta x = \Delta t$, damit die charakteristischen Randwerte auf dem Gitter liegen. Wenn wir zusätzlich die von einer Lösung u erfüllten Konsistenzbedingungen

$$\lim_{t \searrow 0} u(0,t) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{t \searrow 0} u_t(0,t) = -h_1$$

nutzen, folgt ein Differenzenverfahren zur Bestimmung einer diskreten Approximation $u^h_{i,j}$ zu $u_{i,j} = u(ih, jh)$ auf dem Gitter $\Omega^h = \{(ih, jh) | -1 \leq i \leq N, |i| \leq j \leq 2N - |i|\}$:

Es gelte der 5-Punkt Differenzenstern

$$u^h_{i,j} = u^h_{i+1,j-1} + u^h_{i-1,j-1} - u^h_{i,j-2} - h^2 q_i u^h_{i,j-1} \tag{5.3}$$

für $0 \leq i \leq N-1$, $i+2 \leq j \leq 2N-i$, siehe $Stern_1$ in Abbildung 5.2. Die Randbedingung wird mit zentrierten Differenzen zweiter Ordnung diskretisiert,

$$u^h_{1,j} - u^h_{-1,j} = 2hh_1 u^h_{0,j} \qquad \text{für } j \geq 1, \tag{5.4}$$

siehe $Stern_2$ in Abbildung 5.2. Die charakteristischen Randwerte werden exakt diskretisiert durch

$$u^h_{i,i} = 1 \qquad \text{für } 0 \leq i \leq N. \tag{5.5}$$

Wegen der Konsistenzbedingung des kontinuierlichen Problems setzen wir

$$u^h_{0,1} = u^h_{0,0} - hh_1, \tag{5.6}$$

siehe $Stern_3$ in Abbildung 5.2. Die Gleichungen (5.3) bis (5.6) reichen nicht aus, um die diskreten Approximationen $u^h_{i,j}$ auf dem Gitter Ω^h zu bestimmen. Wir benutzen zusätzlich die Formel

$$u^h_{i,i+1} - u^h_{i-1,i} + \frac{h^2}{2} q_i = 0 \qquad \text{für } i \geq 1, \tag{5.7}$$

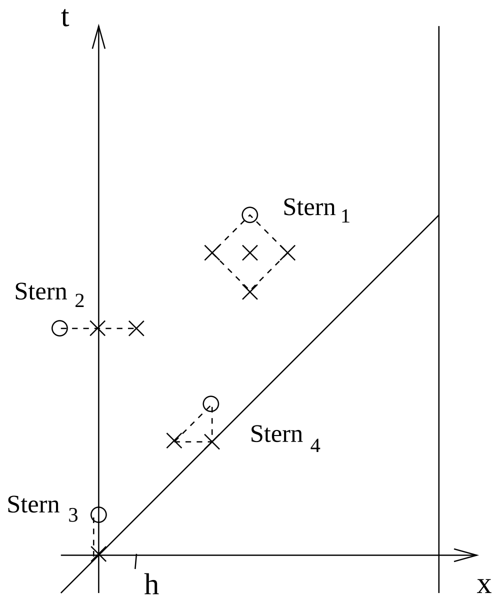

Abbildung 5.2: Differenzensterne zum Differenzenverfahren. Die jeweils mit dem entsprechenden Stern bestimmten Werte $u^h_{i,j}$ sind durch Kreise gekennzeichnet.

siehe $Stern_4$ in Abbildung 5.2, dessen Anwendung wir später begründen. Die Werte $u^h_{i,j}$, $(i,j) \in \Omega^h$, die den Gleichungen (5.3) bis (5.7) genügen, existieren eindeutig.

Der Algorithmus zur Berechnung der approximativen Lösung u^h verläuft wie folgt. Es sind $u^h_{i,i}$, $0 \leq i \leq N$, $u^h_{0,1}$ und $u^h_{-1,1}$ gegeben. Sei $j \in \mathbf{N}$, $1 \leq j \leq 2N-1$. Seien $u^h_{i,l}$, $-1 \leq i \leq min(l, 2N-l)$, $1 \leq l \leq j$, bekannt. Dann folgen die Werte $u^h_{i,j+1}$, $0 \leq i \leq min(j-1, 2N-(j+1))$, aus der Differenzengleichung (5.3). Für $j+1 < N$ folgt $u^h_{j,j+1}$ aus der Differenzengleichung (5.7) und $u^h_{-1,j+1}$ folgt aus der Approximation der Randbedingung mit (5.4), siehe Abbildung 5.3. Kreise bezeichnen in der Abbildung jeweils Unbekannte, Sterne gegebene oder schon berechnete Werte. Die Berechnung der Werte $u^h_{i,j+1}$ nennen wir die Durchführung eines Zeitschritts im Algorithmus.

Die absoluten Fehler bei der Approximation mit den Gleichungen (5.6) und (5.7) sind von der Ordnung zwei in h, wie wir im folgenden zeigen werden.

Für eine klassische Lösung gilt $u_{0,1} = u_{0,0} - hh_1 + O(h^2)$ und der Fehler in $u^h_{0,1}$ bei exaktem $u^h_{0,0} = u_{0,0}$ läßt sich darstellen als

$$u^h_{0,1} - u_{0,1} = O(h^2). \tag{5.8}$$

In den folgenden Taylorentwicklungen auftretende Ableitungen an $x = t$ sind als stetige Fortsetzungen der Ableitungen von innen aus dem Gebiet $t > x$ gegen den Rand definiert. Für $q \in C^1([0,1])$ existiert $u \in C^3(\overline{\Omega})$ nach Bemerkung 3.5.3. Unter Anwendung der Taylorschen Formel entlang der x- und t-Achse folgt

$$u_{i,i+1} - u_{i-1,i} \quad = \quad h(u_t + u_x)_{i,i} + \frac{h^2}{2}(u_{tt} - u_{xx})_{i,i} + O(h^3). \tag{5.9}$$

Aus den Integralgleichungen im Beweis zu Satz 3.5.2 folgt

$$(u_t + u_x)_{i,i} = 0$$

und

$$u_{tt}(x,x) - u_{xx}(x,x) + q(x)u(x,x) = 0. \tag{5.10}$$

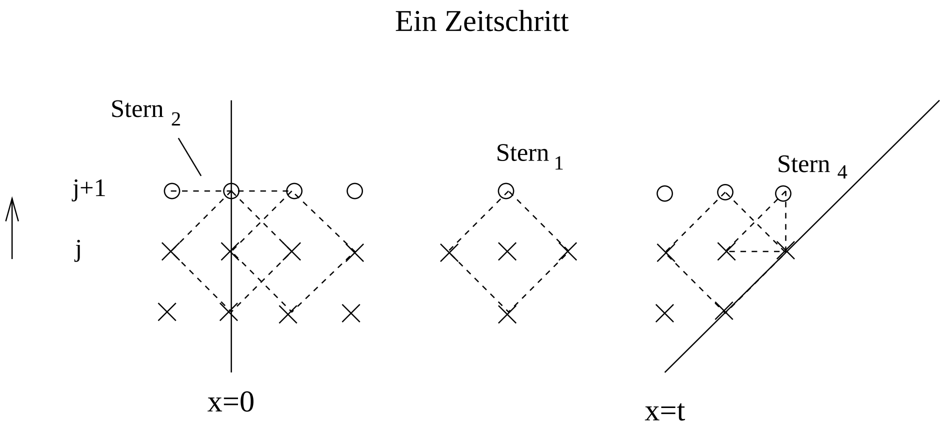

Abbildung 5.3: Differenzensterne zur Bestimmung der Werte $u^h_{i,j+1}$, $-1 \leq i \leq j$, siehe auch Abbildung 5.2.

Einsetzen in (5.9) ergibt

$$u_{i,i+1} - u_{i-1,i} + \frac{h^2}{2} q_i = O(h^3). \tag{5.11}$$

Für die Differenz $u^h_{i,i+1} - u_{i,i+1}$ gilt demnach

$$u^h_{i,i+1} - u_{i,i+1} = u^h_{i-1,i} - u_{i-1,i} + O(h^3).$$

Es folgt

$$|u^h_{i,i+1} - u_{i,i+1}| \leq |u^h_{0,1} - u_{0,1}| + O(h^2).$$

Mit (5.8) ist $u^h_{i,i+1}$ daher exakt bis auf einen Term der Ordnung zwei in h.

Bemerkung 5.1.1 *Der an $i = j$ zentrierte 5-Punkt Differenzenstern hat bei einer Definition $u^h_{i,j} = 0$ für $j < i$ die Gestalt $u^h_{i,i+1} - u^h_{i-1,i} + h^2 q_i = 0$. Verglichen mit (5.11) verliert die Fehlerformel damit eine Ordnung, $|u^h_{i,i+1} - u_{i,i+1}| \leq |u^h_{0,1} - u_{0,1}| + O(h)$. Das direkte Verfahren ist mit diesem Differenzenstern zwar noch durchführbar, liefert aber auch in numerischen Testrechnungen wesentlich schlechtere Resultate. Deshalb darf bei singulären Anfangswerten nicht ohne weitere Überlegung der Differenzenstern auf dem ganzen Halbstreifen angewandt werden, hier insbesondere nicht über die Sprungcharakteristik $i = j$.*

Bemerkung 5.1.2 *Es gilt für $h_1 = 0$ und stetig differenzierbares q*

$$(u_{ttt} + u_{xxx})(x, x) \;=\; \frac{3}{4}(q'(x) + q(x) \int_0^x q(\tau) d\tau).$$

Diskretisierung dieser Gleichung und Verwendung in Gleichung (5.7) mittels (5.9) erhöht für $q \in C^2([0,1])$ die Konsistenzordnung um eins.

Wir führen eine Stabilitätsanalyse für die Gleichung (5.2) durch, um die Wahl $\theta = 1$ zu unterstützen. Dabei gehen wir analog zur von Neumann Stabilitätsanalyse für Differenzenverfahren zu Anfangswertproblemen mit konstanten Koeffizienten vor, für die hinreichende und notwendige Stabilitätskriterien existieren, siehe z.B. Strikwerda [51] Theorem 4.2.2.

Da wir allein die Gleichung (5.2) betrachten und keine Stabilitätsanalyse der Randwerte durchführen, nehmen wir an, daß die Diskretisierung auf dem ganzen oberen Halbraum erfolgt.

Wir ersetzen $u^{\theta}_{j,n}$ durch $\lambda^{n+1}e^{ijk\Delta x}$, $\lambda \in \mathbf{R}^{\neq 0}$, $n,j,k \in \mathbf{N}$, $\Delta x, \Delta t \in \mathbf{R}^{>0}$. Die Gleichung (5.2) wird so zu

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 - \theta^2(e^{ik\Delta x} - 2 + e^{-ik\Delta x})\lambda + \Delta t^2 q_j \lambda \quad = \quad 0. \tag{5.12}$$

Daraus folgt

$$\lambda^2 + (4\theta^2 sin^2\frac{k}{2}\Delta x - 2 + \Delta t^2 q_j)\lambda + 1 = 0.$$

Mit $p = 4\theta^2 sin^2\frac{k}{2}\Delta x - 2 + \Delta t^2 q_j$ haben die Lösungen $\lambda_{1,2}$ der Gleichung (5.12) die Gestalt

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - 1}. \tag{5.13}$$

Es ist $\lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(k, \Delta x, \Delta t, q)$. In Übertragung der von Neumannschen Stabilitätsanalyse suchen wir Bedingungen an θ, so daß für jedes $T \in \mathbf{R}^{>0}$ eine Konstante $C \in \mathbf{R}$ existiert mit

$$|\lambda_{1,2}| \leq 1 + C\Delta t \qquad \forall k \in \mathbf{N}, n\Delta t < T.$$

Es gilt der

Satz 5.1.3 *Sei $q \in C^0(\mathbf{R})$ beschränkt. Dann sind die folgenden Aussagen für $\lambda_{1,2}$ aus Gleichung (5.13) äquivalent.*

1. *Es existieren Konstanten $C \in \mathbf{R}^{\geq 0}$, $\Delta x_0, \Delta t_0 \in \mathbf{R}^{>0}$ und ein Intervall $I \subset \mathbf{R}^{>0}$ mit*
$$|\lambda_{1,2}(k, \Delta x, \Delta t, q)| \leq 1 + C\Delta t \tag{5.14}$$
für alle $k \in \mathbf{N}$ und $\Delta x, \Delta t$ mit $0 < \Delta x \leq \Delta x_0$ bzw. $0 < \Delta t \leq \Delta t_0$, $\theta = \frac{\Delta t}{\Delta x} \in I$, und C ist unabhängig von $k, \Delta x, \Delta t$,
2. *für $\theta = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ gilt*
$$0 < \theta \leq 1.$$

Gilt $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, so folgt $|\lambda_1| = 1$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Beweis: Es seien $\Delta x_1, \theta \in \mathbf{R}^{>0}$. Da für $k \in \mathbf{N}$, und $0 < \Delta x \leq \Delta x_1$ $\;2\theta^2 sin^2\frac{k}{2}\Delta x \in [0, 2\theta^2]$ gilt, folgen die Äquivalenzen

$$(2\theta^2 sin^2\frac{k}{2}\Delta x - 1)^2 \;\leq\; 1 \;\; \forall k \in \mathbf{N}\, \forall \Delta x \in (0, \Delta x_1] \;\;\Leftrightarrow\;\; (2\theta^2 - 1)^2 \;\leq\; 1 \;\;\Leftrightarrow\;\; \theta^2 \;\leq\; 1.$$

1. $\Rightarrow$ 2.: Es gelte $\theta^2 \geq 1 + \epsilon > 1$. Dann existiert ein $\Delta x_0 > 0$, so daß für alle Δx mit $0 < \Delta x \leq \Delta x_0$ ein $k \in \mathbf{N}$ existiert mit $(2\theta^2 sin^2\frac{k}{2}\Delta x - 1)^2 > 1 + \frac{\epsilon}{2}$. Es existieren damit Folgen $\{k_n\}_n \subset \mathbf{N}$, $\{\Delta x_n\}_n$ mit $\Delta x_n \searrow 0$, $\{\Delta t_n\}_n$ mit $\Delta t_n = \theta \Delta x_n \searrow 0$ und eine Konstante $\delta > 0$, für die $(\frac{p}{2})^2 - 1 \geq \delta$ gilt. Somit existiert ein festes $\tau > 0$, so daß für diese Folgen

$$sgn\tfrac{p}{2} = -1 \;\;\Rightarrow\;\; |\lambda_1| > 1 + \tau \quad \text{oder} \quad sgn\tfrac{p}{2} = 1 \;\;\Rightarrow\;\; |\lambda_2| > 1 + \tau,$$

unabhängig von j gilt, und die Ungleichung (5.14) gilt nicht in der geforderten Allgemeinheit.

2. $\Rightarrow$ 1.: Sei $\theta \in (0,1]$ und $\Delta x_0 \in (0,1)$, dann gilt für alle $k \in \mathbf{N}$ und alle Δx mit $0 < \Delta x \leq \Delta x_0$ $(2\theta^2 sin^2\frac{k}{2}\Delta x - 1)^2 \leq 1$. Aus der Darstellung (5.13) von λ_1 und λ_2 folgt mit $(\frac{p}{2})^2 - 1 = (2\theta^2 sin^2\frac{k}{2}\Delta x - 1)^2 - 1 - (2\theta^2 sin^2\frac{k}{2}\Delta x - 1)\Delta t^2 q_j + \frac{1}{4}\Delta t^4 q_j^2$ die Aussage 1.

□

Bemerkung 5.1.4 *Bei numerischen Rechnungen haben wir unter anderem folgende Beobachtungen gemacht:*

1. *Je größer $\|q\|_\infty$ ist, desto schlechter sind die Ergebnisse des Differenzenverfahrens. Es muß dann Δt kleiner gewählt werden, um dieselbe Genauigkeit in der Maximumnorm zu erhalten.*
2. *Für $\theta \neq 1$ und bei Anwendung des Differenzensterns auf dem gesamten Bereich $\{(x,t)|0 < x < 1,\ 0 < t < 2 - x\}$ sind die Resultate wesentlich schlechter, insbesondere verschmiert der Schock an der $(x = t)$-Charakteristik.*

5.1.2 Ein Differenzenverfahren für das distributive Problem

Die Lösung des zu Beginn von Abschnitt 5.1 formulierten gemischten Problems ist für $h_1 = 0$ auf Ω gleich der Lösung $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ des auf der oberen Halbebene formulierten distributiven Cauchyproblems $u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = 0$ mit Anfangswerten $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 2\delta(x)$ und geradem Koeffizienten $q \in C^0(\mathbf{R})$, wenn dieser auf $[0,1]$ mit dem Koeffizienten q aus Gleichung (5.1) übereinstimmt. Wir stellen in diesem Abschnitt einen Ansatz für eine Diskretisierung $\{u_{i,j}^{d,h}\}_{(i,j)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{N}}$ des distributiven Problems auf dem gesamten oberen Halbraum vor und zeigen, daß die Werte $u_{i,j}^{d,h}$ auf der Indexmenge $0 \le i < N$, $i < j \le 2N - i$ mit den Werten $u_{i,j}^{h}$ übereinstimmen.

Zum Beweis der Aussage des folgenden Satzes siehe Abbildung 5.4 und Abbildung 5.5.

Satz 5.1.5 *Sei $q \in C^0(\mathbf{R})$ gerade. Sei $u_{i,0}^{d,h} = 0$ für $i \in \mathbf{Z}$, $u_{-1,1}^{d,h} = \frac{1}{2} = u_{1,1}^{d,h}$, $u_{0,1}^{d,h} = 1$ und $u_{i,1}^{d,h} = 0$ für $i \in \mathbf{Z} \setminus \{-1,0,1\}$. Dann existieren die Werte $u_{i,j}^{d,h}$, $(i,j) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$, welche außerdem dem 5-Punkt Differenzenstern $u_{i,j}^{d,h} = u_{i+1,j-1}^{d,h} + u_{i-1,j-1}^{d,h} - u_{i,j-2}^{d,h} - h^2 q_i u_{i,j-1}^{d,h}$ für $(i,j) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^{\ge 2}$ genügen, eindeutig. Die Werte $u_{i,j}^{d,h}$ sind gerade im ersten Index und verschwinden für $|i| > j$.*

Die folgenden Bemerkungen und der darauf folgende Satz unterstützen diese Wahl der Diskretisierung.

Bemerkung 5.1.6 *Derselbe Ansatz wie in Satz 5.1.5 mit den Anfangswerten $u_{i,0}^{d,h} = 0$ für $i \in \mathbf{Z}$, $u_{0,1}^{d,h} = 2$ und $u_{i,1}^{d,h} = 0$ für $i \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ führt zu einer Gitteraufteilung in dem Sinne, daß gilt*

1. $u_{i,i+1}^{d,h} = 2$ *für* $i \ge 0$,
2. $u_{0,2}^{d,h} = -2h^2 q_0$ *und* $u_{i,i+2}^{d,h} = u_{i-1,i+1}^{d,h} - 2h^2 q_i$ *für* $i \ge 1$, *somit*
$$u_{i,i+2}^{d,h} = -2h^2 \sum_{k=0}^{i} q_k = O(h)$$
für $i \ge 0$,
3. $u_{0,3}^{d,h} = 2 - 2h^4 q_0^2$ *und* $u_{i,i+3}^{d,h} = u_{i-1,i+2}^{d,h} - h^2 q_i(-2h^2 \sum_{k=0}^{i} q_k)$ *für* $i \ge 1$, *somit*
$$u_{i,i+3}^{d,h} = 2 - 2h^4 q_0^2 + 2h^4 \sum_{l=1}^{i} q_l \sum_{k=0}^{l} q_k = O(1)$$
für $i \ge 0$.

Eine Diskretisierung einer δ-Distribution durch einen einzigen Gitterpunkt ist demnach nicht sinnvoll.

Bemerkung 5.1.7 *Eine intuitive Begründung für die Wahl der Anfangswerte $u_{i,0}^{d,h}$ und $u_{i,1}^{d,h}$ in Satz 5.1.5 folgt aus der Überlegung, daß $u(x,0) = 0$ durch $u_{i,0}^{d,h} = 0$ für $i \in \mathbf{Z}$ exakt diskretisiert ist, und für $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ bei einer Approximation von*

$$2\phi(0) = < 2\delta, \phi > = < u_t(x,0), \phi >$$

durch

$$h \sum_{i=-\infty}^{\infty} (u_t)_{i,0} \phi_i$$

nach Ersetzung von u_t durch vorwärtsgenommene Differenzen die Gleichungen

$$h \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{u_{i,1}^{d,h} - u_{i,0}^{d,h}}{h} \phi_i = \frac{1}{2}(\phi_{-1} + 2\phi_0 + \phi_1) = 2\phi_0 + O(h^2)$$

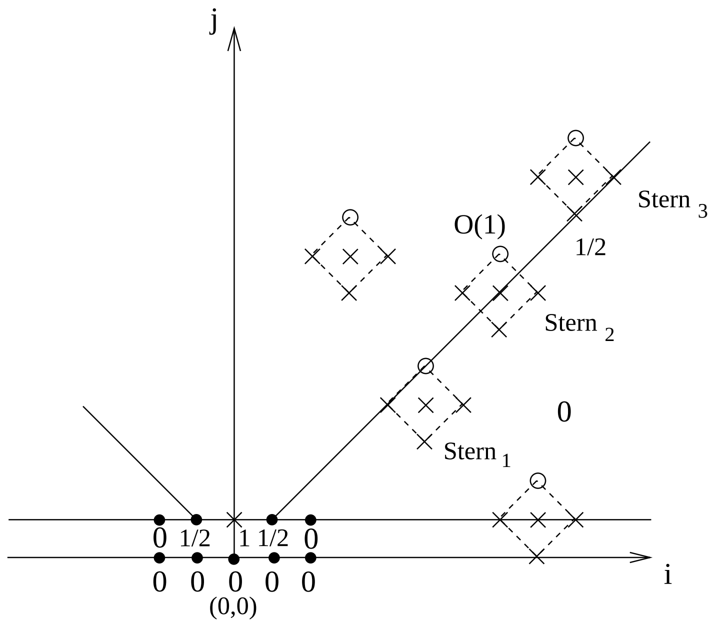

Abbildung 5.4: Differenzensterne für das Verfahren mit diskreten Distributionen zu den Anfangswerten $u(x,0) = 0$ und $u_t(x,0) = 2\delta(x)$.

folgen. Eine rigorose Argumentation in dieser Richtung muß jedoch die Annahme der Anfangswerte über einen Grenzprozeß umfassen, wie sie in der distributiven Formulierung in Abschnitt 3.6 gezeigt wurde. Dies ist wesentlich aufwendiger als eine Rechtfertigung der Diskretisierung aus Satz 5.1.5 über den nun folgenden Satz 5.1.8.

Es sind die Diskretisierungen u^h und $u^{d,h}$ bis auf die Werte auf der Randcharakteristik identisch. Dies zeigt der

Satz 5.1.8 *Sei $q \in C^0(\mathbf{R})$ gerade. Sei $u_{i,j}^{d,h}$, $(i,j) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ wie in Satz 5.1.5. Dann gilt mit $u_{i,j}^h$ aus Abschnitt 5.1.1*

$$u_{i,j}^{d,h} = u_{i,j}^h$$

für $0 \leq i < N, i < j \leq 2N - i$.

Beweis: Es folgt

$$u_{i,i}^{d,h} = \frac{1}{2} \tag{5.15}$$

für $i \in \mathbf{N}$ nach $Stern_1$, siehe Abbildung 5.4. Es wird $u_{0,2}^{d,h}$ durch den Differenzenstern bestimmt und wir erhalten $u_{0,2}^{d,h} = 1 - h^2 q_0 = u_{0,2}^h$. Die Anwendung des Differenzensterns auch über die $(x = t)$-Achse, $Stern_2$, ergibt für $i \geq 1$ wegen $u_{i,i}^{d,h} = \frac{1}{2}$ den Differenzenstern zu (5.7) der Diskretisierung des gemischten Problems. Für den Differenzenstern $Stern_3$ innerhalb des Gebietes $t > x > 0$ mit dem Term $u_{i,i}^{d,h} - u_{i+1,i+1}^{d,h}$ ist der Wert von $u_{i,i}^{d,h} = u_{i+1,i+1}^{d,h}$ unerheblich. Es gilt für $i \geq 0$

$$u_{i,i+1}^{d,h} = 1 - \frac{h^2}{2} \sum_{l=1}^{i} q_l \tag{5.16}$$

und $u_{i,i+1}^{d,h} = u_{i,i+1}^h$. Es gilt außerdem $u_{-1,j}^{d,h} = u_{1,j}^{d,h}$, $j \geq 0$. Daraus folgt durch gerade Symmetrie im ersten Index und mit Induktion die Behauptung des Satzes.

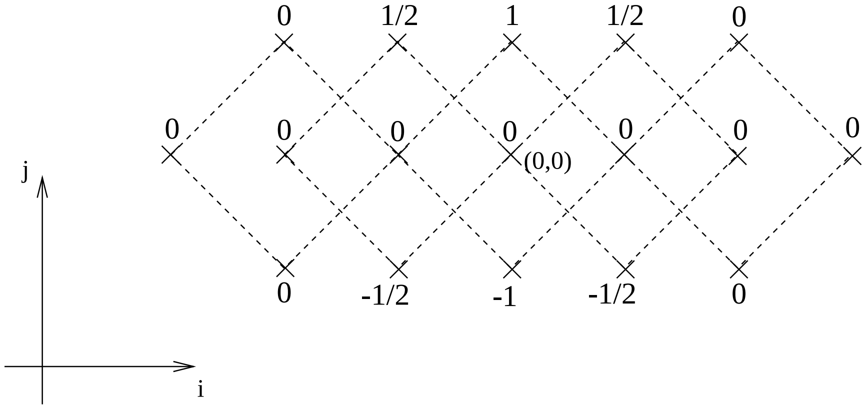

Abbildung 5.5: Ausgewählte Werte der Diskretisierung zu den distributiven Anfangswerten $u(x,0) = 0$ und $u_t(x,0) = 2\delta(x)$ auf dem Ganzraum.

□

Bemerkung 5.1.9 *Die aus dem Satz 5.1.5 stammenden Werte* $\{u_{i,j}^{d,h}\}_{(i,j)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{N}}$ *sehen wir als Diskretisierung des distributiven Cauchyproblems der oberen Halbebene an.*

1. *Es gelten die Bedingungen des Satzes 5.1.5 und außerdem gelte der 5-Punkt Differenzenstern für* $(i,j) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$*. Diese Bedingungen werden von einer eindeutig existierenden Diskretisierung* $u_{i,j}^{d,h}$ *auf* $(i,j) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ *erfüllt, die auf* $\mathbf{Z}\times\mathbf{N}$ *mit dem Resultat des Satz 5.1.5 übereinstimmt, und die im zweiten Index ungerade ist. Sie kann als Diskretisierung des ungerade auf den ganzen Raum* $\mathbf{R}^2$ *erweiterten distributiven Cauchyproblems der oberen Halbebene angesehen werden.*

2. *Ersetzen wir in Satz 5.1.5 die Bedingung, daß* q *gerade ist, durch* $q \in C^0(\mathbf{R}^{\geq 0})$ *und* $u_{-1,j}^{d,h} = u_{1,j}^{d,h}$*,* $j \in \mathbf{N}$*, dann folgen mit der Anwendung des 5-Punkt Differenzensterns auf* $i \geq 0$ *dieselben Werte* $u_{i,j}^{d,h}$ *wie im Satz. Dies kann als eine Diskretisierung des Viertelraumproblems im rechten oberen Quadranten mit der Randbedingung* $u_x(0,t) = 0$ *angesehen werden.*

Mit der Wahl $u_{i,i}^{d,h} = 1$ für $i \geq 1$ nach Bemerkung 5.1.1 ist der Verlust einer Ordnung im Fehler hinzunehmen. Wegen $\lim_{m\to\infty}(\lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to 0} u_m(x+\epsilon_1, x+\epsilon_2)) = \frac{1}{2}$ für $x > 0$ nach Bemerkung 4.1.8 sagen wir, daß die Diskretisierung mit $u_{i,i}^{d,h} = \frac{1}{2}$ für $i \geq 1$ der Idee der kontinuierlichen Problemformulierung näher kommt und der Anwendung des Differenzensterns über eine Sprungcharakteristik Rechnung trägt.

Für eine spätere Anwendung seien noch die folgenden Formeln angegeben.
Es gilt $u_{0,1}^h = 1 - h^2 q_0$ und für $i \geq 1$

$$u_{i,i+2}^{d,h} = u_{i-1,i+1}^{d,h} - h^2 q_i u_{i,i+1}^{d,h} = 1 - h^2 q_0 - h^2 \sum_{l=1}^{i} q_l \Big(1 - \frac{h^2}{2}\sum_{k=1}^{l} q_k\Big). \tag{5.17}$$

Des weiteren für $i \geq 0$

$$u_{i,i+3}^{d,h} = u_{i-1,i+2}^{d,h} - h^2 q_i u_{i,i+2}^{d,h} + u_{i+1,i+2}^{d,h} - u_{i,i+1}^{d,h} = u_{i-1,i+2}^{d,h} - h^2 q_i u_{i,i+2}^{d,h} - \frac{h^2}{2} q_{i+1}. \tag{5.18}$$

5.2 Eine Diskretisierung für DP2

Wir lösen das direkte gemischte Problem

$$v_{tt}(x,t) - v_{xx}(x,t) + q(x)v(x,t) = 0 \tag{5.19}$$

in $\Omega = \{(x,t)|0 < x < 1, x < t < 2-x\}$ mit der Randbedingung

$$v_x(0,t) = 0 \qquad t \in [0,2]$$

und den charakteristischen Randwerten

$$v(x,x) = -\frac{1}{2}\int_0^x q(\xi)d\xi \qquad x \in [0,1],$$

vergleiche Problem DP2_GEP in Abschnitt 3.8, approximativ durch ein Differenzenverfahren. Dazu nutzen wir auch die von einer Lösung des gemischten Problems erfüllten Konsistenzbedingungen

$$\lim_{t\searrow 0} v(0,t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t\searrow 0} v_t(0,t) = -\frac{1}{2}q(0).$$

Diese Problemformulierung und die für die Existenz einer Lösung des Problems notwendigen Konsistenzbedingungen folgen für $q \in C^1([0,1])$ aus den Integralgleichungen aus Satz 4.1.1 und Satz 4.2.1 für $v = u_t$ mit $h_1 = 0$ und $k = 2$.

Die Lösung des gemischten Problems ist auf Ω gleich der Lösung des auf der oberen Halbebene formulierten distributiven Cauchyproblems $v_{tt} - v_{xx} + q(x)v = 0$ mit den Anfangswerten $v(x,0) = 2\delta(x)$, $v_t(x,0) = 0$ und geradem Koeffizienten $q \in C^0(\mathbf{R})$ mit $q|_{[0,\infty)} \in C^1([0,\infty))$ und $q|_{(-\infty,0]} \in C^1((-\infty,0])$, wenn dieser auf $[0,1]$ mit dem Koeffizienten q aus Gleichung (5.19) übereinstimmt. Im folgenden Abschnitt führen wir eine auf $\overline{\Omega}$ zum gemischten Problem konsistente Diskretisierung ein. In Abschnitt 5.2.2 geben wir einen Ansatz zu einer Diskretisierung des distributiven Problems auf dem Gitter $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ an, den wir zunächst nur intuitiv rechtfertigen. Mit den Beweistechniken aus Abschnitt 8.5 folgt später, daß sich die Resultate der Diskretisierungen dieser beiden Abschnitte auf in Ω liegenden Gitterpunkten nur um Terme der Ordnung h^2 voneinander unterscheiden.

5.2.1 Ein konsistentes Differenzenverfahren für das gemischte Problem

Sei $n \in \mathbf{N}^{\geq 1}$ und $h = \frac{1}{n}$. Wir definieren eine Approximation $v^h_{i,j}$ zu $v_{i,j} = v(ih, jh)$ auf dem Gitter $(i,j) \in \{(k,l) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}|\ (kh, lh) \in \overline{\Omega}\} \cup \{(-1,l)|\ l \in \mathbf{N}, 1 \leq l \leq 2n-1\}$. Dazu führen wir eine konsistente Diskretisierung des gemischten Problems ein. Der Differentialoperator $P(D) = \frac{d^2}{dt^2} - \frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ wird mit dem 5-Punkt Differenzenstern aus Abbildung 5.1 für $\theta = 1$ und $h = \Delta x = \Delta t$ diskretisiert: Es gelte für $0 \leq i \leq n-1$, $i + 2 \leq j \leq 2n - i$,

$$v^h_{i,j} = v^h_{i+1,j-1} + v^h_{i-1,j-1} - v^h_{i,j-2} - h^2 q_i v^h_{i,j-1}.$$

Die Diskretisierung ist mit $q \in C^3([0,1])$, damit $v \in C^4(\Omega)$, konsistent von der Ordnung zwei. Die charakteristischen Randwerte diskretisieren wir mit Hilfe der zusammengesetzten Trapezregel, es sei

$$v^h_{0,0} = 0,\ \ v^h_{1,1} = -\frac{h}{4}(q(0) + q(h)) \quad \text{und} \quad v^h_{i+1,i+1} = v^h_{i,i} - \frac{h}{4}\Big(q(ih) + q((i+1)h)\Big) \quad \text{für } i \leq n-1.$$

Für das direkte Problem ist q bekannt und es können auch Verfahren höherer Ordnung für die Approximation des Integrals benutzt werden. Wegen der Konsistenzbedingung des kontinuierlichen Problems setzen wir $v^h_{0,1} = v^h_{0,0} - \frac{h}{2}q(0)$. Es gilt dann für $v \in C^2(\overline{\Omega})$ $|v^h_{0,1} - v_{0,1}| = O(h^2)$. An der $(x = 0)$-Achse wählen wir zentrierte Differenzen

$$v^h_{-1,j} = v^h_{1,j} \qquad \text{für } j > 1$$

und wenden auch dort, für $i = 0$, den Differenzenstern an. Mit den bisher angegebenen Differenzensternen allein ist v^h noch nicht auf dem ganzen Gitter bestimmbar. Wir nutzen weiter die aus dem Beweis zu Satz 3.5.2 folgenden Gleichungen

$$-(v_x(x,x) + v_t(x,x)) = -\frac{d}{dx}(v(x,x)) = \frac{1}{2}q(x).$$

Eine formale Entwicklung ohne Berücksichtigung von Existenzfragen für die Ableitungen liefert

$$\frac{v_{i,i+1} - v_{i-1,i}}{h} = (v_t + v_x)_{i,i} + \frac{h}{2}(v_{tt} - v_{xx})_{i,i} + \frac{h^2}{6}(v_{ttt} + v_{xxx})_{i,i} + O(h^3). \tag{5.20}$$

Es folgt für $q \in C^1([0,1])$ nach Bemerkung 3.5.3 $v \in C^2(\overline{\Omega})$ und wir erhalten einen von der Ordnung eins konsistenten Differenzenstern

$$v^h_{i,i+1} = -\frac{h}{2} q_i + v^h_{i-1,i}.$$

Es gilt $v^h_{i,i+1} - v_{i,i+1} = v^h_{i-1,i} - v_{i-1,i} + O(h^2)$ und daraus folgt $|v^h_{i,i+1} - v_{i,i+1}| \leq |v^h_{0,1} - v_{0,1}| + O(h)$. Der Einfluß des Fehlers in den mit diesen Differenzen berechneten Werten $v^h_{0,j}$ bei der Lösung des inversen Problems über die Gel'fand-Levitansche Integralgleichung ist aber derart groß, daß das numerische Verfahren unbrauchbar wird. Die Konsistenzordnung läßt sich mit dem folgenden Schritt um eins erhöhen. Mit Hilfe der Integralgleichungen aus dem Beweis zu Satz 3.5.2 folgt die Existenz und Gültigkeit von

$$v_{tt}(x,x) - v_{xx}(x,x) + q(x)v(x,x) = 0.$$

So können wir einen weiteren Term der Gleichung (5.20) in die Diskretisierung einbeziehen und erhalten unter der Voraussetzung $q \in C^2([0,1])$, damit $v \in C^3(\overline{\Omega})$, für $i \geq 1$ einen Differenzenstern mit Konsistenzordnung zwei in h,

$$v^h_{i,i+1} = v^h_{i-1,i} - \frac{h}{2} q_i - \frac{h^2}{2} q_i v^h_{i,i}.$$

Der auftretende Term $v^h_{i,i}$ wird mit einer $O(h^2)$-Diskretisierung bestimmt.

Bemerkung 5.2.1 *Der* 5*-Punkt Differenzenstern an* (i,i) *hat mit* $v^h_{i,i-1} = v^h_{i+1,i} = 0$ *die Gestalt*

$$v^h_{i,i+1} = v^h_{i-1,i} - h^2 q_i v^h_{i,i}.$$

Die Werte $v^h_{i,j}$, welche die obigen Gleichungen erfüllen, existieren auf dem Gitter $\{(k,l) | (kh,lh) \in \overline{\Omega}\}$ eindeutig. Der Beweis, ebenso wie ein Algorithmus zur Berechnung der Werte, basiert auf dem Schritt: Sei $l_0 \in \mathbf{N}$ mit $0 \leq l_0 < 2n$. Bei gegebenen $v^h_{i,j}$, $(i,j) \in \{(k,l) | (kh,lh) \in \overline{\Omega}, l_0 - 1 \leq l \leq l_0\}$, sind mit den Gleichungen die Werte v^h_{i,l_0+1}, $(i, l_0+1) \in \{(k,l) | (kh,lh) \in \overline{\Omega}\}$, eindeutig bestimmbar. Die Berechnung der Werte v^h_{i,l_0+1}, $0 \leq i \leq l_0+1$, nennen wir die Durchführung eines Zeitschritts des Algorithmus.

Die folgenden Gleichungen werden in einem späteren Abschnitt genutzt. Durch sukzessives Einsetzen folgt

$$v^h_{i,i+1} = v^h_{0,1} - \frac{h}{2} \sum_{l=1}^{i} q_l - \frac{h^2}{2} \sum_{l=1}^{i} q_l \Big(-\frac{h}{4}(q_0 + 2\sum_{k=1}^{l-1} q_k + q_l) \Big). \tag{5.21}$$

Es gilt außerdem

$$v^h_{0,2} = 2v^h_{1,1} - h^2 q_0 v^h_{0,1} - v^h_{0,0} = -\frac{h}{2}(q_0 + q_1) - h^2 q_0 (-\frac{h}{2} q_0) \tag{5.22}$$

und für $i \geq 1$

$$v^h_{i,i+2} = v^h_{i-1,i+1} - h^2 q_i v^h_{i,i+1} + v^h_{i+1,i+1} - v^h_{i,i} = v^h_{i-1,i+1} - h^2 q_i v^h_{i,i+1} - \frac{h}{4}(q_i + q_{i+1}). \tag{5.23}$$

5.2.2 Ein Differenzenverfahren für das distributive Problem

Die Lösung des für v formulierten gemischten Problems ist auf Ω gleich der Lösung des auf der oberen Halbebene formulierten distributiven Cauchyproblems $v_{tt} - v_{xx} + q(x)v = 0$ mit den Anfangswerten $v(x,0) = 2\delta(x)$, $v_t(x,0) = 0$ und geradem Koeffizienten $q \in C^0(\mathbf{R})$ mit $q|_{[0,\infty)} \in C^1([0,\infty))$ und $q|_{(-\infty,0]} \in C^1((-\infty,0])$, wenn dieser auf $[0,1]$ mit dem Koeffizienten des gemischten Problems für v auf Ω übereinstimmt. So, wie die distributive Lösung des Problems DP2 durch Differentiation nach der t-Variablen aus der distributiven Lösung des Problems DP1 folgt, so machen wir für eine Diskretisierung $v^{d,h}$ den Ansatz zentrierter Differenzen der Diskretisierung $u^{d,h}$ aus Abschnitt 5.1.2. Dabei benutzen wir die Diskretisierung auf dem Gitter $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. Es sei für $(i,j) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$

$$v^{d,h}_{i,j} = \frac{u^{d,h}_{i,j+1} - u^{d,h}_{i,j-1}}{2h}. \tag{5.24}$$

Dann erfüllt auch $v_{i,j}^{d,h}$ den 5-Punkt Differenzenstern. $v_{i,j}^{d,h}$ ist gerade im ersten und im zweiten Index.

Wir geben bestimmte Werte explizit an, um $v^{d,h}$ mit der diskreten Lösung v^h des gemischten Problems und mit der distributiven Lösung vergleichen zu können. Insbesondere folgt eine sinnvoll interpretierbare Diskretisierung der δ-Distribution entlang der $(x=t)$- und $(x=-t)$-Achse.
Die zentrierten Differenzen ergeben $v_{0,0}^{d,h}=\frac{1}{h}$, $v_{-1,0}^{d,h}=v_{1,0}^{d,h}=\frac{1}{2h}$ und

$$v_{i,0}^{d,h} = 0 \qquad \text{für } i \in \mathbf{Z}\setminus\{-1,0,1\}, \tag{5.25}$$

$$v_{i+1,i}^{d,h} = \frac{1}{4h} \qquad \text{für } i \geq 1, \tag{5.26}$$

$$v_{i,i}^{d,h} = \frac{1}{2h} - \frac{h}{4}\sum_{l=1}^{i} q_l \qquad \text{für } i \geq 1. \tag{5.27}$$

Desweiteren folgt

$$v_{0,1}^{d,h} = \frac{1}{2h} - \frac{h}{2}q_0, \tag{5.28}$$

$$v_{i,i+1}^{d,h} = \frac{1}{4h} - \frac{h}{2}q_0 - \frac{h}{2}\sum_{l=1}^{i} q_l + \frac{h^3}{4}\sum_{l=1}^{i} q_l(\sum_{k=1}^{l} q_k) \qquad \text{für } i \geq 1, \tag{5.29}$$

$$v_{0,2}^{d,h} = -\frac{h}{2}q_1 - \frac{h}{2}q_0(1-h^2q_0), \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned}
v_{i,i+2}^{d,h} &= v_{i-1,i+1}^{d,h} - \frac{h}{4}q_{i+1} - h^2 q_i v_{i,i+1}^{d,h} \\
&= v_{i-1,i+1}^{d,h} - \frac{h}{4}(q_i + q_{i+1}) - h^2 q_i (v_{i,i+1}^{d,h} - \frac{1}{4h}) \\
&= v_{0,2}^{d,h} - \frac{h}{4}\sum_{l=1}^{i}(q_l + q_{l+1}) - h^2 \sum_{l=1}^{i} q_l (v_{l,l+1}^{d,h} - \frac{1}{4h}) \\
&= -\frac{h}{2}(q_0 + q_1) + \frac{h^3}{2}q_0^2 - \frac{h}{4}\sum_{l=1}^{i}(q_l + q_{l+1}) \\
&\quad -h^2 \sum_{l=1}^{i} q_l(-\frac{h}{2}q_0 - \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{l} q_k + \frac{h^3}{4}\sum_{k=1}^{l} q_k(\sum_{j=1}^{k} q_j)) \qquad \text{für } i \geq 1.
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Dieselben Werte $v_{i,j}^{d,h}$ können mit den im folgenden Satz angegebenen Regeln erzeugt werden.

Satz 5.2.2 *Sei $q \in C^0(\mathbf{R})$ gerade. Sei $v_{-1,0}^{d,h}=\frac{1}{2h}=v_{1,0}^{d,h}$, $v_{0,0}^{d,h}=\frac{1}{h}$ und $v_{i,0}^{d,h}=0$ für $i \in \mathbf{Z}\setminus\{-1,0,1\}$. Es sei $v_{i,j}^{d,h}$ gerade im zweiten Index. Dann existieren die Werte $v_{i,j}^{d,h}$, $(i,j) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$, welche außerdem dem 5-Punkt Differenzenstern genügen auf dem Gitter $(i,j) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ eindeutig. Diese Werte stimmen mit den über (5.24) erzeugten Werten überein.*

$\delta_{i,j}$ bezeichne die $\frac{1}{h}$-Anteile von $v_{i,j}^{d,h}$, d.h. es gelte

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{4h} & \text{falls } |i-j|=1 \text{ oder } |i+j|=1 \text{ und } i,j \neq 0, \\ \frac{1}{2h} & \text{falls } |i|=|j|\neq 0 \text{ oder } (i,j) \in \{(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}, \\ \frac{1}{h} & \text{falls } i=j=0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{5.32}$$

siehe Abbildung 5.6. $\delta_{i,j}$ genügt dem 5-Punkt Differenzenstern mit $q \equiv 0$. Durch $\delta_{i,j}$ ist in dem Sinne eine diskrete Darstellung der Distribution $\delta(x-t)+\delta(x+t)$ auf der ganzen Ebene gegeben, daß für alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ gilt

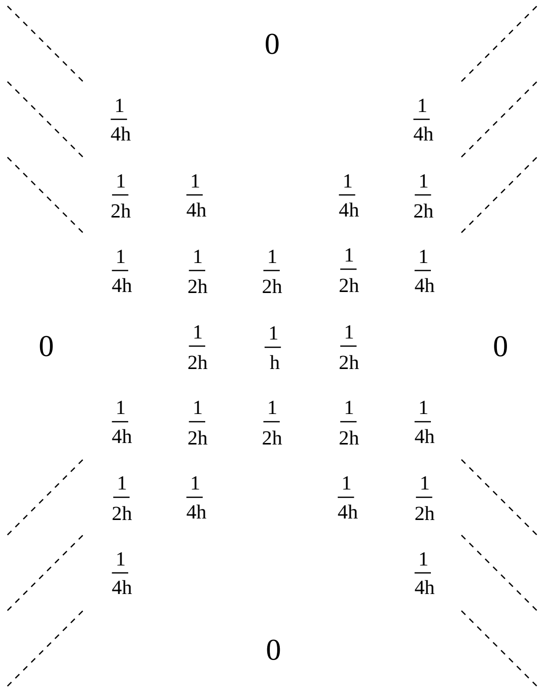

Abbildung 5.6: Die Werte von $\delta_{i,j}$.

$$
\begin{aligned}
& h^2 \textstyle\sum_{i,j=-\infty}^{\infty} \delta_{i,j}\phi(ih, jh) \\
= \;& h^2\left(\tfrac{1}{2h}\textstyle\sum_{i=-\infty}^{\infty}(\phi_{i,i}+\phi_{i,-i}) + \tfrac{1}{4h}\textstyle\sum_{i=-\infty}^{\infty}(\phi_{i,i+1}+\phi_{i,-i-1}+\phi_{i+1,i}+\phi_{i+1,-i})\right) \\
= \;& h\textstyle\sum_{i=-\infty}^{\infty}(\phi_{i,i}+\phi_{i,-i}) + O(h^2) \\
= \;& \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,x)+\phi(x,-x)dx + O(h^2) \\
= \;& < \delta(t-x)+\delta(t+x), \phi > +O(h^2).
\end{aligned}
$$

Es existiert eine Konstante $C \in \mathbf{R}$, unabhängig von ϕ, so daß der $O(h^2)$-Term betragsmäßig durch $Ch^2|\operatorname{supp}\phi|\,\|\phi\|_{2,\infty}$ von oben abgeschätzt werden kann.

Die zur i- und j-Achse parallelen Einschränkungen von $\delta_{i,j}$ diskretisieren im selben Sinn die zur x- und t-Achse parallelen Einschränkungen von $\delta(x-t)+\delta(x+t)$.

Bemerkung 5.2.3 *Sei $q \in C^0(\mathbf{R})$ gerade. Die für die Anfangswerte $v(x,0)=\delta(x)$ und $v_t(x,0)=0$ des Viertelraumproblems im rechten oberen Quadranten an sich naheliegende Diskretisierung des durch Spiegelung erhaltenen distributiven Ganzraumproblems über $v_{0,0}^{d,h} = \frac{2}{h}$, $v_{i,0}^{d,h} = 0$, $i \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$, und zentrierte Differenzen $v_{i,1}^{d,h} = v_{i,-1}^{d,h}$, $i \in \mathbf{Z}$, ist nicht sinnvoll. Sie führt nahe den Charakteristiken $t=x$ und $t=-x$ im folgenden Sinn zu einer Gitteraufteilung. Es gilt*

1. $v_{i,j}^{d,h} = \frac{1}{h}$ *für* $|i| = |j| \neq 0$,

2. $v_{0,1}^{d,h} = -hq_0$ *und* $v_{i,i+1}^{d,h} - v_{i-1,i}^{d,h} = -hq_i$ *für* $i \geq 1$, *somit*

$$v_{i,i+1}^{d,h} = -h\sum_{k=0}^{i} q_k \;=\; O(1)$$

für $i \geq 0$,

3. $v_{0,2}^{d,h} = h^3 q_0$ *und* $v_{i,i+2}^{d,h} - v_{i-1,i+1}^{d,h} = -h^2 q_i(-h\sum_{l=0}^{i} q_l)$ *für* $i \geq 1$, *somit*

$$v_{i,i+2}^{d,h} \;=\; h^3 q_0 + h^3\sum_{l=1}^{i} q_l(\sum_{k=0}^{l} q_k) \;=\; O(h)$$

für $i \geq 0$.

Diese Aufteilung in $O(h)$- und $O(1)$- Terme gilt nicht über dem gesamten Gitter. Sie ist aber hinreichend, um das Verfahren auf dem von uns betrachteten Gebiet unbrauchbar zu machen.

Auf die gleiche Art erhalten wir Ansätze für Diskretisierungen von Cauchy- und Viertelraumproblemen.

Bemerkung 5.2.4 *Die mit den Regeln des Satzes 5.2.2 erzeugten Werte $\{v_{i,j}^{d,h}\}_{(i,j)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}}$ sehen wir als Diskretisierung des gerade auf den ganzen Raum $\mathbf{R}^2$ erweiterten Cauchyproblems der oberen Halbebene $P(D)v = 0,\ v(x,0) = 2\delta(x),\ v_t(x,0) = 0$ an.*

1. *Auf $\mathbf{Z}\times\mathbf{N}$ werden dieselben Werte $\{v_{i,j}^{d,h}\}_{(i,j)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{N}}$ erzeugt, wenn $v_{-1,0}^{d,h} = \frac{1}{2h} = v_{1,0}^{d,h}$, $v_{0,0}^{d,h} = \frac{1}{h}$ und $v_{i,0}^{d,h} = 0$ für $i \in \mathbf{Z}\setminus\{1-,0,1\}$ gilt und mit $v_{i,-1}^{d,h} = v_{i,1}^{d,h}$, $i \in \mathbf{Z}$, der 5-Punkt Differenzenstern für $j \geq 1$ erfüllt wird. Das Resultat sehen wir als Diskretisierung des Cauchyproblems der oberen Halbebene an.*
2. *Setzen wir außerdem noch $v_{-1,j}^{d,h} = v_{1,j}^{d,h}$, $j \geq 0$, voraus und wenden den 5-Punkt Differenzenstern auf $i \geq 0$, $j \geq 1$ an, so erhalten wir auf $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ dieselben Werte $v_{i,j}^{d,h}$. Diese sehen wir als Diskretisierung des Viertelraumproblems mit $v_x(0,t) = 0$ an.*

Es folgen erste Vergleiche der Diskretisierung $v_{i,j}^{d,h}$ zur Diskretisierung des gemischten Problems $v_{i,j}^{h}$ nahe der $(x=t)$- Charakteristik an den Indizes $i = j \geq 0$, $i = j-1 \geq 0$ und $i = j-2 \geq 0$. Es gilt $v_{0,0}^{d,h} = \frac{1}{h} = \frac{1}{h} + v_{0,0}^{h}$,

$$v_{i+1,i+1}^{d,h} = \frac{1}{2}v_{i+1,i+1}^{h} + \frac{1}{2h} + \frac{h}{8}q_0 - \frac{h}{8}q_{i+1} \tag{5.33}$$

und

$$v_{0,1}^{d,h} = \frac{1}{2h} + v_{0,1}^{h}, \tag{5.34}$$

$$v_{i,i+1}^{d,h} = \frac{1}{4h} + v_{i,i+1}^{h} + \frac{h^3}{8}\sum_{l=1}^{i}(q_l q_0 + q_l^2). \tag{5.35}$$

Es gilt ebenfalls

$$v_{0,2}^{d,h} = v_{0,2}^{h} \tag{5.36}$$

und für $w_{i,i+2} = v_{i,i+2}^{d,h} - v_{i,i+2}^{h}$ folgt

$$w_{i,i+2} = w_{i-1,i+1} - h^2 q_i\Big(\frac{h^3}{8}\sum_{l=1}^{i}(q_l q_0 + q_l^2)\Big). \tag{5.37}$$

Sukzessives Einsetzen ergibt

$$w_{i,i+2} = -\frac{h^5}{8}\sum_{k=1}^{i} q_k \sum_{l=1}^{k}(q_l q_0 + q_l^2). \tag{5.38}$$

Für andere Indizes (i,j) mit $j \geq i+3$ erfüllen $v_{i,j}^{d,h}$ und $v_{i,j}^{h}$ dieselben Differenzensterne. Als diskrete Randwerte für die Berechnung dieser $v_{i,j}^{d,h}$ stehen die Werte $v_{i,i+1}^{d,h}$ und $v_{i,i+2}^{d,h}$ zur Verfügung, die sich von entsprechenden $v_{i,l}^{h}$ nach (5.35) und (5.37) abgesehen von $\frac{1}{h}$-Termen nur durch einen Term $O(h^2)$ unterscheiden. Der Fehler $O(h)$ aus (5.33) hat keinen Einfluß auf die weitere Berechnung.

Eine genauere Aussage zur Differenz $(v^h - v^{d,h})_{i,j}$ findet sich in Korollar 8.5.4, nachdem die entsprechenden Beweistechniken dafür eingeführt wurden.

Zur numerischen Lösung der direkten Probleme bei gegebenem Koeffizienten q werden die Differenzenverfahren für u^h aus Abschnitt 5.1.1 bzw. v^h aus Abschnitt 5.2.1 benutzt. Damit stehen als Eingabewerte für die Algorithmen zur approximativen Lösung der inversen Probleme die Mengen $\{u^h_{0,j}\}$ bzw. $\{v^h_{0,j}\}$ zur Verfügung.

5.3 Der Differenzenstern und diskretisierte Integralgleichungen

In der analytischen Formulierung ist eine Funktion u genau dann Lösung des gemischten Problems aus Satz 4.1.1 mit $k = 2$ und $h_1 = 0$, wenn sie Lösung des Systems (4.8), (4.9) und (4.10) von Integralgleichungen mit $v = u_t$ ist. Diese Äquivalenz besitzt ein Analogon in der diskreten Betrachtung. Wir zeigen in diesem Abschnitt, wie aus der Diskretisierung des gemischten Problems nach Abschnitt 5.1 eine Diskretisierung der Integralgleichungen folgt und umgekehrt. Hierin sind die Diskretisierungen zur jeweiligen analytischen Formulierung konsistent.

Methoden der vorgestellten Art erlauben auch den Vergleich von Diskretisierungsverfahren, die sich lediglich in den Differenzensternen zur Approximation von Randbedingungen unterscheiden, siehe Symes [53] und Abschnitt 8.5.1 für Anwendungen.

Das numerische Verfahren zur approximativen Lösung des direkten gemischten Problems aus Abschnitt 5.1 sei durch (5.3), (5.4), (5.5), (5.6) und (5.7) gegeben.

5.3.1 Eine Summenformel für u^h

In diesem Abschnitt leiten wir aus dem Differenzenverfahren eine Summenformel für u^h_{ij} her und zeigen, daß diese eine konsistente Diskretisierung der kontinuierlichen Integralgleichung (4.8) für $u(x_i, t_j)$ darstellt.

Lemma 5.3.1 *Es sei die Diskretisierung des gemischten Problems durch (5.3)-(5.6) und (5.7) gegeben. Es sei $j - 2 \geq i \geq 0$ und* $\overline{s} = \begin{cases} \frac{1}{2}(j-i-2) & \text{falls } i+j \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2}(j-i-3) & \text{falls } i+j \text{ ungerade.} \end{cases}$ *Dann gilt für alle $l \in \mathbf{N}$ mit $0 \leq l \leq \overline{s}$*

$$u^h_{ij} - u^h_{i-1,j-1} = u^h_{i+l+1,j-l-1} - u^h_{i+l,j-l-2} - h^2 \sum_{k=0}^{l} q_{i+k} u^h_{i+k,j-k-1}. \tag{5.39}$$

Beweis: Der Beweis erfolgt für gegebenes (i,j) mit $j - 2 \geq i \geq 0$ per Induktion nach l, $0 \leq l \leq \overline{s}$. Für $l = 0$ ist (5.39) gerade der 5-Punkt Differenzenstern. Es sei l so, daß $0 \leq l < \overline{s}$ und es gelte (5.39) für alle l_1 mit $0 \leq l_1 \leq l < \overline{s}$. Die Wahl von $\overline{s}$ ist so getroffen, daß der 5-Punkt Differenzenstern

$$u^h_{i+l+1,j-l-1} - u^h_{i+l,j-l-2} = u^h_{i+l+2,j-l-2} - u^h_{i+l+1,j-l-3} - h^2 q_{i+l+1} u^h_{i+l+1,j-l-2}$$

gilt. Einsetzen in die Gleichung (5.39) ergibt die Behauptung für $l + 1$.

□

Speziell für $l = \overline{s}$, siehe Abbildung 5.7, folgt aus dem numerischen Verfahren wegen $u^h_{k,k} = 1$ im Fall $i + j$ gerade

$$u^h_{i+\overline{s}+1,j-\overline{s}-1} - u^h_{i+\overline{s},j-\overline{s}-2} = u^h_{\frac{i+j}{2},\frac{i+j}{2}} - u^h_{\frac{i+j}{2}-1,\frac{i+j}{2}-1} = 0,$$

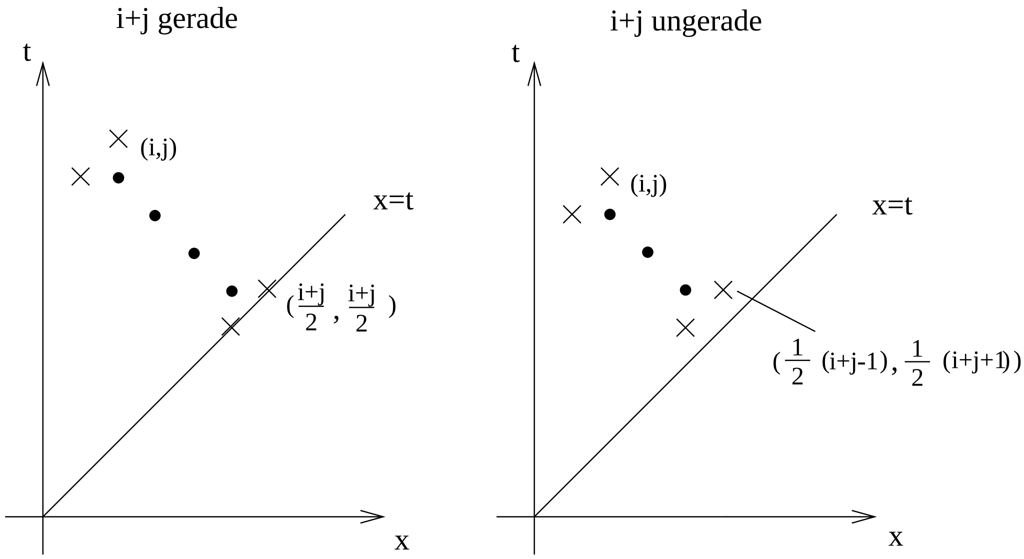

Abbildung 5.7: Eine Darstellung von Gleichung (5.39) mit $l = \overline{s}$. Kreise entsprechen $q_k u^h_{k,m}$-Werten, Kreuze entsprechen $u^h_{k,m}$-Werten.

somit

$$u^h_{ij} = u^h_{i-1,j-1} - h^2 \sum_{k=0}^{\frac{j-i}{2}-1} q_{i+k} u^h_{i+k,j-k-1}.$$

Wegen des Differenzensterns (5.7) gilt im Fall $i+j$ ungerade

$$u^h_{i+\overline{s}+1,j-\overline{s}-1} - u^h_{i+\overline{s},j-\overline{s}-2} = u^h_{\frac{i+j-1}{2},\frac{i+j+1}{2}} - u^h_{\frac{i+j-3}{2},\frac{i+j-1}{2}} = -\frac{h^2}{2} q_{\frac{i+j-1}{2}},$$

daher folgt

$$u^h_{ij} = u^h_{i-1,j-1} - h^2 \sum_{k=0}^{\frac{j-i-3}{2}} q_{i+k} u^h_{i+k,j-k-1} - \frac{h^2}{2} q_{\frac{i+j-1}{2}}.$$

Insgesamt folgt für $j-1 \geq i \geq 0$, $(i,j) \neq (0,1)$, die Gleichung

$$u^h_{ij} = u^h_{i-1,j-1} - h^2 \sum_{k=0}^{\tilde{s}} \omega_{i+k,j-k-1} q_{i+k} u^h_{i+k,j-k-1} \tag{5.40}$$

mit $\tilde{s} = \tilde{s}(i,j) = \begin{cases} \frac{j-i}{2} - 1 & \text{falls } i+j \text{ gerade,} \\ \frac{j-i-1}{2} & \text{falls } i+j \text{ ungerade,} \end{cases}$ und mit $\omega_{l,m} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } l = m, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$ In der Gleichung (5.40) kann $u^h_{i-1,j-1}$ wiederum durch eine entsprechende Formel ersetzt werden. Es kann durch sukzessives Einsetzen gezeigt werden, daß für $j-2 \geq i \geq 0$ und $0 \leq s \leq i+1$

$$u^h_{ij} = u^h_{i-s,j-s} - h^2 \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=0}^{\tilde{s}(i-l,j-l)} \omega_{i-l+k,j-l-k-1} q_{i-l+k} u^h_{i-l+k,j-l-k-1} \tag{5.41}$$

gilt. Diese Formel behält ihre Gültigkeit auch für $j = i+1$ und $0 \leq s \leq i$. Speziell für $s = i$ gilt mit $\tilde{s}(i-l,j-l) = \tilde{s}(i,j) = \tilde{s}$

$$u^h_{ij} = u^h_{0,j-i} - h^2 \sum_{l=0}^{i-1} \sum_{k=0}^{\tilde{s}} \omega_{i-l+k,j-l-k-1} q_{i-l+k} u^h_{i-l+k,j-l-k-1}.$$

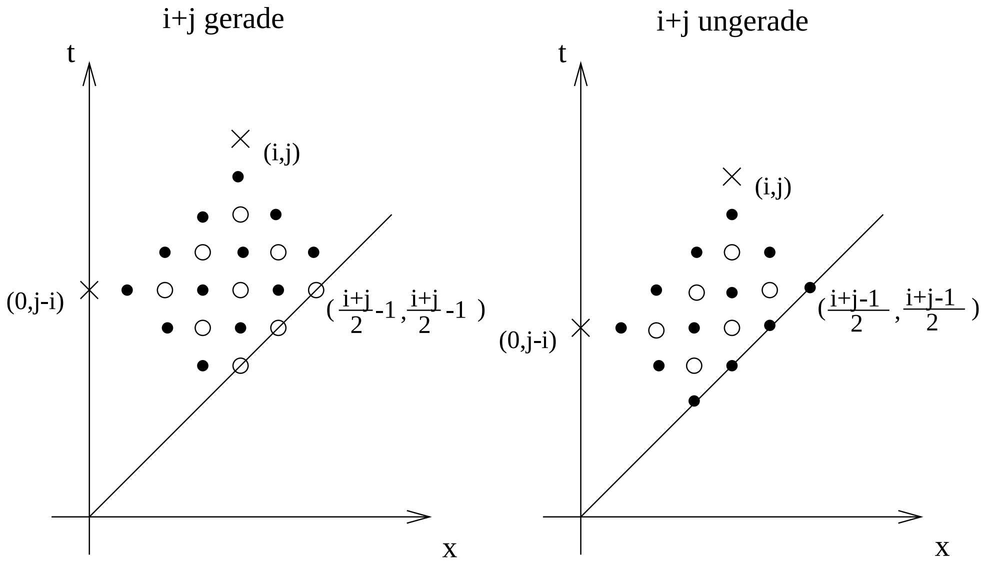

Abbildung 5.8: Eine Darstellung von Gleichung (5.42). Leere Kreise sind in der Formel nicht vorkommende Punkte des Diskretisierungsgitters. Die Punkte auf der $(x = t)$-Achse sind mit $\frac{1}{2}$ gewichtet.

Dies ist äquivalent zu

$$u_{ij}^h = u_{0,j-i}^h - h^2 \sum_{l=1}^{i} \sum_{k=0}^{\tilde{s}} \omega_{l+k,j-i+l-k-1} q_{l+k} u_{l+k,j-i+l-k-1}^h, \tag{5.42}$$

siehe Abbildung 5.8 zur Veranschaulichung. Die Gleichung (5.40) gilt auch für $u_{0,j}^h$ mit $j \geq 2$

$$u_{0,j}^h = u_{-1,j-1}^h - h^2 \sum_{k=0}^{\tilde{s}(0,j)} \omega_{k,j-k-1} q_k u_{k,j-k-1}^h.$$

Die Diskretisierung der linken Randbedingung liefert

$$u_{-1,j-1}^h = u_{1,j-1}^h$$

somit

$$u_{0,j}^h = u_{1,j-1}^h - h^2 \sum_{k=0}^{\tilde{s}(0,j)} \omega_{k,j-k-1} q_k u_{k,j-k-1}^h. \tag{5.43}$$

Mit $u_{1,j-1}^h = u_{0,j-2}^h - h^2 \sum_{k=0}^{\tilde{s}(1,j-1)} \omega_{k+1,j-k-2} q_{k+1} u_{k+1,j-k-2}^h$ folgt

$$u_{0,j}^h \;=\; u_{0,j-2}^h - h^2 \omega_{0,j-1} q_0 u_{0,j-1}^h - 2h^2 \sum_{k=0}^{\tilde{s}(1,j-1)} \omega_{k+1,j-k-2} q_{k+1} u_{k+1,j-k-2}^h. \tag{5.44}$$

Sukzessives Einsetzen führt zu den folgenden Gleichungen. Für $j \geq 2$ gilt im Fall, daß j gerade ist

$$u_{0,j}^h \;=\; 1 - h^2 q_0 \sum_{l=0}^{\frac{j-2}{2}} u_{0,j-1-2l}^h - 2h^2 \sum_{l=0}^{\frac{j-2}{2}} \sum_{k=0}^{\tilde{s}(1,j-1-2l)} \omega_{k+1,j-2l-k-2} q_{k+1} u_{k+1,j-2l-k-2}^h \tag{5.45}$$

und für ungerades j

$$u_{0,j}^h \;=\; 1 - h^2 q_0 \sum_{l=0}^{\frac{j-3}{2}} u_{0,j-1-2l}^h - 2h^2 \sum_{l=0}^{\frac{j-3}{2}} \sum_{k=0}^{\tilde{s}(1,j-1-2l)} \omega_{k+1,j-2l-k-2} q_{k+1} u_{k+1,j-2l-k-2}^h. \tag{5.46}$$

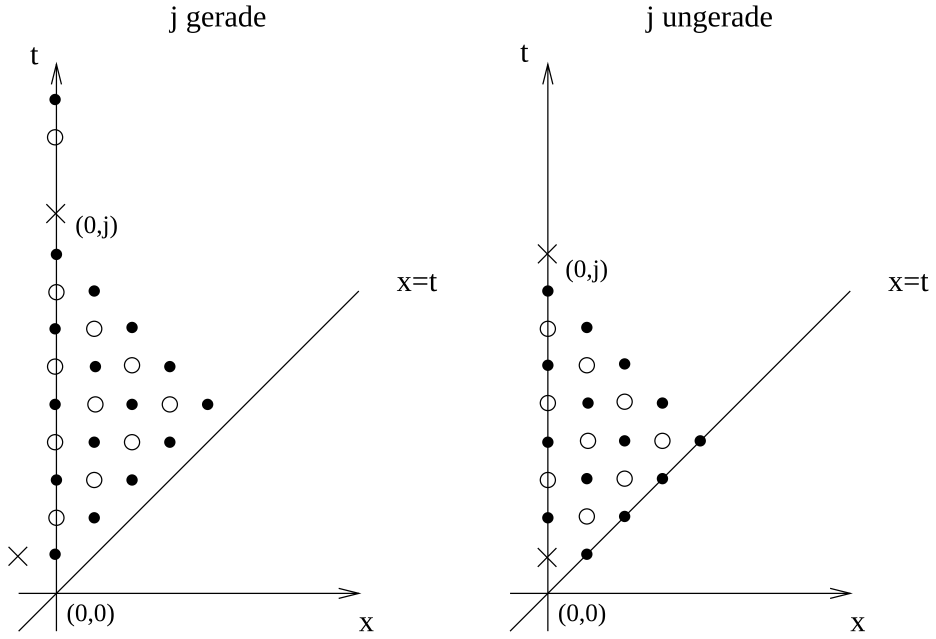

Abbildung 5.9: Zu den Formeln (5.45) und (5.46) für $u^h_{0,j}$. Die Punkte auf der $(x = t)$-Achse sind mit $\frac{1}{2}$ gewichtet.

Zur Veranschaulichung siehe auch die Abbildung 5.9. Sei $\tilde{t}(i,j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(j-i-2) & \text{falls } i+j \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2}(j-i-3) & \text{falls } i+j \text{ ungerade.} \end{cases}$
Dann folgt aus (5.42) für $j-2 \geq i \geq 0$

$$\begin{aligned} u^h_{i,j} &= 1 - h^2 q_0 \sum_{l=0}^{\tilde{t}(i,j)} u^h_{0,j-i-1-2l} - 2h^2 \sum_{l=0}^{\tilde{t}(i,j)} \sum_{k=0}^{\tilde{s}(1,j-i-1-2l)} \omega_{k+1,j-i-2l-k-1} q_{k+1} u^h_{k+1,j-i-2l-k-2} \\ &\quad -h^2 \sum_{l=1}^{i} \sum_{k=0}^{\tilde{s}} \omega_{l+k,j-i+l-k-1} q_{l+k} u^h_{l+k,j-i+l-k-1}. \end{aligned} \tag{5.47}$$

Aus dieser Formel erhalten wir auch den Differenzenstern zurück.

Sei

$$\begin{aligned} T^h_u(u^h,q)_{ij} &= u^h_{ij} - \Big(1 - h^2 q_0 \sum_{l=0}^{\tilde{t}(i,j)} u^h_{0,j-i-1-2l} \\ &\quad -2h^2 \sum_{l=0}^{\tilde{t}(i,j)} \sum_{k=0}^{\tilde{s}(1,j-i-1-2l)} \omega_{k+1,j-i-2l-k-2} q_{k+1} u^h_{k+1,j-i-2l-k-2} \\ &\quad -h^2 \sum_{l=1}^{i} \sum_{k=0}^{\tilde{s}} \omega_{l+k,j-i+l-k-1} q_{l+k} u^h_{l+k,j-i+l-k-1}\Big). \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, daß die Gleichung (5.47) eine konsistente O(h)- Diskretisierung der Integralgleichung (4.8) für $u(x_i,t_j) = u(ih,jh)$ mit $k = 2$ und $h_1 = 0$ ist, vergleiche auch die Abbildungen 4.1 und 5.7 - 5.9. Dazu bilden wir $T^h_u(u)$, d.h. wir ersetzen die Werte u^h_{ij} durch die exakten Werte $u(x_i,t_j)$. In diesem und in den folgenden Abschnitten nutzen wir die Voraussetzungen und Ergebnisse zum kontinuierlichen Problem. Es sei $q \in C^0([0,1])$. Dann existiert eine Konstante $c \in \mathbf{R}$, so daß auf Ω gilt $\|q\|_\infty, \|u\|_\infty, \|u_t\|_\infty \leq c$.

i) Es gilt für die Summe aus (5.42) mit $u^h_{k,l}$ ersetzt durch $u_{k,l} = u(kh, lh)$

$$\begin{aligned} & h^2 \sum_{l=1}^{i} \sum_{k=0}^{\tilde{s}(i,j)} \omega_{l+k,j-i+l-k-1} q_{l+k} u_{l+k,j-i+l-k-1} \\ = \;& h^2 \sum_{l=1}^{i} \sum_{k=l}^{\tilde{s}(i,j)+l} \omega_{k,j-i+2l-k-1} q_k u_{k,j-i+2l-k-1} \\ = \;& h^2 \sum_{l=j-i}^{j-1} \sum_{k=l-j+i+1}^{\tilde{s}(i,j)+l-j+i+1} \omega_{k,i-j+2l-k+1} q_k u_{k,i-j+2l-k+1}. \end{aligned} \tag{5.48}$$

Der zweite Integralterm aus (4.8) hat an $(x,t) = (ih, jh)$ die Gestalt

$$\int_{(j-i)h}^{jh} \int_{\tau-(j-i)h}^{\tau - \frac{(j-i)h}{2}} q(\xi) u(\xi, 2\tau - \xi - (j-i)h) d\xi d\tau. \tag{5.49}$$

Wir wenden die Trapezregel in jeder Integrationsrichtung an und setzen $q \in C^2([0,1])$ voraus. (5.49) ist dann für $i+j$ gerade gleich

$$h^2 \sum_{l=j-i}^{j} \nu_{l,j-i,j} \sum_{k=l-j+i}^{l-\frac{j-i}{2}} \nu_{k,l-j+i,l-\frac{j-i}{2}} q(kh) u(kh, (2l-k-j+i)h) + O(h^2), \tag{5.50}$$

mit $\nu_{j,k,l} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } j \in \{k,l\}, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$ Die Differenz der Terme in (5.48) und (5.50) ist damit ein Term $O(h)$. Daß der Fehler $O(h)$ und nicht $O(h^2)$ beträgt liegt daran, daß die Faktoren der Terme aus (5.48), die auf dem Rand der Indexmenge über die summiert wird liegen, um den Faktor zwei zu groß sind.

Für $i+j$ ungerade ist das Integral aus (5.49) gleich

$$\int_{(j-i)h}^{jh} \int_{\tau-(j-i)h}^{\tau - \frac{(j-i-1)h}{2}} q(\xi) u(\xi, 2\tau - \xi - (j-i)h) d\xi d\tau + O(h).$$

Die Anwendung der Trapezregel führt ebenfalls zu einer Summe, deren Fehler zu (5.48) gerade $O(h)$ ist.

ii) Mit einer aus der Trapezregel hergeleiteten Diskretisierung des ersten Integralterms aus (4.8) folgt

$$\int_0^{(j-i)h} \int_0^{\frac{\tau}{2}} q(\xi) u(\xi, \tau - \xi) d\xi d\tau \;=\; h^2 \sum_{l=0}^{j-i} \nu_{l,0,j-i} \sum_{k=0}^{[\frac{l}{2}]} \nu_{k,0,[\frac{l}{2}]} q(kh) u(kh, (l-k)h) + O(h)$$

mit $[\frac{l}{2}] = \begin{cases} k & \text{falls } l = 2k,\ k \in \mathbf{N}, \\ k & \text{falls } l = 2k+1,\ k \in \mathbf{N}. \end{cases}$ Die Fehlerordnung eins in h folgt aus der Approximation des inneren Integrals durch eine Integration über ein Intervall dessen Länge durch h ganzzahlig teilbar ist.

Der Vergleich mit (5.47) zeigt, daß darin nur über jeden zweiten Gitterpunkt summiert wird, siehe Abbildung 5.9, dafür aber mit dem Faktor zwei gewichtet. Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} & -h^2 q_0 \textstyle\sum_{l=0}^{\tilde{t}(i,j)} u_{0,j-i-1-2l} - 2h^2 \sum_{l=0}^{\tilde{t}(i,j)} \sum_{k=0}^{\tilde{s}(1,j-i-1-2l)} \omega_{k+1,j-i-2l-k-2} q_{k+1} u_{k+1,j-i-2l-k-2} \\ = \;& h^2 \textstyle\sum_{l=0}^{j-i} \nu_{l,0,j-i} \sum_{k=0}^{[\frac{l}{2}]} \nu_{k,0,[\frac{l}{2}]} q(kh) u(kh, (l-k)h) + O(h). \end{aligned}$$

Mit **i)** und **ii)** ist die Konsistenz der Summe (5.47) zur Integralgleichung (4.8) gezeigt und es folgt das Resultat dieses Abschnitts

$$T^h_u(u,q) = O(h).$$

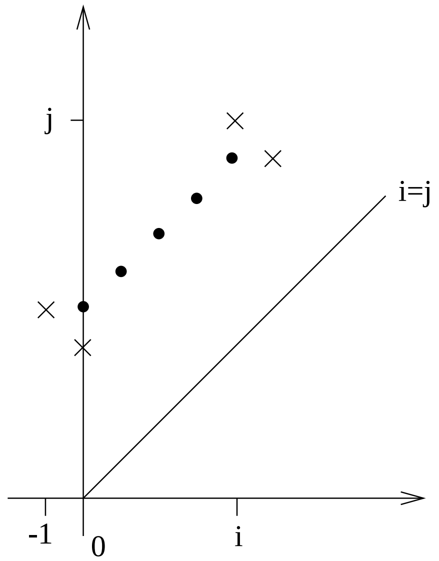

Abbildung 5.10: Eine Darstellung von Gleichung (5.52).

5.3.2 Eine Summenformel für $(u_t)^h$

In diesem Abschnitt leiten wir eine Summenformel für $(u_t)^h_{ij}$ her und zeigen, daß diese eine konsistente Diskretisierung der kontinuierlichen Integralgleichung (4.9) für $v = u_t(x_i, t_j)$ darstellt.

Lemma 5.3.2 *Es sei die Diskretisierung des gemischten Problems durch (5.1)-(5.6) und (5.7) gegeben. Sei $j - 2 \geq i \geq 0$. Dann gilt für alle $l \in \mathbf{N}$ mit $0 \leq l \leq i$*

$$u^h_{i,j} - u^h_{i+1,j-1} \quad = \quad u^h_{i-l-1,j-l-1} - u^h_{i-l,j-l-2} - h^2 \sum_{k=0}^{l} q_{i-k} u^h_{i-k,j-k-1}. \tag{5.51}$$

Beweis: Der Beweis erfolgt für gegebenes (i, j) mit $j - 2 \geq i \geq 0$ per Induktion nach l, $0 \leq l \leq i$. Für $l = 0$ ist (5.51) gerade der 5-Punkt Differenzenstern. Es sei l so, daß $0 \leq l < i$ und es gelte (5.51) für alle l_1 mit $0 \leq l_1 \leq l < i$. Es gilt die Gleichung

$$u^h_{i-l-1,j-l-1} - u^h_{i-l,j-l-2} \;=\; u^h_{i-l-2,j-l-2} - u^h_{i-l-1,j-l-3} - h^2 q_{i-l-1} u^h_{i-l-1,j-l-2}.$$

Einsetzen in (5.51) ergibt die Behauptung für $l + 1$.

□

Für $j = i + 2$ hat die Gleichung (5.51) wegen $u^h_{i,i} = 1$ die Gestalt

$$u^h_{i,i+2} \;=\; u^h_{i-l-1,i-l+1} - h^2 \sum_{k=0}^{l} q_{i-k} u^h_{i-k,i-k+1}.$$

Für $j = i + 1$ gilt wegen (5.7)

$$u^h_{i,i+1} \;=\; u^h_{i-l-1,j-l-1} - \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{l} q_{i-k} u^h_{i-k,i-k} \;=\; u^h_{i-l-1,j-l-1} - \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{l} q_{i-k}.$$

Speziell für $l = i$ gilt

$$u^h_{ij} = u^h_{i+1,j-1} + u^h_{-1,j-i-1} - u^h_{0,j-i-2} - h^2 \sum_{k=0}^{i} q_{i-k} u^h_{i-k,j-k-1}, \tag{5.52}$$

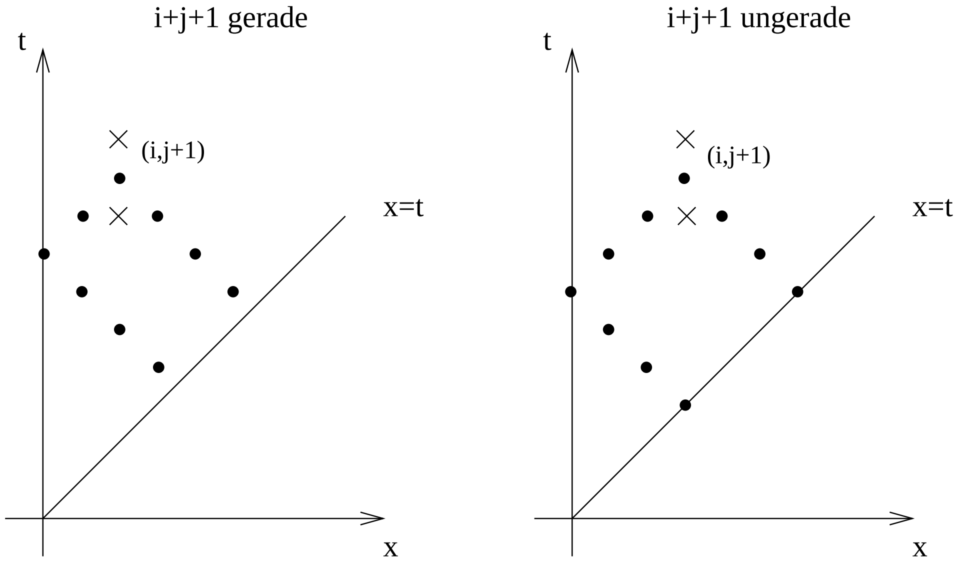

Abbildung 5.11: Zur Summenformel (5.53) für $\frac{1}{2h}(u^h_{i,j+1} - u^h_{i,j-1})$. Die Punkte auf der $(x = t)$-Achse haben die Gewichtung $\frac{1}{2}$.

siehe Abbildung 5.10. Für $j - 2 \geq i + 1 \geq 0$ erhalten wir aus (5.40)

$$\begin{aligned} u^h_{i+1,j} &= u^h_{i,j-1} - h^2 \textstyle\sum_{k=0}^{\tilde{s}(i+1,j)} \omega_{i+1+k,j-k-1} q_{i+1+k} u^h_{i+1+k,j-k-1} \\ &= u^h_{i,j-1} - h^2 A, \end{aligned}$$

mit $A = A(u^h, q)_{ij} = \sum_{k=1}^{\tilde{s}(i,j+1)} \omega_{i+k,j-k} q_{i+k} u^h_{i+k,j-k}$. Für $j - 2 \geq i - 1 \geq -1$ erhalten wir aus (5.52)

$$\begin{aligned} u^h_{i-1,j} &= u^h_{i,j-1} + u^h_{-1,j-i} - u^h_{0,j-i-1} - h^2 \textstyle\sum_{k=0}^{i-1} q_{i-1-k} u^h_{i-1-k,j-k-1} \\ &= u^h_{i,j-1} + u^h_{-1,j-i} - u^h_{0,j-i-1} - h^2 B, \end{aligned}$$

mit $B = B(u^h, q)_{ij} = \sum_{k=0}^{i-1} q_k u^h_{k,j-i+k}$. Aus der Diskretisierung der Randbedingung folgt $u^h_{-1,j-i} = u^h_{1,j-i}$. Es gilt daher mit $j - i - 1 \geq 1$ nach (5.40)

$$u^h_{-1,j-i} - u^h_{0,j-i-1} = u^h_{1,j-i} - u^h_{0,j-i-1} = -h^2 \sum_{k=0}^{\tilde{s}(1,j-i)} \omega_{k+1,j-i-k-1} q_{k+1} u^h_{k+1,j-i-k-1} =: -h^2 C,$$

mit $C = C(u^h, q)_{i,j}$. Insgesamt folgt für $j - 2 \geq i \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h}(u^h_{i,j+1} - u^h_{i,j-1}) &= \frac{1}{2h}(u^h_{i-1,j} - u^h_{i,j-1} + u^h_{i+1,j} - u^h_{i,j-1} - h^2 q_i u^h_{i,j}) \\ &= \frac{1}{2h}(-h^2 B + u^h_{-1,j-i} - u^h_{0,j-i-1} - h^2 A - h^2 q_i u^h_{i,j}) \\ &= \frac{1}{2h}(-h^2 B - h^2 C - h^2 A - h^2 q_i u^h_{i,j}). \end{aligned} \tag{5.53}$$

Zur Veranschaulichung der Summe (5.53) siehe auch Abbildung 5.11. Für $i = 0$ folgt

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2h}(u^h_{0,j+1} - u^h_{0,j-1}) &= \tfrac{1}{2h}(u^h_{-1,j} - u^h_{0,j-1} + u^h_{1,j} - u^h_{0,j-1} - h^2 q_0 u^h_{0,j}) \\ &= \tfrac{1}{2h}(2(u^h_{1,j} - u^h_{0,j-1}) - h^2 q_0 u^h_{0,j}) \\ &= -\tfrac{h}{2} q_0 u^h_{0,j} - h \textstyle\sum_{k=0}^{\tilde{s}(1,j)} \omega_{k+1,j-k-1} q_{k+1} u_{k+1,j-k-1}. \end{aligned}$$

Dies ist für $j + 1$ ungerade und $q \in C^2([0, 1])$ ein $O(h^2)$-konsistentes Differenzenverfahren zur Gleichung (4.9) mit $v = u_t$. Für $j + 1$ gerade ist es $O(h)$-konsistent.
Gleichung (5.53) ist für $i + j + 1$ ungerade ebenfalls $O(h^2)$-konsistent zu Gleichung (4.9), für $i + j + 1$ gerade ist sie $O(h)$-konsistent. Der Beweis erfolgt mittels Ersetzen der Ableitung u_t durch zentrierte

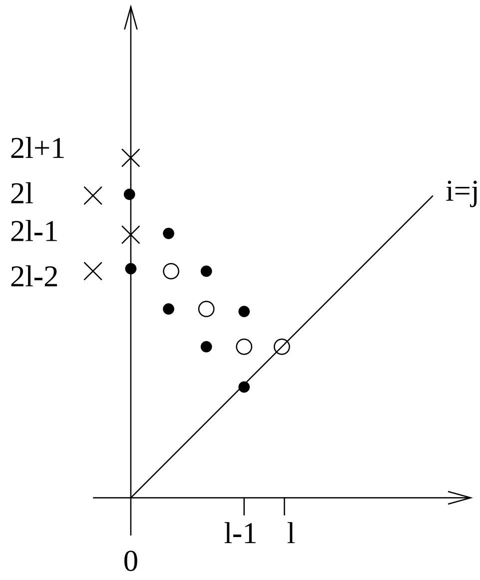

Abbildung 5.12: Zur Summenformel für q_l.

Differenzen und Approximation der auftretenden Integrale durch die zusammengesetzte Trapezregel.

5.3.3 Eine Summenformel für q

In diesem Abschnitt leiten wir eine Summenformel für q_i her und zeigen, daß diese eine konsistente Diskretisierung der kontinuierlichen Integralgleichung (4.10) für $q(x_i)$ darstellt.

Sei $i = 0$ und $j = 2l+1$, $l \geq 1$. Dann gilt $\tilde{s}(i,j) = l$ und die Gleichung (5.43) liefert

$$\begin{aligned} u^h_{0,j} &= u^h_{1,j-1} - h^2 \textstyle\sum_{k=0}^{l} \omega_{k,j-k-1} q_k u^h_{k,j-k-1} \\ &= u^h_{1,j-1} - h^2 \textstyle\sum_{k=0}^{l-1} \omega_{k,j-k-1} q_k u^h_{k,j-k-1} - \frac{h^2}{2} q_l. \end{aligned}$$

Es gilt ebenfalls

$$u^h_{0,j-2} = u^h_{1,j-3} - h^2 \sum_{k=0}^{l-1} \omega_{k,2l-k-2} q_k u^h_{k,2l-k-2}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} q_l &= \frac{2}{h^2}(u^h_{1,2l} - u^h_{0,2l+1}) - 2\sum_{k=0}^{l-1} q_k u^h_{k,2l-k} \\ &= \frac{2}{h^2}(u^h_{1,2l} - u^h_{0,2l+1} + u^h_{0,2l-1} - u^h_{1,2l-2}) - 2\sum_{k=0}^{l-1} q_k (u^h_{k,2l-k} - u^h_{k,2l-k-2}) - q_{l-1} u^h_{l-1,l-1}, \end{aligned} \tag{5.54}$$

siehe Abbildung 5.12. Ersetzen wir hierin $u^h_{i,j}$ durch $u_{i,j}$ und sei

$$T^h_q(u,q)_l = q_l + q_{l-1} - \Big(\frac{2}{h^2}(u^h_{1,2l} - u^h_{0,2l+1} + u^h_{0,2l-1} - u^h_{1,2l-2}) - 2\sum_{k=0}^{l-1} q_k (u^h_{k,2l-k} - u^h_{k,2l-k-2})\Big).$$

Taylorentwicklung von $u^h_{1,2l} - u^h_{0,2l+1} + u^h_{0,2l-1} - u^h_{1,2l-2}$ um $(0,2l)$ ergibt $-2h^2(u_{tt})_{0,2l} + O(h^3)$. Daraus folgt

$$T^h_q(u,q)_l = 2q_l + 4(u_{tt})_{0,2l} + 4h\sum_{k=0}^{l-1} q_k \frac{1}{2h}(u_{k,2l-k} - u_{k,2l-k-2}) + O(h)$$

und hieraus folgt wiederum mit zentrierten Differenzen und zusammengesetzter Trapezregel für $q \in C^2([0,1])$

$$T_q^h(u,q)_l \;=\; 2(q_l + 2(u_{tt})_{0,2l} + 2\int_0^{lh} q(\xi)u_t(\xi, 2lh-\xi)d\xi) + O(h) \;=\; O(h).$$

Die Diskretisierung ist damit $O(h)$-konsistent zur Integralgleichung (4.10).

Man beachte, daß in der rechten Seite der Gleichung (5.54) zentrierte Differenzen von u auftreten, genau wie in der linken Seite der Gleichung (5.53). So stellen die Gleichungen (5.47), (5.53) und (5.54) analog zu (4.8), (4.9) und (4.10) geschlossene Formulierungen in u_{ij}^h, $\frac{1}{2h}(u_{i,j+1}^h - u_{i,j-1}^h)$ und q_i dar. Das Differenzenverfahren kann aus diesen Gleichungen wiedergewonnen werden.

Kapitel 6

Differenzenverfahren zur Lösung der inversen Probleme

Die zugrunde liegende partielle Differentialgleichung ist für die direkten Probleme und die inversen Probleme gleich. In den inversen Problemen sind die möglicherweise fehlerbehafteten Randwerte an $x = 0$ bekannt, und der Koeffizient $q(x)$ soll daraus näherungsweise bestimmt werden. Die für die approximative Lösung der direkten Probleme in Kapitel 5 hergeleiteten Differenzengleichungen können im wesentlichen auch zur approximativen Lösung der inversen Probleme genutzt werden. Die Methode wurde von Symes [53] für ein zu IP2 analoges Problem eingeführt. Wir betrachten zusätzlich IP1 und benutzen andere Differenzensterne, vergleiche Kapitel 5.

Die Berechnung der Unbekannten erfolgt für das inverse Problem mit wachsendem Ortsindex.

6.1 Ein Differenzenverfahren für das inverse Problem IP1

Bei der Entwicklung eines Differenzenverfahrens zur approximativen Lösung des inversen Problems IP1 mit $h_1 = 0$ greifen wir auf die Gleichungen des Differenzenverfahrens zur approximativen Lösung des gemischten direkten Problems aus Abschnitt 5.1.1 zurück.

Es seien die Werte f_j, $0 \le j \le 2n$, mit $f_0 = 1$, $h = \frac{1}{n}$ und q_0^h gegeben.

Dann existieren die Werte $u_{i,j}^h$, $(i,j) \in \Omega^h = \{(k,l) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N} | -1 \le k \le n,\ |k| \le l \le 2n - |k|\}$, und q_i^h, $0 \le i \le n-1$, für die gilt

1. $$u_{i,i}^h = 1 \qquad \text{für } 0 \le i \le n,$$
2. $$u_{0,j}^h = f_j \qquad \text{für } 0 \le j \le 2n,$$
3. $$u_{-1,j}^h = u_{1,j}^h \tag{6.1}$$
   für $1 \le j \le 2n$ und der 5-Punkt Differenzenstern
4. $$u_{i+1,j-1}^h = u_{i,j}^h + u_{i,j-2}^h - u_{i-1,j-1}^h + h^2 q_i^h u_{i,j-1}^h \tag{6.2}$$
   für $(i,j) \in \{(k,l) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} | \ (k = 0, 3 \le l \le 2n) \ \vee \ (1 \le k \le n-2, k+2 \le l \le 2n-k)\}$

eindeutig.

Mit diesen Gleichungen lassen sich die Werte q_i^h und $u_{i,j}^h$ durch den folgenden Algorithmus bestimmen.

Aus (6.1) und (6.2) für $i = 0$ folgen die Werte $u_{1,j}^h$, $2 \le j \le 2n-1$, vergleiche Abbildung 6.1 mit $Stern_1$ und $Stern_2$ an $x = 0$.

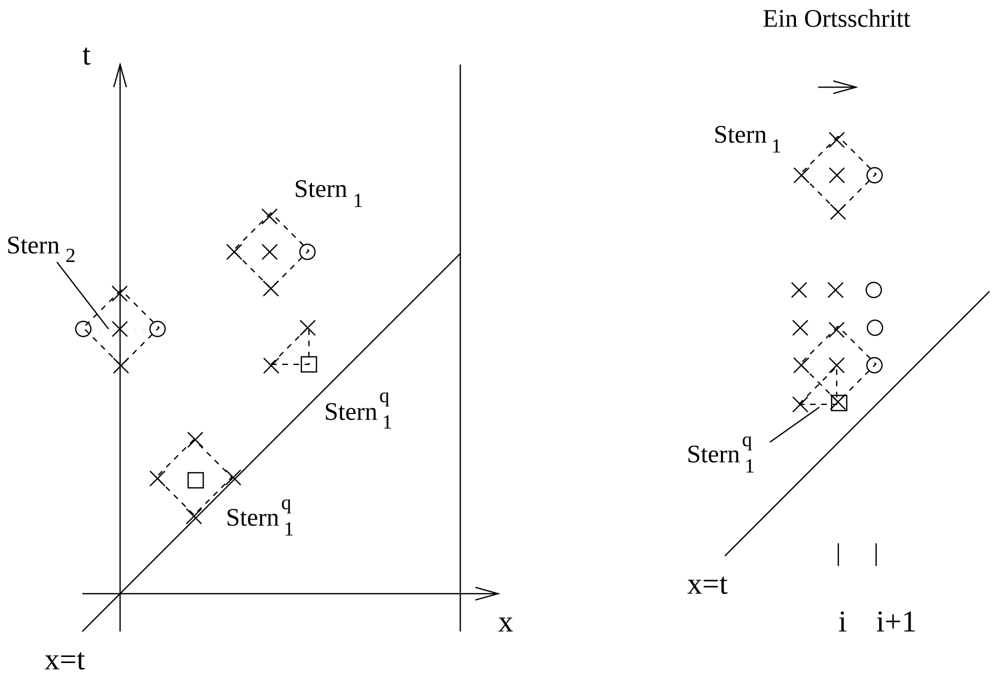

Abbildung 6.1: Differenzensterne zum diskreten inversen Verfahren für das Problem IP1. Die zwei verschiedenen Darstellungen von $Stern_1^q$ sind wegen $u_{i,i}^h = u_{i+1,i+1}^h$ identisch.

Sei $i_0 \in \mathbf{N}$ mit $1 \leq i_0 \leq n-2$, und seien die Werte $u_{i_0-1,j}^h$, $u_{i_0,j}^h$ für $(i_0-1,j),(i_0,j) \in \Omega^h$ gegeben. Dann folgt $q_{i_0}^h$ unter der Voraussetzung $u_{i_0,i_0+1}^h \neq 0$ aus dem 5-Punkt Differenzenstern für $i = i_0$ und $j = i_0 + 2$,

$$q_{i_0}^h = \frac{1}{h^2 u_{i_0,i_0+1}^h}(u_{i_0-1,i_0+1}^h - u_{i_0,i_0+2}^h),$$

vergleiche $Stern_1^q$ in Abbildung 6.1. Es folgen anschließend $u_{i_0+1,j}^h$ für $(i_0+1,j) \in \Omega^h$, $j \neq i_0+1$, aus dem 5-Punkt Differenzenstern mit $i = i_0$. Einen solchen Berechnungszyklus des Algorithmus nennen wir einen Ortsschritt, siehe Abbildung 6.1. Es sind die in einem Ortsschritt bekannten Werte durch Kreuze markiert. Der Stern zur Bestimmung von q_i^h enthält ein Rechteck, die Unbekannten $u_{i,j}^h$ sind durch Kreise dargestellt.

Diesen Algorithmus haben wir implementiert. Es werden die Werte f_j als bekannte Näherungswerte für $u_{0,j}$ angenommen und q_j^h bestimmt. Die Resultate werden in Kapitel 10 für einige Beispielrechnungen diskutiert.

6.2 Ein Differenzenverfahren für das inverse Problem IP2

Aus den Gleichungen des Differenzenverfahrens zur approximativen Lösung des gemischten direkten Problems in Abschnitt 5.2.1 entwickeln wir ein Differenzenverfahren zur approximativen Lösung des inversen Problems IP2 mit $h_1 = 0$.

Es seien die Werte f_j, $0 \leq j \leq 2n$, mit $f_0 = 0$, $h = \frac{1}{n}$ und q_0^h gegeben.

Dann existieren die Werte $v_{i,j}^h$, $(i,j) \in \Omega^h = \{(k,l) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N} | \; -1 \leq k \leq n, \; |k| \leq l \leq 2n - |k|\}$, und q_i^h, $0 \leq i \leq n-1$, für die gilt

1.
$$v_{0,j}^h \quad = \quad f_j \tag{6.3}$$

   für $0 \leq j \leq 2n$,

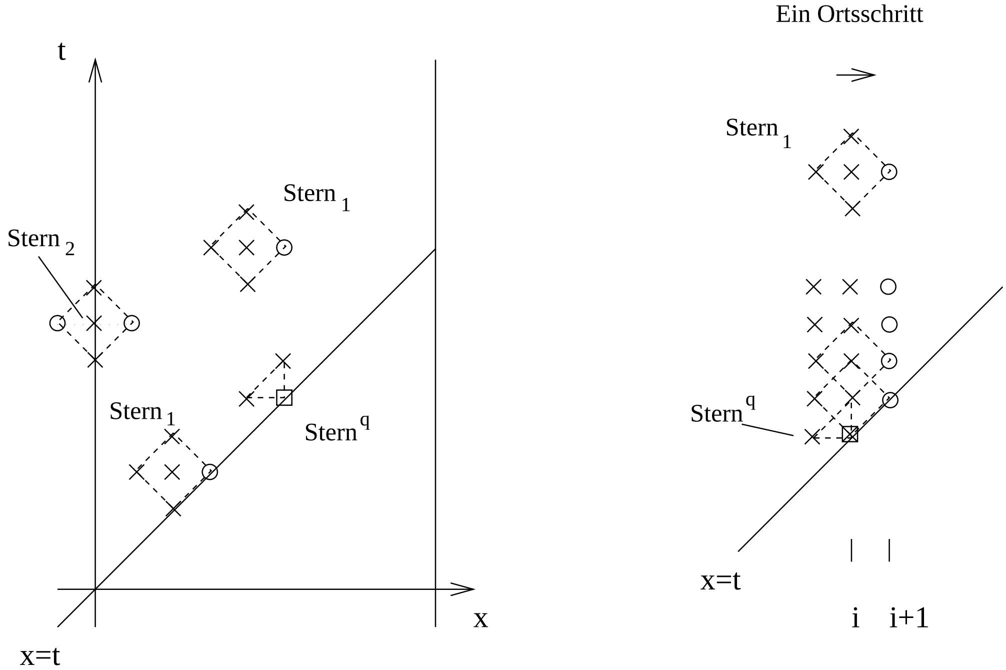

Abbildung 6.2: Differenzensterne zum diskreten inversen Verfahren für das Problem IP2.

2.
$$v^h_{-1,j} \quad = \quad v^h_{1,j} \tag{6.4}$$
für $1 \le j \le 2n$, der 5-Punkt Differenzenstern

3.
$$v^h_{i+1,j-1} \quad = \quad v^h_{i,j} + v^h_{i,j-2} - v^h_{i-1,j-1} + h^2 q^h_i v^h_{i,j-1} \tag{6.5}$$
für $(i,j) \in \{(k,l) | \; (k = 0, 3 \le l \le 2n) \; \vee \; (1 \le k \le n-2, k+2 \le l \le 2n-k)\}$ und

4.
$$q^h_i = -(v^h_{i,i+1} - v^h_{i-1,i})(\frac{h}{2} + \frac{h^2}{2} v^h_{i,i})^{-1} \tag{6.6}$$
für $1 \le i \le n-1$

eindeutig.

Mit diesen Gleichungen lassen sich die Werte q^h_i und $u^h_{i,j}$ mit wachsendem Ortsindex durch den folgenden Algorithmus bestimmen.

Aus (6.4) und (6.5) für $i = 0$ folgen die Werte $v^h_{1,j}$, $1 \le j \le 2n-1$, vergleiche Abbildung 6.2 $Stern_1$ und $Stern_2$ an $x = 0$.
Sei $i_0 \in \mathbf{N}$ mit $1 \le i_0 \le n-2$, und seien die Werte $v^h_{i_0-1,j}$, $v^h_{i_0,j}$ für $(i_0-1,j), (i_0,j) \in \Omega^h$ gegeben. Dann folgt $q^h_{i_0}$ aus Gleichung (6.6), sofern der Nenner ungleich Null ist, vergleiche $Stern^q$ in Abbildung 6.2. Es folgen anschließend $v^h_{i_0+1,j}$ für $(i_0+1,j) \in \Omega^h$ aus dem Differenzenstern mit $i = i_0$. Siehe Abbildung 6.2 für solch einen sogenannten Ortsschritt. Es sind die in einem Ortsschritt bekannten Werte durch Kreuze markiert. Der Stern zur Bestimmung von q^h_i enthält ein Rechteck, die Unbekannten $v^h_{i,j}$ sind durch Kreise dargestellt.

In Kapitel 10 sind Beispiele angegeben, die mit einer von uns durchgeführten Implementierung dieses Algorithmus berechnet wurden. Darin werden die Werte f_j als Näherungen zu $v_{0,j}$ betrachtet.

In beiden Algorithmen ist der Aufwand zur Berechnung der Approximationen q^h_i, $1 \le i \le n-1$, von der Ordnung 2 in n.

Kapitel 7

Herleitung der Gel'fand-Levitan-Gleichungen aus den distributiven Problemformulierungen

Wir leiten in diesem Kapitel die lineare Gel'fand-Levitan-Gleichung, die Marchenko-Gleichung und die nichtlineare Gel'fand-Levitan-Gleichung aus distributiven Problemformulierungen her.

Die Formulierung der linearen und der nichtlinearen Gel'fand-Levitan-Gleichungen geht zurück auf einen Artikel von Gel'fand und Levitan [20] zur Lösung eines inversen Sturm-Liouville Problems.

Die Gel'fand-Levitanschen Integralgleichungen können auch aus der entsprechend gespiegelten Viertelraumproblemformulierung DP1 oder DP2 auf $\mathbf{R}^{\geq 0}$ hergeleitet werden. Die ersten Arbeiten zu diesen im sogenannten Zeitraum durchgeführten Herleitungen stammen von Blagoveshchenskij [8], Symes [52] und Burridge [10]. Die lineare Gel'fand-Levitan-Gleichung folgt durch eine Darstellung der Lösung des auf die rechte Halbebene gespiegelten Problems mit Anfangswert (1.4) mittels einer Basislösung und einer analog (3.34) definierten Zufaltung des Randwertes. Die nichtlineare Gel'fand-Levitan-Gleichung folgt durch Darstellung der t-Ableitung der Riemannfunktion der oberen Halbebene nach (3.34), dies ist bei gerader Spiegelung in t eine Selbstanwendung, die zur Nichtlinearität führt.

Wir führen die Analysen für unseren Differentialoperator und in distributiver Form durch.

7.1 Herleitung der linearen Gel'fand-Levitan-Gleichung mit Hilfe der Basislösung der rechten Halbebene

Zur Lösung von Cauchyproblemen der rechten Halbebene können wir auf die Basislösung der rechten Halbebene aus Abschnitt 3.9 zurückgreifen. Für eine homogene Gleichung mit $u_x(0,t) = 0$ reicht die Basislösung der rechten Halbebene aus, um die Lösung analog zur Darstellung in Korollar 3.5.14, für ein Cauchyproblem der oberen Halbebene, wiederzugeben. Für spezielle Anfangswerte $u(0,t)$, siehe unten, führt die Regularität der Basislösung auf $x > |t|$ zu einer Integraldarstellung. Wir geben einen Bereich an, auf dem diese Darstellung gleich der linearen Gel'fand-Levitan-Gleichung ist.

Die Herleitung und Darstellung der linearen Gel'fand-Levitan-Gleichung wollen wir im folgenden konsequent distributiv durchführen. Dazu schicken wir einige Erläuterungen voraus.

Bemerkung 7.1.1 *Es existiert die Faltung $T * S$ zweier Distributionen $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$ und $S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ in $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, wobei für alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ gilt*

$$< (T * S)(t), \phi(t) >_t = < T(t), < S(\tau), \phi(t+\tau) >_\tau >_t = < T(t), (S(-\tau) *_\tau \phi(\tau))(t) >_t .$$

Sei $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ und sei $K(x,t)$ die mit Null fortgesetzte Lösung von (3.54), (3.55). Für festes $x \neq 0$ existieren die Distributionen $\frac{d}{dx}H(x-|t|)$ und $K(x,t)$ bezüglich der t-Variablen in $\mathcal{E}'(\mathbf{R})$, für $x = 0$ seien diese Distributionen gleich ihrem Grenzwert $x \searrow 0$. Es existiert für alle Distributionen $f(t)$ aus $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ die Faltung

$$\frac{1}{2}\Big((\frac{d}{dx}H(x-|\tau|) + cK(x,\tau)) *_\tau f(\tau) \Big)(t). \tag{7.1}$$

Diese Darstellung läßt sich wie folgt vereinfachen.

1. *Es gilt*

$$< \Big((\frac{d}{dx}H(x-|\tau|)) *_\tau f(\tau)\Big)(t), \phi(x,t) > = < \frac{d}{dx}H(x-|t|), (f(-\tau) *_\tau \phi(x,\tau))(t) >$$

Nach Hörmander [26] Thm. 4.1.1 existiert für $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ mit $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ die Faltung $(f(-\tau) *_\tau \phi(x,\tau))(t)$ und es gilt $(f(-\tau) *_\tau \phi(x,\tau))(t) \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$. ϕ hat in $\mathbf{R}^2$ kompakten Träger. Daher existiert ein endliches Intervall $I \subset \mathbf{R}$, so daß gilt: $\forall x \notin I$ $\phi(x,t) = 0$ $\forall t \in \mathbf{R}$. Somit hat auch $(f(-\tau) *_\tau \phi(x,\tau))(t)$ bezüglich x einen kompakten Träger, und es existiert ein $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, welches auf $\operatorname{supp}_x(f(-\tau) *_\tau \phi(x,\tau))(t)$ identisch Eins ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned} < \frac{d}{dx}H(x-|t|), (f(-\tau) *_\tau \phi(x,\tau))(t) > &= < \frac{d}{dx}H(x-|t|), \chi(x)(f(-\tau) *_\tau \phi(x,\tau))(t) > \\ &= \int_0^\infty \chi(x)\Big((f(-\tau) *_\tau \phi(x,\tau))(x) + (f(-\tau) *_\tau \phi(x,\tau))(-x)\Big)dx. \end{aligned}$$

Dies sei die Definition der Distribution $f(t-x)+f(t+x)$, wie wir sie in (7.6) verwenden werden.

Für bestimmte Distributionen f läßt sich die Darstellung vereinfachen, es gilt

(a) *für reguläres f:*

$$\begin{aligned} < \tfrac{d}{dx}H(x-|t|), (f(-\tau) *_\tau \phi(x,\tau))(t) > &= < \tfrac{d}{dx}H(x-|t|), \textstyle\int_{-\infty}^\infty f(\tau-t)\phi(x,\tau)d\tau > \\ &= \textstyle\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (f(t+x) + f(t-x))\phi(x,t)dtdx \end{aligned}$$

und damit

$$f(t+x) + f(t-x) = H(x)(f(t+x) + f(t-x)).$$

(b) *für $f = \delta(t)$: $(f(-\tau) *_\tau \phi(x,\tau))(t) = \phi(x,t)$, damit folgt*

$$\Big(\frac{d}{dx}H(x-|\tau|) *_\tau \delta(\tau)\Big)(t) = \frac{d}{dx}H(x-|t|) = (\delta(x-t) + \delta(x+t))H(x).$$

2. *K ist regulär und für $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ erhalten wir*

$$< (K(x,\tau) *_\tau f(\tau))(t), \phi(x,t) > = \int_{-\infty}^\infty \int_{-x}^x K(x,t) < f(\tau), \phi(x,t+\tau) >_\tau dtdx.$$

(a) *Für reguläres f ist $< f(\tau), \phi(x,t+\tau) >_\tau$ gleich $\int_{-\infty}^\infty f(\tau-t)\phi(x,\tau)d\tau$. Eine Umbenennung der Variablen ergibt*

$$(K(x,\tau) *_\tau f(\tau))(t) = \int_{-x}^x K(x,\tau)f(t-\tau)d\tau.$$

(b) *Für $f = \delta$ gilt*

$$(K(x,\tau) *_\tau \delta(\tau))(t) = K(x,t).$$

Betrachten wir auf der rechten Halbebene das Cauchyproblem

$$P(D)u = 0 \tag{7.2}$$

mit $P(D) = \frac{d^2}{dt^2} - \frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ und

$$u(0,t) = f(t) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}), \qquad u_x(0,t) = 0, \tag{7.3}$$

vergleiche auch Romanov [42] Chapt. 2 Sect. 2.4. Die distributive Problemformulierung lautet

$$P(D)u = -(\frac{d}{dx}\delta(x)) \otimes f(t) \tag{7.4}$$

mit supp $u \subset \mathbf{R}^{\geq 0} \times \mathbf{R}$. Dabei haben wir Überlegungen, die zur Formulierung des distributiven Cauchyproblems auf der oberen Halbebene führen, siehe Abschnitt 2.1, auf Cauchyprobleme der rechten Halbebene übertragen.

Die Koeffizienten von $P(D)$ hängen nicht von t ab. Daher ist mit U aus (3.58) die Distribution

$$u(x,t) = -(U(x,\tau) *_\tau f(\tau))(t)$$

eine Lösung der distributiven Problemformulierung. Nach Bemerkung 7.1.1 existiert diese Faltung, und das Resultat erfüllt die Voraussetzungen an den Träger.

Sei $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ mit $f(t) = k\delta(t) + g(t)$ und regulärem $g \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Die Interpretation der folgenden Umformungen ist bereits mit Bemerkung 7.1.1 geklärt. Es gilt

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -(U(x,\tau) *_\tau f(\tau))(t) \\ &= \frac{1}{2}\Big((\frac{d}{dx}H(x-|\tau|) + cK(x,\tau)) *_\tau f(\tau)\Big)(t) \qquad (7.5) \\ &= \frac{1}{2}\Big(f(t-x) + f(t+x) + ckK(x,t) + c\int_{-\infty}^{\infty} K(x,\tau)g(t-\tau)d\tau\Big) \\ &= \frac{1}{2}(f(t-x) + f(t+x)) + \frac{ck}{2}K(x,t) + \frac{c}{2}\int_0^x K(x,\tau)(g(t-\tau) + g(t+\tau))d\tau, \qquad (7.6) \end{aligned}$$

da K im zweiten Argument gerade ist. Es ist $u = H(x)u(x,t)$. Diese Distribution hat die gleichen Symmetrieeigenschaften in t, wie die Distribution $f = f(t)$ bezüglich t.

Bemerkung 7.1.2 *Für eine Distribution $(K(x,\tau) *_\tau \delta(\tau))(t)$ wird auch oft die Schreibweise*

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau \tag{7.7}$$

benutzt. Mit Hinblick auf den Träger von K wird dies als $\int_{-x}^{x} K(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ geschrieben, sowie aufgrund der Symmetrie

$$\int_0^x K(x,\tau)(\delta(t-\tau) + \delta(t+\tau))d\tau. \tag{7.8}$$

Ist die Notation aus (7.7) noch gebräuchlich und dadurch klar, so kann bei der Notation (7.8) der Fehler auftreten, $t = 0$ direkt einzusetzen und als Ergebnis $2K(x,0)$ zu akzeptieren.
Aus (7.6) folgt für $c = 1$ mit der Integralnotation

$$u(x,0) = \frac{1}{2}\Big(u(0,-x) + u(0,x) + \int_0^x (u(0,-\tau) + u(0,\tau))K(x,\tau)d\tau\Big).$$

Bei gerader Symmetrie in t für u und K vereinfacht sich diese Darstellung zur Schlüsselgleichung in Burridge [10], aus der er die lineare Gel'fand-Levitan-Gleichung herleitet,

$$u(x,0) = u(0,x) + \int_0^x u(0,\tau)K(x,\tau)d\tau.$$

Diese Gleichung muß bei korrekter Betrachtung, im Sinne orts- und zeitstetig in $x = 0$ und $t = 0$ fortsetzbarer Distributionen interpretiert werden. Die Herleitung über diese Gleichung ist ein Umweg. Die durchzuführende und von Burridge [10] vernachlässigte Interpretation ist nicht einfach.

Wir leiten aus der Darstellung (7.6) die lineare Gel'fand-Levitan-Gleichung her.

Satz 7.1.3 *Sei* $q \in C^0(\mathbf{R}^{\geq 0})$. *Es existiere die Lösung* u *des Cauchyproblems (7.2), (7.3) mit* $u(x,0) = 0$ *für* $x > 0$ *und*

$$f(t) = k\delta(t) + g(t) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}), \tag{7.9}$$

mit $k \in \mathbf{R}$. g *sei regulär, in* $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ *stetig und in* 0 *links- und rechtsseitig stetig ergänzbar. Sei* K *die Lösung des Goursatproblems (3.54), (3.55). Dann gilt mit der regulären Distribution* $G(x,t) = \frac{1}{2}(g(t+x) + g(t-x))$ *auf* $x > |t|$ *die* **lineare Gel'fand-Levitan-Gleichung**

$$G(x,t) + \frac{ck}{2}K(x,t) + c\int_0^x K(x,\tau)G(\tau,t)d\tau = 0. \tag{7.10}$$

Beweis: Es gilt die Gleichung (7.5). Aus der Linearität der Faltung und aus Bemerkung 7.1.1 folgt

$$u(x,t) \;=\; \frac{k}{2}\Big(\frac{d}{dx}H(x-|t|) + cK(x,t)\Big) + \frac{1}{2}\Big((\frac{d}{dx}H(x-|\tau|) + cK(x,\tau)) *_\tau g(\tau)\Big)(t).$$

Dies ist nach (7.6) äquivalent zur Gleichung

$$u(x,t) \;=\; \frac{k}{2}(\delta(t+x) + \delta(t-x))H(x) + G(x,t) + \frac{ck}{2}K(x,t) + c\int_0^x K(x,\tau)G(\tau,t)d\tau. \tag{7.11}$$

Mit $u(x,0) = 0$ für $x > 0$ ist diese Gleichung wegen der d'Alembertschen Formel auf $x > |t|$ äquivalent zu

$$G(x,t) + \frac{ck}{2}K(x,t) + c\int_0^x K(x,\tau)G(\tau,t)d\tau = 0.$$

□

Für $c = 1$ und $k = 2$ erhalten wir die Gleichung (7.10) in der Form, wie sie im Artikel von Gel'fand und Levitan [20] formuliert ist.
Die lineare Gel'fand-Levitan-Gleichung ist für festes x und $ck \neq 0$ bezüglich $K(x,t)$ eine Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art in t.
In Satz 7.1.3 steckt die Aussage, daß unter den Voraussetzungen des Satzes an u die lineare Gel'fand-Levitan-Gleichung nach K lösbar ist.
Für den Fall, daß die Funktion G aus der Spektraltheorie stammt und mit der Spektralverteilungsfunktion über $G = \frac{d^2}{dxdy}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)\sin(\sqrt{\lambda}y)}{\lambda} d\sigma(\lambda)$ definiert ist, haben Gel'fand und Levitan in ihrem klassischen Artikel die Lösbarkeit der Gleichung (7.10) bereits gezeigt.

Es kann auch im Fall $k = 0$ für K eine Integralgleichung zweiter Art in t hergeleitet werden, wenn $f(0+) \neq f(0-)$ gilt. In Anlehnung an Romanov [42] sorgt eine Differentiation nach t für die notwendige δ-Distribution in den Randwerten.

Satz 7.1.4 *Seien* q, u *und* K *wie in Satz 7.1.3, und sei* $f \in C^1(\mathbf{R}\setminus\{0\})$ *links- und rechtsseitig stetig in* 0 *ergänzbar und regulär. Sei* $\tilde{f}' = f'$ *in* $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ *und* $\tilde{f}'(0)$ *endlich. Mit* $G(x,t) = \frac{1}{2}(\tilde{f}'(t+x) + \tilde{f}'(t-x))$ *gilt dann auf* $x > |t|$ *die lineare Gel'fand-Levitan-Gleichung*

$$G(x,t) + \frac{c}{2}(f(0+) - f(0-))K(x,t) + c\int_0^x K(x,\tau)G(\tau,t)d\tau = 0. \tag{7.12}$$

Beweis: Es gilt der Satz 7.1.3 für f mit $k = 0$. Die Gleichung (7.10) hat für die Funktion f dieses Satzes die Gestalt

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \frac{1}{2}(f(t-x) + f(t+x)) + \frac{c}{2}\int_{-x}^{x} K(x,\tau)f(t-\tau)d\tau \\ &=\; \frac{1}{2}(f(t-x) + f(t+x)) + \frac{c}{2}\int_{-x}^{t} K(x,\tau)f(t-\tau)d\tau + \int_t^x K(x,\tau)f(t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Führen wir die Differentiation nach t an dieser Gleichung durch und betrachten wir das Resultat auf $x > |t|$, dann liefern die Ableitungen an den möglichen Sprüngen an $x = |t|$, die zu Distributionen mit Träger in $x = |t|$ führen keinen Beitrag und es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}(\tilde{f}'(t-x) + \tilde{f}'(t+x)) \\ &\quad + \frac{c}{2}(f(0+) - f(0-))K(x,t) + \frac{c}{2}\int_0^x K(x,\tau)(\tilde{f}'(t-\tau) + \tilde{f}'(t+\tau))d\tau. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Dies ist die gesuchte Gleichung.

□

Gilt $f(0+) \neq f(0-)$, so haben wir für festes x auch in diesem Fall für K eine Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art in t.

Bemerkung 7.1.5 *Die Darstellung (7.12) wird auch in Blagoveshchenskij [8] zu dem auf dem rechten oberen Viertelraum formulierten Problem*

$$u_{tt} - c(x)^2 u_{xx} = 0,$$

$$u(0,t) = f(t),\ u_x(0,t) = \delta(t) \quad \textit{und} \quad u \equiv 0 \textit{ in } t < 0$$

hergeleitet. Dort werden gerade und ungerade Erweiterungen von Problemen auf Quadranten zu Problemen auf Halbebenen oder den ganzen Raum angegeben, die mit den Resultaten unserer Definitionen und Herleitungen in Kapitel 2 übereinstimmen.

Aus der Darstellung (7.6) kann auf einfache Art die Marchenko-Integralgleichung hergeleitet werden. Diese wird zur Lösung inverser Streuprobleme der Quantenmechanik herangezogen, Marchenko [34] Chapt. 3 Sect. 3.

Korollar 7.1.6 *Sei $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ mit $f(t) = k\delta(t) + g(t)$, $g \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ regulär, und*

$$f(t) = 0 \ \textit{ für } t < 0.$$

Sei u Lösung von (7.2), (7.3) mit $u(x,t) = 0$ auf $x > |t|$. Dann folgt aus (7.6) auf $x > |t|$ die Gleichung

$$f(t+x) + ckK(x,t) + c\Big(\int_0^x g(t+\tau)K(x,\tau)d\tau + \int_0^t g(t-\tau)K(x,\tau)d\tau\Big) = 0.$$

Dies ist äquivalent zu

$$f(t+x) + ckK(x,t) + c\int_{-t}^x f(t+\tau)K(x,\tau)d\tau = 0,$$

der **Marchenko-Integralgleichung***, wie sie in Burridge [10] bis auf die Konstanten c und k formuliert ist.*

Ansätze zur Diskretisierung der Marchenkoschen Integralgleichung im Zeitraum und ihrer Fourier-Transformierten im Frequenzraum finden sich unter anderem in Corvi [14].

In den Integralgleichungen sind die Parameter c und k enthalten. c bezieht sich allein auf die Darstellung der Basislösung, während k aus dem Cauchyproblem stammt. Die Wahl der Parameter ermöglicht die Darstellung der in der Literatur gebräuchlichsten Formen der Problemstellung und der Gel'fand-Levitan-Gleichung. Dazu zwei Beispiele.

Beispiele 7.1.7

1. *Für $c = 1$ und $k = 2$ lautet das Goursatproblem (3.54), (3.55) für K auf $x > |t|$*

$$K_{tt} - K_{xx} + q(x)K = 0$$

mit den charakteristischen Randwerten

$$K(x,x) = K(x,-x) = \frac{1}{2}\int_0^x q(\xi)d\xi.$$

Die lineare Gel'fand-Levitan-Gleichung für $f(t) = 2\delta(t) + g(t)$ ist auf $x > |t|$

$$G(x,t) + K(x,t) + \int_0^x K(x,\tau)G(\tau,t)d\tau = 0.$$

2. *Für $c = 2$ und $k = 1$ lautet das Goursatproblem (3.54), (3.55) für K auf $x > |t|$*

$$K_{tt} - K_{xx} + q(x)K = 0$$

mit den charakteristischen Randwerten

$$K(x,x) = K(x,-x) = \frac{1}{4}\int_0^x q(\xi)d\xi.$$

Die lineare Gel'fand-Levitan-Gleichung für $f(t) = \delta(t) + g(t)$ ist auf $x > |t|$

$$G(x,t) + K(x,t) + 2\int_0^x K(x,\tau)G(\tau,t)d\tau = 0.$$

Ein Satz aus Romanov [42] Chapt. 2 Sect. 2.4 Thm. 2.8 verbindet Aussagen zur eindeutigen Lösbarkeit dieser Gleichung mit der eindeutigen Lösbarkeit von IP1. Dort heißt es für $h_1 = 0$:

Satz 7.1.8 *IP1 ist auf $x \in [0,1]$ genau dann in der Klasse der stetigen Funktionen eindeutig nach q lösbar, wenn f aus $C^2([0,2])$ stammt mit $\lim_{t\searrow 0} f(t) \neq 0$, $\lim_{t\searrow 0} f'(t) = 0$, und wenn mit ungerade auf $[-2,0)$ fortgesetztem f die Integralgleichung (7.12) für jedes $x \in [0,1]$ eindeutig lösbar ist.*

Der Abschnitt 3.9 legt den Zusammenhang zwischen einer distributiven Problemformulierung für eine Basislösung der rechten Halbebene mit einem Goursatproblem dar. Dieser Abschnitt hier enthält die Herleitung einer Gel'fand-Levitanschen Gleichung aus einem Cauchyproblem mit Hilfe der Basislösung. Die Brücke zwischen den Problemen IP1, IP2 mit $h_1 = 0$ und der linearen Gel'fand-Levitan-Gleichung wird mit den Beispielen 2.6.7, 2.6.8 und 3.8.4 geschlagen. So ist IP1 in der distributiven Viertelraumproblemformulierung äquivalent zur Bestimmung des Differentialoperators bei bekannter rechter Seite der Gleichung in Beispiel 3.8.4 Punkt 1. Dieses geht analog zu Beispiel 2.6.7 durch ungerade Spiegelung über in ein Cauchyproblem der rechten Halbebene der Form (7.4) mit $f(t) = k(H(t)R(0,t) - H(-t)R(0,-t))$. Satz 7.1.4 ist dann anwendbar. IP2 in der Viertelraumproblemformulierung ist äquivalent zur Bestimmung von q aus der Gleichung zu Beispiel 3.8.4 Punkt 2 bei bekannter rechter Seite. Analog Beispiel 2.6.8 folgt durch gerade Spiegelung ein Cauchyproblem (7.4) der rechten Halbebene mit $f(t) = k\delta(t) + k(H(t)\tilde{R}_t(0,t) + H(-t)\tilde{R}_t(0,-t))$, $\tilde{R}_t(0,t) = \begin{cases} R_t(0,t) & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t \leq 0. \end{cases}$ Satz 7.1.3 ist anwendbar.

Ein für die Lösung der inversen Probleme wichtiges Resultat dieses Abschnitts läßt sich in den folgenden Worten zusammenfassen.

Bei bekanntem Randwert f aus (7.3), wählbarem $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ und mit bekanntem $k \neq 0$, welche eine Lösung der Gleichung (7.10) nach K zulassen, kann nicht nur über Gleichung (7.6) u rekonstruiert werden, sondern, falls $u(x,0) = 0$ für $x > 0$, mittels (3.55) auch die Koeffizientenfunktion $q = 2c\frac{d}{dx}(K(x,x))$. Gilt in der Darstellung (7.9) $k = 0$, so wird bei $f(0+) \neq f(0-)$ die Integralgleichung aus Satz 7.1.4 betrachtet.

Ein Vorteil bei dem Ansatz IP1 und IP2 theoretisch über die lineare Gel'fand-Levitansche Integralgleichung zu beschreiben, liegt in der resultierenden klaren Darstellung der Schlechtgestelltheit dieser Probleme. Sie manifestiert sich in der Bestimmung des Koeffizienten durch Differentiation von $K(x,x)$ und für IP1 zusätzlich in der Differentiation des Randwertes $f(t) = u(0,t)$ nach Satz 7.1.4.

7.2 Herleitung der nichtlinearen Gel'fand-Levitan-Gleichung aus der Riemannfunktion der oberen Halbebene

In diesem Abschnitt leiten wir die nichtlineare Gel'fand-Levitan-Gleichung her. Wir übertragen die von Symes [54] für den Operator $\frac{d^2}{dt^2} - c^2(x)\frac{d^2}{dx^2}$ dazu benutzte Methode auf unser Problem mit $P(D) = \frac{d^2}{dt^2} - \frac{d^2}{dx^2} + q(x)$. Damit werden auch die Resultate von Burridge [10] solide bestätigt.

7.2.1 Erweiterung von Problemformulierungen auf den Ganzraum

Seien $R(x,t,x_0,t_0)$ und $R^1(x,t,x_0,t_0)$ die Lösungen der Probleme (3.1) bzw. (3.2) mit Träger in $\mathbf{R} \times [t_0, \infty)$.

Eine Lösung u des Cauchyproblems

$$\begin{aligned} P(D)u &= 0 && \text{in } \mathbf{R} \times (t_0,\infty), \\ u(x,t_0) = u_0(x), u_t(x,t_0) &= u_1(x) && \text{in } \mathbf{R} \end{aligned}$$

ist analog zu Definition 2.1.1 distributiv definiert als Lösung der Gleichung

$$P(D)u = u_0(x) \otimes \frac{d}{dt}(\delta(t-t_0)) + u_1(x) \otimes \delta(t-t_0)$$

mit Träger in $\mathbf{R} \times [t_0, \infty)$. Die Distribution

$$u \ = \ll R^1(x,t,x_0,t_0), u_0(x_0) \gg_{x_0} + \ll R(x,t,x_0,t_0), u_1(x_0) \gg_{x_0},$$

ist nach Korollar 3.5.14 eine Lösung, falls die rechte Seite sinnvoll existiert.

Ungerade Spiegelung von $R(x,t,x_0,0)$ an $t=0$ auf die untere Halbebene ergibt die Distribution $-H(-t)R(x,-t,x_0,0)$, die das Problem

$$P(D)R = -\delta(x-x_0) \otimes \delta(t)$$

löst und deren Träger in $\mathbf{R} \times (-\infty, 0]$ liegt. Die Formulierung als Cauchyproblem auf der unteren Halbebene lautet

$$\begin{aligned} P(D)R &= 0 && \text{in } \mathbf{R} \times (-\infty,0), \\ R(x,0,x_0,0) = 0,\ R_t(x,0,x_0,0) &= \delta(x-x_0) && \text{in } \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen

$$H(t)R(x,t,x_0,0) - H(-t)R(x,-t,x_0,0) \tag{7.14}$$

hier und im folgenden Abschnitt wieder mit $R(x,t,x_0,0)$.

Spiegeln wir das Problem für $R^1(x,t,x_0,0)$ gerade an $t=0$, so löst $H(-t)R^1(x,-t,x_0,0)$ das Problem

$$P(D)R^1 = -\delta(x-x_0) \otimes \frac{d}{dt}\delta(t).$$

Der Träger von $H(-t)R^1(x,-t,x_0,0)$ liegt in $\mathbf{R} \times (-\infty, 0]$. Als Cauchyproblem auf der unteren Halbebene formuliert lautet dieses Problem

$$\begin{aligned} P(D)R^1 &= 0 && \text{in } \mathbf{R} \times (-\infty,0), \\ R^1(x,0,x_0,0) = \delta(x-x_0),\ R^1_t(x,0,x_0,0) &= 0 && \text{in } \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen

$$H(t)R^1(x,t,x_0,0) + H(-t)R^1(x,-t,x_0,0) \tag{7.15}$$

hier und im folgenden Abschnitt wieder mit $R^1(x,t,x_0,0)$.

Für die Lösung eines allgemeinen Cauchyproblems auf der unteren Halbebene mit $u(x,-0) = u_0(x)$ und $u_t(x,-0) = u_1(x)$, $u_0, u_1 \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$, gilt bei Existenz der Darstellung

$$u = \ll H(-t)R^1(x,-t,x_0,0), u_0(x_0) \gg_{x_0} - \ll H(-t)R(x,-t,x_0,0), u_1(x_0) \gg_{x_0} .$$

Diese Betrachtung wird auf $t_0 \neq 0$ durch entsprechende Spiegelung an t_0 ausgedehnt. Für das Cauchyproblem

$$\begin{aligned} P(D)u = 0, & \qquad \text{in } \mathbf{R} \times (t_0, \infty) \\ u(x,t_0) = u_0(x),\ u_t(x,t_0) = u_1(x) & \qquad \text{in } \mathbf{R} \end{aligned}$$

ist die Distribution

$$u = H(t-t_0)(\ll R^1(x,t,x_0,t_0), u_0(x_0) \gg_{x_0} + \ll R(x,t,x_0,t_0), u_1(x_0) \gg_{x_0})$$

Lösung auf der oberen Halbebene $t \geq t_0$ und

$$u = H(t_0-t)(\ll R^1(x,2t_0-t,x_0,t_0), u_0(x_0) \gg_{x_0} - \ll R(x,2t_0-t,x_0,t_0), u_1(x_0) \gg_{x_0})$$

Lösung auf der unteren Halbebene $t \leq t_0$, jeweils bei Existenz der Darstellung.

7.2.2 Herleitung der nichtlinearen Gel'fand-Levitan-Gleichung

Der reguläre Teil der t-Ableitung der Erweiterung der Riemannfunktion der Wellengleichung mit Potentialterm in der oberen Halbebene erfüllt eine nichtlineare Gel'fand-Levitan-Gleichung, deren Kern und Inhomogenität durch die Werte an $x = 0$ bestimmt werden. Den genauen Zusammenhang leiten wir im folgenden her.

Seien $(x_1, t_1) \in \mathbf{R}^2$ zwei Parameter und sei $w^1(x,t,x_1,t_1)$ definiert durch

$$R^1(x,t,x_1,t_1) \;=\; \frac{1}{2}(\delta(t-t_1-|x-x_1|) + \delta(t-t_1+|x-x_1|)) + w^1(x,t,x_1,t_1).$$

Dann sind die Distributionen $H(t-t_0)R(x,t,x_1,t_1)$ und $H(t-t_0)R^1(x,t,x_1,t_1)$ für alle ϕ in $C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ gegeben durch

$$< H(t-t_0)R(x,t,x_1,t_1), \phi(x,t) > = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{t_0}^{\infty} R(x,t,x_1,t_1)\phi(x,t)dtdx$$

und

$$\begin{aligned} < H(t-t_0)R^1(x,t,x_1,t_1), \phi(x,t) > &= \int_{-\infty}^{x_1+t_1-t_0} \phi(x, x_1+t_1-x)dx \\ + \int_{x_1+t_0-t_1}^{\infty} \phi(x, t_1-x_1+x)dx &+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{t_0}^{\infty} w^1(x,t,x_1,t_1)\phi(x,t)dtdx. \end{aligned}$$

Korollar 7.2.1 *Mit $\overline{x}_0, \overline{t}_0, t_0 \in \mathbf{R}$ gilt nach Korollar 3.5.14 in $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$*

$$\begin{aligned} H(t-t_0)R^1(x,t,\overline{x}_0,\overline{t}_0) \;&=\; \ll H(t-t_0)R(x,t,x_0,t_0), (R^1)_t(x_0,t_0,\overline{x}_0,\overline{t}_0) \gg_{x_0} \\ &+ \ll H(t-t_0)R^1(x,t,x_0,t_0), R^1(x_0,t_0,\overline{x}_0,\overline{t}_0) \gg_{x_0} . \end{aligned} \tag{7.16}$$

Beweis: Für $t \neq \overline{t}_0$ ist die Einschränkung der Distributionen $R(x,t,\overline{x}_0,\overline{t}_0)$, $R^1(x,t,\overline{x}_0,\overline{t}_0)$ und $\frac{d}{dt}R^1(x,t,\overline{x}_0,\overline{t}_0)$ auf t nach Abschnitt 3.6.2 sinnvoll definiert. Es existieren die Grenzwerte $\tau \searrow \overline{t}_0$ und $\tau \nearrow \overline{t}_0$ für alle drei Distributionen $R(x,\tau,\overline{x}_0,\overline{t}_0), R^1(x,\tau,\overline{x}_0,\overline{t}_0)$ und $\frac{d}{dt}R^1(x,\tau,\overline{x}_0,\overline{t}_0)$. Die drei Distributionen bestehen in einer Umgebung von $t = \overline{t}_0$ aus einer Integration über Abschnitte von Untermannigfaltigkeiten und aus einem regulären Teil.

Das Cauchyproblem für $R^1(x,t,\overline{x}_0,\overline{t}_0)$ auf $t > t_0$, also für $H(t-t_0)R^1(x,t,\overline{x}_0,\overline{t}_0)$, ist mit den Anfangswerten $u_0(x) = R^1(x,t_0,\overline{x}_0,\overline{t}_0)$ und $u_1(x) = \frac{d}{dt}R^1(x,t_0,\overline{x}_0,\overline{t}_0)$ definiert. Es gilt nach Abschnitt 3.6.2.1

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= \tfrac{1}{2}(\delta(x-\overline{x}_0+t_0-\overline{t}_0)+\delta(x-\overline{x}_0-(t_0-\overline{t}_0))+w_1(x,t_0,\overline{x}_0,\overline{t}_0)H(t_0-\overline{t}_0-|x-\overline{x}_0|))\\
u_1(x) &= \tfrac{1}{2}(-\tfrac{d}{dx}(\delta(x-(\overline{x}_0+t_0-\overline{t}_0))-\delta(x-(\overline{x}_0-(t_0-\overline{t}_0))))\\
&\quad +w_1(x,t_0,\overline{x}_0,\overline{t}_0)(\delta(x-\overline{x}_0+t_0-\overline{t}_0)+\delta(x-\overline{x}_0-(t_0-\overline{t}_0)))\\
&\quad +H(t_0-\overline{t}_0-|x-\overline{x}_0|)(w_1)_t(x,t_0,\overline{x}_0,\overline{t}_0)).
\end{aligned}$$

Für diese Anfangswerte ist die sinnvolle Existenz der Darstellung (3.35), (3.37) zu zeigen. Hinreichend hierzu ist die Bemerkung, daß für festes $t_0=\overline{t}_0$ die Träger von R und R^1 bezüglich x_0 beschränkt sind, und daß für $\tilde{x}\in\mathbf{R}$

$$\ll \delta(t-\overline{t}_0-|x-x_0|),\delta(x_0-\tilde{x})\gg_{x_0}=\delta(t-\overline{t}_0-|x-\tilde{x}|)\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$$

bezüglich x und t gilt. Insofern ist diese Schreibweise für δ-Distributionen eine suggestive Darstellung im Sinne einer Art Anwendung von Distributionen aufeinander. Die letzte Gleichung folgt direkt für $\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ aus

$$\begin{aligned}
&<\ll \delta(t-\overline{t}_0-|x-x_0|),\delta(x_0-\tilde{x})\gg_{x_0},\phi(x,t)>\\
=\;&<\delta(x_0-\tilde{x}),<\delta(t-\overline{t}_0-|x-x_0|),\phi(x,t)>_{(x,t)}>_{x_0}\\
=\;&<\delta(x_0-\tilde{x}),\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x,|x-x_0|+\overline{t}_0)dx>_{x_0}\\
=\;&\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x,|x-\tilde{x}|+\overline{t}_0)dx\\
=\;&<\delta(t-\overline{t}_0-|x-\tilde{x}|),\phi(x,t)>_{(x,t)}\,.
\end{aligned}$$

□

Es folgt hieraus der

Satz 7.2.2 *Sei $q\in C^0(\mathbf{R})$ gerade und beschränkt. Sei $K^1\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ dergestalt, daß $R^1(x,t)=\frac{1}{2}(\delta(t-|x|)+\delta(t+|x|))+K^1(x,t)$. Dann existiert $K^1(0,t)=\lim_{x\searrow 0}K^1(x,t)$ als reguläre Distribution in $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$. $K^1(0,t)$ ist stetig in $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ und kann durch $K^1(0,0):=0$ stetig ergänzt werden. Es gilt mit $\tilde{f}(t)=2K^1(0,t)$ und $\tilde{K}=2K^1$ auf $0\le x\le t$ die* **nichtlineare Gel'fand-Levitan-Gleichung**

$$\frac{1}{2}(\tilde{f}(t+x)+\tilde{f}(t-x)) = \tilde{K}(x,t)+\int_0^x\tilde{K}(\xi,t)\tilde{K}(\xi,x)d\xi. \tag{7.17}$$

Beweis: Seien in der Gleichung (7.16) $x=\overline{x}_0,\overline{t}_0=0,t_0=s$ und t ersetzt durch $t+s$, dann folgt

$$\begin{aligned}
H(t)R^1(\overline{x}_0,t+s,\overline{x}_0,0) &= \ll H(t)R(\overline{x}_0,t+s,x_0,s),(R^1)_t(x_0,s,\overline{x}_0,0)\gg_{x_0}\\
&\quad+\ll H(t)R^1(\overline{x}_0,t+s,x_0,s),R^1(x_0,s,\overline{x}_0,0)\gg_{x_0}.
\end{aligned}$$

Mit $H(t-s)R(x,t,x_0,t_0)=H(t)R(x,t+s,x_0,t_0+s)$ ist die rechte Seite gleich

$$\ll H(t-s)R(\overline{x}_0,t,x_0,0),(R^1)_t(x_0,s,\overline{x}_0,0)\gg_{x_0}+\ll H(t-s)R^1(\overline{x}_0,t,x_0,0),R^1(x_0,s,\overline{x}_0,0)\gg_{x_0}.$$

$R^1(x,t,x_0,0)$ ist gerade in t, somit $(R^1)_t(x,t,x_0,0)$ ungerade in t. Es folgt daraus für $t+s>0$ und $t-s>0$

$$\frac{1}{2}H(t)(R^1(\overline{x}_0,t+s,\overline{x}_0,0)+R^1(\overline{x}_0,t-s,\overline{x}_0,0)) = \ll R^1(\overline{x}_0,t,x_0,0),R^1(x_0,s,\overline{x}_0,0)\gg_{x_0}. \tag{7.18}$$

Es ist $R^1(\overline{x}_0,t,x_0,0)=R^1(x_0,0,\overline{x}_0,t)=R^1(x_0,t,\overline{x}_0,0)$. Die erste Gleichung folgt aus der Selbstadjungiertheit von $P(D)$. Die zweite Gleichung folgt da R^1 in t gerade ist über $R^1(x_0,0,\overline{x}_0,t)=R^1(x_0,-t,\overline{x}_0,0)=R^1(x_0,t,\overline{x}_0,0)$.
Sei $\overline{x}_0=0$. Es ist $R^1(x,t)=R^1(x,t,0,0)$. Es existiert nach Satz 3.5.10 und Bemerkung 3.5.11 eine reguläre Distribution $K^1\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ derart, daß

$$R^1(x,t)=\frac{1}{2}(\delta(t+x)+\delta(t-x))+K^1(x,t),$$

mit $R^1(+0,t) = \delta(t) + K^1(0,t)$ und $K(0,0\pm) = 0$. In vorigen Abschnitten wurde gezeigt, daß dieser Randwert als distributive zeitstetige Ergänzung Sinn macht. Sei $f(t) = K^1(0,t)$. Einsetzen in Gleichung (7.18) ergibt

$$\frac{1}{2}H(t)(\delta(t+s) + \delta(t-s) + f(t+s) + f(t-s))$$

$$=$$

$$\ll \frac{1}{2}(\delta(t+x) + \delta(t-x)) + K^1(x,t)\ ,\ \frac{1}{2}(\delta(s+x) + \delta(s-x)) + K^1(x,s) \gg_x$$

$$=$$

$$\frac{1}{2}(\delta(t-s) + \delta(t+s)) + \frac{1}{2}(K^1(-t,s) + K^1(t,s) + K^1(-s,t) + K^1(s,t)) + \int_{-\infty}^{\infty} K^1(x,t)K^1(x,s)dx.$$

Es ist sowohl f, als auch K^1 stückweise stetig. Es gilt obige Gleichung auf $0 \leq s < t$, d.h. angewandt auf alle Testfunktionen mit Träger in $0 \leq s < t$. Hierauf ist die Gleichung äquivalent zur folgenden, die dann nicht nur im distributiven Sinne, sondern sogar im Sinne stückweise stetiger Funktionen gilt,

$$\frac{1}{2}(f(t+s) + f(t-s)) \ = \ \frac{1}{2}(K^1(-s,t) + K^1(s,t)) + \int_{-\infty}^{\infty} K^1(x,t)K^1(x,s)dx.$$

Aus der Annahme, daß q gerade in x ist, folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(f(t+s) + f(t-s)) \ &= \ K^1(s,t) + \int_{-\infty}^{\infty} K^1(x,t)K^1(x,s)dx \\ &= \ K^1(s,t) + 2\int_0^s K^1(x,t)K^1(x,s)dx.\end{aligned}$$

Sei $\tilde{K} = 2K^1$ und $\tilde{f} = 2f$. Dann folgt die nichtlineare Gel'fand-Levitan-Gleichung

$$\frac{1}{2}(\tilde{f}(t+s) + \tilde{f}(t-s)) \ = \ \tilde{K}(s,t) + \int_0^{\infty} \tilde{K}(x,t)\tilde{K}(x,s)dx.$$

□

Bemerkung 7.2.3 *Satz 7.2.2 können wir in die Viertelraumproblemformulierung mit Randwert* $u_x(0,t) = 0$ *einbetten. Diese Viertelraumprobleme können durch gerade Spiegelung zu Cauchyproblemen auf der oberen Halbebene erweitert werden, wobei q ebenfalls gerade fortgesetzt wird, siehe Abschnitt 2.6.1. Damit gelangen wir zu den Voraussetzungen des Satzes.*
Bedingungen dieser Art an den Koeffizienten sind üblich, so benötigt Symes [54] für den von ihm analysierten Differentialoperator die Bedingung $c(x) \equiv 1$ *für* $x \leq 0$.

Kapitel 8

Approximative Lösung der inversen Probleme mit dem Nyström-Verfahren für die lineare Gel'fand-Levitan-Gleichung

Wir führen eine Diskretisierung der linearen Gel'fand-Levitanschen Integralgleichung mit einem Nyström-Verfahren angewandt auf die Zeitvariable t bei fester Ortsvariablen x durch. Dieses Verfahren zur approximativen Lösung der Integralgleichung ist konvergent von der Ordnung zwei und stabil gegenüber C^0-Fehlern in den Daten. In Abschnitt 8.3 geben wir einen auf der Cholesky-Zerlegung beruhenden Algorithmus zur numerischen Lösung der linearen Gel'fand-Levitan-Gleichung nach Hald [24] an. Die Bestimmung des Potentials q über ein Differenzenverfahren für die erste Ableitung der Lösung der linearen Gel'fand-Levitan-Gleichung zeigt das typische Fehlerverhalten. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels können wir die Diskretisierung distributiver Problemformulierungen und die Diskretisierung der linearen Gel'fand-Levitan-Gleichung durch eine diskrete Faltung zusammenführen.

8.1 Diskretisierung nach dem Nyström-Verfahren

Wir lösen die lineare Gel'fand-Levitansche Integralgleichung

$$G(x,t) + K(x,t) + c\int_0^x K(x,\tau)G(\tau,t)d\tau = 0 \qquad x \in [0,1], |t| \leq x, \tag{8.1}$$

$c \in \mathbf{R}^{\neq 0}$, durch Diskretisierung approximativ nach K. Gleichung (8.1) stimmt für $c = 1$, $k = 2$ oder $c = 2$, $k = 1$ mit Gleichung (7.10) überein. Für andere Werte von c, k mit $ck \neq 0$ kann Gleichung (7.10) durch Multiplikation mit $\frac{2}{ck}$ äquivalent in die Gestalt (8.1) gebracht werden. Es gelte $G \in C^0([0,1] \times [0,1])$ mit $G(x,t) = G(t,x)$. Für festes $x = x_i \in [0,1]$ gilt

$$G(x_i,t) + K(x_i,t) + c\int_0^{x_i} K(x_i,\tau)G(\tau,t)d\tau = 0 \qquad |t| \leq x_i. \tag{8.2}$$

Das Integral $\int_0^{x_i} f(x)dx$ sei für $x_i \neq 0$ durch eine **Quadraturformel** $Q_n(f(x)) = \sum_{k=0}^n \omega_{n,k} f(\xi_{k,n})$, $\xi_{k,n} \in [0, x_i]$, approximiert. Mit einer endlichen Anzahl von Stützwerten $K_n(x_i, \xi_{k,n})$, an denen die folgende semi-diskrete Gleichung gelte, ist über

$$G(x_i,t) + K_n(x_i,t) + c\sum_{k=0}^n \omega_{n,k} K_n(x_i,\xi_{k,n})G(\xi_{k,n},t) = 0 \qquad |t| \leq x_i \tag{8.3}$$

die Funktion $K_n(x_i,t)$ auf dem ganzen Intervall $|t| \leq x_i$ definiert. $K_n(x_i,t)$ heißt die **Nyström-Interpolierte**. Für $t = t_j$, $|t_j| \leq x_i$, gilt

$$G_{i,j} + (K_n)_{i,j} + c\sum_{k=0}^{n} \omega_{n,k}(K_n)_{i,k}G_{k,j} = 0, \tag{8.4}$$

mit $G_{i,j} = G(x_i,t_j)$, $G_{k,j} = G(\xi_{k,n},t_j)$, $(K_n)_{i,j} = K_n(x_i,t_j)$ und $(K_n)_{i,k} = K_n(x_i,\xi_{k,n})$.

Ist für eine endliche Anzahl von Werten t_j, $j \in M \subset \mathbf{N}, |t_j| \leq x_i$, durch (8.4) ein Gleichungssystem gegeben, welches eine eindeutige Lösung $(K_n)_{i,j}$, $(K_n)_{i,k}$, $j \in M, 0 \leq k \leq n$, besitzt, so ist die Funktion

$$-G(x_i,t) - c\sum_{k=0}^{n} \omega_{n,k}(K_n)_{i,k}G(\xi_{k,n},t)$$

die Nyström-Interpolierte.

Diese Methode zur Bestimmung der Funktion $K_n(x_i,t)$ heißt **Nyström-Verfahren**, Nyström [41]. $K_n(x_i,t)$ ist eine Approximation zu $K(x_i,t)$.

Wir wählen zunächst das durch die Stützstellen $\{\xi_{k,n}\}$ und Ortspunkte $\{x_i\}$ erzeugte diskrete Gitter so, daß ein Übergang zum diskreten Gitter für die Lösung der Wellengleichung mit Potentialterm einfach ist. Daher erfolge die Diskretisierung an Punkten $x_i = ih$ und $t_j = jh$ für eine feste Schrittweite h mit $mh = 1$. In der Quadraturformel seien $n = i$ und $\xi_{k,n} = kh$. Für K_n schreiben wir wieder K, da K_n immer mit Ortsindex $i = n$ auftritt.

Unter Anwendung der **zusammengesetzten Trapezregel** für Q_n ergibt sich die folgende Matrixdarstellung der Gleichungen (8.4) für $0 \leq j \leq i \leq m$:

$$(I - cA_i)K_i = -G_i \tag{8.5}$$

mit $K_i = (K_{i,0}, K_{i,1}, \ldots, K_{i,i})^t$, $G_i = (G_{i,0}, G_{i,1}, \ldots, G_{i,i})^t$ und $(A_i)_{j,k} = -\omega_{i,k}G_{k,j} = -\omega_{i,k}G_{j,k}$, mit $\omega_{i,k} = h$, $1 \leq k \leq i-1$, und $\omega_{i,0} = \omega_{i,i} = \frac{1}{2}h$. Für $x_0 = 0$ sei $A_0 \equiv 0$. Das so entstandene Gleichungssystem entspricht der Punktauswertung einer Nyström-Interpolation an den Quadraturpunkten.
Es ist die Matrix $-(G_{k,j})_{0\leq k,j\leq i}$ symmetrisch und die $\omega_{i,k}$ sind positiv. Daher läßt sich A_i, $i \geq 1$, symmetrisieren. Sei dazu

$$D_i \;=\; diag(\omega_{i,0}, \ldots, \omega_{i,i}) \;=\; h(\frac{1}{2}, 1, \ldots, 1, \frac{1}{2})$$

und

$$A_i' = D_i^{\frac{1}{2}} A_i D_i^{-\frac{1}{2}}.$$

Dann gilt

$$(I - cA_i')K_i' = G_i'$$

mit $K_i' = D_i^{\frac{1}{2}}K_i$ und $G_i' = -D_i^{\frac{1}{2}}G_i$. Es gilt $(A_i')_{j,k} = -(\omega_{i,j}\omega_{i,k})^{\frac{1}{2}}G_{k,j} = -(\omega_{i,j}\omega_{i,k})^{\frac{1}{2}}G_{j,k}$. Das alle Punkte umfassende Gleichungssystem für $0 \leq j \leq i \leq m$ hat mit $A_0' \equiv 0$ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} I - cA_0' & & & \\ & I - cA_1' & & \\ & & \ddots & \\ & & & I - cA_m' \end{pmatrix} K' \;=\; \left(I - c \begin{pmatrix} A_0' & & & \\ & A_1' & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m' \end{pmatrix} \right) K' \;=\; G' \tag{8.6}$$

mit $K' = (K_0', K_1', \ldots, K_m')^t$ und $G' = (G_0', G_1', \ldots, G_m')^t$. Die Lösung dieses Systems nach K' liefert bei Existenz eine Lösung $\{K_{i,j} | 0 \leq j \leq i \leq m\}$ von (8.4). Daraus folgt durch Einsetzen der $K_{i,k}$ für $K(x_i, \xi_{k,i})$ in der Gleichung (8.3) für jedes x_i die Nyström-Interpolierte $K(x_i,t)$.

Bemerkung 8.1.1 *Es gilt* $(A_i')_{0\leq j,k\leq i-1} = (A_{i+1}')_{0\leq j,k\leq i-1}$. *Dies wird in dem in Abschnitt 8.3 beschriebenen Algorithmus zur Lösung dieses linearen Systems ausgenutzt.*

Wir führen in den folgenden Abschnitten zuerst eine Fehleranalyse für die approximative Lösung einer linearen Gel'fand-Levitan-Gleichung (8.1) mit dem Nyström-Verfahren bei festem $x \in [0,1]$ durch. Für $x = 0$ sei $K(0,0) = -G(0,0)$ und es ist nichts zu zeigen. Wir schreiben abkürzend $K(t)$ für $K(x,t)$ und untersuchen auf $|t| \leq x$ die Gleichung

$$G(x,t) + K(t) + c\int_0^x K(\tau)G(\tau,t)d\tau = 0. \tag{8.7}$$

Dies ist eine Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art. G heißt Kern der Integralgleichung. Die Nyström-Interpolierte K_n löse mit der zusammengesetzten Trapezregel auf $|t| \leq x$ die Gleichung

$$G(x,t) + K_n(t) + c\sum_{k=0}^{n} \omega_{k,n} K_n(\xi_{k,n})G(\xi_{k,n},t) = 0. \tag{8.8}$$

Seien die Operatoren $T, T_n : C^0([0,x]) \to C^0([0,x])$, $n \in \mathbf{N}^{\geq 1}$, definiert durch

$$(T\phi)(t) = -c\int_0^x \phi(\tau)G(\tau,t)d\tau \tag{8.9}$$

und

$$(T_n\phi)(t) = -c\sum_{k=0}^{n} \omega_{k,n}\phi(\xi_{k,n})G(\xi_{k,n},t). \tag{8.10}$$

Dann sind die Operatoren T und T_n, $n \in \mathbf{N}^{\geq 1}$, linear und für stetiges G auch stetig. Die Gleichungen (8.7) und (8.8) haben die Gestalt

$$(I-T)K = -G(x,\cdot) \tag{8.11}$$

bzw.

$$(I-T_n)K_n = -G(x,\cdot). \tag{8.12}$$

8.2 Die Fehleranalyse für die Diskretisierung nach dem Nyström-Verfahren

Wir untersuchen im folgenden zu (8.9)-(8.12) die eindeutige Existenz der Operatoren $(I-T_n)^{-1}$, deren Stabilität und die Konvergenzordnung der Lösungen K_n. Dazu nutzen wir die Approximationstheorie für kompakte Operatoren über Banachräumen und verweisen für die Begriffe und Grundlagen auf die Bücher von Anselone [2], Atkinson [3] und Hackbusch [23].

Für $G \in C^0([0,x] \times [0,x])$ folgt die punktweise Konvergenz, d.h. Konsistenz, $\|(T_n - T)\phi\|_\infty \to 0$ $\forall \phi \in C^0([0,x])$ aus der Konsistenz und Stabilität der zusammengesetzten Trapezregel. Es liegt keine Konvergenz in der Operatornorm vor. T ist jedoch kompakt, und die Menge der Operatoren $\{T_n\}_{n\in\mathbf{N}^{\geq 1}}$ ist kollektiv kompakt. Eine Anwendung des Satzes von Brakhage, Atkinson [3] Part II Chapt. 3.1, führt zu folgendem Ergebnis über die Stabilität der Operatoren $\{T_n\}_{n\in\mathbf{N}^{\geq 1}}$.

Satz 8.2.1 *Der Integraloperator T aus (8.9) habe einen stetigen Kern und es existiere $(I-T)^{-1} \in L(C^0([0,x]))$. Die Diskretisierung $\{T_n\}_{n\in\mathbf{N}^{\geq 1}} \subset L(C^0([0,x]))$ aus (8.10) sei mit Hilfe des Nyström-Verfahrens und der zusammengesetzten Trapezregel hergeleitet. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbf{N}^{\geq 1}$, so daß $\{(I-T_n)^{-1}\}_{n\geq n_0}$ existiert und $\{\|(I-T_n)^{-1}\|\}_{n\geq n_0}$ gleichmäßig beschränkt ist. $\{T_n\}_{n\in\mathbf{N}^{\geq 1}}$ ist damit stabil.*
Die Lösungen K_n der Gleichung (8.12) konvergieren in $C^0([0,x])$ gegen die Lösung K der Gleichung (8.11).

Fehleranalysen mit der Angabe von Konvergenzordnungen für die Lösung der lineraren Gel'fand-Levitanschen Integralgleichung mittels Quadraturverfahren finden sich in Hald [24] und Hackbusch [23].

Hald leitet unter Verwendung einer Euler-Maclaurinschen Summenformel und der Trapezregel mit Schrittweite h eine $O(h^4)$-konsistente Diskretisierung der linearen Gel'fand-Levitanschen Integralgleichung her. Die Fehleranalyse beschränkt sich auf die Untersuchung der Konsistenz- und der Konvergenzordnung, ohne die Berücksichtigung von Fehlern in den Ausgangsdaten. Der Koeffizient q ist dann bis auf $O(h^2)$ bestimmbar. Hald setzt einen viermal stetig differenzierbaren Kern G und eine ebensooft stetig differenzierbare Lösung K voraus.

Wir führen zunächst eine Fehleranalyse für die Lösung der linearen Gel'fand-Levitan-Gleichung bei festem $x \in (0,1]$ nach $K(t) = K(x,t)$ durch.

Die Fehleranalyse von Hackbusch zur Lösung einer Fredholmschen Integralgleichung nach dem Nyström-Verfahren basiert auf dem Satz von Brakhage. Im folgenden stehe $\|\cdot\|$ für die Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$ bei Anwendung auf Funktionen $\phi \in C^0([0,x])$ und für die entsprechende Operatornorm bei Anwendung auf Operatoren aus $L(C^0([0,x]))$. Es lassen sich für jede einzelne der Gleichungen (8.7) und (8.8) mit den Operatoren (8.9) und (8.10) für $x = x_n = nh$ die Resultate aus Hackbusch [23] Satz 4.7.15 und Satz 4.7.16 übertragen. Sie lauten

Satz 8.2.2 *Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^m$. Sei $\hat{C}^s(\Omega)$ für $s \in \mathbf{N}^{>0}$ gleich der Menge der $(s-1)$-mal stetig differenzierbaren Funktionen, deren Ableitungen bis zum Grade $s-1$ alle lipschitzstetig sind.*
Es gelte $G \in \hat{C}^s([0,x] \times [0,x])$ für ein $s > 0$. Das Quadraturverfahren Q_n sei stabil und habe die Konsistenzordnung s. Dann ist $\{T_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ kollektiv kompakt und es gelten

$$\|(T-T_n)T_n\|_{L(C^0([0,x]))} \le Ch^s, \quad \|(T-T_n)T\|_{L(C^0([0,x]))} \le Ch^s$$

und

$$\|T-T_n\|_{L(\hat{C}^s([0,x]),C^0([0,x]))} \le Ch^s.$$

Ist 1 ein regulärer Wert von T, so folgen die Abschätzungen

$$\begin{aligned}\max_k\{|(K_n)_k - K(x,t_k)|\} &\le \|G(x,\cdot) + \sum_{k=0}^{n} \omega_{k,n}(K_n)_k G(\xi_{k,n},\cdot) - G(x,\cdot) - \int_0^x K(x,\tau)G(\tau,\cdot)d\tau\|_\infty \\ &\le Ch^s \|G(x,\cdot)\|_{\hat{C}^s([0,x])}.\end{aligned}$$

Für unsere Probleme erhalten wir die Konvergenzordnung des Satzes bei hinreichend regulärem q und unter Beachtung eines weiteren Punktes: Es gilt für DP1, $q \in C^0(\mathbf{R}^{\ge 0})$ stückweise stetig differenzierbar, $h_1 = 0$ und $k = 1$ auf dem rechten oberen Viertelraum (4.9), oder bei gerader Spiegelung in x nach (3.17),

$$g(t) = u_t(0,t) = -\int_0^{\frac{t}{2}} q(\xi)u(\xi, t-\xi)d\xi \tag{8.13}$$

für $t > 0$. Bei gerader Spiegelung von g am Nullpunkt gilt $\lim_{t\searrow 0} g(t) = \lim_{t\nearrow 0} g(t) = 0$. Für die Ableitung folgt in $(0,\infty)$

$$g'(t) = -\frac{1}{2}q(\frac{t}{2})u(\frac{t}{2},\frac{t}{2}) - \int_0^{\frac{t}{2}} q(\xi)u_t(\xi,t-\xi)d\xi$$

und bei gerader Spiegelung von g mit $q(0) \neq 0$ ist g' in 0 nicht stetig. Damit ist $G(\tau,t) = \frac{g(t+\tau)+g(t-\tau)}{2}$ für $|t| < x$ auf $\tau \in (0,x)$ zwar stetig, aber nicht stetig differenzierbar. Die nach dem Satz 8.2.2 erreichbare Konvergenzordnung bleibt erhalten, wenn in $t = \tau$ immer eine Stützstelle des Quadraturverfahrens liegt.
Die Voraussetzungen des Satzes 8.2.2 lassen sich unter Anwendung der zusammengesetzten Trapezregel auf nur stückweise zweimal stetig differenzierbare Kerne G verallgemeinern.

Bemerkung 8.2.3 *Sei $G = G(\xi,\tau) \in C^0([0,x] \times [0,x])$ mit $G(\xi,t) = G(t,\xi)$ stückweise zweimal stetig differenzierbar in dem Sinne, daß für jedes feste $t \in [0,x]$ $G(\cdot,t)$ in der ξ-Variablen stückweise zweimal stetig differenzierbar ist mit in jedem Punkt von links und rechts stetig fortsetzbarer erster und zweiter Ableitung. Die Anzahl der Unstetigkeitsstellen in den Ableitungen sei unabhängig von $t \in [0,x]$ beschränkt. G und die ersten und zweiten Ableitungen von G seien betragsmäßig durch L beschränkt. Dann gilt*

$$\|(T - T_n)T_n\|_\infty \;\le\; C_1 h^2 \max\{L, L^2\}.$$

Für eine stückweise zweimal stetig differenzierbare Funktion $\phi \in C^0(\mathbf{R})$, welche samt ihrer ersten und zweiten Ableitung durch L_ϕ beschränkt ist, gilt

$$\|(T - T_n)\phi\|_\infty \;\le\; C_2 h^2 L L_\phi.$$

Diese Abschätzungen folgen durch direktes Einsetzen der zusammengesetzten Trapezregel unabhängig davon, ob die Unstetigkeitsstellen an Stützpunkten liegen. Aus ihnen folgt durch Anwendung des Satzes von Brakhage die Konvergenz mit

$$\|K - K_n\|_\infty \;\le\; Ch^2 \max\{L, L^2\}.$$

Für die inversen Probleme IP1 und IP2 wird G gemäß Satz 7.1.4 bzw. 7.1.3 gebildet. Für stückweise stetig differenzierbares $q \in C^0([0,1])$ mit in jedem Punkt von links und rechts stetig fortsetzbarer Ableitung sind die Voraussetzungen an g erfüllt, um die Konvergenzordnung 2 in h für die Lösung der linearen Gel'fand-Levitan-Gleichung mit dem Nyström-Verfahren zu erhalten, vergleiche dazu den Beweis von Satz 9.1.3 insbesondere Gleichung (9.2) mit $g = f'$.

Der folgende Satz beschreibt das Verhalten der Nyström-Interpolierten gegenüber C^0-Fehlern in der Funktion G.

Satz 8.2.4 *Sei T_n, $n \in \mathbf{N}^{\ge 1}$, gemäß (8.10) mit $G \in C^0([0,x] \times [0,x])$ und der zusammengesetzten Trapezregel gebildet. $\{T_n\}_{n\in\mathbf{N}^{\ge 1}}$ sei stabil, und es existiere eine Konstante $C_{st} \in \mathbf{R}$, so daß für ein $n_0 \in \mathbf{N}^{\ge 1}$ die Abschätzung $\|(I - T_n)^{-1}\|_\infty \le C_{st}$ $\forall n \ge n_0$ gilt. Sei $G^\epsilon(\cdot,\cdot) \in C^0([0,x] \times [0,x])$ mit $\|G(\cdot,\cdot) - G^\epsilon(\cdot,\cdot)\|_\infty \le \epsilon$, $\epsilon \le \frac{p}{cC_{st}}$ und $0 \le p < 1$. Sei $T_n^\epsilon : C^0([0,x]) \to C^0([0,x])$ definiert durch*

$$(T_n^\epsilon \phi)(t) = -c \sum_{k=0}^{n} \omega_{k,n} \phi(\xi_{k,n}) G^\epsilon(\xi_{k,n}, t) \qquad \forall \phi \in C^0([0,x]).$$

Dann gilt $T_n^\epsilon \in L(C^0([0,x]))$. Es ist $\{T_n^\epsilon\}_{n\in\mathbf{N}^{\ge 1}}$ ebenfalls stabil, und es existiert für die Lösungen K_n von (8.12) und K_n^ϵ von $(I - T_n^\epsilon)K_n^\epsilon(t) = -G^\epsilon(x,t)$ ein $n_1 \in \mathbf{N}^{\ge 1}$, s.d.

$$\|K_n - K_n^\epsilon\|_\infty \le C\epsilon \qquad \forall n \ge n_1 \tag{8.14}$$

mit einer von n und ϵ unabhängigen Konstanten C.

Die Existenz von $(I - T_n^\epsilon)^{-1}$ in Satz 8.2.4 folgt daraus, daß die invertierbaren Operatoren in $L(C^0([0,x]))$ eine offene Menge bilden. Die Stabilität von $\{T_n^\epsilon\}_{n\in\mathbf{N}^{\ge 1}}$ resultiert dann aus der Stabilität von $\{T_n\}_{n\in\mathbf{N}^{\ge 1}}$ und der vorausgesetzten Fehlerschranke.

Es folgt nun, wobei o.E. $L \ge 1$ sei: $\exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \ge n_0$

$$\|K - K_n^\epsilon\|_\infty \le C(h^2 L^2 + \epsilon). \tag{8.15}$$

Die Diskretisierung der linearen Gel'fand-Levitan-Gleichung in der x-Variablen erfolgt nach Abschnitt 8.1. Wir wählen $x_i = ih_1$, $h_1 = \frac{1}{n_1}$, und lösen die Gleichung für jedes $x = x_i$, $1 \le i \le n_1$ mit $h = h_1$ und $n = n_1$. Die bisherige Fehleranalyse ist für jedes feste x_i und beliebige h, n mit $x_i = nh$ gültig. Gelten die Voraussetzungen an G und G^ϵ unabhängig von x, so folgen auch die Abschätzungen für die Lösungen der Nyström-Verfahren unabhängig von x.

Nach den Resultaten von Hackbusch [23] Abschnitt 4.7.5 über Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art und das Nyström-Verfahren, ist die Matrix $I - cA_n$ genau dann invertierbar, wenn der Operator

$I - T_n$ invertierbar ist.

Die Kondition des linearen Gleichungssystems (8.5) für $i = n$ läßt sich nach Atkinson [3] Part II Chapt. 3.1 und Hackbusch [23] Abschnitt 4.7.5 abschätzen.

Satz 8.2.5 *Sei $\|\cdot\|_\infty$ die Zeilensummennorm für Matrizen und $\|\cdot\|$ die Operatornorm aus $L(C^0([0,x]))$. Seien die Operatoren T_n aus (8.10) mit stetigem G und mit der zusammengesetzten Trapezregel gebildet. $\{T_n\}_{n\in\mathbf{N}^{\geq 1}}$ sei stabil. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbf{N}$, s.d. die Matrizen $I - cA_n$ für alle $n \geq n_0$ invertierbar sind und es gilt die Abschätzung*

$$\|I - cA_n\|_\infty \,\|(I - cA_n)^{-1}\|_\infty \;\leq\; \|I - T_n\|\,\|(I - T_n)^{-1}\|.$$

Im folgenden Abschnitt wird ein Lösungsalgorithmus für die lineare Gel'fand-Levitan-Gleichung vorgestellt und der für die Numerik ebenfalls wichtige Rechenaufwand untersucht.

8.3 Ein numerisches Verfahren für die Lösung der linearen Gel'fand-Levitan-Gleichung

Sei für die Gleichung (7.10) $(c,k) \in \{(1,2),(2,1)\}$, dann stimmen die Gleichungen (8.1) und (7.10) überein.

Wir lösen die lineare Gel'fand-Levitansche Integralgleichung über die in Abschnitt 8.1 angegebene Diskretisierung durch das Nyström-Verfahren für jedes feste $x = x_i$, $0 \leq i \leq n$, $nh = 1$, approximativ. Die auftretenden linearen Gleichungssysteme werden als positiv definit angenommen und über Cholesky-Zerlegung gelöst. Es kann bei der Lösung des Gleichungssystems für $x = x_{i+1}$ auf die Zerlegung der Matrix des Gleichungssystems für $x = x_i$ zurückgegriffen werden, so daß die gesamte Gel'fand-Levitansche Integralgleichung in $O(n^3)$ Operationen lösbar ist, siehe Hald [24].

Es seien die Werte $u_{0,j}^{\epsilon,n}$ bzw. $v_{0,j}^{\epsilon,n}$, $1 \leq j \leq 2n$, als Approximationen zu den Randwerten $u(0,jh)$ bzw. $v(0,jh)$ der Probleme IP1_HS bzw. IP2_HS bekannt.

Liegen die Werte $u_{0,j}^{\epsilon,n}$ vor, so berechnen wir zuerst $(u')_{0,j}^{\epsilon,n} = \frac{u_{0,j+1}^{\epsilon,n} - u_{0,j-1}^{\epsilon,n}}{2h}$ für $1 \leq j \leq 2n-1$ und $(u')_{0,0}^{\epsilon,n} = 0$ nach Satz 7.1.4 und mit $\lim_{t\searrow 0} u_t(0,t) = 0$.

Wir setzen $g_j^{\epsilon,n} = (u')_{0,j}^{\epsilon,n}$ bzw. $g_j^{\epsilon,n} = v_{0,j}^{\epsilon,n}$ für $1 \leq j \leq 2n-1$ und $g_0^{\epsilon,n} = 0$, dem exakten Wert. Hieraus läßt sich die Matrix $G_{i,j} = \frac{1}{2}(g_{|j-i|}^{\epsilon,n} + g_{|j+i|}^{\epsilon,n})$, $0 \leq i,j \leq n-1$, bestimmen und das lineare Gleichungssystem (8.6) ist damit vollständig angebbar.

Zur Lösung des linearen Gleichungssystems stehen die klassischen iterativen und nicht-iterativen Methoden zur Verfügung. Wir wählen ein auf der Cholesky-Zerlegung basierendes nicht-iteratives Verfahren, welches für die Bestimmung der $O(n^2)$ Unbekannten des Gleichungssystems (8.6) mit $O(n^3)$ Operationen auskommt und einfach beschrieben werden kann.

Die Zerlegung des Gleichungssystems (8.6) zur Lösung der linearen Gel'fand-Levitanschen Integralgleichung verläuft wie folgt.

1. Für $i = 0$ gilt $I - cA_0 = 1$ und damit $K_{00} = -G_{00}$.

2. Für $i = 1$ erhalten wir

$$I - cA_1 = \begin{pmatrix} 1 + c\omega_{10}G_{00} & c\omega_{11}G_{10} \\ c\omega_{10}G_{01} & 1 + c\omega_{11}G_{11} \end{pmatrix}.$$

   Es gilt $I - cA_1 = I - cA_1'$. Eine Cholesky-Zerlegung mit positiven Diagonalelementen ist gegeben durch $l_{11} = \sqrt{1 + c\omega_{10}G_{00}}$, $l_{21} = c\omega_{11}G_{10}\frac{1}{l_{11}}$, $l_{22} = \sqrt{1 + c\omega_{11}G_{11} - l_{21}^2}$.

3. Es gilt für die $i+1$ Hauptuntermatrix der $i+2 \times i+2$ Matrix $I - cA'_{i+1}$

$$(I - cA'_{i+1})_{(0,\ldots,i),(0,\ldots,i)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \sqrt{2} \end{pmatrix} (I - cA'_i) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \sqrt{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Liegt für $(I - cA'_i) = L_i L_i^t$ eine Cholesy-Zerlegung vor, so definieren wir $\tilde{L}_i := diag(1, \ldots, 1, \sqrt{2}) L_i$. Wir nehmen an, daß auch für $\tilde{L}_i \tilde{L}_i^t - diag(0, \ldots, 0, 1)$ eine eindeutige Cholesky-Zerlegung mit positiven Diagonalelementen vorliegt,

$$\tilde{L}_i \tilde{L}_i^t - diag(0, \ldots, 0, 1) = \overline{L}_i \overline{L}_i^t.$$

Schreiben wir

$$\tilde{L}_i = \begin{pmatrix} & 0 \\ \tilde{L}_i^0 & \vdots \\ & 0 \\ \tilde{l}_i^t & a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overline{L}_i = \begin{pmatrix} & 0 \\ \overline{L}_i^0 & \vdots \\ & 0 \\ \overline{l}_i^t & b \end{pmatrix},$$

dann folgt $\overline{L}_i^0 = \tilde{L}_i^0$, $\overline{l}_i^t = \tilde{l}_i^t$ und $b = \sqrt{a^2 - 1}$. Dies ist eine Cholesky-Zerlegung der $i+1 \times i+1$ Hauptuntermatrix von $I - cA'_{i+1}$. Zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung der gesamten Matrix $I - cA'_{i+1}$ ist lediglich ein weiterer Zerlegungsschritt durchzuführen. Es gilt

$$I - cA'_{i+1} = \begin{pmatrix} \overline{L}_i \overline{L}_i^t & v \\ v^t & d \end{pmatrix} = L_{i+1} L_{i+1}^t$$

genau dann, wenn gilt

$$L_{i+1} = \begin{pmatrix} \overline{L}_i & 0 \\ l_{i+1}^t & e \end{pmatrix}$$

mit l_{i+1} durch Vorwärtseinsetzen bestimmt aus $\overline{L}_i l_{i+1} = v$ und $e = \sqrt{d - l_{i+1}^t l_{i+1}}$.

Das Gleichungssystem $(I - cA'_i)K'_i = G'_i \Leftrightarrow L_i L_i^t K'_i = G'_i$ braucht zur Bestimmung der Koeffizientenfunktion q lediglich nach K_{ii} aufgelöst zu werden. Es genügt daher, das Vorwärtseinsetzen $L_i w = G'_i$ durchzuführen und anschließend im ersten Schritt des Rückwärtseinsetzens $K_{ii} = \sqrt{\frac{2}{h}}(K'_i)_i = \sqrt{\frac{2}{h}} \frac{w_i}{(L_i)_{ii}}$ zu berechnen.

Die mit einer Schrittweite $h = \frac{1}{n}$ gewonnenen Resultate $K_{i,i}$ bezeichnen wir im folgenden mit $(K_n)_{i,i}$.

8.4 Eine Fehleranalyse für die diskrete Koeffizientenbestimmung

Sowohl für die Koeffizientenfunktion q in IP1_HS als auch für q in IP2_HS gilt auf $x \in [0,1]$ nach den Beispielen 7.1.7

$$q(x) = 2c \frac{d}{dx}(K(x,x)), \tag{8.16}$$

wobei K die Lösung der Gleichung (8.1) ist. Wir gewinnen durch Diskretisierung der rechten Seite der Gleichung (8.16) eine Approximation zur Lösung q der jeweiligen inversen Probleme.
Sei $n \in \mathbf{N}$ und $h = \frac{1}{n}$. Wir setzen $q_0 = q(0)$ als exakt gegeben voraus. Zur Approximation der Ableitung wenden wir mit $K_{i,i} = K(ih, ih)$ zentrierte Differenzen an,

$$q_i^n = 2c \frac{K_{i+1,i+1} - K_{i-1,i-1}}{2h}, \qquad 1 \le i \le n-1. \tag{8.17}$$

Dieses ist unter der Voraussetzung $K \in C^3(\{(x,t)||t| \leq x \leq 1\})$ eine Diskretisierungsformel konsistent zur Ordnung h^2.

Es liegen nur approximative Werte für K vor.

1. Für die mit dem Nyström-Verfahren gewonnenen Werte K_n bei nicht fehlerbehafteter Funktion G gelte die Abschätzung $|(K_n)_{i,i} - K_{i,i}| \leq Ch^l$ für ein $l \in \mathbf{N}^{\geq 1}$ und $C \in \mathbf{R}$ unabhängig von i. Die Gleichung (8.17) wird so zu

$$q_i^n = 2c\frac{(K_n)_{i+1,i+1} - (K_n)_{i-1,i-1}}{2h}.$$

Sei $q_i = q(x_i) = q(ih)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |q_i^n - q_i| &= 2|c(\frac{(K_n)_{i+1,i+1} - (K_n)_{i-1,i-1}}{2h} - \frac{d}{dx}(K(x,x))_i)| \\ &\leq C_1(h^{l-1} + h^2). \end{aligned} \tag{8.18}$$

2. Für die mit dem Nyström-Verfahren gewonnenen Werte K_n^ϵ bei wie in Satz 8.2.4 gegebener fehlerbehafteter Funktion G^ϵ gelte $|(K_n^\epsilon)_{i,i} - K_{i,i}| \leq C(h^l + \epsilon)$ für ein $l \in \mathbf{N}^{\geq 1}$ und $C \in \mathbf{R}$ unabhängig von i. Die Gleichung (8.17) wird so zu

$$q_i^{\epsilon,n} = 2c\frac{(K_n^\epsilon)_{i+1,i+1} - (K_n^\epsilon)_{i-1,i-1}}{2h}.$$

Es folgt die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} |q_i^{\epsilon,n} - q_i| &= 2|c(\frac{(K_n^\epsilon)_{i+1,i+1} - (K_n^\epsilon)_{i-1,i-1}}{2h} - \frac{d}{dx}(K(x,x))_i)| \\ &= 2|c(\frac{(K_n^\epsilon - K)_{i+1,i+1} - (K_n^\epsilon - K)_{i-1,i-1}}{2h} + \frac{K_{i+1,i+1} - K_{i-1,i-1}}{2h} - \frac{d}{dx}(K(x,x))_i)| \\ &\leq C_2(\frac{\epsilon}{h} + h^{l-1} + h^2). \end{aligned} \tag{8.19}$$

3. Es gelte $|(K_n^\epsilon)_{i,i} - (K_n)_{i,i}| \leq C\epsilon$ für ein $C \in \mathbf{R}$ unabhängig von i. Dann folgt

$$|q_i^{\epsilon,n} - q_i^n| \leq C_3\frac{\epsilon}{h} \tag{8.20}$$

Bemerkung 8.4.1 *Zur Lösung des inversen Viertelraumproblems IP1 mit den Anfangswerten $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{k}{2}\delta$ über die lineare Gel'fand-Levitan-Gleichung wird die Funktion $f(t) = u(0,t)$ zuerst differenziert, siehe Satz 7.1.4. Es seien die Werte $f_i^{\epsilon,n}$ als Approximation für $f(ih)$ mit Zeitschrittweite $h = \frac{1}{n}$, $0 \leq i \leq 2n$, gegeben. Sei $f'(0)$ bekannt, und $(f')_i^{\epsilon,n}$, $1 \leq i \leq 2n-1$, sei das Ergebnis der numerischen Ableitung von f mit den Werten $f_i^{\epsilon,n}$ und zentrierten Differenzen. Dann gilt für den Fehler der numerischen Differentiation unter der Voraussetzung $f \in C^3([0,2])$ die Abschätzung*

$$\sup_{1\leq i\leq 2n-1} |(f')_i^{\epsilon,n} - f'(ih)| \leq C(\frac{\epsilon}{h} + h^2).$$

Die Konstante C hängt von der dritten Ableitung von f aber nicht von h ab. Für die Berechnung von q mit der Diskretisierung aus Gleichung (8.17) gilt die Fehlerabschätzung mit ϵ ersetzt durch $C(\frac{\epsilon}{h} + h^2)$. Die Fehler bei der Differentiation der Daten, der Durchführung des Nyström-Verfahrens und der anschließenden Differentiation der Ergebnisse des Nyström-Verfahrens gehen wie folgt in den Gesamtfehler ein:

$$|q_i^{\epsilon,n} - q_i| \leq C_4(\frac{\epsilon}{h^2} + h + h^{l-1} + h^2). \tag{8.21}$$

Bei einer Wahl verschiedener Schrittweiten für die einzelnen Teile des Berechnungsverfahrens schlüsselt sich die letzte Gleichung entsprechend auf.

Die für die obige Fehleranalyse gemachten Voraussetzungen werden bei hinreichender Regularität von q erfüllt, es gilt die folgende Aussage.

Bemerkung 8.4.2

1. *Mit $q \in C^1([0,1])$ folgt für f aus Bemerkung 8.4.1 $f \in C^3([0,2])$. Mit $q \in C^2([0,1])$ folgt für K aus dem entsprechenden Goursatproblem, siehe Beispiel 7.1.7, die zu Beginn dieses Abschnitts geforderte Regularität $K \in C^3(\{(x,t)|\ |t| \le x \le 1\})$. Für Koeffizientenfunktionen geringerer Regularität kann man Differenzenverfahren niederer Konsistenzordnung zur Bestimmung von q wählen.*

2. *Die Gleichung (8.16), die zentrierte Differenz (8.17) und die entsprechende Fehlerabschätzung sind lokal. An Unstetigkeitsstellen von q oder q' gelten schlechtere Fehlerabschätzungen, während an anderen Punkten der Konsistenzfehler durchaus der obigen Analyse entspricht. Zur Bestimmung der Unstetigkeitsstellen ist die Born-Approximation geeignet, siehe Kapitel 9.*

Die Abschätzungen (8.19) und (8.21) zeigen das für numerische Differentiation typische Fehlerverhalten, vgl. Louis [33] Kap. 1 §1.1. Es folgt damit ein weiteres Resultat der Fehleranalyse:

Korollar 8.4.3 *Die numerische Lösung der inversen Probleme IP1_HS und IP2_HS mit dem Nyström-Verfahren für die lineare Gel'fand-Levitan-Gleichung weist dieselbe Art von Schlechtgestelltheit auf, wie die analytischen Probleme.*

Damit existiert bei gegebenem Fehler ϵ in den Randwerten $u(0,t)$ bzw. $v(0,t)$ der Probleme IP1_HS bzw. IP2_HS eine von ϵ abhängige Schrittweite $h_{opt} = \frac{1}{n_{opt}}$, die den Fehler im Ergebnis $\max_{0 \le i \le n-1} |q_i^{\epsilon,n} - q_i|$ minimiert, siehe Kapitel 10.

Ein Vorteil der Lösung der inversen Probleme über die lineare Gel'fand-Levitan-Gleichung liegt in der Aufteilung der Problemlösung in gut und in schlecht gestellte Aufgaben. So ist die Lösung der linearen Gel'fand-Levitan-Gleichung gut gestellt. Der in den Datenfehler zur q-Bestimmung eingehende Diskretisierungsfehler $|(K_n)_{i,i} - K_{i,i}|$ der Lösung mit dem Nyström-Verfahren kann durch eine getrennte Wahl der Schrittweiten für die K- und die q-Bestimmung und durch Verringerung der Schrittweite für die K-Bestimmung beliebig klein gehalten werden. Für IP2 liegt die Schlechtgestelltheit allein in der Differentiation zur q-Bestimmung. Für IP1 liegt sie in der Differentiation der Randwerte $g(t) = \frac{d}{dt}u(0,t)$ und in der Bestimmung von q. So ist die Schlechtgestelltheit präzisierbar und kann mit bekannten Methoden angegangen werden.

8.5 Differenzenstern und diskrete lineare Gel'fand-Levitan-Gleichung

Der von Gel'fand und Levitan [20] durchgeführte Übergang vom inversen Sturm-Liouville Problem zu den nach ihnen benannten Integralgleichungen wird von Case und Kac [13] zwischen dem inversen Streuproblem der Quantenmechanik und der linearen Gel'fand-Levitan-Gleichung formal in eine diskrete Betrachtung übertragen. Auf einen Zusammenhang zwischen einer Diskretisierung eines distributiven Problems mit δ-Distribution im Randwert und einer diskretisierten Integralgleichung, der Gopinath-Sondhischen, haben bereits Bube und Burridge [9] hingewiesen. Zhu und Jin [65] bzw. Zhu [66] beschreiben rein formal diskrete Analoga zur analytischen Theorie von Gel'fand und Levitan [20]. In den Artikeln werden das Sturm-Liouville Problem und die Goursatschen Probleme zu den orthogonalisierenden Kernen diskretisiert. Die Ergebnisse dienen zur Definition der Inhomogenität für die nichtlineare Gel'fand-Levitansche Integralgleichung und der Inhomogenität und des Kerns für die lineare Gel'fand-Levitansche Integralgleichung, so daß diskrete Darstellungen dieser Gleichungen folgen. Eine Fehleranalyse wird nicht durchgeführt. Symes [53] führt dies mit dem Differenzenstern und einer Diskretisierung der nichtlinearen Gel'fand-Levitan-Gleichung durch.

Wir übertragen die Herleitung der linearen Gel'fand-Levitan-Gleichung aus der distributiven Problemformulierung in eine diskrete Betrachtungsweise. Die Schritte der Herleitung können dabei einzeln überführt werden. Dazu diskretisieren wir zuerst die Basislösung der rechten Halbebene. Anschließend führen wir mit dem Ergebnis eine diskrete Faltung mit den Randwerten der in Abschnitt 5.2.2, Satz 5.2.2, gewonnenen Diskretisierung $v_{i,j}^{d,h}$ durch. Wir gelangen zu einer zum Nyström-Verfahren von der Ordnung zwei in h konsistenten diskreten Formulierung der linearen Gel'fand-Levitan-Gleichung.

Bei der Durchführung erweist sich die Art der von uns hergeleiteten Diskretisierung der δ-Distribution als wichtig.

Sei K die Lösung des Goursatproblems

$$K_{tt} - K_{xx} + q(x)K = 0 \qquad \text{in } x > |t| \tag{8.22}$$

mit den charakteristischen Randwerten

$$K(x,x) = K(x,-x) = \frac{1}{2}\int_0^x q(\xi)d\xi \qquad \text{auf } x \geq 0 \tag{8.23}$$

aus Satz 3.9.2 für $c = 1$. Sei $U = -\frac{1}{2}(\frac{d}{dx}H(x-|t|) + K)$ die Basislösung der rechten Halbebene aus (3.58) mit $c = 1$.

8.5.1 Diskretisierungen zur Basislösung der rechten Halbebene

Wir stellen zuerst ein zum Goursatproblem (8.22), (8.23) für K von der Ordnung zwei in h konsistentes Differenzenverfahren vor. Vergleiche dazu die Diskretisierung aus Abschnitt 5.2.1.

Eine diskrete Approximation $\{K_{i,j}^h\}_{i\in\mathbf{N}\cup\{0\},0\leq|j|\leq i}$ zu K sei definiert durch

$$K_{i+1,j}^h = K_{i,j+1}^h + K_{i,j-1}^h - K_{i-1,j}^h + h^2 q_i K_{i,j}^h \qquad \text{für } i \geq 1, 0 \leq |j| \leq i-1,$$

$$\begin{array}{rclrcll} K_{0,0}^h & = & 0, & K_{i,i}^h & = & K_{i-1,i-1}^h + \frac{h}{4}(q_{i-1}+q_i) & \text{für } i \geq 1, \\ K_{1,0}^h & = & \frac{h}{2}q_0, & K_{i+1,i}^h & = & K_{i,i-1}^h + \frac{h}{2}q_i + \frac{h^2}{2}q_i K_{i,i}^h & \text{für } i \geq 1, \end{array}$$

und $K_{i,j}^h$ sei gerade im zweiten Index.
Wir benutzen später noch die durch sukzessives Einsetzen folgende Darstellung $K_{i,i}^h = \frac{h}{4}\sum_{l=1}^i (q_{l-1} + q_l) = \frac{h}{4}q_0 + \frac{h}{2}\sum_{l=1}^{i-1} q_l + \frac{h}{4}q_i$.

Für beschränktes $q \in C^2(\mathbf{R}^{\geq 0})$ ist K in $x > |t|$ dreimal stetig differenzierbar und der Differenzenstern ist eine $O(h^2)$-konsistente Diskretisierung des Differentialoperators. Die charakteristischen Randwerte sind mit der zusammengesetzten Trapezregel diskretisiert und es gilt $|K_{i,i} - K_{i,i}^h| \leq c_0 h^2$ für eine Konstante $c_0 \in \mathbf{R}$. Es gelten wegen $\lim_{\epsilon_1\searrow 0,\epsilon_2\to 0,|\epsilon_2|<\epsilon_1} K_x(\epsilon_1,\epsilon_2) = \frac{1}{2}q(0)$ die Ungleichungen $|K_{1,0} - K_{1,0}^h| \leq c_1 h^2$ und $|K_{i+1.i} - K_{i+1,i}^h| \leq |K_{i,i-1} - K_{i,i-1}^h| + \frac{h^2}{2}|q_i(K_{i,i} - K_{i,i}^h)| + c_2 h^3$, und damit $|K_{i+1.i} - K_{i+1,i}^h| \leq c_3 h^2$ für drei von h unabhängige Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$.

Desweiteren geben wir einen Ansatz für eine Diskretisierung von $-U$ an.

Sei $U_{0,0}^{d,h} = \frac{1}{2h}$, $U_{0,-1}^{d,h} = U_{0,1}^{d,h} = \frac{1}{4h}$ und $U_{0,j}^{d,h} = 0$ für alle $j \in \mathbf{Z}\setminus\{-1,0,1\}$. Es gelte $U_{-1,j}^{d,h} = U_{1,j}^{d,h}$ für $j \in \mathbf{Z}$. Dann existieren die Werte $U_{i,j}^{d,h}$, $(i,j) \in (\mathbf{N}\cup\{-1\})\times\mathbf{Z}$, welche außerdem dem 5-Punkt Differenzenstern genügen eindeutig.
Es gilt insbesondere $U_{i,j}^{d,h} = 0$ für $j \geq i+2$, $U_{i,i+1}^{d,h} = \frac{1}{8h}$ für $i \geq 1$, $U_{1,1}^{d,h} = \frac{1}{4h} + \frac{h}{8}q_0$ und $U_{i+1,i+1}^{d,h} = U_{i,i}^{d,h} + h^2 q_i U_{i,i+1}^{d,h} = U_{i,i}^{d,h} + \frac{h}{8}q_i$, also $U_{i,i}^{d,h} = \frac{1}{4h} + \frac{h}{8}\sum_{l=1}^i q_{l-1}$ für $i \geq 1$. $U_{i,j}^{d,h}$ ist gerade im zweiten Index.
Die $\frac{1}{h}$-Anteile von $U_{i,j}^{d,h}$ sind auf $i \geq -1$ gleich $\frac{1}{2}\delta_{i,j}$, wobei $\delta_{i,j}$ aus (5.32) stammt, siehe auch Abbildung 5.6. $\frac{1}{2}H_i\delta_{i,j}$ mit $H_i = \begin{cases} 0 & \text{für } i < 0, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ stellt in dem Sinne eine Diskretisierung von $\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(H(x-|t|))$ dar, daß für alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ gilt

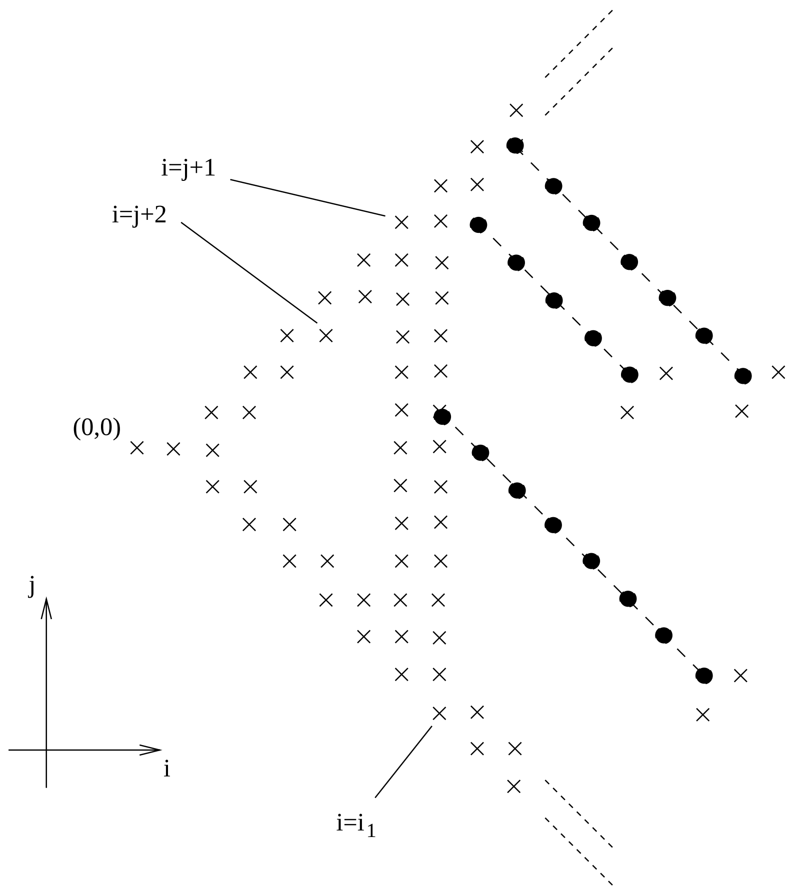

Abbildung 8.1: Darstellung von Summationen aus Abschnitt 8.5.1.

$$\begin{aligned} & h^2 \sum_{(i,j)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}} \tfrac{1}{2} H_i \delta_{i,j}\phi_{i,j} \\ = \;& h^2\left(\tfrac{1}{4h}\sum_{i=0}^{\infty}(\phi_{i,i}+\phi_{i,-i}) + \tfrac{1}{8h}\sum_{i=0}^{\infty}(\phi_{i,i+1}+\phi_{i,-i-1}+\phi_{i+1,i}+\phi_{i+1,-i})\right) \\ = \;& \tfrac{h}{2}\sum_{i=0}^{\infty}(\phi_{i,i}+\phi_{i,-i}) + O(h^2) \\ = \;& \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \phi(x,x)+\phi(x,-x)dx + O(h^2) \\ = \;& <\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dx}(H(x-|t|)),\phi> + O(h^2). \end{aligned}$$

Es existiert $C \in \mathbf{R}$, unabhängig von ϕ, s.d. der $O(h^2)$-Term betragsmäßig durch $Ch^2|\operatorname{supp}\phi|\,\|\phi\|_{2,\infty}$ abgeschätzt werden kann.

Im folgenden leiten wir zunächst Abschätzungen für die Differenz zwischen dem regulären Teil $U^{d,h}_{i,j} - \frac{1}{2}\delta_{i,j}$ der Diskretisierung von $-U$ und $\frac{1}{2}K^h$ her. Wir übertragen dazu ein Beweisverfahren von Symes [53] Lemma 6.1, welches er dort für ein Halbraumgitter durchführt.

Es sei $\overline{K}_{i,j} = U^{d,h}_{i,j} - \frac{1}{2}\delta_{i,j} - \frac{1}{2}K^h_{i,j}$. Wir zeigen für jedes $X \in \mathbf{R}^{>0}$ die Existenz einer von h unabhängigen Konstanten C, so daß die Abschätzung $|\overline{K}_{i,j}| \le Ch^2$ für alle (i,j) mit $1 \le i \le \frac{X}{h}$ und $|j| \le i-1$ gilt. Dazu geben wir zuerst Abschätzungen auf einer Indexmenge $|j| = i-1$, $1 \le i \le i_0$, und $|j| = i-2$, $2 \le i \le i_0$, siehe Abbildung 8.1, an. Nach dem darauf folgenden Lemma 8.5.1 lassen sich diese Abschätzungen samt ihren Größenordnungen in h auf eine Indexmenge $1 \le |j| \le i \le i_0$ fortsetzen, die durch $i_0 h \le v_1 \in \mathbf{R}^{>0}$, v_1 unabhängig von h, bestimmt wird. In Lemma 8.5.2 wird die Fortsetzbarkeit der Abschätzungen von einer Indexmenge $\{(i,j)|\,((i_1-2\le i\le i_0-2)\wedge(|j|=i-1\vee|j|=i-2))\ \vee\ ((i=i_1-1\vee i=i_2-1)\wedge(|j|\le i_1-2))\}$ bewiesen. Anschließend wird in Satz 8.5.3 gezeigt, daß Lemma 8.5.2 iterativ angewandt werden kann, so daß die gesuchte Abschätzung folgt.

Sei $X \in \mathbf{R}^{>0}$ und seien $h \in \mathbf{R}^{>0}$ und $i_0 \in \mathbf{N}$ so, daß $i_0 h \leq X < (i_0+1)h$ gilt.

Es existieren Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, so daß an den $(j = i-1)$-Indizes für $i \leq i_0$ gilt: $\overline{K}_{1,0} = 0$. Für $i \geq 1$ erfüllt $U^{d,h}$ die Gleichungen $U^{d,h}_{i+1,i} = U^{d,h}_{i,i-1} + h^2 q_i U^{d,h}_{i,i} = U^{d,h}_{i,i-1} + \frac{h}{4} q_i + h^2 q_i (U^{d,h}_{i,i} - \frac{1}{4h})$. Daraus folgt $\overline{K}_{i+1,i} = \overline{K}_{i,i-1} + h^2 q_i ((U^{d,h}_{i,i} - \frac{1}{4h}) - \frac{1}{4} K^h_{i,i}) = \overline{K}_{i,i-1} + \frac{h^3}{16} q_i (q_0 - q_i)$, also

$$|\overline{K}_{i+1,i} - \overline{K}_{i,i-1}| \leq c_2 h^3, \tag{8.24}$$

und sukzessives Einsetzen ergibt mit $i_0 h \leq X$

$$|\overline{K}_{i+1,i}| \leq c_1 h^2. \tag{8.25}$$

Ebenso gilt für die $(j = i+2)$-Indizes bei eventuell vergrößerten Konstanten c_1, c_2: $\overline{K}_{2,0} = 0$. Für $i \geq 1$ folgt aus $U^{d,h}_{i+2,i} = U^{d,h}_{i+1,i-1} + U^{d,h}_{i+1,i+1} - U^{d,h}_{i,i} + h^2 q_{i+1} U^{d,h}_{i+1,i} = U^{d,h}_{i+1,i-1} + \frac{h}{8}(q_i + q_{i+1}) + h^2 q_{i+1}(U^{d,h}_{i+1,i} - \frac{1}{8h})$ die Gleichung $\overline{K}_{i+2,i} = \overline{K}_{i+1,i-1} + h^2 q_{i+1} \overline{K}_{i+1,i}$, damit nach (8.25)

$$|\overline{K}_{i+2,i} - \overline{K}_{i+1,i-1}| \leq c_2 h^4. \tag{8.26}$$

Außerdem folgt mit $i_0 h \leq X$ die Abschätzung

$$|\overline{K}_{i+2,i}| \leq c_1 h^3. \tag{8.27}$$

Es existieren $\tilde{c}_l \in \mathbf{R}$, $l \in \{1,2\}$, unabhängig von X, so daß gilt $c_l = c_l(X) \leq X \tilde{c}_l$.

Lemma 8.5.1 *Sei $q \in C^0(\mathbf{R})$ beschränkt. Sei $X \in \mathbf{R}^{>0}$ fest und seien c_1, c_2 die Konstanten aus den Abschätzungen (8.24) bis (8.27). Sei $c > 3$, $s = cc_1 \|q\|_\infty > 0$ und es seien $h \in \mathbf{R}^{>0}$ und $i_0 \in \mathbf{N}$ so, daß*

$$i_0 h \leq min(X, \frac{(c-1)c_2}{2s}, (\frac{2(c-3)c_1}{s})^{\frac{1}{2}}) =: v_1. \tag{8.28}$$

Dann gilt mit $i \leq i_0$:

$$|\overline{K}_{i,j}| \leq cc_1 h^2 \qquad \text{für } 1 \leq i,\ |j| \leq i-1 \tag{8.29}$$

und

$$\frac{1}{h^2}|q_{i-1}\overline{K}_{i-1,j}| \leq s \qquad \text{für } 2 \leq i,\ |j| \leq i-2, \tag{8.30}$$

$$|\overline{K}_{i,j} - \overline{K}_{i-1,j-1}| \leq cc_2 h^3 \qquad \text{für } 2 \leq i,\ -i+3 \leq j \leq i-1. \tag{8.31}$$

Beweis: Der Beweis erfolgt per Induktion nach i. Für $i = 1$ und $i = 2$ gelten die Abschätzungen aufgrund der Abschätzungen (8.24) bis (8.27) für die $(j = i+1)$- und $(j = i+2)$-Werte und (8.31) für $(i,j) = (3,0)$ zusätzlich wegen des Differenzensterns. Für ein i_1 mit $2 \leq i_1 - 1 < i_0$ seien die Ungleichungen (8.29), (8.30) und (8.31) für alle $i \leq i_1 - 1$ erfüllt. Dann gilt $\frac{1}{h^2}|q_{i_1-1}\overline{K}_{i_1-1,j}| \leq \frac{1}{h^2}\|q\|_\infty h^2 cc_1 = s$ nach (8.29) für $|j| \leq i_1 - 2$. Für den Induktionsschluß bei den Gleichungen (8.29) und (8.31) geben wir einige Darstellungen für $\overline{K}_{i,j}$, $(i,j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$ mit $i > |j| + 2$ an. Ist $i + j$ gerade, so gilt $k = \frac{i+j}{2} - 1$, $l = \frac{i-j}{2} - 1 \Leftrightarrow (i,j) = (k+2+l, k-l)$. Ist $i + j$ ungerade, so gilt $k = \frac{i+j-1}{2}$, $l = \frac{i-j-1}{2} \Leftrightarrow (i,j) = (k+1+l, k-l)$. Es gilt der Differenzenstern

$$\overline{K}_{i,j} - \overline{K}_{i-1,j-1} = \overline{K}_{i-1,j+1} - \overline{K}_{i-2,j} + h^2 q_{i-1} \overline{K}_{i-1,j}.$$

Durch sukzessives Einsetzen folgen die Gleichungen

$$\overline{K}_{k+2+l,k-l} - \overline{K}_{k+1+l,k-l-1} = \overline{K}_{k+2,k} - \overline{K}_{k+1,k-1} + h^2 \sum_{m=0}^{l-1} q_{k+2+m} \overline{K}_{k+2+m,k-1-m} \tag{8.32}$$

und

$$\overline{K}_{k+1+l,k-l} - \overline{K}_{k+l,k-l-1} = \overline{K}_{k+1,k} - \overline{K}_{k,k-1} + h^2 \sum_{m=0}^{l-1} q_{k+1+m} \overline{K}_{k+1+m,k-1-m}, \tag{8.33}$$

vergleiche Abbildung 8.1. Hieraus wiederum folgen durch Ersetzen von $\overline{K}_{k+1+l,k-l-1}$ beziehungsweise $\overline{K}_{k+l,k-l-1}$ und sukzessives Durchführen dieses Schrittes die Gleichungen

$$\overline{K}_{k+2+l,k-l} = \overline{K}_{l+2,-l} + \overline{K}_{k+2,k} - \overline{K}_{2,0} + h^2 \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{l-1} q_{k+2+m-n} \overline{K}_{k+2+m-n,k-1-m-n} \tag{8.34}$$

und

$$\overline{K}_{k+1+l,k-l} = \overline{K}_{l+1,-l} + \overline{K}_{k+1,k} - \overline{K}_{1,0} + h^2 \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{l-1} q_{k+1+m-n} \overline{K}_{k+1+m-n,k-1-m-n}. \tag{8.35}$$

Sowohl in dem Fall, daß $i_1 + j$ gerade, als auch in dem Fall, daß es ungerade ist, folgen aus den Gleichungen (8.34) bzw. (8.35) für $|j| \leq i_1 - 1$ die Abschätzungen

$$|\overline{K}_{i_1,j}| \;\leq\; 3c_1 h^2 + \frac{i_1^2}{2} h^4 s \;=\; h^2 (3c_1 + \frac{i_1^2}{2} h^2 s) \;\leq\; c c_1 h^2.$$

Die letzte Ungleichung gilt wegen der Voraussetzung (8.28).
Es folgt mit (8.32) bzw. (8.33) für $-i_1 + 3 \leq j \leq i_1 - 1$

$$|\overline{K}_{i_1,j} - \overline{K}_{i_1-1,j-1}| \;\leq\; c_2 h^3 + 2 i_1 h^4 s \;=\; h^3 (c_2 + 2 i_1 h s) \;\leq\; c c_2 h^3.$$

Die letzte Ungleichung gilt ebenfalls wegen Voraussetzung (8.28).

□

Die Konstanten c_1, c_2 des Lemmas hängen von X, jedoch bei Gültigkeit von (8.28) nicht von h und i_0 ab.

Es gilt das

Lemma 8.5.2 *Sei $q \in C^0(\mathbf{R})$ beschränkt. Sei $X \in \mathbf{R}^{>0}$ fest. Seien $i_0, i_1 \in \mathbf{N}$ und $h \in \mathbf{R}^{>0}$ so, daß $i_0 h \leq X$ und $2 \leq i_1 < i_0$. Es gelte mit zwei Konstanten c_1, c_2*

$$|\overline{K}_{i+1,i}|, |\overline{K}_{i+2,i}| \;\leq\; c_1 h^2 \qquad \textit{für } i_1 - 2 \leq i \leq i_0 - 2,$$

$$|\overline{K}_{i+1,i} - \overline{K}_{i,i-1}|, |\overline{K}_{i+2,i} - \overline{K}_{i+1,i-1}| \;\leq\; c_2 h^3 \qquad \textit{für } i_1 - 1 \leq i \leq i_0 - 2.$$

Außerdem seien für zwei Konstanten c_3, c_4 die folgenden Abschätzungen gültig,

$$|\overline{K}_{i_1-1,j}|, |\overline{K}_{i_1,j}| \leq c_3 h^2 \qquad \textit{für } |j| \leq i_1 - 2$$

und

$$|\overline{K}_{i_1,j} - \overline{K}_{i_1-1,j-1}| \leq c_4 h^3 \qquad \textit{für } -i_1 + 3 \leq j \leq i_1 - 1.$$

Sei $c > 3$, $s = c \max\{c_1, c_3\} \|q\|_\infty$, $v_2 = \min\{X, -\frac{2c_4}{s} + ((\frac{2c_4}{s})^2 - 2\frac{3-c}{s} \max\{c_1, c_3\})^{\frac{1}{2}}, \frac{c-1}{s} \max\{c_2, c_4\}\}$ und es gelte $(i_2 - i_1) h \leq v_2$. Dann gelten die Abschätzungen

$$|\overline{K}_{i,j}| \;\leq\; c \max\{c_1, c_3\} h^2 \qquad \textit{für } i_1 - 1 \leq i \leq i_2, |j| \leq i - 1 \tag{8.36}$$

und

$$\frac{1}{h^2} |q_{i-1} \overline{K}_{i-1,j}| \;\leq\; s \qquad \textit{für } i_1 \leq i \leq i_2, |j| \leq i - 2, \tag{8.37}$$

$$|\overline{K}_{i,j} - \overline{K}_{i-1,j-1}| \;\leq\; c \max\{c_2, c_4\} h^3 \qquad \textit{für } i_1 \leq i \leq i_2, -i + 3 \leq j \leq i - 1. \tag{8.38}$$

Beweis: Der Beweis erfolgt per Induktion nach i. Der Induktionsanfang für $i = i_1 - 1$ und $i = i_1$ folgt aus den Voraussetzungen des Lemmas. Für ein i_3 mit $i_1 \leq i_3 \leq i_2$ seien die Ungleichungen (8.36), (8.37) und (8.38) für alle $i \leq i_3 - 1$ erfüllt. Dann gilt

$$\frac{1}{h^2}|q_{i_3-1}\overline{K}_{i_3-1,j}| \leq \frac{1}{h^2}\|q\|_\infty h^2 c \max\{c_1, c_3\} = s,$$

für $|j| \leq i_3 - 2$. Um den Induktionsschluß bei den Gleichungen (8.36) und (8.38) durchzuführen, geben wir einige Darstellungen für $\overline{K}_{i,j}$, $(i,j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$ mit $i \geq \max\{i_1 + 1, |j| + 2\}$ an. Die Gleichung (8.32) gilt weiterhin für $k \geq i_1 - 2$, $l \geq 0$, die Gleichung (8.33) für $k \geq i_1 - 1$, $l \geq 0$.
Für $k < i_1 - 2$ bzw. $k < i_1 - 1$ mit $k+2+l > i_1$ bzw. $k+1+l > i_1$ brechen die aus dem Differenzenstern analog hergeleiteten Summen an den an i_1 gegebenen Randwerten ab. Es gilt dann

$$\overline{K}_{i,j} - \overline{K}_{i-1,j-1} = \overline{K}_{i_1,j+i-i_1} - \overline{K}_{i_1-1,j+i-i_1-1} + h^2 \sum_{m=0}^{i-i_1-1} q_{i_1+m}\overline{K}_{i_1+m,j+i-i_1-1-m}, \tag{8.39}$$

vergleiche Abbildung 8.1. So, wie aus den Gleichungen (8.32) und (8.33) durch sukzessives Einsetzen die Gleichungen (8.34) und (8.35) folgen, lassen sich hier analoge Gleichungen herleiten. Es gilt für $i + j$ gerade mit $i + j \geq 2i_1 - 2$ und $k + 2 + l > i_1$

$$\overline{K}_{k+2+l,k-l} - \overline{K}_{l+i_1-1,-l+i_1-3} = \overline{K}_{k+2,k} - \overline{K}_{i_1-1,i_1-3} + h^2 \sum_{n=0}^{k-i_1+2} \sum_{m=0}^{l-1} q_{k+2+m-n}\overline{K}_{k+2+m-n,k-1-m-n}.$$

Es gilt für $i + j$ ungerade mit $i + j \geq 2i_1 - 1$ und $k + 1 + l > i_1$

$$\overline{K}_{k+1+l,k-l} - \overline{K}_{l+i_1-1,-l+i_1-2} = \overline{K}_{k+1,k} - \overline{K}_{i_1-1,i_1-2} + h^2 \sum_{n=0}^{k-i_1+1} \sum_{m=0}^{l-1} q_{k+1+m-n}\overline{K}_{k+1+m-n,k-1-m-n}.$$

Es gilt für $i + j < 2i_1 - 2$ mit $i - j \leq 2i_1 - 3$ und $i > i_1$ unter Anwendung von (8.39)

$$\begin{aligned}
\overline{K}_{i,j} - \overline{K}_{i_1,j-i+i_1} &= \sum_{n=0}^{i-i_1-1} (\overline{K}_{i_1,j+i-i_1-2n} - \overline{K}_{i_1-1,j+i-i_1-1-2n}) \\
&\quad + h^2 \sum_{n=0}^{i-i_1-1} \sum_{m=0}^{i-i_1-1-n} q_{i_1+m}\overline{K}_{i_1+m,j+i-i_1-1-m-2n}.
\end{aligned}$$

Für (i,j) mit $i + j \geq 3$, $i - j > 2i_1 - 3$ und $i + j$ gerade folgt

$$\begin{aligned}
\overline{K}_{k+2+l,k-l} - \overline{K}_{l+2,-l} &= \overline{K}_{i_1-1+k,-i_1+3+k} - \overline{K}_{i_1-1,-i_1+3} \\
&\quad + h^2 \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{m=i_1-3}^{l-1} q_{k+2+m-n}\overline{K}_{k+2+m-n,k-1-m-n}
\end{aligned}$$

und für $i + j$ ungerade

$$\overline{K}_{k+1+l,k-l} - \overline{K}_{l+1,-l} = \overline{K}_{i_1-1+k,-i_1+2+k} - \overline{K}_{i_1-1,-i_1+2} + h^2 \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{m=i_1-2}^{l-1} q_{k+1+m-n}\overline{K}_{k+1+m-n,k-1-m-n}.$$

Mit diesen Formeln läßt sich in leichter Abwandlung der Argumentation aus dem Beweis von Lemma 8.5.1 der Induktionsschluß durchführen. Es gilt

$$\begin{aligned}
|\overline{K}_{i_3,j}| &\leq 3\max\{c_1, c_3\}h^2 + 2(i_3 - i_1)c_4 h^3 + \frac{h^2}{2}(i_3 - i_1)^2 h^2 s \\
&= h^2(3\max\{c_1, c_3\} + 2(i_3 - i_1)c_4 h + \frac{h^2}{2}(i_3 - i_1)^2 s) \\
&\leq h^2 c \max\{c_1, c_3\},
\end{aligned}$$

die letzte Ungleichung wegen $i_3 h \leq v_2$. Mit eben dieser Bedingung folgt auch

$$\begin{aligned} |\overline{K}_{i_3,j} - \overline{K}_{i_3-1,j-1}| &\leq \max\{c_2, c_4\}h^3 + (i_3 - i_1)h^4 s \\ &= h^3(\max\{c_2, c_4\} + (i_3 - i_1)hs) \\ &\leq h^3 c \max\{c_2, c_4\}. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

□

Die Abschätzung für $\overline{K}_{i,j}$ der Ordnung zwei in h läßt sich nach dem folgenden Satz auf jedes beschränkte Gebiet ausdehnen.

Satz 8.5.3 *Seien die Voraussetzungen des Lemmas 8.5.1 erfüllt. Sei $X \in \mathbf{R}^{>0}$ und $h \in \mathbf{R}^{>0}$. Dann existiert ein $l_0 \in \mathbf{N}$ unabhängig von h, so daß*

$$|\overline{K}_{i,j}| \leq c^{l_0} c_1 h^2 \qquad \text{für } 1 \leq i \leq \frac{X}{h},\ |j| \leq i-1. \tag{8.40}$$

Beweis: Die Abschätzungen des Lemmas 8.5.1 liefern die Voraussetzungen für die Aussage des Lemmas 8.5.2. Dieses kann iterativ angewandt werden, so daß mit

$$v_k = \min\{X, -\frac{2c^{k-1}c_2}{s_k} + ((\frac{2c^{k-1}c_2}{s_k})^2 - 2\frac{3-c}{s_k}c^{k-1}c_1)^{\frac{1}{2}}, \frac{c-1}{s_k}c^{k-1}c_2\},$$

$k \geq 1$, und $s_k = c^k c_1 \|q\|_\infty$, auf der Menge der $i \in \mathbf{N}$ mit $\sum_{k=1}^{l-1} v_k \leq ih \leq \sum_{k=1}^{l} v_k$ und $|j| \leq i-1$ gilt

$$|\overline{K}_{i,j}| \leq c^l c_1 h^2.$$

Wegen $v_k = v_2$, $k \geq 2$, folgt die Behauptung.

□

Mit (8.40) haben wir die Differenz zwischen der Diskretisierung K^h des Goursatproblems (8.22), (8.23) und der Diskretisierung des regulären Teils der Basislösung der rechten Halbebene durch die Schrittweite abgeschätzt.

Mit den gleichen Methoden, wie sie in den Beweisen der vorigen Lemmata und im vorigen Satz angewandt wurden, läßt sich der folgende Satz herleiten.

Satz 8.5.4 *Sei $q \in C^0(\mathbf{R})$ gerade und beschränkt. v^h sei wie in Abschnitt 5.2.1 gebildet und entsprechend über Ω hinaus auf $\{(i,j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} | \, j \geq i\}$ erweitert. $v^{d,h}$ genüge den Bedingungen aus Satz 5.2.2. Dann existiert für jedes $t \in \mathbf{R}^{>0}$ eine von h unabhängige Konstante c_1, so daß mit $\overline{v}_{i,j} = v^{d,h}_{i,j} - \delta_{i,j} - v^h_{i,j}$ gilt:*

$$|\overline{v}_{i,j}| \leq c_1 h^2 \qquad \text{für } j-1 \geq i \geq 0 \text{ und } jh \leq t - ih. \tag{8.41}$$

Beweis: Mit (5.34), (5.35) und (5.36), (5.37) folgt die Ungleichung (8.41) für $i \geq 0$, $j = i+1$ und $j = i+2$, und die Ungleichung $|\overline{v}_{i,j} - \overline{v}_{i-1,j-1}| \leq c_2 h^3$ für $i \geq 1$, $j = i+1$, $j = i+2$ und eine von h unabhängige Konstante c_2. Der weitere Beweis erfolgt analog zu denen der Lemmata 8.5.1 und 8.5.2 und Satz 8.5.3 mit den Entsprechungen zu den Formeln (5.39), (5.41) und (5.45), (5.46).

□

8.5.2 Eine Diskretisierung der linearen Gel'fand-Levitan-Gleichung

In einem ersten Schritt gelangen wir mit den zwei folgenden Lemmata zu einem diskreten Äquivalent der Gleichung (7.5), $v(x,t) = -(U(x,\tau) *_\tau v(0,\tau))(t)$, mit den Diskretisierungen $U^{d,h}$ und $v^{d,h}$. Anschließend führen wir eine Umformung mit den Resultaten der Differenzenverfahren für die gemischten Probleme v^h und K^h durch und gelangen zu einer $O(h^2)$-konsistenten Diskretisierung der linearen Gel'fand-Levitan-Gleichung (7.10).

Wir bilden eine zu (7.1) analoge diskrete Faltung.

Lemma 8.5.5 *Sei $v^{d,h}_{0,j}$, $j \in \mathbf{Z}$, aus Satz 5.2.2, $U^{d,h}$ die Diskretisierung von $-U = \frac{1}{2}(\frac{d}{dx}H(x-|t|) + K(x,t))$ nach Abschnitt 8.5.1 und*

$$\tilde{v}_{i,j} = h \sum_{|l| \leq i+1} U^{d,h}_{i,l} v^{d,h}_{0,j+l} \tag{8.42}$$

für $i \geq 0$, $j \in \mathbf{Z}$. Dann erfüllt $\tilde{v}_{i,j}$ den Differenzenstern, d.h. es gilt für $i \geq 2$ und $j \in \mathbf{Z}$ die Gleichung

$$\tilde{v}_{i-1,j+1} + \tilde{v}_{i-1,j-1} - \tilde{v}_{i,j} - \tilde{v}_{i-2,j} + h^2 q_{i-1} \tilde{v}_{i-1,j} = 0.$$

Beweis: Ersetzen wir im Differenzenstern $\tilde{v}_{i,j}$ und dividieren durch h, so folgt

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{|l|\leq i} U^{d,h}_{i-1,l} v^{d,h}_{0,j+1+l} + \sum_{|l|\leq i} U^{d,h}_{i-1,l} v^{d,h}_{0,j-1+l} - \sum_{|l|\leq i+1} U^{d,h}_{i,l} v^{d,h}_{0,j+l} - \sum_{|l|\leq i-1} U^{d,h}_{i-2,l} v^{d,h}_{0,j+l} \\
&\textstyle+ h^2 q_{i-1} \sum_{|l|\leq i} U^{d,h}_{i-1,l} v^{d,h}_{0,j+l} \\
= \;&\textstyle\sum_{l=-i+1}^{i+1} U^{d,h}_{i-1,l-1} v^{d,h}_{0,j+l} + \sum_{l=-i-1}^{i-1} U^{d,h}_{i-1,l+1} v^{d,h}_{0,j+l} - \sum_{l=-i-1}^{i+1} U^{d,h}_{i,l} v^{d,h}_{0,j+l} - \sum_{l=-i+1}^{i-1} U^{d,h}_{i-2,l} v^{d,h}_{0,j+l} \\
&\textstyle+ \sum_{l=-i}^{i} h^2 q_{i-1} U^{d,h}_{i-1,l} v^{d,h}_{0,j+l}.
\end{aligned}$$

$U^{d,h}_{i,j}$ erfüllt den Differenzenstern, in der rechten Seite verschwinden daher alle Terme mit Index $|l| \leq i-1$ und es bleibt

$$U^{d,h}_{i-1,i} v^{d,h}_{0,j+i+1} + U^{d,h}_{i-1,i-1} v^{d,h}_{0,j+i} + U^{d,h}_{i-1,-i+1} v^{d,h}_{0,j-i} + U^{d,h}_{i-1,-i} v^{d,h}_{0,j-i-1}$$

$$-U^{d,h}_{i,-i} v^{d,h}_{0,j-i} - U^{d,h}_{i,-i-1} v^{d,h}_{0,j-i-1} - U^{d,h}_{i,i+1} v^{d,h}_{0,j+i+1} - U^{d,h}_{i,i} v^{d,h}_{0,j+i} + h^2 q_{i-1} U^{d,h}_{i-1,-i} v^{d,h}_{0,j-i} + h^2 q_{i-1} U^{d,h}_{i-1,i} v^{d,h}_{0,j+i}.$$

$U^{d,h}$ ist gerade und mit $U^{d,h}_{k,k+1} = \frac{1}{8h}$, $U^{d,h}_{k,k} = U^{d,h}_{k+1,k+1} - h^2 q_k U^{d,h}_{k,k+1}$ für $k \geq 1$ ist der Restterm gleich Null, womit die Behauptung des Lemmas bewiesen ist.

□

Das Resultat der diskreten Faltung ist auf dem rechten Halbraum durch $v^{d,h}_{i,j}$ darstellbar.

Lemma 8.5.6 *Für $\tilde{v}_{i,j}$ aus (8.42), $(i,j) \in (\mathbf{N} \cup \{0\}) \times \mathbf{Z}$, gilt*

$$\tilde{v}_{i,j} \;=\; \frac{1}{4} v^{d,h}_{i,j-1} + \frac{1}{2} v^{d,h}_{i,j} + \frac{1}{4} v^{d,h}_{i,j+1}. \tag{8.43}$$

Beweis: Der Beweis erfolgt per Induktion nach i. Es gilt für $i = 0$

$$\tilde{v}_{0,j} = \frac{1}{4} v^{d,h}_{0,j+1} + \frac{1}{2} v^{d,h}_{0,j} + \frac{1}{4} v^{d,h}_{0,j-1}.$$

Für $i = 1$ folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_{1,j} \;&=\; h\left(\tfrac{1}{8h} v^{d,h}_{0,j-2} + (\tfrac{1}{4h} + \tfrac{h}{8} q_0) v^{d,h}_{0,j-1} + (\tfrac{1}{4h} + \tfrac{h}{4} q_0) v^{d,h}_{0,j} + (\tfrac{1}{4h} + \tfrac{h}{8} q_0) v^{d,h}_{0,j+1} + \tfrac{1}{8h} v^{d,h}_{0,j+2}\right) \\
&=\; \tfrac{1}{8}(v^{d,h}_{0,j-2} + v^{d,h}_{0,j} + h^2 q_0 v^{d,h}_{0,j-1}) + \tfrac{1}{4}(v^{d,h}_{0,j-1} + v^{d,h}_{0,j+1} + h^2 q_0 v^{d,h}_{0,j}) \\
&\quad + \tfrac{1}{8}(v^{d,h}_{0,j+2} + v^{d,h}_{0,j} + h^2 q_0 v^{d,h}_{0,j+1}) \\
&=\; \tfrac{1}{4} v^{d,h}_{1,j-1} + \tfrac{1}{2} v^{d,h}_{1,j} + \tfrac{1}{4} v^{d,h}_{1,j+1}.
\end{aligned}$$

Es sei $i \geq 1$ und es gelte (8.43) für alle $\tilde{v}_{l,j}$ mit $0 \leq l \leq i$, $j \in \mathbf{Z}$. $v^{d,h}$ erfüllt den Differenzenstern. Mit der Induktionsvoraussetzung und Lemma 8.5.5 gilt dann

$$\begin{aligned}
\tilde v_{i+1,j} &= \tilde v_{i,j+1}+\tilde v_{i,j-1}-\tilde v_{i-1,j}+h^2q_i\tilde v_{i,j}\\
&= \tfrac14 v^{d,h}_{i,j+2}+\tfrac12 v^{d,h}_{i,j+1}+\tfrac14 v^{d,h}_{i,j}+\tfrac14 v^{d,h}_{i,j}+\tfrac12 v^{d,h}_{i,j-1}+\tfrac14 v^{d,h}_{i,j-2}-\tfrac14 v^{d,h}_{i-1,j+1}-\tfrac12 v^{d,h}_{i-1,j}-\tfrac14 v^{d,h}_{i-1,j-1}\\
&\quad +h^2q_i(\tfrac14 v^{d,h}_{i,j+1}+\tfrac12 v^{d,h}_{i,j}+\tfrac14 v^{d,h}_{i,j-1})\\
&= \tfrac14 v^{d,h}_{i+1,j+1}+\tfrac12 v^{d,h}_{i+1,j}+\tfrac14 v^{d,h}_{i+1,j-1}.
\end{aligned}$$

□

Das nun folgende Hauptergebnis dieses Abschnitts besagt, daß mit der approximativen Lösung v^h des Differenzenverfahrens für das gemischte Problem zu den Anfangswerten $v(x,0)=\delta(x)$ und $v_t(x,0)=0$ im Viertelraumproblem und mit der Diskretisierung K^h des gemischten Problems für den regulären Teil der Basislösung der rechten Halbebene eine $O(h^2)$-konsistente Diskretisierung der linearen Gel'fand-Levitan-Gleichung folgt.
Hergeleitet wird das Resultat über die eingeführten Diskretisierungen der distributiven Probleme $v^{d,h}$ und $U^{d,h}$. Die Art der Diskretisierung mit den $\delta_{i,j}$-Anteilen ist hier wieder von Vorteil.

Satz 8.5.7 *Sei $\{K^h_{i,j}\}_{i\in\mathbf{N}\cup\{0\},0\le|j|\le i}$ die diskrete Lösung des Goursatproblems (8.22), (8.23) aus Abschnitt 8.5.1 und $\{v^h_{i,j}\}_{(ih,jh)\in\overline{\Omega}}$ aus Abschnitt 5.2.1. Es sei v^h gerade gespiegelt, $v^h_{0,-j}=v^h_{0,j}$ für $j\in\mathbf{N}$ und $v^h_{i,j}=v^h_{i,-j}$ für $(ih,jh)\in\overline{\Omega}$. Dann gilt auf der Indexmenge $\{(i,j)\in\mathbf{N}\times\mathbf{Z}|i\ge|j|+3,(0,|j+i|h)\in\overline{\Omega}$ und $(0,|j-i|h)\in\overline{\Omega}\}$*

$$\begin{aligned}
&\frac12(v^h_{0,j+i}+v^h_{0,j-i})+K^h_{i,j}\\
&+\frac h2 K^h_{i,0}\frac12(v^h_{0,j+0}+v^h_{0,j-0})+h\sum_{l=1}^{i-1}K^h_{i,l}\frac12(v^h_{0,j+l}+v^h_{0,j-l})+\frac h2 K^h_{i,i}\frac12(v^h_{0,j+i}+v^h_{0,j-i})+O(h^2)\\
&=0.
\end{aligned}$$

Beweis: Aus Lemma 8.5.6 und (8.42) folgt für $i\ge|j|+3$

$$\begin{aligned}
0 &= h\textstyle\sum_{|l|\le i+1}U^{d,h}_{i,l}v^{d,h}_{0,j+l}\\
&= \tfrac18 v^{d,h}_{0,j+i+1}+\tfrac14 v^{d,h}_{0,j+i}+\tfrac18 v^{d,h}_{0,j+i-1}+\tfrac18 v^{d,h}_{0,j-i-1}+\tfrac14 v^{d,h}_{0,j-i}+\tfrac18 v^{d,h}_{0,j-i+1}\\
&\quad +h\textstyle\sum_{|l|\le i}(U^{d,h}-\tfrac12\delta)_{i,l}v^{d,h}_{0,j+l}\\
&= \tfrac18 v^{d,h}_{0,j+i+1}+\tfrac14 v^{d,h}_{0,j+i}+\tfrac18 v^{d,h}_{0,j+i-1}+\tfrac18 v^{d,h}_{0,j-i-1}+\tfrac14 v^{d,h}_{0,j-i}+\tfrac18 v^{d,h}_{0,j-i+1}\\
&\quad +\tfrac12(U^{d,h}-\tfrac12\delta)_{i,-j-1}+(U^{d,h}-\tfrac12\delta)_{i,-j}+\tfrac12(U^{d,h}-\tfrac12\delta)_{i,-j+1}\\
&\quad +h\textstyle\sum_{|l|\le i}(U^{d,h}-\tfrac12\delta)_{i,l}(v^{d,h}-\delta)_{0,j+l}\\
&= \tfrac18 v^{d,h}_{0,j+i+1}+\tfrac14 v^{d,h}_{0,j+i}+\tfrac18 v^{d,h}_{0,j+i-1}+\tfrac18 v^{d,h}_{0,j-i-1}+\tfrac14 v^{d,h}_{0,j-i}+\tfrac18 v^{d,h}_{0,j-i+1}\\
&\quad +\tfrac12(U^{d,h}-\tfrac12\delta)_{i,-j-1}+(U^{d,h}-\tfrac12\delta)_{i,-j}+\tfrac12(U^{d,h}-\tfrac12\delta)_{i,-j+1}\\
&\quad +h(U^{d,h}-\tfrac12\delta)_{i,0}(v^{d,h}-\delta)_{0,j}+h\textstyle\sum_{l=1}^{i}(U^{d,h}-\tfrac12\delta)_{i,l}((v^{d,h}-\delta)_{0,j+l}+(v^{d,h}-\delta)_{0,j-l}).
\end{aligned}$$

Die Ergebnisse aus Satz 8.5.4 zeigen

$$\begin{aligned}
\tfrac18 v^{d,h}_{0,j+i+1}+\tfrac14 v^{d,h}_{0,j+i}+\tfrac18 v^{d,h}_{0,j+i-1} &= \tfrac12 v^h_{0,j+i}+O(h^2),\\
\tfrac18 v^{d,h}_{0,j-i-1}+\tfrac14 v^{d,h}_{0,j-i}+\tfrac18 v^{d,h}_{0,j-i+1} &= \tfrac12 v^h_{0,j-i}+O(h^2).
\end{aligned}$$

Nach Satz 8.5.3 gilt

$$\frac12(U^{d,h}-\frac12\delta)_{i,-j-1}+(U^{d,h}-\frac12\delta)_{i,-j}+\frac12(U^{d,h}-\frac12\delta)_{i,-j+1} = K^h_{i,-j}+O(h^2) = K^h_{i,j}+O(h^2)$$

und ebenso

$$\begin{aligned}
&h(U^{d,h}-\tfrac12\delta)_{i,0}(v^{d,h}-\delta)_{0,j}\\
&= \tfrac h2((U^{d,h}-\tfrac12\delta)_{i,l}((v^{d,h}-\delta)_{0,j+l}+(v^{d,h}-\delta)_{0,j-l}))|_{l=0}\\
&= \tfrac h2(\tfrac12 K^h_{i,l}(v^h_{0,j+l}+v^h_{0,j-l}))|_{l=0}+O(h^3).
\end{aligned}$$

Die Werte der Diskretisierung des Ganzraumproblems mit Distributionen an $i=j$, $U^{d,h}_{i,i}-\frac12\delta_{i,i}$, sind bis auf Terme $O(h)$ halb so groß, wie die entsprechenden diskretisierten Werte der charakteristischen Randwerte des regulären Teils, $\frac{1}{2}K^h_{i,i}$. Dies erweist sich wieder als sehr günstig, denn so wird aus der obigen Summe die Summe der Trapezregel. Es gilt

$$U^{d,h}_{i,i} - \frac{1}{2}\delta_{i,i} \;=\; \frac{h}{8}\sum_{l=1}^{i} q_{l-1} \;=\; \frac{1}{4}K^h_{i,i} - \frac{h}{16}q_0 + \frac{h}{16}q_i.$$

Daraus folgt für $i \geq |j| + 3$ insgesamt

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \tfrac{1}{2}v^h_{0,j+i} + \tfrac{1}{2}v^h_{0,j-i} + K^h_{i,j} \\ & + \tfrac{h}{2}K^h_{i,0}\tfrac{1}{2}(v^h_{0,j+0} + v^h_{0,j-0}) + h\textstyle\sum_{l=1}^{i-1} K^h_{i,l}\tfrac{1}{2}(v^h_{0,j+l} + v^h_{0,j-l}) + \tfrac{h}{2}K^h_{i,i}\tfrac{1}{2}(v^h_{0,j+i} + v^h_{0,j-i}) + O(h^2). \end{aligned}$$

□

Bis auf den Term $O(h^2)$ stimmt die Gleichung aus Satz 8.5.7 mit dem Resultat bei der Anwendung des Nyström-Verfahrens mit der zusammengesetzten Trapezregel für die lineare Gel'fand-Levitan-Gleichung mit $c = 1$ und $k = 2$ überein.

Diese Wahl der Parameter c und k korrespondiert mit den distributiven Problemformulierungen zu $v^{d,h}$ und $U^{d,h}$.

Kapitel 9

Born-Approximationen, quasi Newton-Verfahren und Trennung der Variablen

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels leiten wir Born-Approximationen für die inversen Probleme her, die durch Linearisierung entstehen und für kleine q eine einfach zu bestimmende Näherung bieten. Sie werden auch im ersten Schritt der quasi Newton-Verfahren erzeugt, welche wir im zweiten Abschnitt entwickeln. Im dritten Abschnitt stellen wir einen Zugang bei nur durch endlich viele Spektraldaten gegebenen Randwerten vor.

9.1 Die linearisierten Probleme

Wir führen für $q \in C^0(\mathbf{R}^{\geq 0})$ eine Linearisierung der inversen Probleme durch.

Es sei jeweils

$$q(x) = q_0(x) + q_1(x) = 0 + q_1(x).$$

9.1.1 Eine Linearisierung des inversen Problems IP1

Wir betrachten das im rechten oberen Quadranten formulierte Viertelraumproblem $P(D)u = 0$ mit den Anfangswerten $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = \delta(x)$ und dem Randwert $u_x(0,t) = 0$.

Es ist $\frac{1}{2}H(t - |x|)$ Riemannfunktion zum Cauchyproblem der oberen Halbebene für $q = q_0 \equiv 0$, und damit nach Satz 3.8.1 $u_0(x,t) = H(t - |x|)H(x)$ Lösung von $(u_0)_{tt} - (u_0)_{xx} = \delta(x,t) - \delta_x(x) \otimes H(t)$. Es sei auf $t \geq x \geq 0$

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) = 1 + u_1(x,t).$$

Das **linearisierte Problem** lautet nach Einsetzen obiger Darstellungen in (1.1), (1.2), (1.3) mit $h_1 = 0$ und nach Streichung des quadratischen Terms $q_1 u_1$

$$(u_1)_{tt} - (u_1)_{xx} + q_1(x)H(t - x) = 0$$

auf $\{(x,t)|0 < x < 1,\ 0 < t < 2 - x\}$,

$$(u_1)_x(0,t) = u_1(1,t) = 0, \qquad t \geq 0,$$

und

$$u_1(x,0) = 0,\ (u_1)_t(x,0) = 0, \qquad x \in [0,1].$$

Die Randwerte zur Lösung des inversen Problems seien $u(0,t) = f(t) \in C^2([0,2])$ mit $\lim_{t\searrow 0} f(t) = 1$ und $\lim_{t\searrow 0} f'(t) = 0$. Es gilt damit

$$u_1(0,t) = f(t) - 1.$$

Gesucht ist q_1.

Sei $g_1(t) = f(t) - 1$. Das inverse Problem kann mit der d'Alembertschen Formel bezogen auf die t–Achse beschrieben werden.

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= \frac{1}{2}(u_1(0,t+x) + u_1(0,t-x)) + \int_0^x \int_0^\xi q_1(\eta)d\eta d\xi \\ &= \frac{1}{2}(g_1(t+x) + g_1(t-x)) + \int_0^x (x-\xi)q_1(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Aus den Anfangswerten folgt $u_1(x,x) = 0$ und daraus

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{d}{dx}\Big(u_1(x,x)\Big) = \tfrac{d}{dx}\big(\tfrac{1}{2}(g_1(2x) + g_1(0)) + \textstyle\int_0^x (x-\xi)q_1(\xi)d\xi\Big) = g_1'(2x) + \textstyle\int_0^x q_1(\xi)d\xi, \\ 0 &= \tfrac{d^2}{dx^2}(u_1(x,x)) = 2g_1''(2x) + q_1(x), \end{aligned}$$

damit

$$q_1(x) = -2f''(2x). \tag{9.1}$$

Bemerkung 9.1.1 *An (9.1) sehen wir, daß das Problem der q_1–Bestimmung schlecht gestellt von zweiter Ordnung ist.*

Bemerkung 9.1.2 *Die über (9.1) bestimmte Funktion q_1 heißt* **Born-Approximation** *von q zum inversen Problem IP1.*

Aus der mit dem entsprechenden Faktor $k = 2$ versehenen Integralgleichung (4.10)

$$q(x) = -2(f''(2x) + \int_0^x q(\xi)u_t(\xi, 2x-\xi)d\xi)$$

folgt wegen $(u_0)_t(\xi, 2x-\xi) = 0$ nach einer Linearisierung ebenfalls Gleichung (9.1).

Wir betrachten die Integralgleichung (4.1) mit $h_1 = 0$ für allgemeinere Koeffizientenfunktionen $q \notin C^0([0,1])$.

Satz 9.1.3 *Sei die Funktion $q : [0,1] \to \mathbf{R}$ stückweise stetig, d.h. es existiere eine Zerlegung $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ des Intervalls $[0,1]$ mit $q(x) \in C^0([x_l, x_{l+1}])$, $0 \le l \le n-1$. Dann existiert in $C^0(\Omega_2)$, $\Omega_2 = \{(x,t)|0 < x < 1, x < t < 2-x\}$, eine eindeutige Lösung u der Integralgleichung (4.1). Sei $f(t) = u(0,t)$. Dann existiert $q_B(x) = -2f''(2x) \in C^0([x_l, x_{l+1}])$, $0 \le l \le n-1$. Es existiert außerdem $q_R \in C^0([0,1])$, so daß auf (x_l, x_{l+1}), $0 \le l \le n-1$, gilt*

$$q(x) = q_B(x) + q_R(x).$$

Beweis: Der Beweis der Existenz einer eindeutigen Lösung u der Integralgleichung (4.1) in $C^0(\Omega_2)$ erfolgt analog zu dem Beweis dieser Aussage für $q \in C^0([0,1])$ in Satz 4.1.1 mit $h_1 = 0$. Die sukzessive Approximation ist auch hier durchführbar, wenn man bedenkt, daß $\|q\|_\infty = M < \infty$ gilt und für das gegebene q die Funktion $u_n(x,t)$ aus

$$u_n(x,t) = -\int_0^{t-x} \int_0^{\frac{\tau}{2}} q(\xi)u_{n-1}(\xi, \tau-\xi)d\xi d\tau - \int_{t-x}^t \int_{\tau-t+x}^{\tau - \frac{t-x}{2}} q(\xi)u_{n-1}(\xi, 2\tau-\xi-t+x)d\xi d\tau,$$

stetig ist, wenn $u_{n-1}(x,t)$ stetig ist. Da u_0 stetig ist und $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ durch eine absolut konvergente Reihe majorisiert wird, ist $u := \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ wieder stetig und löst die Integralgleichung. Der Eindeutigkeitsbeweis mit Hilfe des Lemmas von Gronwall läßt sich ebenfalls übertragen.

u ist stetig nach x und t differenzierbar ist und die Formeln für u_x, u_t, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx} aus dem Beweis zu Satz 3.5.2 gelten ebenfalls, jedoch mit der Einschränkung, daß die Regularität der zweiten Ableitungen von u nur der von q entspricht. Die Herleitung der Integralgleichung für q läßt sich ebenfalls übertragen. Insgesamt gelten die Integralgleichungen (3.16), (3.17) und (3.18) für u, u_t und q, aber mit der veränderter Regularität und ensprechendem Faktor.

Aus der Integralgleichung für q folgt die Existenz von $q_B(x) = -2f''(2x) \in C^0([x_l, x_{l+1}])$, $0 \leq l \leq n-1$, sie lautet

$$q(x) \quad = \quad q_B(x) - 2\int_0^x q(\xi)u_t(\xi, 2x-\xi)d\xi. \tag{9.2}$$

$q_R(x) = -2\int_0^x q(\xi)u_t(\xi, 2x-\xi)d\xi$ ist stetig, und der Satz damit bewiesen.

□

Bemerkung 9.1.4

1. *Die Born-Approximation weist somit genau dort Sprungstellen auf, wo die Koeffizientenfunktion q sie besitzt und es gilt $q(x_l+0)-q(x_l-0) = q_B(x_l+0)-q_B(x_l-0)$ an inneren Punkten $x_l \in (0,1)$.*

2. *Sei q stetig aber nur stückweise stetig differenzierbar. Bis auf die Stellen, an denen q nicht differenzierbar ist, folgt dann durch Differentiation der Integralgleichung für q*

$$q'(x) = -2\Big(2f'''(2x) + q(x)u_t(x,x) + 2\int_0^x q(\xi)u_{tt}(\xi, 2x-\xi)d\xi\Big).$$

$q_R'(x) = -2(q(x)u_t(x,x) + 2\int_0^x q(\xi)u_{tt}(\xi, 2x-\xi)d\xi)$ *ist stetig, d.h. auch die Stellen, an denen q zwar stetig, aber nicht stetig differenzierbar ist, werden durch die Born-Approximation wiedergegeben.*

9.1.2 Eine Linearisierung des inversen Problems IP2

Es sei das Viertelraumproblem $P(D)v = 0$ im rechten oberen Quadranten mit den Anfangswerten $v(x,0) = \delta(x)$ und $v_t(x,0) = 0$ durch gerade Spiegelung auf die rechte Halbebene erweitert. Sei $v_0 = \delta(x-|t|)$ und ersetze v durch $v_1 + v_0$, siehe Bemerkung 3.9.1. Dann gilt nach Linearisierung in $x > 0$ für v_1 die partielle Differentialgleichung

$$(v_1)_{tt} - (v_1)_{xx} = -q_1(x)\delta(x-|t|).$$

Für das direkte Problem bekannte Randwerte sind

$$(v_1)_x(0,t) = 0.$$

Die Anfangswerte $v_1(x,0) = (v_1)_t(x,0) = 0$ sollen erhalten bleiben. In der distributiven Problemformulierung des direkten Problems auf der rechten Halbebene ist bei gegebenem q_1 eine Distribution $v_1 \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ mit Träger in $\mathbf{R}^{\geq 0}$ gesucht, die die Gleichung

$$(v_1)_{tt} - (v_1)_{xx} \quad = \quad -q_1(x)\delta(x-|t|) - \frac{d}{dx}\delta(x) \otimes v_1(0,t) \tag{9.3}$$

löst. Für das linearisierte inverse Problem sei auf $t \geq 0$ $v_1(0,t) = v(0,t) - \delta(t)$ gegeben und q_1 gesucht. Die Riemannfunktion zur Wellengleichung auf der rechten Halbebene ist gleich $-\frac{1}{2}H(x-|t|)$ und die Lösung der Gleichung (9.3) ist bei Existenz der Darstellung durch Zufaltung der rechten Seite gegeben,

$$v_1(x,t) \quad = \quad -\frac{1}{2}\Big(H(\xi-|\tau|) *_{(\xi,\tau)} (-q_1(\xi)\delta(\xi-|\tau|) - \frac{d}{d\xi}\delta(\xi) \otimes v_1(0,\tau))\Big)(x,t).$$

Diese Darstellung existiert und läßt sich mit den folgenden Umformungen vereinfachen. Sei $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, dann gilt

$$< \Big(H(\xi - |\tau|) *_{(\xi,\tau)} (q_1(\xi)\delta(\xi - |\tau|))\Big)(x,t), \phi(x,t) >$$

$$\begin{aligned}
&= \; < H(x-|t|), < q_1(\xi)\delta(\xi-|\tau|), \phi(x+\xi, t+\tau) >_{(\xi,\tau)} >_{(x,t)} \\
&= \; \textstyle\int_0^\infty q_1(\xi) \int_0^\infty \int_{-x}^{x} \phi(x+\xi, t+\xi) + \phi(x+\xi, t-\xi) dt dx d\xi \\
&= \; \textstyle\int_0^\infty q_1(\xi) \int_\xi^\infty (\int_{2\xi-x}^{x} \phi(x,t)dt + \int_{-x}^{x-2\xi} \phi(x,t)dt) dx d\xi \\
&= \; \textstyle\int_0^\infty q_1(\xi) \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} (H(x-\xi-|t-\xi|) + H(x-\xi-|t+\xi|))\phi(x,t) dx dt d\xi \\
&= \; < \textstyle\int_0^\infty q_1(\xi)(H(x-\xi-|t-\xi|) + H(x-\xi-|t+\xi|)) d\xi, \phi > \\
&= \; < \int_0^x q_1(\xi)\Big(H(x-\xi-|t-\xi|) + H(x-\xi-|t+\xi|)\Big) d\xi, \phi > .
\end{aligned}$$

Für den zweiten Term folgt nach Bemerkung 7.1.1

$< H(\xi - \tau) *_{(\xi,\tau)} (\frac{d}{d\xi}\delta(\xi) \otimes v_1(0,\tau))(x,t), \phi(x,t) > = < v_1(0,t+x) + v_1(0,t-x), \phi(x,t) > .$

Damit gilt

$v_1(x,t) \;\; = \;\; \frac{1}{2}(v_1(0,t+x) + v_1(0,t-x)) + \frac{1}{2}\int_0^x q_1(\xi)(H(x-\xi-|t-\xi|) + H(x-\xi-|t+\xi|))d\xi.$

v_1 ist somit regulär und es existiert sinnvoll für $x > 0$

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} v_1(x, x+\epsilon) = \frac{1}{2}(v_1(0,2x) + v_1(0,0)) + \frac{1}{2}\int_0^x q_1(\xi)d\xi.$$

Aus den Anfangswerten an $t = 0$ folgt außerdem $\lim_{\epsilon \searrow 0} v_1(x, x+\epsilon) = 0$. Bei gegebenem Randwert $v_1(0,t)$ folgt daraus q_1 mittels

$$q_1(x) = -2(v_1)_t(0,2x). \tag{9.4}$$

Das Problem der q_1-Bestimmung ist damit schlecht gestellt von erster Ordnung.

Bemerkung 9.1.5 *Die über (9.4) bestimmte Funktion q_1 heißt* **Born-Approximation** *von q zum inversen Problem IP2.*

9.2 Quasi Newton-Verfahren zur approximativen Lösung der inversen Probleme

Wir entwickeln quasi Newton-Verfahren zur approximativen Lösung der inversen Halbstreifenprobleme IP1_HS und IP2_HS mit $h_1 = 0$ und $h_2 = \infty$.

Das inverse Problem besteht darin, die Abbildung zu invertieren, die einem Koeffizienten q den Randwert $u(0,t)$ zuordnet. Für die Lösung u des Halbstreifenproblems mit den Anfangswerten $u(x,0) = 0, u_t(x,0) = \delta(x)$ auf $[0,1]$ sei $F : C^0([0,1]) \to C^2([0,2])$ definiert durch $F(q)(t) = u(0,t)$. Für die Lösung v des Halbstreifenproblems mit den Anfangswerten $v(x,0) = \delta(x), v_t(x,0) = 0$ auf $[0,1]$ sei $F^1 : C^1([0,1]) \to C^2([0,2])$ definiert durch $F^1(q)(t) = v(0,t)$. F und F^1 sind nach den Ergebnissen aus Kapitel 3 wohldefiniert. Es gilt bei gerader Spiegelung der Probleme an der $(x = 0)$-Achse lokal auf $\Omega = \{(x,t)|0 < x < 1, 0 < t < 2-x\}$ die Gleichheit $u(x,t) = 2R(x,t)$ bzw. $v(x,t) = 2R^1(x,t)$. Diese Gleichheit läßt sich stetig auf $x = 0, t \in [0,2]$ fortsetzen, so daß gilt

$$F(q)(t) = 2R(0,t) \quad \text{bzw.} \quad F^1(q)(t) = 2R^1(0,t).$$

Sacks [48] leitet ein quasi Newton-Verfahren für ein ähnliches Problem her. Er betrachtet das Halbstreifenproblem mit $P(D)u^S = 0, u^S(0,t) = 0, u^S(1,t) = 0, u^S(x,0) = 0, u_t^S(x,0) = -\delta'(x)$. Die Daten für das inverse Problem sind $u_x^S(0,t)$. Es gilt auf Ω $u^S = -\frac{d}{dx}u$. Damit ist in dem von Sacks behandelten inversen Problem $u_x^S(0,t) = -\frac{d^2}{dx^2}u(0,t)$ bekannt, während wir $u(0,t)$ gegeben haben. Es ist somit eine direkte Anwendung des Verfahrens von Sacks nicht möglich. Die Herleitung eines quasi

Newton-Verfahrens für unser Problem kann jedoch auf ähnliche Weise durchgeführt werden.

Wir leiten ein quasi Newton-Verfahren zur approximativen Lösung der Gleichung $F(q)(t) = 2R(0,t)$ nach q mit Hilfe der in Kapitel 3 formulierten Darstellungen der Riemannfunktion her.

Für zwei in $\mathbf{R}$ stetige und beschränkte Koeffizientenfunktionen q_n und q_{n+1} seien R_{q_n} bzw. $R_{q_{n+1}}$ die Lösungen der Cauchyprobleme

$$(R_{q_i})_{tt} - (R_{q_i})_{xx} + q_i(x)R_{q_i} = 0,$$

$$R_{q_i}(x,0) = 0, \qquad (R_{q_i})_t(x,0) = \delta(x),$$

$i \in \{n, n+1\}$, auf der oberen Halbebene. Dann löst die Distribution $\overline{R} = R_{q_{n+1}} - R_{q_n}$ das Cauchyproblem

$$(\overline{R})_{tt} - (\overline{R})_{xx} + q_n(x)\overline{R} = -(q_{n+1}(x) - q_n(x))R_{q_{n+1}},$$

$$\overline{R}(x,0) = 0, \qquad \overline{R}_t(x,0) = 0.$$

Es gilt

$$F(q_{n+1}) - F(q_n) = 2(R_{q_{n+1}} - R_{q_n})(0,t) = 2\overline{R}(0,t).$$

Für $q_n \equiv 0$ folgt $R_{q_n} = \frac{1}{2}H(t-|x|)$ und $\overline{R} = R_{q_{n+1}} - \frac{1}{2}H(t-|x|)$. Es ist

$$\overline{R}(0,t) \;=\; \int_0^{-\frac{t}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} q_{n+1}(\eta+\xi)R_{q_{n+1}}(\eta+\xi, \eta-\xi)d\eta d\xi$$

Dies ist die mit dem Charakteristikenverfahren hergeleitete Integralgleichung für $R_{q_{n+1}}(0,t)$. Sie läßt sich mit Hilfe der sukzessiven Approximation nach (3.26) weiterentwickeln zu

$$\begin{aligned} &R_{q_{n+1}}(0,t) \\ =\;& \frac{1}{2} + \int_0^{-\frac{t}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} q_{n+1}(\eta+\xi)\Big(\frac{1}{2} + \int_0^{\xi}\int_0^{\eta} q_{n+1}(\eta_1+\xi_1)R_{q_{n+1}}(\eta_1+\xi_1, -\xi_1+\eta_1)d\eta_1 d\xi_1\Big)d\eta d\xi. \end{aligned}$$

Satz 3.5.19 liefert für gerade q_n, q_{n+1} und unter der Voraussetzung $\|q_n\|_\infty, \|q_{n+1}\|_\infty \le M \in \mathbf{R}$ für $t \le T \in \mathbf{R}$ eine Abschätzung

$$\|R_{q_{n+1}} - R_{q_n}\|_{\infty,\{t\le T\}} \le C(M,T)(\|q_{n+1} - q_n\|_\infty).$$

Es folgt mit $R_{q_{n+1}}(x,t) = \frac{1}{2}H(t-|x|) + \frac{1}{2}K_{q_{n+1}}(t-|x|)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} &R_{q_{n+1}}(0,t) - \frac{1}{2} \\ =\;& \frac{1}{2}\int_0^{-\frac{t}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} q_{n+1}(\eta+\xi)d\eta d\xi + \int_0^{-\frac{t}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} q_{n+1}(\eta+\xi)\int_0^{\xi}\int_0^{\eta} \frac{1}{2}q_{n+1}(\eta_1+\xi_1)d\eta_1 d\xi_1 d\eta d\xi \\ &+ \int_0^{-\frac{t}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} q_{n+1}(\eta+\xi)\int_0^{\xi}\int_0^{\eta} \frac{1}{2}q_{n+1}(\eta_1+\xi_1)K_{q_{n+1}}(\eta_1+\xi_1, -\xi_1+\eta_1)d\eta_1 d\xi_1 d\eta d\xi, \end{aligned}$$

wobei die letzten beiden Terme auf jedem beschränkten Gebiet betragsmäßig durch $O(\|q_{n+1}\|_\infty^2)$ abschätzbar sind. Somit gilt

$$F(q_{n+1}) - F(0) = 2\Big(\frac{1}{2}\int_0^{-\frac{t}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} q_{n+1}(\eta+\xi)d\eta d\xi + O(\|q_{n+1}\|_\infty^2)\Big).$$

Sei der Operator $DF_{\mathbf{R}}(0) : C^0(\mathbf{R}) \to C^2(\mathbf{R})$ durch

$$(DF_{\mathbf{R}}(0)q)(t) = \int_0^{-\frac{t}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} q(\eta+\xi)d\eta d\xi$$

definiert. Hieraus folgt auf $(DF_{\mathbf{R}}(0))(C^0(\mathbf{R}))$ mit dem Operator

$$((DF_{\mathbf{R}}^{-1}(0))p)(x) = -2(\frac{d^2p}{dx^2})(2x)$$

die Gleichung $DF_{\mathbf{R}}^{-1}(0)DF_{\mathbf{R}}(0) = Id$.

Die gesamte vorige Analyse kann zur Lösung des inversen Halbstreifenproblems lokal betrachtet werden. Seien dazu die Funktionen q_n und q_{n+1} aus $C^0([0,1])$ gerade auf $[-1,1]$ gespiegelt. Dann ist das direkte Halbstreifenproblem mit Randdaten $u_x = 0$ an $x = 0$ auf Ω gleich dem Cauchyproblem und obige Darstellungen und Abschätzungen bleiben, eingeschränkt auf diesen Bereich, gültig. Es gilt für gerades q

$$\int_0^{-\frac{t}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} q(\eta+\xi)d\eta d\xi \;=\; 2\int_0^{-\frac{t}{2}} \int_{-\xi}^{\frac{t}{2}} q(\eta+\xi)d\eta d\xi.$$

Es sei der Operator $DF(0) : C^0([0,1]) \to C^2([0,2])$ definiert durch

$$DF(0)q(t) = 2\int_0^{-\frac{t}{2}} \int_{-\xi}^{\frac{t}{2}} q(\eta+\xi)d\eta d\xi.$$

Er besitzt auf $(DF(0))(C^0([0,1]))$ die Linksinverse

$$(DF^{-1}(0)p)(x) = -2(\frac{d^2p}{dx^2})(2x).$$

Sei $g \in C^2([0,2])$ gegeben. Wir definieren ein **quasi Newton-Verfahren** zur Lösung des inversen Halbstreifenproblems IP1_HS durch

1. $$q_0 \equiv 0,$$
2. $$q_{n+1}(x) = q_n(x) - DF^{-1}(0)(F(q_n)(t) - g(t))(x). \tag{9.5}$$

Es ist

$$DF^{-1}(0)(F(q_n)(t) - g(t))(x) = -2\frac{d^2}{dt^2}(F(q_n)(t) - g(t))(2x).$$

q_1 ist die Born-Approximation des inversen Problems.

Der Algorithmus zu diesem Verfahren lautet präziser

1. Sei $q_0 \equiv 0$.
2. (a) Bei bekanntem q_n löse das direkte Halbstreifenproblem nach $F(q_n)(t)$ für $t \in [0,2]$.
   (b) Bestimme die zweite Ableitung $\frac{d^2}{dt^2}(F(q_n)(t) - g(t))$.
   (c) Bestimme q_{n+1} mittels (9.5).

   Führe die Schritte 2a bis 2c durch, bis ein Abbruchkriterium erfüllt ist.

Die einzelnen Schritte des Algorithmus lassen sich in numerische Verfahren übertragen. Wir führen ein diskretes Verfahren durch, d.h. bekannte und approximierte Werte sind Punktauswertungen oder Approximationen zu Punktauswertungen der auftretenden Funktionen. Das direkte Halbstreifenproblem wird jeweils wie in Abschnitt 5.1.1 beschrieben gelöst. Die Ableitungen erfolgen diskret, bei uns ohne Regularisierung.

Der Aufwand eines Iterationsschrittes $q_n \to q_{n+1}$ ist von der Ordnung her gleich dem Aufwand der Lösung des direkten Problems und damit bei Schrittweite h, $\frac{1}{h} \in \mathbf{N}$, gleich $O(\frac{1}{h^2})$.

In unseren numerischen Durchführungen haben wir je nach Regularität der exakten Lösung bereits in ein bis sieben Iterationsschritten gute Ergebnisse erzielt, siehe Kapitel 10.

Auf die gleiche Art folgt ein **quasi Newton-Verfahren zur Lösung des inversen Halbstreifenproblems IP2_HS**. Mit $((DF^1)^{-1}(0)p)(x) = -2(\frac{d}{dx}p)(2x)$ hat ein Iterationsschritt die Gestalt

$$q_{n+1}(x) = q_n(x) - (DF^1)^{-1}(0)(F^1(q_n)(t) - g(t))(x).$$

9.3 Trennung der Variablen

Eine Standardmethode zur Behandlung der gegebenen Probleme ist die **Trennung der Variablen** mit dem Produktansatz. Sie führt zur Reduktion der partiellen Differentialgleichung auf ein System von Eigenwertaufgaben. Die Theorie der **Sturm-Liouville Probleme** kann dann angewandt werden.

Die Methode der Trennung der Variablen, siehe z.B. Tychonoff und Samarski [58] Kap. II §3, beruht auf dem Produktansatz

$$u(x,t) = u_n(x)v_n(t).$$

Die Differentialgleichung $P(D)u = 0$ wird dadurch auf zwei gewöhnliche Differentialgleichungen reduziert. Es folgt aus diesem Ansatz mit $\lambda^2 \in \mathbf{R}$

$$-u_n''(x) + (q(x) - \lambda^2)u_n(x) = 0 \qquad \text{in } (0,1) \tag{9.6}$$

und es sei

$$-v_n''(t) - \lambda^2 v_n(t) = 0 \qquad \text{in } (0,\infty). \tag{9.7}$$

Es sind nichttriviale Lösungen dieser Gleichungen gesucht, um daraus eine Lösung des ursprünglichen Problems zu gewinnen. Mit entsprechenden Randbedingungen existiert für das Problem (9.6) eine abzählbare Menge $\{\lambda_n^2\}$ von Eigenwerten, die sich höchstens im Unendlichen häufen. Das Problem (9.7) wird nur zu den Werten λ_n^2 gelöst.

Kurze Erläuterungen zur physikalischen Bedeutung finden sich in Gladwell [22] Chapt. 8 Sect. 1.

Es seien die Randwerte $u_x(0,t) = 0 = u(1,t)$ für $t \in (0,\infty)$ und die Anfangswerte $u(x,0) = 0$ und $u_t(x,0) = \delta(x)$ gegeben. Diese können bei klassischen u_n, v_n nicht über eine endliche Summe dargestellt werden. Stattdessen wird für die Darstellung von u nach dem Superpositionsprinzip eine unendliche Summe gewählt. Vertauschbarkeit von Summation und Differentiation gilt als Voraussetzung für die Anwendbarkeit des Superpositionsprinzips. Beim Übergang auf Distributionen ist dies gegeben. u habe nun formal die Gestalt

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x) v_n(t). \tag{9.8}$$

Wir werden im folgenden die Koeffizienten c_n so bestimmen können, daß u das Problem löst.

Für die x-Komponente erhalten wir das selbstadjungierte **Sturm-Liouville Problem**

$$-u_n''(x) + (q(x) - \lambda_n^2)u_n(x) = 0 \qquad \text{in } (0,1), \tag{9.9}$$

$$u_n'(0) = 0 = u_n(1), \tag{9.10}$$

$n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, mit den Eigenwerten λ_n^2 und zugehörigen orthogonalen Eigenfunktionen u_n. Für die Theorie zu diesem Problem existiert umfangreiche Literatur, siehe z.B. Walter [61] Kap. V.

Die Gleichung der t-Komponente hat die Gestalt

$$-v_n''(t) - \lambda_n^2 v_n(t) = 0 \qquad \text{in } (0,\infty). \tag{9.11}$$

Für die Herleitung der Anfangswerte von $v_n(t)$ nutzen wir die formale Reihendarstellung von u. Wir nehmen an, es existiere die Einschränkung und der Grenzwert

$$\lim_{t\searrow 0} u(x,t) = \lim_{t\searrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x) v_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x) v_n(0)$$

in $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ und das gleiche analog für die t-Ableitung. Es gelte für die t-Ableitung für alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$

$$< \delta(x), \phi(x) > = < \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) v_n'(0), \phi(x) > = \lim_{N\to\infty} < \sum_{n=0}^{N} u_n(x) v_n'(0), \phi(x) > .$$

Nach dem Entwicklungssatz existiert eine Darstellung $\phi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m u_m(x)$, $\phi_m \in \mathbf{R}$, und die rechte Seite obiger Gleichung hat die Form

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{M\to\infty} \int_0^1 v_n'(0) (\sum_{n=0}^{N} u_n(x)) (\sum_{m=0}^{M} \phi_m u_m(x)) dx.$$

Dies ist wegen der Orthogonalität der u_n gleich

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \|u_n\|_{L^2}^2 \phi_n v_n'(0).$$

Für $v_n'(0) = \frac{u_n(0)}{\|u_n\|_{L^2}^2}$ erhalten wir $\phi(0)$. Die Anfangswerte für u folgen dann bei der Wahl

$$v_n(0) = 0 \quad \text{und} \quad v_n'(0) = \frac{u_n(0)}{\|u_n\|_{L^2}^2}. \tag{9.12}$$

Die Lösung des Problems (9.11), (9.12) ist über die Fouriermethode mit $v_n(t) = e^{i\lambda_n t}$ möglich und führt zur Darstellung

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x) sin(\lambda_n t), \qquad c_n = \frac{u_n(0)}{\lambda_n \|u_n\|_{L^2}^2}. \tag{9.13}$$

Oder es folgt mittels Laplacetransformation unter geeigneten Voraussetzungen, Gladwell [22] Chapt. 8 Sect. 12, vergleiche auch Abschnitt 3.3.1,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty (v_n'' + \lambda^2 v_n) e^{-st} dt \\ &= -v_n'(0) - v_n(0)s + s^2 \tilde{v}_n(s) + \lambda^2 \tilde{v}_n(s) \\ &= -u_n(0) \tfrac{1}{\|u_n\|_{L^2}^2} + (s^2 + \lambda^2) \tilde{v}_n(s), \end{aligned}$$

was wegen $(\frac{sin(t\lambda_n)}{\lambda_n} H(t))|^{\tilde{}}(s) = \frac{1}{s^2+\lambda_n^2}$ zum selben Resultat führt.

Die folgende Bemerkung enthält ein einfaches Beispiel.

Bemerkung 9.3.1 *Falls $q \equiv 0$, gilt für $n \in \mathbf{N}^0$ $\lambda_n = (n + \frac{1}{2})\pi$ und für orthonormiertes u_n $u_n = \sqrt{2}\cos((n + \frac{1}{2})\pi)$, daher, vergleiche Gladwell [22] Chapt. 8 Sect. 12,*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= H(t) \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{2sin((n+\frac{1}{2})\pi t) cos((n+\frac{1}{2})\pi x)}{(n+\frac{1}{2})\pi} \\ &= H(t) \tfrac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(sin((n + \tfrac{1}{2})\pi(x+t)) - sin((n + \tfrac{1}{2})\pi(x-t)) \Big) \tfrac{1}{(2n+1)}. \end{aligned}$$

Nun gilt in $(-\pi, \pi)$ die Gleichung $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{sin(2n+1)x}{2n+1} = sgn(x)$. u ist damit eine periodische Sprungfunktion, die gebietsweise die Werte -1,0 oder 1 annimmt.

Eine distributive Lösung für $v(x,0) = \delta(x)$ und $v_t(x,0) = 0$ folgt durch gliedweises Differenzieren.

Analog zur Theorie der Vorlesung [38], Natterer, hier mit anderen Randwerten, können je nach Regularität von q die Werte λ_n nach Termen in n und $\frac{1}{n}$ und $u_n(0)$ nach $\frac{1}{\lambda_n}$ entwickelt werden, um die Reihe (9.13) zu untersuchen, siehe unten.

Ein Problem der Spektraltheorie ist die approximative Rekonstruktion eines Koeffizienten q bei annähernd bekannten $\{\lambda_n, u_n(0)\}_{0\leq n\leq n_0}$, aus denen der Randwert $u(0,t)$ mit Gleichung (9.13) näherungsweise bestimmt werden kann. Auf dieses Resultat lassen sich dann die numerischen Verfahren zur Lösung des inversen Problems IP1 anwenden. Für eine kurze Vorstellung verschieden gestellter inverser Sturm-Liouville Probleme samt Angabe weiterführender Literatur siehe Rundell und Sacks [45].

Seien die Funktionen u_n normiert, dann folgt aus (9.13)

$$u(0,t) \quad = \quad H(t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\lambda_n t}{\lambda_n}(u_n(0))^2. \tag{9.14}$$

Übertragen wir die Ergebnisse aus Natterer [38] auf das Sturm-Liouville Problem (9.9) mit den Randwerten (9.10), dann existieren für $q \in C^2([0,1])$ und $n \to \infty$ Entwicklungen der Art

$$\begin{aligned}
(u_n(0))^2 &= 2(1+\frac{4}{\lambda_n}\int_0^1 q(x)(1-x)\sin(2\lambda_n x)dx + O(\frac{1}{\lambda_n^2})),\\
\lambda_n &= (n+\frac{1}{2})\pi(1+\frac{1}{2}\frac{\int_0^1 q(x)dx}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2} + O(\frac{1}{n^4})),\\
\frac{1}{\lambda_n} &= \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}(1-\frac{1}{2}\frac{\int_0^1 q(x)dx}{(n+\frac{1}{2})\pi} + O(\frac{1}{n^4})),\\
\sin(t\lambda_n) &= \sin((n+\frac{1}{2})\pi t) + O(\frac{1}{n}).
\end{aligned}$$

Einsetzen in (9.14) ergibt

$$u(0,t) = H(t)\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{\sin((n+\frac{1}{2})\pi t)}{(n+\frac{1}{2})\pi} + O(\frac{1}{n^2})\Big)(u_n(0))^2.$$

Eine Zerlegung der Summe führt zu einem $sgn(t)$-Anteil und einer absolut und gleichmäßig konvergenten Reihe, vergleiche Bemerkung 9.3.1.

In den von uns durchgeführten Rechnungen nehmen wir an, eine Menge $\{\lambda_n, u_n(0)\}_{0\leq n\leq n_0}$ sei gegeben. Wir approximieren dann $u(0,t)$ auf $t \in [0,2]$ durch

$$1+\sum_{n=0}^{n_0}\Big(\frac{\sin(\lambda_n t)}{\lambda_n}(u_n(0))^2 - 2\frac{\sin((n+\frac{1}{2})\pi t)}{(n+\frac{1}{2})\pi}\Big). \tag{9.15}$$

Zur Bestimmung von $\{\lambda_n, u_n(0)\}_{0\leq n\leq n_0}$ für Beispielrechnungen greifen wir auf die Routine D02KEF der NAG-Bibliothek zurück.

Eine Fehlerrechung wäre sinnvollerweise mit $\|\cdot\|_{L^2}$ durchzuführen, mit unseren Abschätzungen durch $\|\cdot\|_\infty$ für die bisherigen Betrachtungen damit nicht vergleichbar. Zur Veranschaulichung des Fehlerverhaltens sind einige Beispiele in Kapitel 10 angegeben.

Bemerkung 9.3.2 *Eine weitere Problemstellung aus gegebenen Spektraldaten eines Sturm-Liouville Problems den Differentialoperator zu berechnen, wird in Rundell und Sacks [45] behandelt. Wie schon in Abschnitt 3.9 erwähnt, ist die Lösung K des Goursatproblems (3.54), (3.55) orthogonalisierender Kern zu den Eigenfunktionen des Sturm-Liouville Problems. Aus endlich vielen Spektraldaten wird in Rundell und Sacks [45] $K(1,t)$ und $K_x(1,t)$ auf $t \in [-1,1]$ annähernd rekonstruiert. Die Bestimmung von q erfolgt dann approximativ über sukzessive Approximation oder ein quasi Newton-Verfahren. Siehe auch Rundell und Sacks [46].*

Kapitel 10

Numerische Ergebnisse

Zur Bewertung der Leistungsfähigkeit der Algorithmen zur approximativen Lösung der inversen Probleme IP1_HS und IP2_HS aus Abschnitt 2.8 mit $k = 2$ und $h_1 = 0$ haben wir mehrere von ihnen implementiert. Im Vordergrund steht die Verifikation der in der Theorie hergeleiteten Fehlerabschätzungen und der Vergleich zwischen den numerischen Lösungen mit dem Nyström-Verfahren und den Differenzenverfahren an Beispielen.

Die betrachteten Koeffizientenfunktionen sind

- $q_1(x) = 1 + sin(8\pi x)$,
- $q_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ 4(x - \frac{1}{4}) & \text{falls } \frac{1}{4} \leq x < \frac{2}{4}, \\ 4(\frac{3}{4} - x) & \text{falls } \frac{2}{4} \leq x < \frac{3}{4}, \\ 0 & \text{falls } \frac{3}{4} \leq x \leq 1, \end{cases}$

$q_3(x)$, siehe Abbildung 10.2 für die Definition, und $q_4(x) \equiv 1$.

Für die numerische Lösung der inversen Probleme müssen die Randwerte $u(0,t)$ bzw. $v(0,t)$ oder entsprechende Näherungen vorliegen. Wir erzeugen diese Werte außer für q_4 durch die Lösung der direkten Probleme DP1_HS und DP2_HS auf $\{(x,t)|0 \leq x \leq 1,\ x \leq t \leq 2 - x\}$ mit den Differenzenverfahren aus den Abschnitten 5.1.1 bzw. 5.2.1. Die Berechnung erfolgt mit einer Schrittweite n größer $128^{\frac{5}{2}} > 180.000$. Die Resultate müssen sehr genau sein, da die inversen Probleme wegen ihrer Schlechtgestelltheit sehr fehleranfällig sind. Aus den Ergebnissen der direkten Verfahren werden die Daten für die jeweilige Schrittweite zur Lösung eines inversen Problems mit Hilfe kubischer Interpolation gewonnen.
Für die Rechnungen mit q_4 erfolgte die Bereitstellung der Randwerte aus Satz 3.3.1 und Korollar 3.3.2 mit den Routinen zu den Besselfunktionen aus der IMSL Programmbibliothek. Die Ergebnisse bei der Lösung der inversen Probleme zu q_4 bestätigen die unten folgenden Aussagen zu den Ergebnissen der Rechnungen bezüglich q_1 und q_2 unabhängig von der Erzeugung der Randwerte mit den direkten Verfahren.

Wir konzentrieren uns bei der Präsentation der Ergebnisse auf die Funktionen q_1 und q_2.

Zur numerischen Lösung der inversen Probleme haben wir mehrere Verfahren getestet:

1. die **Differenzenverfahren** mit dem 5-Punkt Differenzenstern für die gemischten Probleme nach Abschnitt 6.1 und 6.2,
2. das **Nyström-Verfahren** mit Cholesky-Zerlegung nach Abschnitt 8.3 für die linearen Gel'fand-Levitan-Gleichungen gebildet nach Satz 7.1.4 bzw. 7.1.3 und q-Bestimmung nach Gleichung (8.17), mit $(c,k) = (1,2)$,
3. die **Born-Approximationen** nach Abschnitt 9.1.1 bzw. 9.1.2 und Approximation der Ableitungen mit zentrierten Differenzen,

4. die **quasi Newton-Verfahren** nach Abschnitt 9.2 mit einer Lösung der direkten Probleme mit den Differenzenverfahren aus den Abschnitten 5.1.1 bzw. 5.2.1 und Bildung der Ableitungen mit zentrierten Differenzen.

Zusätzlich erwähnen wir kurz Ergebnisse, die entstehen, wenn die Randwerte zur Lösung des inversen Problems IP1_HS durch **Spektraldaten** wie in (9.15) gegeben sind. Wir nennen diese die Lösungen des inversen Sturm-Liouville Problems.

Die Bewertung der Verfahren erfolgt in erster Linie anhand der folgenden Fehleranalyse:

Ein Verfahren wird für verschiedene Schrittweiten h, $h = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbf{N}$, durchgeführt. Dabei werden auf die Daten $u(0,t)$ bzw. $v(0,t)$ Fehler verschiedener Größe aufaddiert. So wird eine Beurteilung bezüglich des Verhaltens bei sich ändernder Schrittweite und bezüglich Fehlern in den Daten möglich.

Die numerischen Verfahren liefern für eine feste Schrittweite h bei einem durch ϵ charakterisierten Fehler in den Randwerten Approximationen $q_i^{\epsilon,n}$ zu $q_i = q(ih)$, $1 \leq i \leq n-1$. Ist der Fehler in den Randwerten gleich Null gesetzt, so bezeichnen wir die Resultate der Rechnungen mit q_i^n.

Die zu den Randwerten aufaddierten Fehler werden mit Hilfe der Routine „gasdev" der Numerical Recipes in C erzeugt. Diese liefert gaußverteilte Werte mit Mittelwert 0 und Standardabweichung 1. Wir setzen die Resultate, die betragsmäßig größer zwei sind unter Beibehaltung des Vorzeichens auf zwei und multiplizieren mit ϵ, so daß das Ergebnis im Intervall $[-2\epsilon, 2\epsilon]$ liegt und Fehlerabschätzungen in der Maximumnorm sinnvoll bleiben. Den Fehler nennen wir den Fehler in den Daten und addieren ihn jeweils auf die durch Interpolation gewonnenen Randwerte.

Für die Fehleranalyse wählen wir die Maximumnorm. Es werden die Werte

$$\max_{1\leq i\leq n-1} |q_i^{\epsilon,n} - q_i|, \quad \max_{1\leq i\leq n-1} |q_i^{\epsilon,n} - q_i^n| \quad \text{und} \quad \max_{1\leq i\leq n-1} |q_i^n - q_i| \tag{10.1}$$

für verschiedene n und ϵ ermittelt. Den ersten Ausdruck in (10.1) nennen wir Gesamtfehler, den zweiten Datenfehler und den dritten den Diskretisierungsfehler. Das Zusammenspiel zwischen dem Datenfehler und dem Diskretisierungsfehler wird typischerweise bei schlecht gestellten Problemen dieser Art untersucht. So kann eine vom Fehler ϵ abhängige optimale Schrittweite, bei der der Fehler in den Ergebnissen minimal wird, bestimmt werden.

Die Darstellung einiger $\{q_i^{\epsilon,n}\}_{0\leq i\leq n-1}$, $\{q_i^n\}_{0\leq i\leq n-1}$ und $\{q_i\}_{0\leq i\leq n-1}$ in Abbildung 10.1 dient der Gewinnung eines optischen Eindrucks von den Ergebnissen einzelner Verfahren. Sie deuten an, daß der Fehler in den einzelnen Diskretisierungspunkten kein spezifisches Verhalten aufweist und die Wahl der Maximumnorm durchaus sinnvoll ist. Die Abbildungen 10.1 und 10.2 beziehen sich auf Rekonstruktionen des Potentials für IP1_HS.
Bild i) in Abbildung 10.1 zeigt eine Rekonstruktion mit dem Differenzenverfahren. Der Gesamtfehler fällt bei $\epsilon = 2\cdot 10^{-5}$ im Ergebnis bereits deutlich auf. Eine mit dem Nyström-Verfahren durchgeführte Rechnung liefert ein ähnliches Resultat. Vergleiche auch die unteren beiden Bilder in Abbildung 10.2. Die Bilder ii) und iv) zeigen, wie sich die Resultate des quasi Newton-Verfahrens in einigen Schritten der exakten Lösung nähern.
Der analytische Fehler in der Born-Approximation $|-2u_{tt}(0,2x) - q_1(x)| = 2|\int_0^x q_1(\xi)u_t(\xi, 2x-\xi)d\xi|$ macht sich auch in den numerischen Resultaten bemerkbar. Die Aussagekraft dieser Linearisierung nimmt für größere q-Werte deutlich ab, siehe Abbildung 10.3. Dennoch liefern die Diskretisierungen der Born-Approximation einfach berechenbare Näherungen, die sich zur Bestimmung von Unstetigkeitsstellen im gesuchten Potential eignen, siehe auch Abbildung 10.2.
Die Lösungen der inversen Sturm-Liouville Probleme in den Bildern iii) und v) aus Abbildung 10.1 zeigen, wie sich durch Hinzunahme von Spektraldaten bei der Rekonstruktion sowohl die Frequenz des Fehlers als auch dessen Absolutwert erhöht. Die Grobstruktur des exakten Potentials wird in einem Teilbereich erkannt, die Resultate sind vergleichbar mit denen von Fawcett [18], Sacks [48] und Rundell und Sacks [45]. Für eine weitere numerische Behandlung inverser Sturm-Liouville Probleme siehe auch Dierkes [16].
Darstellungen wie in Abbildung 10.1 zur Fehleranalyse bei der Rekonstruktion des Potentials finden wir in der gerade genannten Literatur und in Zhu [66], dabei wird der Effekt von Zufallsfehlern in den

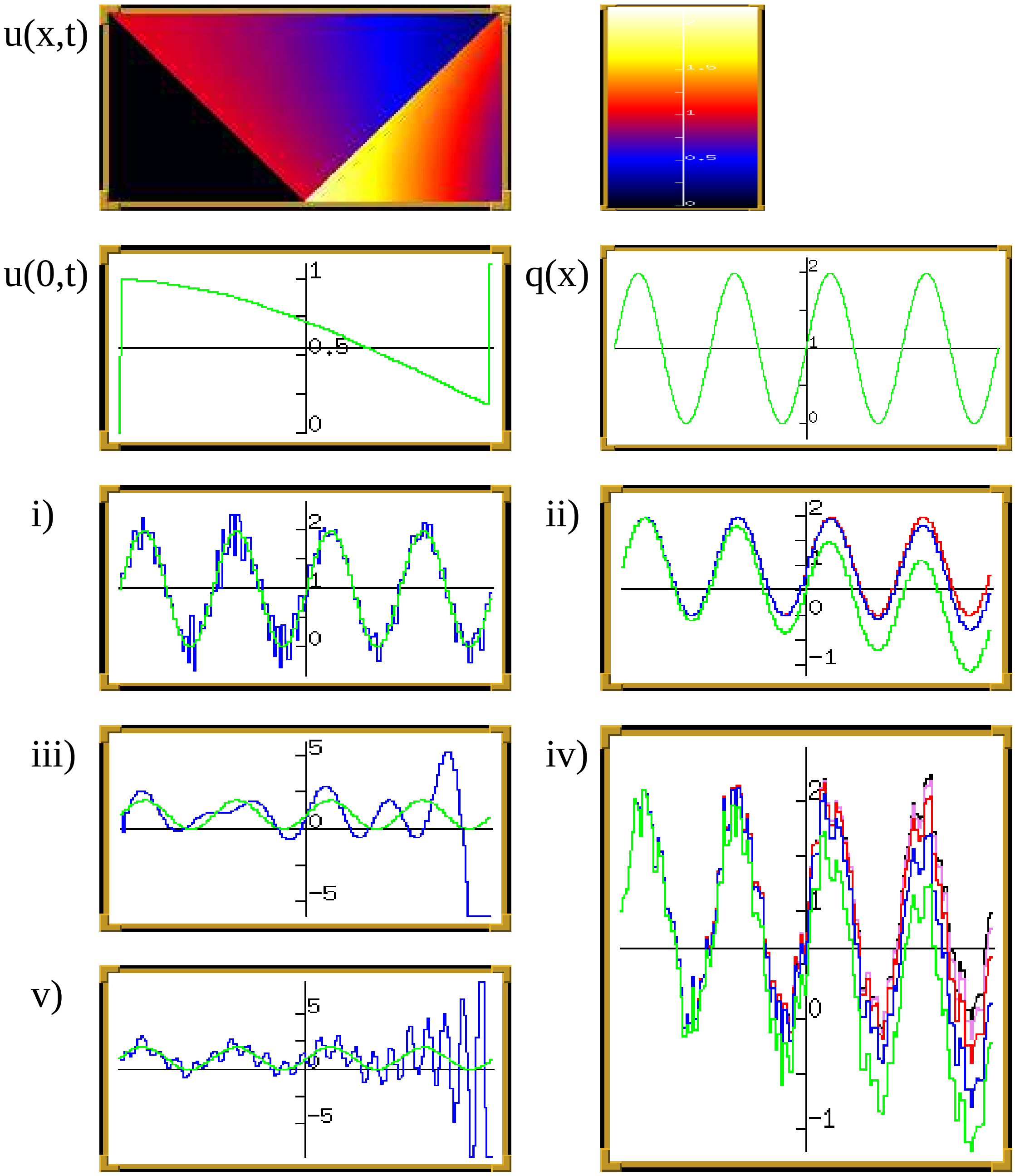

Abbildung 10.1: Für $q = q_1$ ist die Lösung u von DP1 mit $u_x(0,t) = 0$ und $u_x(1,t) = 0$ auf $[0,1] \times [0,2]$ dargestellt. Die Bilder i) bis v) stellen approximative Lösungen des inversen Problems dar.
i): Differenzenverfahren: $n = 130$, $\epsilon = 2 \cdot 10^{-5}$
ii): quasi Newton-Verfahren: $n = 130$, $\epsilon = 0.0$; Iterationsschritte 1 (Born-Approximation),3,7
iii): inverses Sturm-Liouville Problem: $n = 130$, $\epsilon = 0.0$; Anzahl benutzter Spektraldaten: 5; Rekonstruktion mit dem Differenzenverfahren
iv): quasi Newton-Verfahren: $n = 130$, $\epsilon = 4 \cdot 10^{-6}$; Iterationsschritte 1,2,3,4,7
v): inverses Sturm-Liouville Problem: $n = 130$, $\epsilon = 0.0$; Anzahl benutzter Spektraldaten; 20, Rekonstruktion mit dem Differenzenverfahren.
Die Rekonstruktionen zum inversen Sturm-Liouville Problem mit dem Nyström-Verfahren unterscheiden sich kaum von denjenigen mit dem Differenzenverfahren.

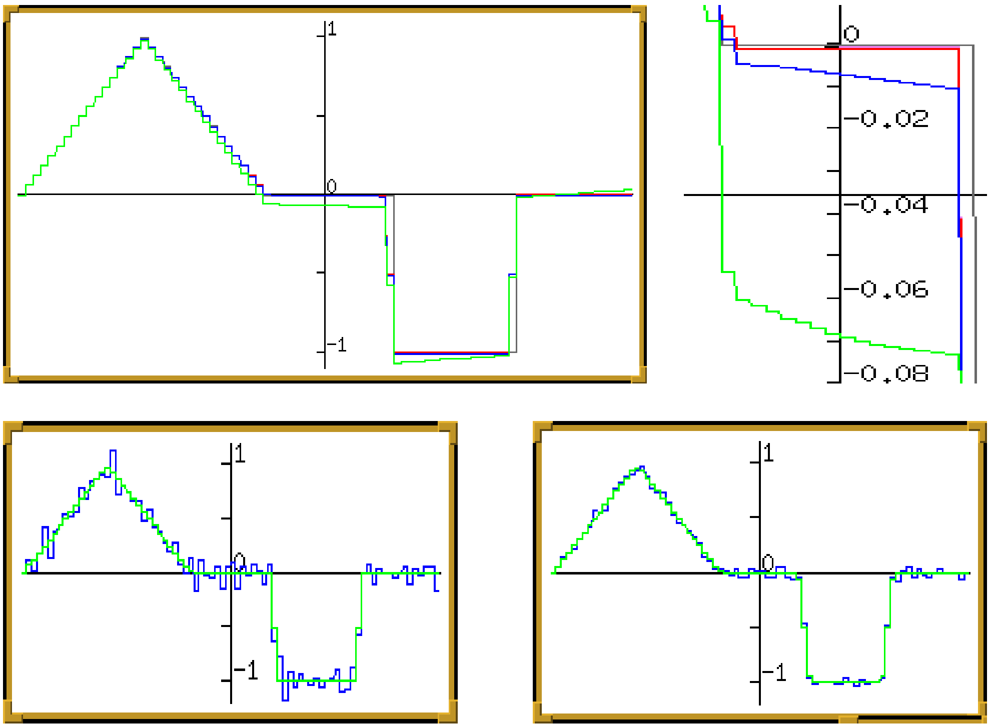

Abbildung 10.2: Die Rechnungen erfolgten mit $n = 80$. Die oberen zwei Bilder enthalten Resultate des quasi Newton-Verfahrens für IP1. Das rechte Bild ist ein Ausschnitt des linken. Es wurden keine Fehler zu den Randwerten $u(0,t)$ aufaddiert. Dargestellt ist die Born-Approximation, Farbe grün, und die Ergebnisse der Iterationsschritte zwei, drei, vier und sechs in den Farben blau, rot, pink und schwarz. Das exakte $q = q_3$ ist ebenfalls in schwarz dargestellt und nicht von dem Resultat des sechsten Iterationsschrittes unterscheidbar.
Unten links ist das Ergebnis der Lösung mit dem Differenzenverfahren und unten rechts das Ergebnis der Lösung mit dem Nyström-Verfahren dargestellt. Die grüne Linie bezeichnet das Ergebnis ohne Fehler in den Randwerten, die blaue den Fehler bei $\epsilon = 2. \cdot 10^{-5}$.

Eingabewerten nicht analysiert. In Kristensson und Krueger [30] werden entfernter verwandte Probleme behandelt. Sie addieren bei den Rechnungen Zufallsfehler auf die gegebenen Daten und benutzen die Ergebnisse zur Beurteilung ihrer Algorithmen. Bube und Burridge [9] untersuchen den Einfluß von Fehlern auf ihre Rechnungen und versuchen, ihn durch Filterung zu reduzieren. Ihre Problemstellung ist zwar ähnlich zur unsrigen, aber nicht so übereinstimmend, daß sich die Ergebnisse vergleichen ließen. Numerische Untersuchungen zur Art der Schlechtgestelltheit der Problemformulierung stehen auch in [9] noch aus.

Die folgenden Erläuterungen gelten für die farbigen Abbildungen A.1, A.4, A.6, A.8, A.10, A.12, A.14 und A.16.

Die Bilder **i)-iii)** stellen $\max_{1 \le i \le n-1} |q_i^{\epsilon,n} - q_i|$, $\max_{1 \le i \le n-1} |q_i^{\epsilon,n} - q_i^n|$ bzw. $\max_{1 \le i \le n-1} |q_i^n - q_i|$ dar. Die Darstellung ist in Form einer Matrix gewählt, deren Spalten die Einträge zu einer festen Anzahl von Diskretisierungspunkten n und variierendem Fehler ϵ in den Randwerten enthalten. Die Zeilen geben entsprechend die Werte zu festem ϵ und laufendem n wieder. Aus diesem Grunde sind die Zeilen der Matrix iii) identisch. Der Wert eines Eintrags wird durch die Farbdarstellung bestimmt. Der abgebildete Farbkeil gehört jeweils zur Matrix i).
Eine Matrix ist so wiedergegeben, daß von links nach rechts die Anzahl der Diskretisierungspunkte n von n_{max} nach n_{min} in äquidistanten Abständen fällt und von oben nach unten der Datenfehler ϵ von ϵ_{min} nach ϵ_{max} in äquidistanten Abständen wächst. Die Werte n_{min}, n_{max} und ϵ_{min}, ϵ_{max} sind in der jeweiligen Bildunterschrift angegeben.
Für den kleinsten und den größten Fehler ϵ sind in **iv)** bzw. **v)** die Werte aus den Bildern i) bis iii)

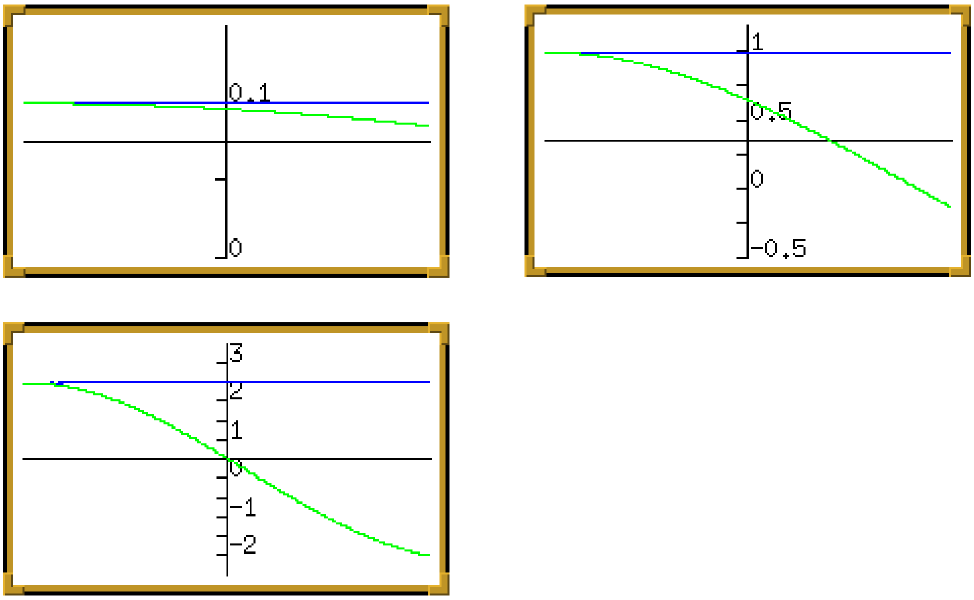

Abbildung 10.3: Angegeben sind jeweils das exakte konstante q und die Born-Approximation. Die Rechnungen erfolgten für IP1 mit n=160 und mit fehlerfreien Randwerten. Die Ergebnisse mit dem Differenzenverfahren und mit dem Nyström-Verfahren sind bei den benutzten Maßstäben nicht vom exakten q unterscheidbar.

gegen die Anzahl der Diskretisierungspunkte aufgetragen. Dies entspricht der ersten bzw. letzten Zeile einer Matrix. Die grüne Linie stellt die Werte aus der Matrix i), die blaue die Werte aus ii) und die rote die Werte aus iii) dar.

Die grünen Kurven zeigen, wie für gegebenes ϵ eine optimale Schrittweite existiert, die den Gesamtfehler minimiert, siehe insbesondere Abbildung A.2 .
Die Bilder i) bis v) vermitteln einen Eindruck von den Absolutwerten der Fehler in den Ergebnissen und zeigen, daß die Parameter ϵ und n sinnvoll zueinander gewählt sind.

Die Bedeutung der Graphen in den Abbildungen A.3, A.5, A.7, A.9, A.11, A.13, A.15 und A.17 erklärt sich wie folgt:

Oben links sind für den festen Fehler $\epsilon = \epsilon_{max}$ in den Randwerten die Werte

$$\log(\max_{0 \leq i \leq n-1} |q_i^{\epsilon,n} - q_i^n|) - \log(\max_{0 \leq i \leq n_{max}-1} |q_i^{\epsilon,n_{max}} - q_i^{n_{max}}|) \quad \text{gegen} \quad \log h,$$

$h = \frac{1}{n}$ von links nach rechts wachsend, aufgetragen. Die punktierten Linien stellen zum Vergleich Geraden der Steigungen -2, -1, 1 und 2 dar. Die durchgezogene Linie ist die in den gemeinsamen Nulldurchgang der anderen Kurven verschobene Ausgleichsgerade zu den Daten, ihre Steigung ist im Graphen angegeben. So verhält sich nach Abbildung A.3 $\max_{0 \leq i \leq n-1} |q_i^{\epsilon,n} - q_i^n|$ wie $O(h^{-2.097})$. Auf gleiche Art ist **oben rechts**

$$\log(\max_{0 \leq i \leq n-1} |q_i^n - q_i|) - \log(\max_{0 \leq i \leq n_{max}-1} |q_i^{n_{max}} - q_i|) \quad \text{gegen} \quad \log h$$

aufgetragen.
Sei h_{opt} die Schrittweite $h_{opt} = \frac{1}{n_{opt}}$, wobei n_{opt} die Anzahl der Diskretisierungspunkte ist, für die bei gegebenem Fehler ϵ in den Randwerten das Minimum von $\max_{0 \leq i \leq n-1} |q_i^{\epsilon,n} - q_i|$ bezüglich n angenommen wird. Es sei $h_{opt}^{\epsilon_0} = \frac{1}{n_{opt}^{\epsilon_0}}$ diese Schrittweite für $\epsilon = \epsilon_0 = \epsilon_{min}$. Dann ist **unten links**

$$\log h_{opt} - \log h_{opt}^{\epsilon_0} \quad \text{gegen} \quad \log \epsilon$$

aufgetragen. Nach Abbildung A.3 gilt dort $h_{opt} = O(\epsilon^{0.258})$. **Unten rechts** ist

$$\log(\max_{0 \leq i \leq n_{opt}-1} |q_i^{\epsilon,n_{opt}} - q_i|) - \log(\max_{0 \leq i \leq n_{opt}-1} |q_i^{\epsilon_0,n_{opt}} - q_i|) \quad \text{gegen} \quad \log \epsilon$$

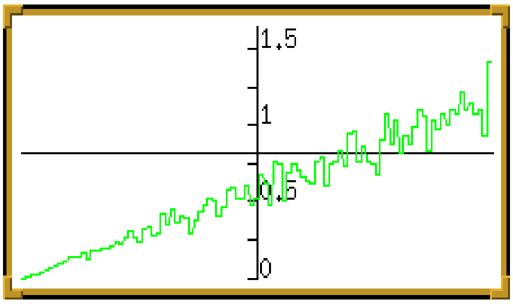

Abbildung 10.4: IP1 mit exaktem Koeffizienten $q = q_1$. Darstellung des Datenfehlers bei der Berechnung mit dem Differenzenstern für festes $n = 190$ und für $\epsilon_0 = 6 \cdot 10^{-8}$ bis $\epsilon_{100} = 2 \cdot 10^{-5}$ in äquidistanten Schritten.

bei wachsendem ϵ aufgetragen. Es gilt nach Abbildung A.3 dort $\max_{0 \le i \le n_{opt}-1} |q_i^{\epsilon, n_{opt}} - q_i| = O(\epsilon^{0.46})$. Die punktierten Linien besitzen die Steigung $\frac{1}{2}$ und 1.

Abbildung 10.4 zeigt für das angegebene Beispiel, daß der Fehler ϵ in den Randwerten linear in den Datenfehler des Ergebnisses eingeht.

Zu IP1_HS:

Die Graphen oben links in den Abbildungen A.3 und A.5 zeigen den Einfluß des Fehlers ϵ in den Randwerten auf den Datenfehler des über das Nyström-Verfahren hergeleiteten Resultats. Der Datenfehler folgt bei festem ϵ für die angegebenen Schrittweiten annähernd der asymptotischen Darstellung $O(\frac{1}{h^2})$. Dies entspricht dem Datenfehler bei der numerischen Approximation einer zweiten Ableitung durch zentrierte Differenzen und bestätigt die Schlechtgestelltheit von IP1_HS zweiter Ordnung. Der Diskretisierungsfehler hat für q_1 nach dem Graphen oben rechts in Abbildung A.3 für $h \searrow 0$ annähernd die Gestalt $O(h^2)$. Er ist damit eine Ordnung besser als erwartet. Der Diskretisierungsfehler für q_2 hat nach Abbildung A.5 oben rechts die Gestalt $O(h)$. Dies ist wegen der Anwendung zentrierter Differenzen zur q-Bestimmung für q_2 zu erwarten.

Das beschriebene Verhalten des Daten- und des Diskretisierungsfehlers ist typisch für die bisher vorgestellten numerischen Ergebnisse: Machen wir für den Gesamtfehler bei der q_1-Bestimmung den unter Vernachlässigung von Konstanten vereinfachten Ansatz

$$F(\epsilon, h) = \frac{\epsilon}{h^2} + h^2,$$

so nimmt F für festes ϵ dann sein Minimum an, wenn

$$h_{opt} = \epsilon^{\frac{1}{4}}$$

gilt. Es folgt

$$F(\epsilon, h_{opt}) = 2\epsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Genau dieses Verhalten wird in den unteren Graphen von Abbildung A.3 für den gesamten von uns getesteten Parameterbereich ϵ, n bestätigt. Analog erwarten wir für q_2 mit dem Ansatz $F(\epsilon, h) = \frac{\epsilon}{h^2} + h$ ein Ergebnis $h_{opt} = O(\epsilon^{\frac{1}{3}})$ und für den Gesamtfehler das Verhalten $O(\epsilon^{\frac{1}{3}})$. Aus den unteren Graphen von Abbildung A.5 folgt $h_{opt} = O(\epsilon^{0.293})$ und für den Gesamtfehler dort $O(\epsilon^{0.326})$, was die Erwartungen bestätigt.

Die Abbildungen A.10, A.11, A.12 und A.13 zeigen, daß diese Resultate mit denen aus der Lösung des inversen Problems mit dem Differenzenverfahren übereinstimmen.

Zu IP2_HS:

Die Diskussion der numerischen Ergebnisse zur Lösung von IP2_HS wird dadurch bestimmt, daß das Problem schlecht gestellt erster Ordnung ist. Es weist verglichen mit IP1_HS eine Differentiation weniger auf, was sich in den Berechnungen wiederspiegelt. So verhält sich der Datenfehler nach den Graphen in den Abbildungen A.7 und A.9 oben links nahezu wie $O(\frac{1}{h})$. Die Ergebnisse werden wesentlich weniger durch den Fehler ϵ in den Randwerten beeinflußt als bei IP1_HS, was auch an der Größenordnung der gewählten ϵ-Bereiche abzulesen ist, siehe die Abbildungen A.6 und A.8. Dadurch ergeben sich veränderte Abhängigkeiten für die optimalen Schrittweiten und die entsprechenden optimalen Gesamtfehler. Für q_1 erwarten wir $h_{opt} = O(\epsilon^{\frac{1}{3}})$ und für den Gesamtfehler an n_{opt} ein Verhalten wie $O(\epsilon^{\frac{2}{3}})$. Für q_2 sollten sich die Beziehungen $h_{opt} = O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$ und für den Gesamtfehler an n_{opt} $O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$ ergeben. Der Vergleich mit den unteren Graphen der Abbildungen A.7 und A.9 zeigt die gute Übereinstimmung der numerischen Resultate mit den Erwartungen.

Die Abbildungen A.14, A.15, A.16 und A.17 zeigen, wie nahe die Ergebnisse des Nyström-Verfahrens und des Differenzenverfahrens zueinander liegen.

Die Beispielrechnungen liefern insgesamt ein positives **Ergebnis**:

Die numerischen Resultate bestätigen die Schlechtgestelltheit zweiter bzw. erster Ordnung der inversen Probleme IP1_HS bzw. IP2_HS. Sie zeigen, daß auch bei der von uns durchgeführten erweiterten Fehleranalyse die Ergebnisse des wesentlich schnelleren Differenzenverfahrens denen der Lösung über die lineare Gel'fand-Levitan-Gleichung mit dem Nyström-Verfahren in nichts nachstehen.

Anhang A

Abbildungen und Graphen zu den numerischen Ergebnissen

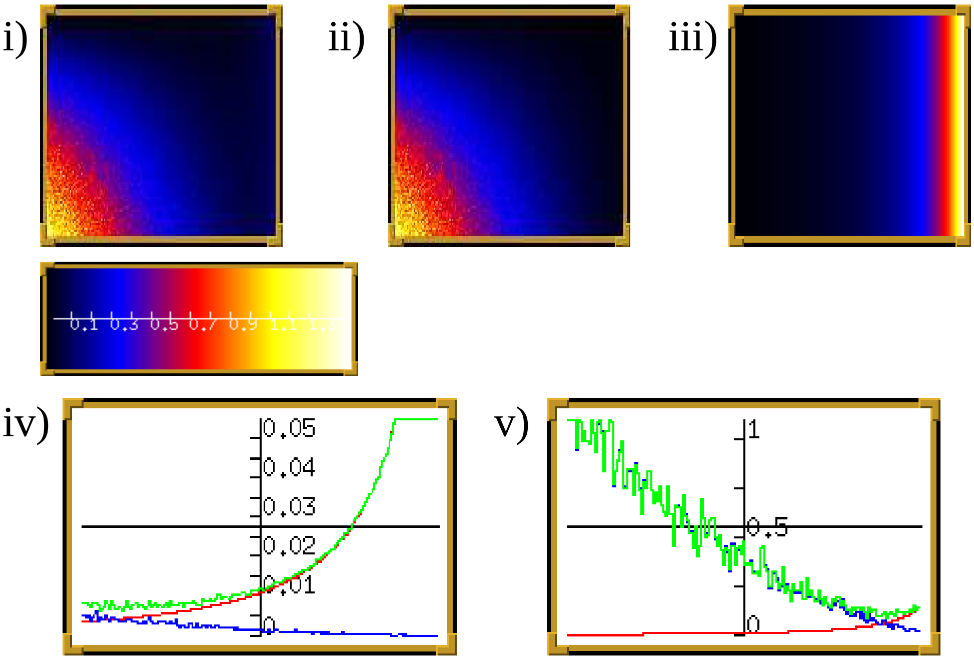

Abbildung A.1: IP1 mit exaktem Koeffizienten $q = q_1$.
Nyström-Verfahren mit $n_0 = 30$ bis $n_{160} = 190$ und $\epsilon_0 = 2 \cdot 10^{-7}$ bis $\epsilon_{100} = 5 \cdot 10^{-5}$.

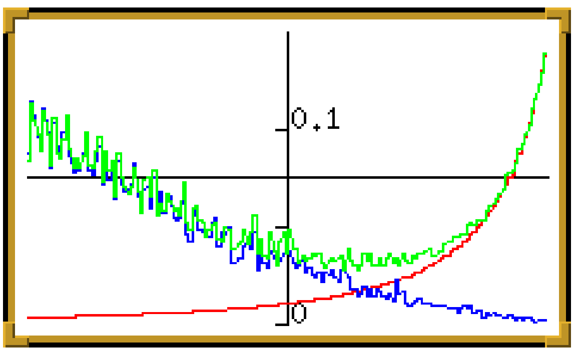

Abbildung A.2: Darstellung wie in iv) und v) aus Abbildung A.1 für $\epsilon = \epsilon_{10}$ fest, n von $n_0 = 30$ bis $n_{160} = 190$.

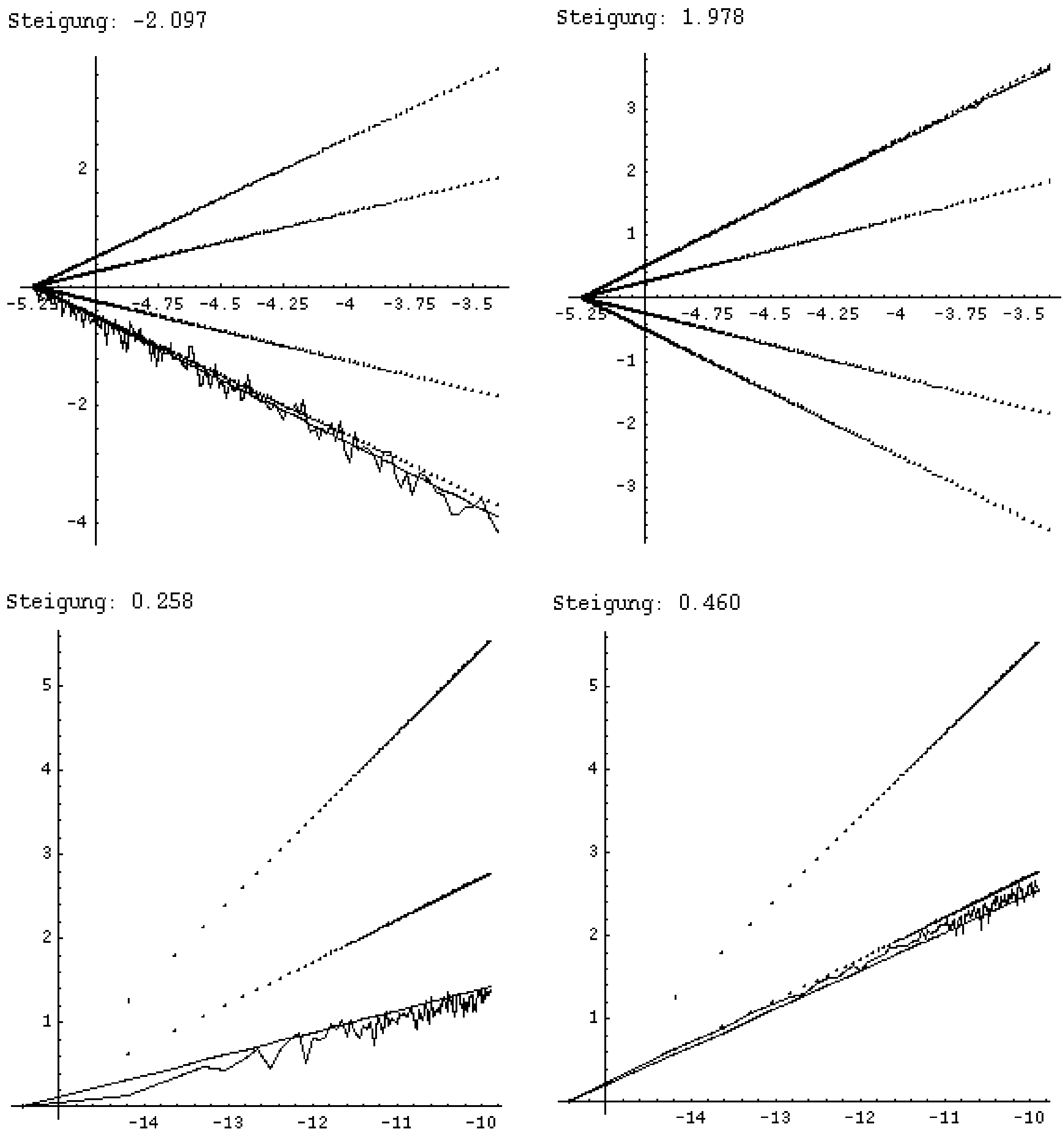

Abbildung A.3: Zu AbbildungA.1.

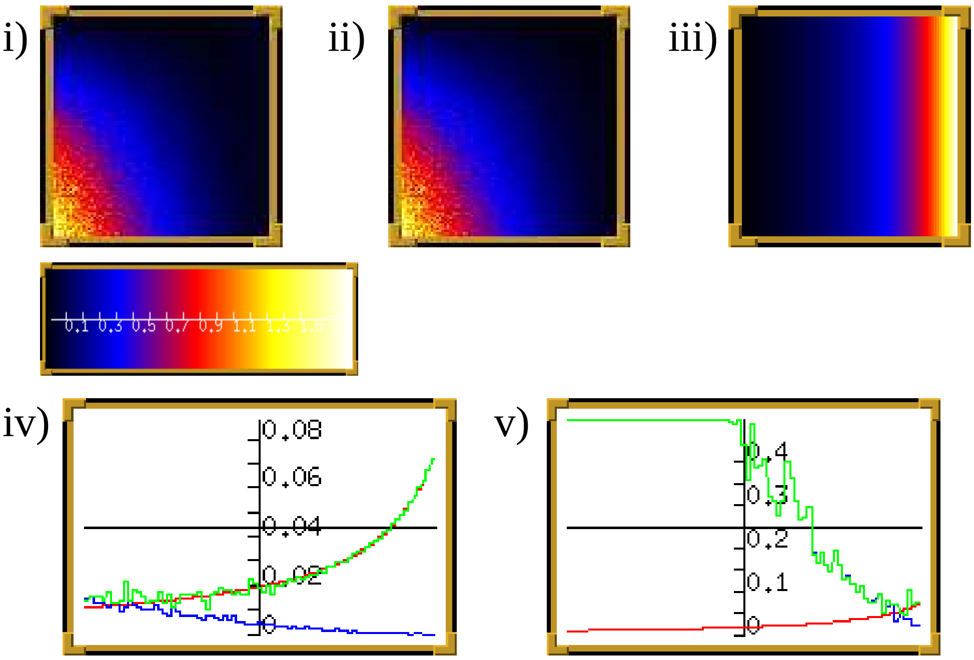

Abbildung A.4: IP1 mit exakten Koeffizienten $q = q_2$.
Nyström-Verfahren mit $n_0 = 30$ bis $n_{80} = 190$ und $\epsilon_0 = 6 \cdot 10^{-7}$ bis $\epsilon_{100} = 6 \cdot 10^{-5}$.

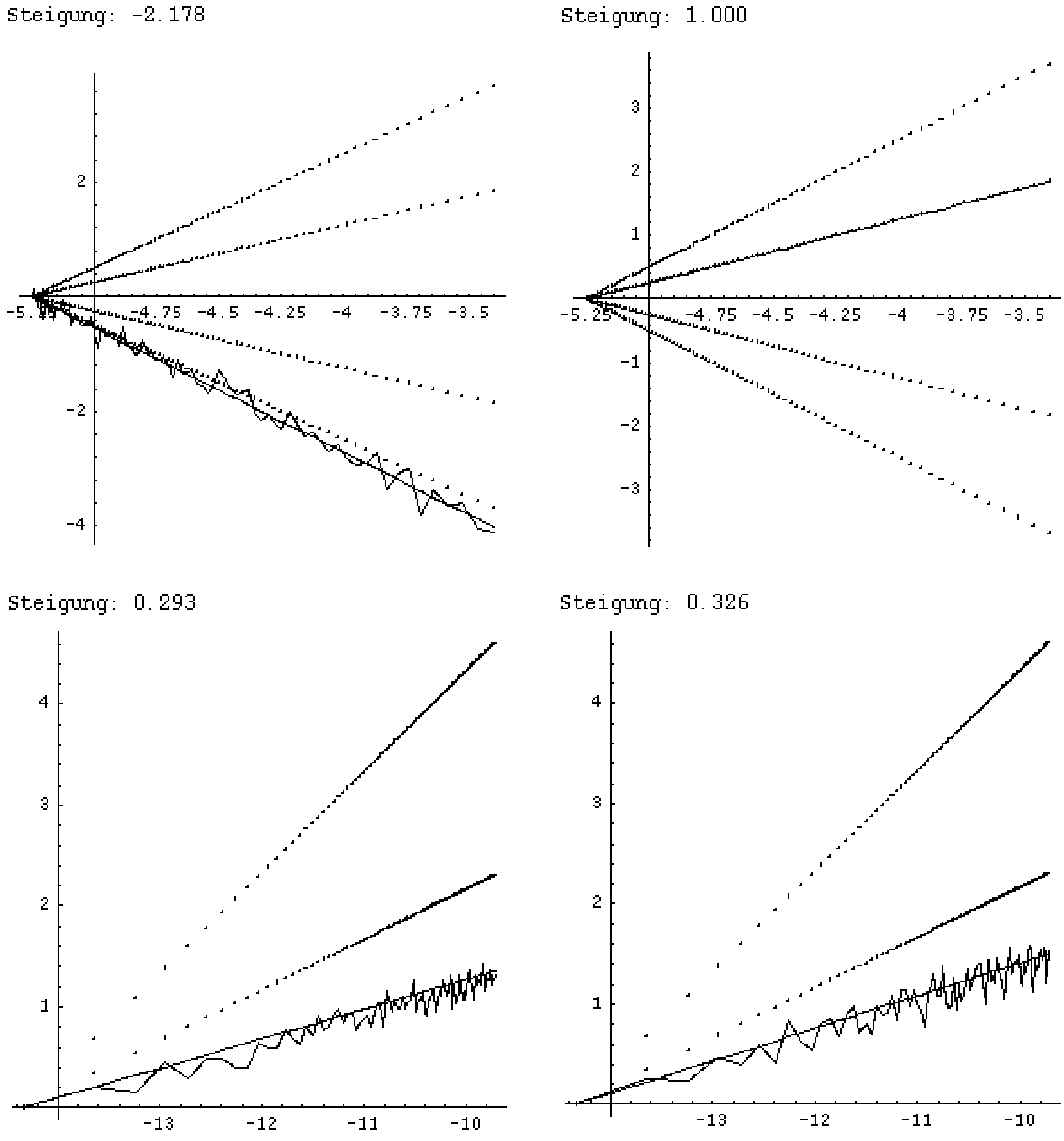

Abbildung A.5: Zu Abbildung A.4.

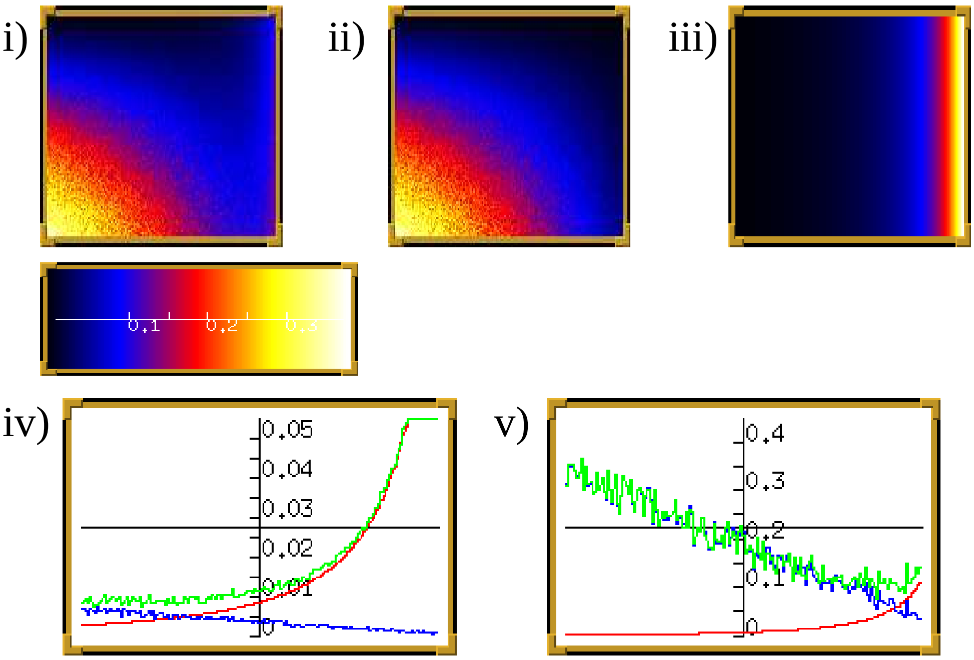

Abbildung A.6: IP2 mit exaktem Koeffizienten $q = q_1$.
Nyström-Verfahren mit $n_0 = 30$ bis $n_{160} = 190$ und $\epsilon_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ bis $\epsilon_{100} = 2 \cdot 10^{-3}$.

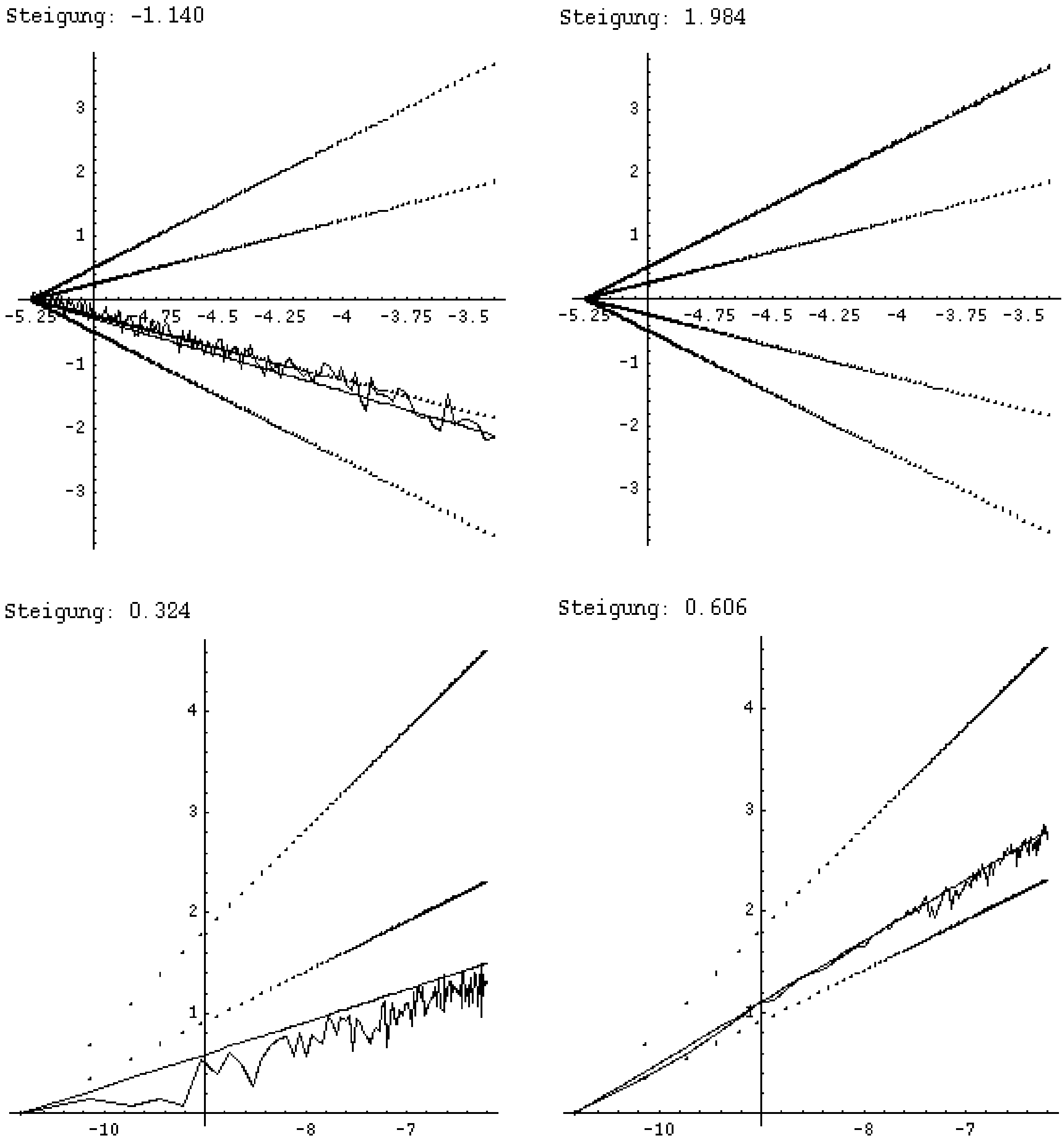

Abbildung A.7: Zu Abbildung A.6.

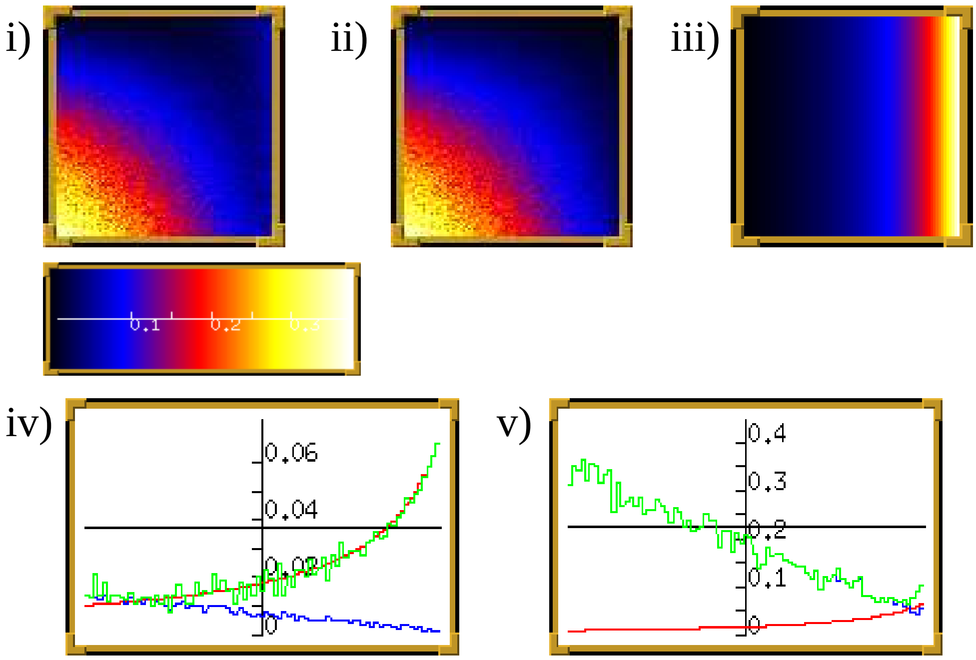

Abbildung A.8: IP2 mit exaktem Koeffizienten $q = q_2$.
Nyström-Verfahren mit $n_0 = 30$ bis $n_{80} = 190$ und $\epsilon_0 = 6 \cdot 10^{-5}$ bis $\epsilon_{100} = 3 \cdot 10^{-3}$.

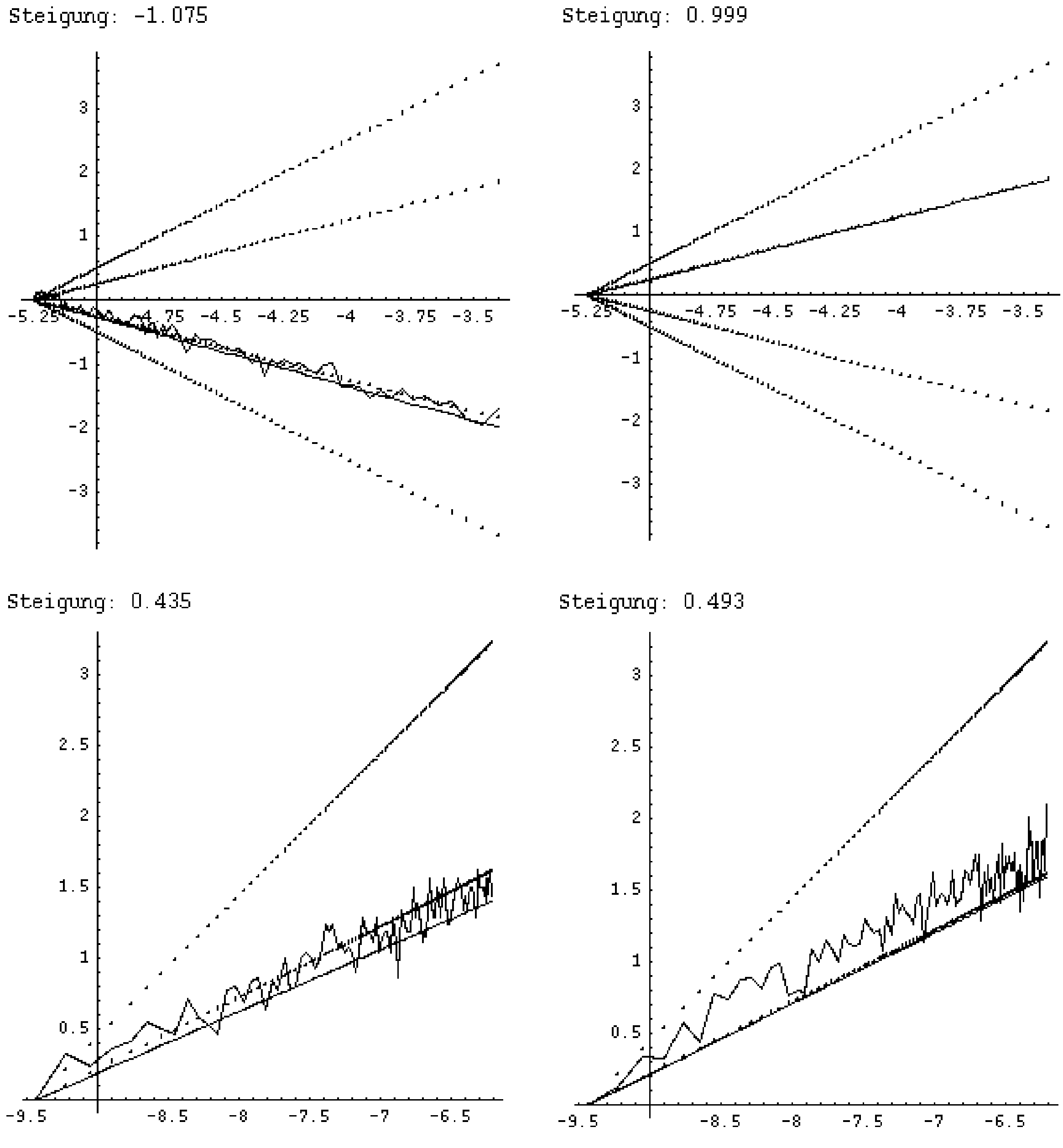

Abbildung A.9: Zu Abbildung A.8.

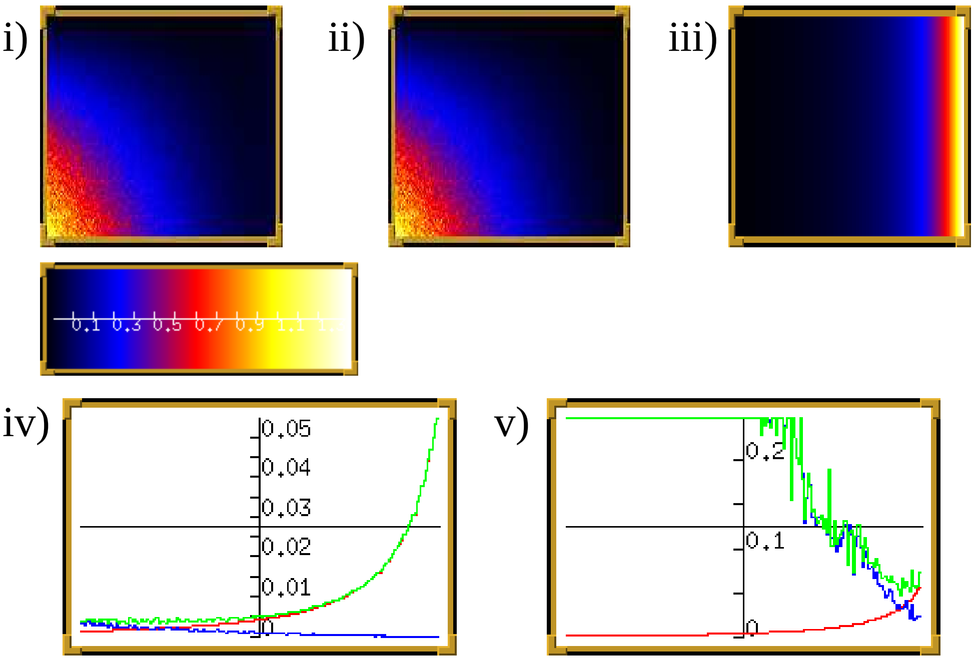

Abbildung A.10: IP1 mit exaktem Koeffizienten $q = q_1$.
Differenzenverfahren mit $n_0 = 30$ bis $n_{160} = 190$ und $\epsilon_0 = 6 \cdot 10^{-8}$ bis $\epsilon_{100} = 2 \cdot 10^{-5}$.

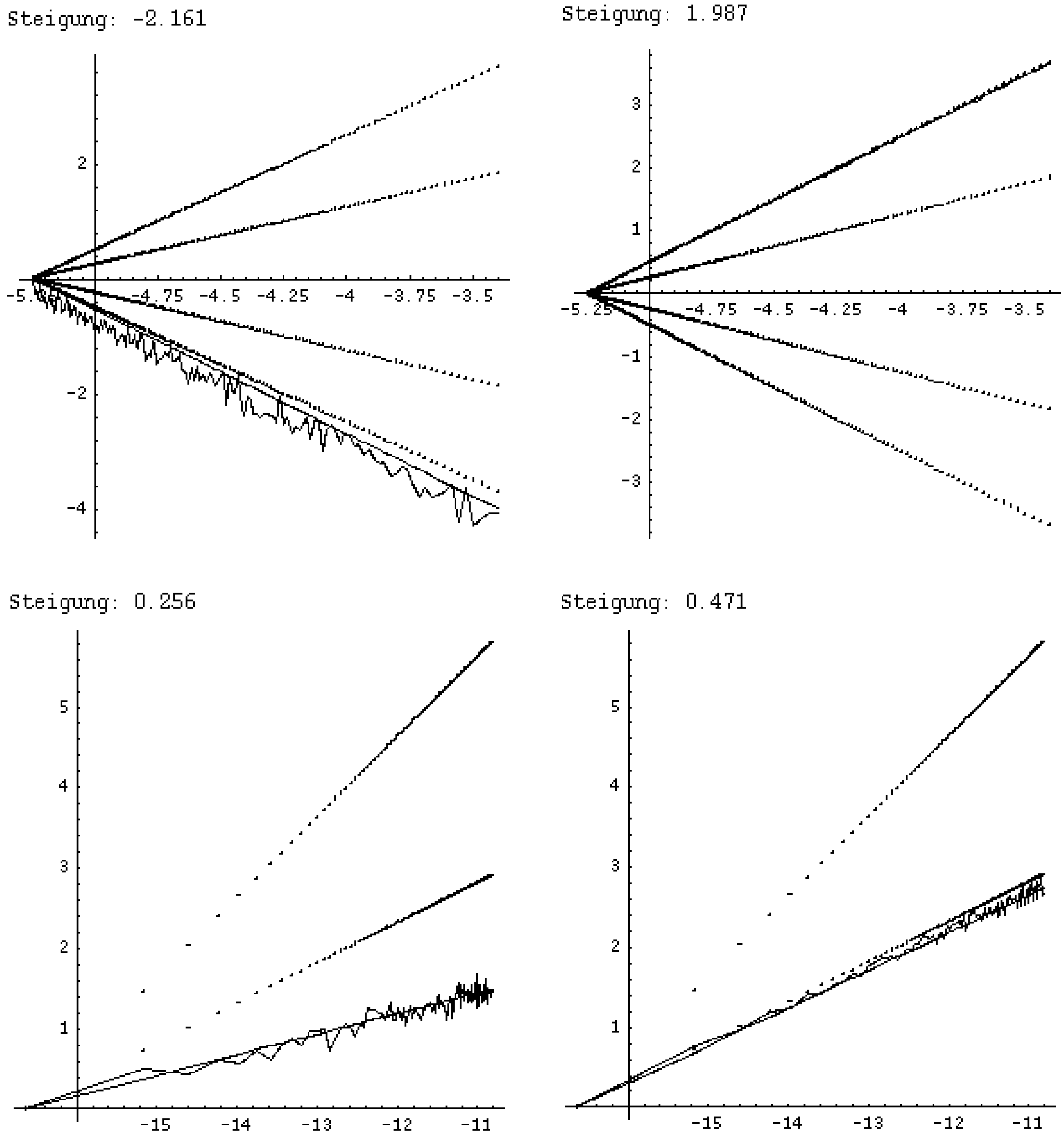

Abbildung A.11: Zu Abbildung A.10.

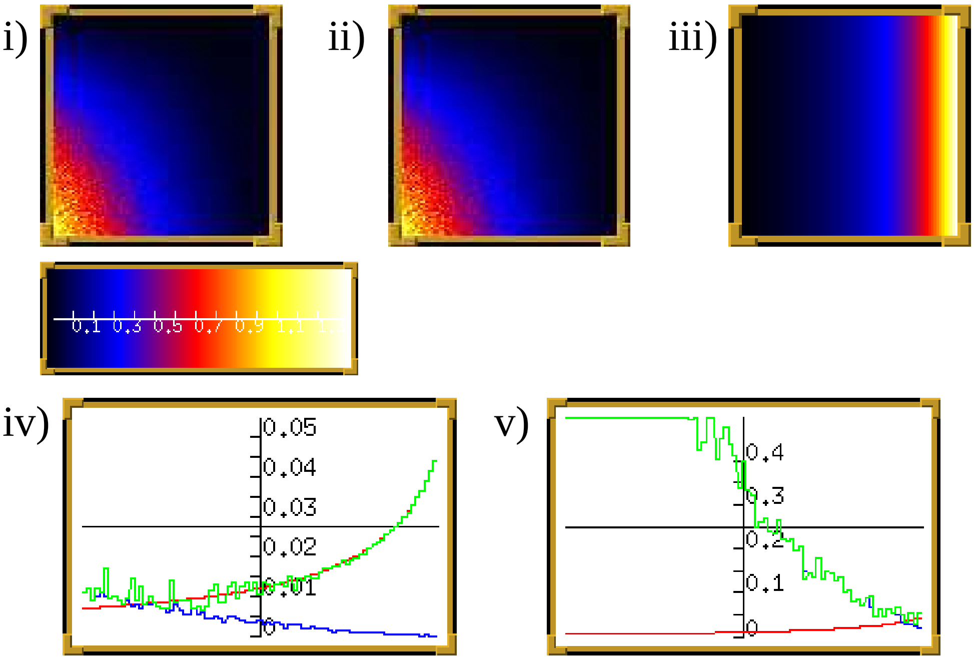

Abbildung A.12: IP1 mit exaktem Koeffizienten $q = q_2$.
Differenzenverfahren mit $n_0 = 30$ bis $n_{80} = 190$ und $\epsilon_0 = 2 \cdot 10^{-7}$ bis $\epsilon_{100} = 2 \cdot 10^{-5}$.

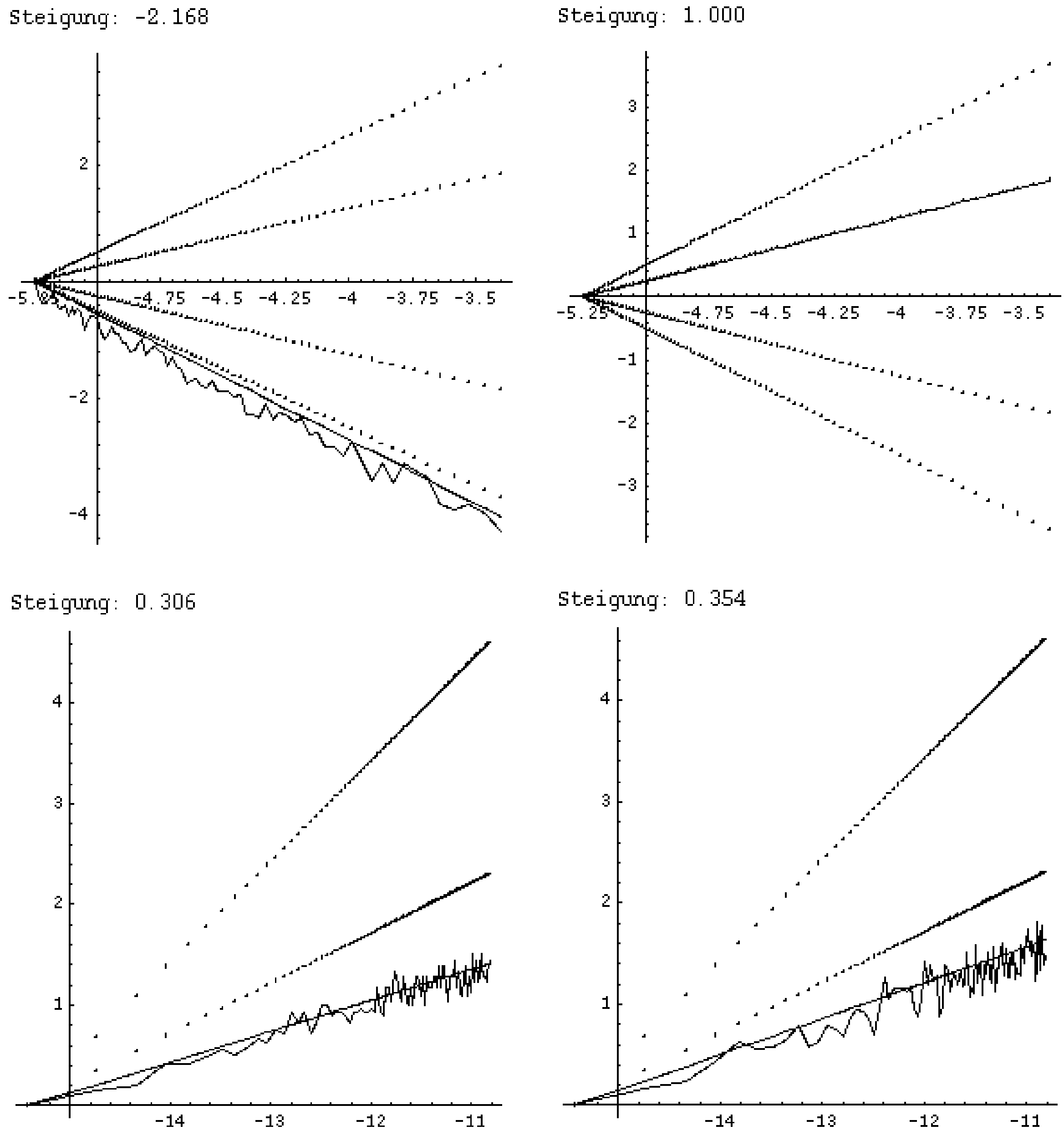

Abbildung A.13: Zu Abbildung A.12.

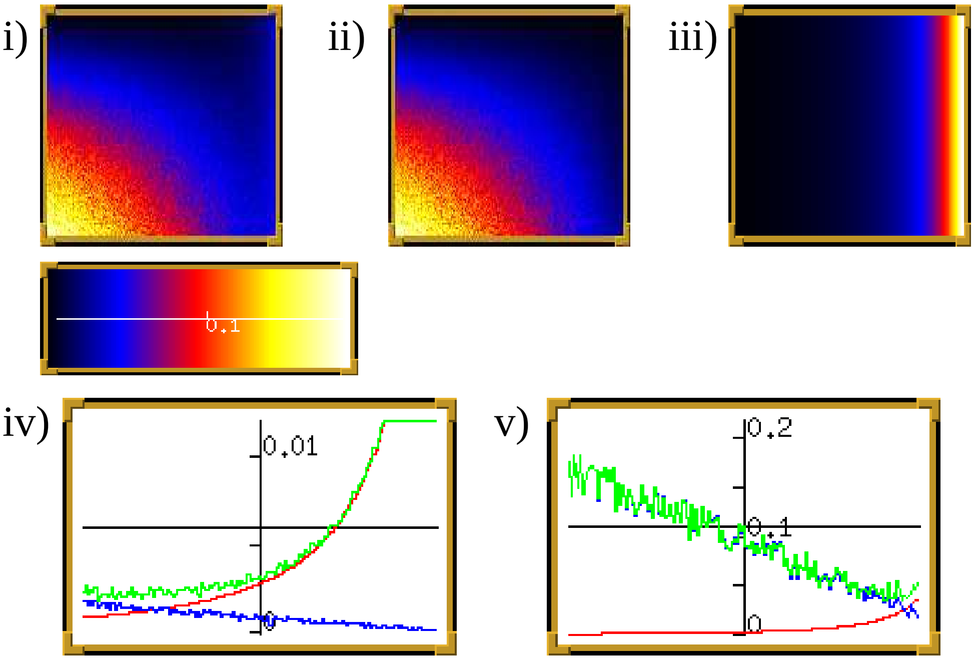

Abbildung A.14: IP2 mit exaktem Koeffizienten $q = q_1$.
Differenzenverfahren mit $n_0 = 30$ bis $n_{160} = 190$ und $\epsilon_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ bis $\epsilon_{100} = 5 \cdot 10^{-4}$.

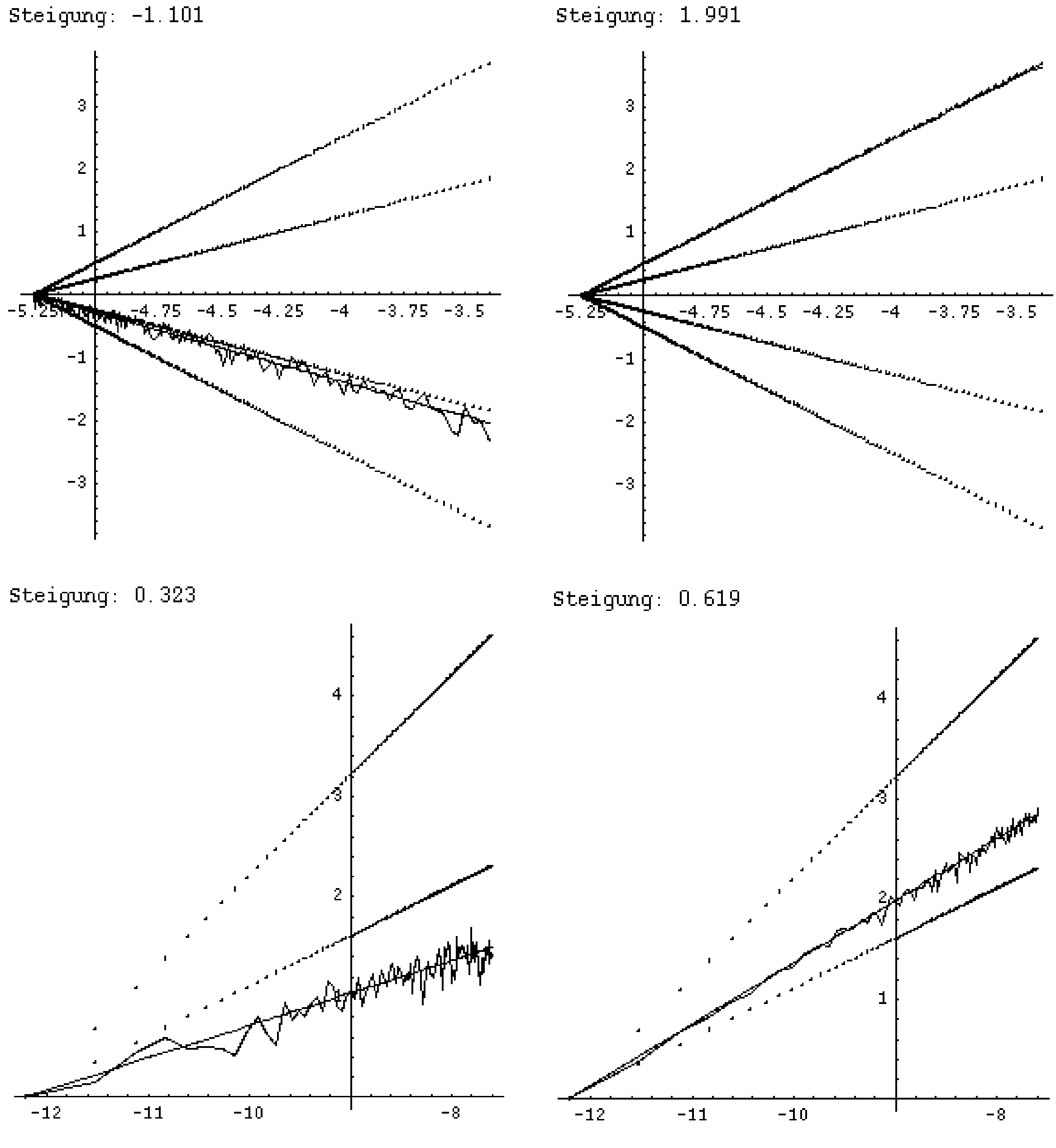

Abbildung A.15: Zu Abbildung A.14.

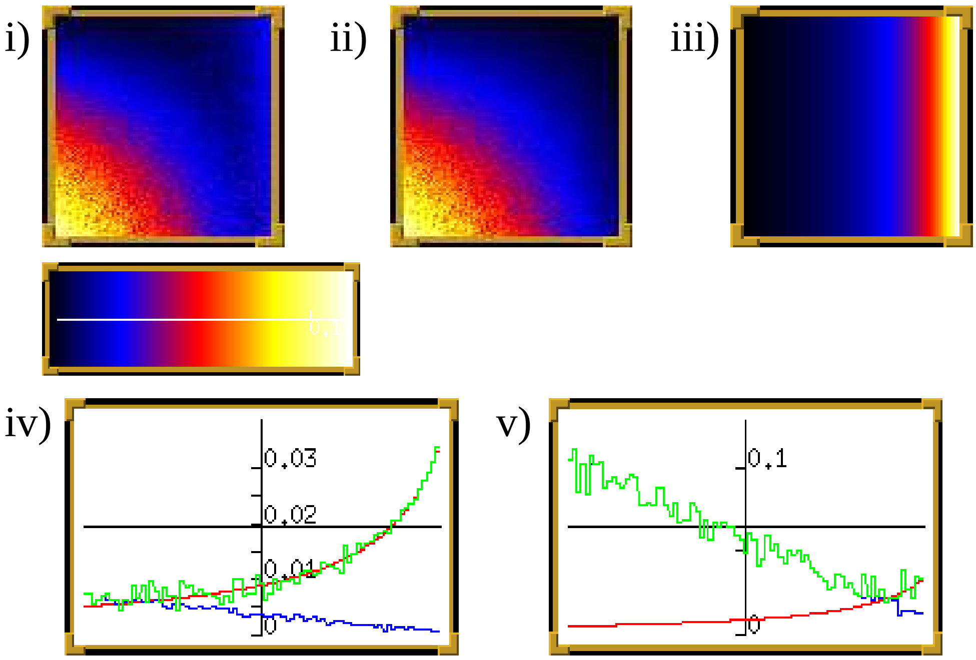

Abbildung A.16: IP2 mit exaktem Koeffizienten $q = q_2$.
Differenzenverfahren mit $n_0 = 30$ bis $n_{80} = 190$ und $\epsilon_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ bis $\epsilon_{100} = 3 \cdot 10^{-4}$.

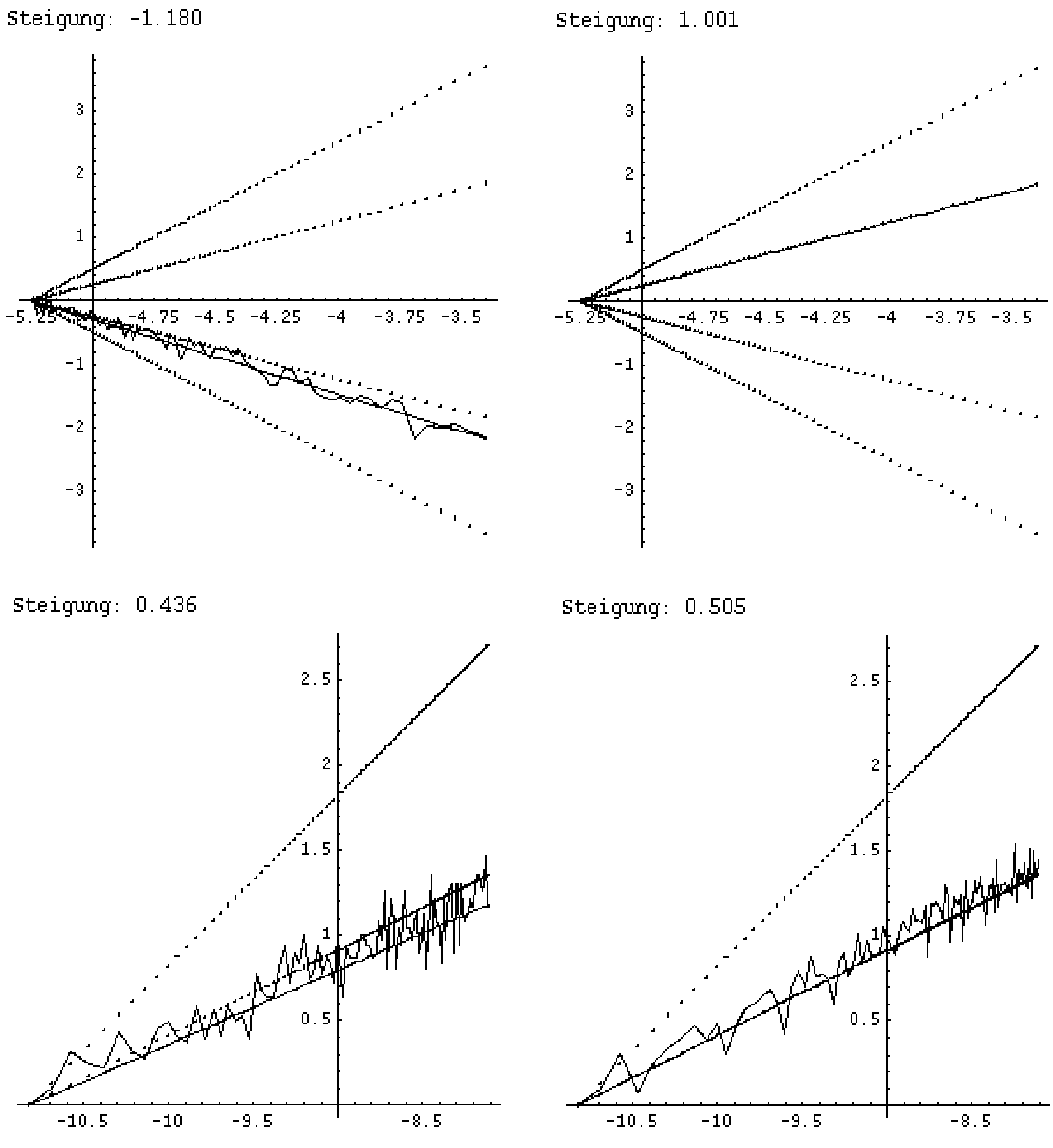

Abbildung A.17: Zu Abbildung A.16.

Literaturverzeichnis

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions.* National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series **55**, (1972).

[2] P. M. Anselone. *Collectively Compact Operator Approximation Theory.* Prentice-Hall (1971).

[3] K. E. Atkinson. *A Survey of Numerical Methods for the Solution of Fredholm Integral Equations of the Second Kind.* SIAM (1976).

[4] A. Bamberger, G. Chavent, P. Lailly. About the Stability of the Inverse Problem in 1-D Wave Equations - Application to the Interpretation of Seismic Profiles. *Appl. Math. Optim.* **5**, 1-47, (1979).

[5] N. Bleistein. *Mathematical Methods for Wave Phenomena.* Academic Press (1984).

[6] L. Bergmann, C. Schaefer. *Lehrbuch der Experimentalphysik.* Band II Elektrizitätslehre, De Gruyter & Co. (1966).

[7] J. G. Berryman, R. R. Greene. Discrete inverse methods for elastic waves in layered media. *Geophysics* **80** No. 2, 213-233, (1980).

[8] A. S. Blagoveshchenskij. On a Local Method of Solution of a Nonstationary Inverse Problem for a Nonhomogeneous String (Russisch). Trudy (Mat. inst. imeni V. A. Steklova, Leningrad) **65**, 28-38, (1971).

[9] K. Bube, R. Burridge. The One-dimensional Inverse Problem of Reflection Seismology. *SIAM Review* **25** No. 4, 497-559, (1983).

[10] R. Burridge. The Gelfand-Levitan, the Marchenko, and the Gopinath-Sondhi Integral Equations of Inverse Scattering Theory, regarded in the Context of Inverse Impulse-Response Problems. *Wave Motion* **2**, 305-323, (1980).

[11] P. M. Carrion. On Stability of 1D Exact Inverse Methods. *Inverse Problems* **2**, 1-22, (1986).

[12] R. Carroll. *Transmutation, Scattering Theory and Special Functions.* North-Holland (1982).

[13] K. M. Case, M. Kac. A Discrete Version of the Inverse Scattering Problem. *J. Math. Phys.* **14** No. 5, 594-603, (1973).

[14] M. Corvi. Numerical Algorithms for One-Dimensional Inverse Scattering Problems. *Inverse Problems in Scattering and Imaging,* M. Bertero, E. R. Pike (Herausgeber), Proceedings of a NATO Workshop, Adam Hilger, 411-426, (1991).

[15] R. Courant, D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics.* Volume II, Partial Differential Equations, R. Courant. Wiley & Sons (1962).

[16] T. Dierkes. *Numerische Behandlung inverser Sturm-Liouville Probleme.* Diplomarbeit am Institut für Numerische und instrumentelle Mathematik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster (1995).

[17] G. Doetsch. *Handbuch der Laplace-Transformation.* Band III, Birkhäuser (1956).

[18] J. Fawcett. On the Stability of Inverse Scattering Problems. *Wave Motion* **6**, 489-499, (1984).

[19] K. Friedrichs. Über die Spektralzerlegung eines Integraloperators. *Math. Ann.* **115**, 249-272, (1938).

[20] I. M. Gel'fand, B. M. Levitan. On the Determination of a Differential Equation from its Spectral Function. *Amer. Math. Soc. Transl. Series 2* **1**, 253-304, (1955). Übersetzung aus *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **15**, 309-360, (1951).

[21] I. M. Gel'fand, G. E. Schilow. *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) I.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (1960).

[22] G. M. L. Gladwell. *Inverse Problems in Vibration.* Martinus Nijhoff Publishers (1986).

[23] W. Hackbusch. *Integralgleichungen.* Verlag B. G. Teubner Stuttgart (1989).

[24] O. E. Hald. Numerical Solution of the Gel'fand-Levitan Equation. *Linear Algebra and its Applications* **28**, 99-111, (1979).

[25] G. Hellwig. *Partielle Differentialgleichungen.* B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart (1960).

[26] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I.* Springer-Verlag (1990).

[27] S. I. Kabanikhin. Convergence of finite-difference scheme inversion of determining the coefficients in hyperbolic equations. *J. Inv. Ill-Posed Problems* **1** No. 1, 33-52, (1993).

[28] E. Kamke. *Differentialgleichungen II.* Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig (1962).

[29] M. A. Krasnosel'skii. *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations.* Pergamon Press Ltd. (1964).

[30] G. Kristensson, R. J. Krueger. Time Domain Inversion Techniques for Electromagnetic Scattering Probems. Invariant Imbedding and Inverse Problems, eds: Corones, Kristensson, Nelson, Seth, *SIAM Proceeding*, 1-29, (1990).

[31] M. M. Lavrent'ev, K. G. Reznitskaya, V. G. Yakhno. One-dimensional Inverse Problems of Mathematical Physics. *Amer. Math. Soc. Transl. Series 2* **130**, (1986).

[32] B. M. Levitan. *Inverse Sturm-Liouville Problems.* VNU Science Press BV (1987).

[33] A. K. Louis. *Inverse und schlecht gestellte Probleme.* Verlag B. G. Teubner Stuttgart (1989).

[34] V. A. Marchenko. *Sturm-Liouville Operators and Applications.* Birkhäuser Verlag (1986).

[35] P. M. Morse, H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics.* McGraw-Hill (1953).

[36] G. Müller. *Theorie elastischer Wellen.* Vorlesungsskript, Institut für Meteorologie und Geophysik, Universität Frankfurt (1990).

[37] F. Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography.* John Wiley & Sons Ltd (1986).

[38] F. Natterer. *Vorlesung Inverse Probleme, Sommersemester 1992.* Institut für Numerische und instrumentelle Mathematik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster (1992).

[39] F. Natterer. *Vorlesungsskript Partielle Differentialgleichungen.* Institut für Numerische und instrumentelle Mathematik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster (1994).

[40] M. A. Neumark. *Lineare Differentialoperatoren.* Akademie-Verlag (1963).

[41] E. J. Nyström. Über die praktische Auflösung von Integralgleichungen. *Acta Math.* **54**, Uppsala, 185-204, (1930).

[42] V. G. Romanov. *Inverse Problems of Mathematical Physics.* VNU Science Press (1987).

[43] V. G. Romanov. On the well-posedness of inverse problems with the data support located at the domain boundary. *J. Inv. Ill-Posed Problems* **1** No. 2, 155-168, (1993).

[44] I. Rubinstein, L. Rubinstein. *Partial Differential Equations in Classical Mathematical Physics.* Cambridge University Press (1993).

[45] W. Rundell, P. E. Sacks. Reconstruction Techniques for Classical Inverse Sturm-Liouville Problems. *Math. Com.* **58** No. 197, 161-183, (1992).

[46] W. Rundell, P. E. Sacks. On the Numerical Determination of Potentials. *SPIE Vol. 1767 Inverse Problems in Scattering and Imaging*, 31-42, (1992).

[47] W. Rundell, P. E. Sacks. The reconstruction of Sturm-Liouville operators. *Inverse Problems* **8**, 457-482, (1992).

[48] P. E. Sacks. An Iterative Method for the Inverse Dirichlet Problem. *Inverse Problems* **4**, 1055-1069, (1988).

[49] L. Schwartz. *Mathematics for the Physical Sciences.* Addison-Wesley (1966).

[50] M. M. Sondhi, B. Gopinath. Determination of Vocal-Tract Shape from Impulse Response at the Lips. *J. Acoust. Soc. Am.* **45** No. 4, 911-921, (1968).

[51] J. C. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations.* Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software (1989).

[52] W. W. Symes. Inverse Boundary Value Problems and a Theorem of Gel'fand and Levitan. *J. Math. Anal. Appl.* **71**, 379-402, (1979).

[53] W. W. Symes. Numerical Stability in an Inverse Scattering Problem. *SIAM J. Numer. Anal.* **17** No. 5, 707-732, (1980).

[54] W. W. Symes. Stable Solution of the Inverse Reflection Problem for a Smoothly Stratified Elastic Medium. *SIAM J. Numer. Anal.* **12** No.3, 421-453, (1981).

[55] W. W. Symes. Erratum: Numerical Stability in an Inverse Scattering Problem. *SIAM J. Numer. Anal.* **18** No. 4, 751-752, (1981).

[56] W. W. Symes. Impedance Profile Inversion via the First Transport Equation. *J. Math. Anal. and Applications* **94**, 435-453, (1983).

[57] H. Triebel. *Höhere Analysis.* Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main (1980).

[58] A. N. Tychonoff, A. A. Samarski. *Differentialgleichungen der Mathematischen Physik.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1959).

[59] V. S. Vladimirov *Equations of Mathematical Physics.* Marcel Dekker, Inc. (1971).

[60] D. Vvedensky *Partial Differential Equations.* Addison-Wesley (1993).

[61] W. Walter *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Springer-Verlag (1986).

[62] J. A. Ware, K. Aki. Continuous and Discrete Inverse-Scattering Problems in a Stratified Elastic Medium. I. Plane Waves at Normal Incidence. *J. Acoust. Soc. Am.* **45** No. 4, 911-921, (1968).

[63] K. H. Weise *Differentialgleichungen.* Verlag Vandenhoeck und Ruprecht (1966).

[64] B. N. Zakhariev, A. A. Suzko *Direct and Inverse Problems.* Springer-Verlag (1990).

[65] Zhu Ben-ren, Jin Mao-yuan. An Explicit Scheme for an Inverse Scattering Problem and its Stability Analysis. *Lecture Notes in Mathematics* **1297**, Springer, 203-209, (1987).

[66] Zhu Ben-ren. Discretized Inverse Scattering Problems and Gel'fand–Levitan Equations. *Northeastern Math. J.* **5** No. 2, 197-202, (1989).

LEBENSLAUF

Persönliche Daten

Name:	Pier–Ribbert
Vorname:	Erwin
Geburtsdatum:	25. März 1966
Geburtsort:	Soest
Familienstand:	ledig
Name der Eltern:	Horst Pier–Ribbert und Gerda Pier–Ribbert, geb. Wiggerich

Schulbildung

Aug. 1972 – Juli 1976	Grundschule Welver
Sept. 1976 – Mai 1985	Freiherr–vom–Stein–Gymnasium, Hamm
13. Mai 1985	Erlangung der allgemeinen Hochschulreife

Studium

WS 1985/86 – SS 1988	Studium der Mathematik mit Nebenfach Informatik an der Westfälischen Wilhelms–Universität Münster
13. Okt. 1987	Vordiplom
WS 1988/89 – SS 1989	Beurlaubung zum Studium an der University of Oxford, Großbritannien
WS 1989	Wiederaufnahme des Studiums in Münster
3. März 1990	Verleihung des Grades „Master of Science“ in Oxford
26. Feb. 1991	Diplom in Mathematik

Berufstätigkeit

seit April 1991	wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Numerische und instrumentelle Mathematik der Westfälischen Wilhelms–Universität Münster

Beginn der Dissertation

April 1991	am Institut für Numerische und instrumentelle Mathematik Betreuer: Professor Dr. Frank Natterer