Numerische Gittererzeugung durch harmonische Abbildungen

Diplomarbeit

Institut für
Numerische und instrumentelle Mathematik
Westfälische Wilhelms-Universität
Münster

vorgelegt von
Gunda Göllmann

14. Juli 1995

Ich versichere, daß ich die hier vorliegende Arbeit selbständig angefertigt und keine weiteren Hilfmittel als die im Literaturverzeichnis aufgeführten Quellen verwendet habe.

Münster, den 14. Juli 1995

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung in die numerische Gittererzeugung

1.1 Einleitung

Partielle Differentialgleichungen spielen in den Naturwissenschaften und auch in der Medizin eine bedeutende Rolle. Viele Vorgänge im Bereich der Strömungsmechanik, wie beispielsweise Wasserströmungsverhalten bei Gezeiten, die Aerodynamik eines Flugzeuges oder die Diffusion eines gelösten Stoffes in einer Flüssigkeit, werden durch Funktionen in mehreren unabhängigen Variablen beschrieben, die partiellen Differentialgleichungen oder Systemen von partiellen Differentialgleichungen genügen. Die Lösungen dieser Differentialgleichungen liefern die gesuchten Funktionen zur Darstellung des physikalischen Vorgangs. Eine Schwierigkeit besteht nun darin, das dem Problem angemessene mathematische Modell, d.h. ein entsprechendes System partieller Differentialgleichungen, aufzustellen. Eine weitere Schwierigkeit stellt die Wahl eines passenden Algorithmus dar, bei dem Rechenzeit und Rechengenauigkeit die gewünschten Größen haben.

Zu den ersten numerischen Methoden zur Lösung von Anfangswert- bzw. Randwertaufgaben zählen die verschiedenen Differenzenverfahren, deren Ursprung bereits zu Beginn dieses Jahrhunderts liegt. Mit der Entwicklung der Computertechnologie in den 50-er Jahren steigerten sich die Anwendungsmöglichkeiten in erheblichem Maße. Erster Schritt vor Anwendung eines dieser Verfahren ist immer die Diskretisierung des Gebietes, auf dem das Problem zu lösen ist, in eine Menge von Punkten, in denen die exakte Lösung der partiellen Differentialgleichung approximiert werden soll. Diese Menge bezeichnet man als *Gitter*, die Schnittpunkte der Gitterlinien bilden die Diskretisierungspunkte. Nun werden die partiellen Ableitungen der Differentialgleichung durch Differenzen ersetzt, die diese hinreichend genau approximieren. Daraus ergeben sich Gleichungssysteme, mit denen zusammen mit den Anfangs- und Randwerten die Lösung in jedem einzelnen Gitterpunkt ermittelbar ist. Verschiedene Arten von Differenzenverfahren werden beispielhaft bzgl. ihres Ablaufes, ihres Konvergenzverhaltens und ihrer Stabilität in [9] diskutiert.

Die Diskretisierung des Gebietes kann nun entweder willkürlich oder strukturiert erfolgen. Wesentlich sinnvoller ist die strukturierte Verteilung der Punkte, da die Anwendung der numerischen Lösungsverfahren damit erleichtert wird und an eventuell problematischen Stellen eine feinere Diskretisierung vorgenommen werden kann. Mit der strukturierten Verteilung der Diskretisierungspunkte wird eine verbesserte Approximation der exakten Lösung, eine schnellere Konvergenz und höhere Stabilität des numerischen Verfahrens erzielt. Je mehr Punkte über dem Gebiet, auf dem das System zu lösen ist, verteilt sind, umso genauer kann die exakte Lösung angenähert werden, aber umso länger ist auch die benötigte Rechnerzeit. Das heißt also, daß die Anzahl der zu verteilenden Punkte in einem gewissen Rahmen beschränkt ist und daher die Lösung nicht immer optimal angenähert wird. Ziel ist es nun, die beschränkte Anzahl der Gitterpunkte über dem Gebiet so zu verteilen, daß eine optimale Annäherung erreicht wird.

In der folgenden Abbildung sind verschiedene Arten der Verteilung zu sehen. Teil a. zeigt die Überdeckung des Gebietes mit einem Gitter, bei dem die inneren Gitterzellen Quadrate von einheitlicher Größe sind. Als innere Gitterzellen werden dabei die Zellen verstanden, die keinen Kontakt zum Rand haben. Es ist zu sehen, daß bei einer solchen Gitterpunktverteilung der Rand nicht immer mit dem Gitter übereinstimmt, so daß die Anwendung numerischer Lösungsverfahren erschwert wird. In Figur b. wurde die Punkteverteilung willkürlich vorgenommen und ist daher im allgemeinen nicht sinnvoll. Für die Formulierung der Randbedingungen ist ein den Rändern angepaßtes Gitter sinnvoll, wie es in Figur c. zu sehen ist. Diese Art der zweidimensionalen numerischen Gittererzeugung ist Inhalt dieser Arbeit. Sie wird exemplarisch im 3. und 4. Kapitel an Hand zweier verwandter Methoden vorgestellt. Beide Methoden basieren auf der Verwendung harmonischer Abbildungen. Als Quellen dienten im wesentlichen Knupp-Steinberg [1], Winslow [2], [3] und Dvinsky [4]. Anhang A und Anhang B enthalten jeweils die Implementierungen beider Methoden. Die Beschreibungen der Programme, sowie beispielhafte bildliche Resultate, sind Bestandteil der jeweiligen Kapitel.

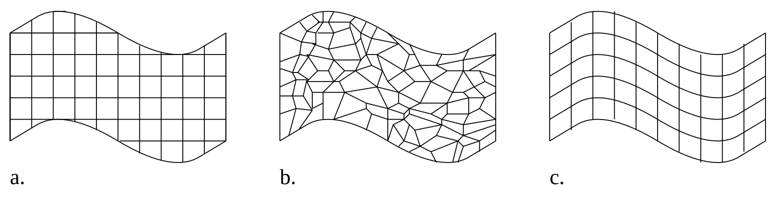


Abbildung 1.1: Verschiedene Gitter auf gleichen Gebiet mit a.) quadratischen, b.) unregelmäßigen, c.) randangepaßten Gitterzellen

Kapitel 2 stellt die mathematische Theorie zur Verfügung, die für die zwei Methoden benötigt wird. Es handelt sich dabei hauptsächlich um differentialgeometrische Begriffe und Zusammenhänge.

Im letzten Kapitel wird am Beispiel der Poisson-Gleichung gezeigt, wie die durch die verschiedenen Methoden berechneten Gitterpunkte zur Lösung der Gleichung angewendet werden können und welche Vorteile sich aus der jeweiligen Methode ergeben.

Weitere Gittererzeugungsmethoden werden in Sengupta, Häuser, Eiseman [14] und in Thompson, Warsi, Mastin [15] beschrieben. Bei [14] handelt es sich um eine Zusammenstellung von Methoden, die 1988 auf einer Tagung zur numerischen Gittererzeugung vorgestellt wurden. Hier werden unter anderem zahlreiche Verfahren zur Konstruktion dreidimensionaler Gitter präsentiert.

1.2 Die Idee der numerischen Gittererzeugung

Aus dem Bereich der numerischen Lösungsverfahren für partielle Differentialgleichungen ist die numerische Gittererzeugung als erstes Lösungswerkzeug nicht mehr wegzudenken. Von geometrisch sehr einfach strukturierten Gebieten, wie z.B. Quadraten, kam man aufgrund natürlich vorgegebener Problemstellungen schnell zu dem Problem der Gittererzeugung auf komplizierteren Gebieten, so daß Ende der 60-er Jahre eine Fülle von Ideen zu diesem Thema erschien. Eine der ersten Arbeiten hierzu wurde bereits 1963 von A.M. Winslow veröffentlicht. Seine Idee wird aufühlrlich im dritten Kapitel beschrieben. Von diesem Zeitpunkt an wurden verschiedene Methoden entwickelt, z.B. solche, die auf Interpolation basieren oder weitere Verfahren, die durch Lösen elliptischer Differentialgleichungen Gitter generieren, wie die in Kapitel 3 und 4 beschriebenen Methoden. Diese Gitter haben dann die Eigenschaft, daß die äußersten Gitterpunkte mit dem Rand zusammenfallen, so daß sich die Formulierung der Randbedingungen nicht mehr problematisch gestaltet.

Fast allen Gittererzeugungsalgorithmen liegt die Unterscheidung zwischen *physikalischem* und *logischem Raum* zu Grunde, mit der Idee, eine Transformation zwischen diesen Räumen zu finden. Diese Idee wird im folgendem Abschnitt erläutert.

1.2.1 Der physikalische und der logische Raum

Gegeben sei ein beliebig geformtes Gebiet P, auf dem ein System partieller Differentialgleichungen gelöst werden soll. Es gibt unendlich viele Koordinatensysteme zur Repräsentation dieses Gebietes.

Gesucht ist ein Koordinatensystem, welches den Rand von P gerade so beschreibt, daß die Koordinaten des Randes als karthesische Koordinaten aufgefaßt den Rand einer einfachen geometrischen Figur L, häufig eines Quadrates, bilden, und die Koordinaten beliebiger Punkte innerhalb von P die karthesischen Koordinaten des Innern der Figur L, meist also des Quadratinnern, beschreiben. Ein krummliniges Koordinatensystem, welches genau diese

Bedingungen erfüllt, ist aber nichts anderes, als eine Transformation des vorgegeben Gebietes P auf diese geometrisch einfache Figur L. Die Tatsache,daß es sich bei P um das durch die physikalische Problemstellung vorgegebene Gebiet handelt, hat ihm den Namen *physikalisches Gebiet* gegeben, während das transformierte Gebiet L wegen seiner geometrischen Einfachheit *logisches Gebiet* genannt wird. Häufig finden sich in der gängigen Literatur zur Gittererzeugung auch die Bezeichnungen *physikalischer* und *logischer Raum*, wobei sie in der Arbeit als die Räume aufgefaßt werden sollen, in denen die entsprechenden Gebiete liegen.

Durch die Transformation des kompliziert geformten Gebietes auf das einfache Gebiet kann das Problem nach entsprechender Transformation der partiellen Differentialgleichung nun auf beispielsweise dem Einheitsquadrat

$$L = \{(\phi, \psi) \in \mathbb{R}^2 |\, 0 \leq \phi, \psi \leq 1\}$$

betrachtet werden, wodurch die Formulierung der Randbedingungen wesentlich vereinfacht werden kann. Da dieses Gebiet dann das Gebiet ist, auf dem das Problem berechnet wird, heißt es auch *Rechnergebiet* bzw. *Rechnerraum.*

Eine weitere sehr bedeutende Forderung an die Transformation vom physikalischen zum logischen Gebiet muß gestellt werden: Sie muß in jedem Fall bijektiv sein, da man die auf dem logischen Gebiet gewählten Gitterpunkte durch die inverse Transformation auf das physikalische Gebiet abbildet. In der folgenden Abbildung sind physikalischer und logischer Raum Teilmengen der Ebene $\mathbb{R}^2$. Es seien ϕ und ψ die karthesischen Koordina-

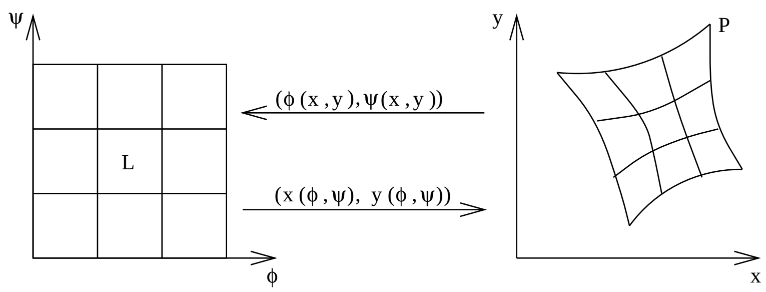


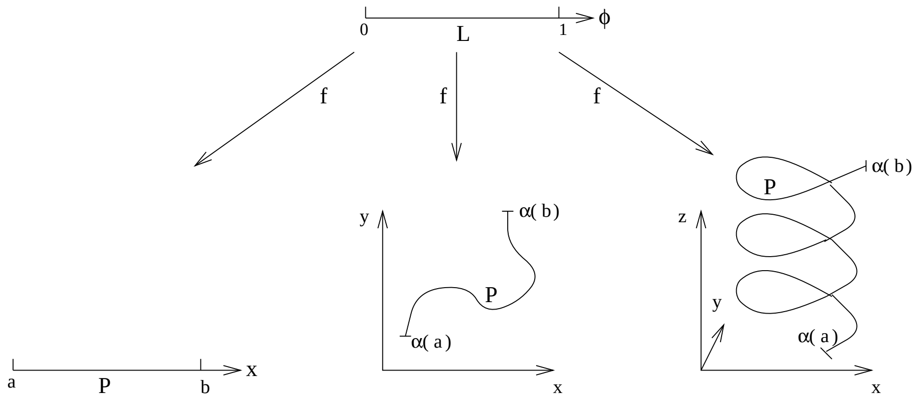
Abbildung 1.2: Transformationen zwischen L und P

ten des logischen und x und y die des physikalischen Raumes, somit also die sich aus diesen beiden Koordinatenachsen zusammensetzende Abbildung $(\phi(x, y), \psi(x, y))$ die Transformation vom physikalischen zum logischen Gebiet und $(x(\phi, \psi), y(\phi, \psi))$ die inverse Transformation. Im weiteren bezeichne P stets physikalisches und L logisches Gebiet. Für viele Anwendungen genügt es, sich auf bis maximal drei Dimensionen zu beschränken, doch auch in höheren Dimensionen spielt die numerische Gittererzeugung eine bedeutende Rolle. Im folgenden werden diese Fälle jedoch nicht betrachtet, der physikalische Raum habe also eine Dimension kleiner oder gleich 3.

Die Dimension und die Art des physikalischen Raumes P bestimmt die Dimension des logischen Raumes L. Aus der Überlegung, welches möglichst niedrig dimensionale logische Gebiet durch „Verbiegen" in das physikalische Gebiet transformiert werden kann, ergeben sich drei mögliche Fälle:

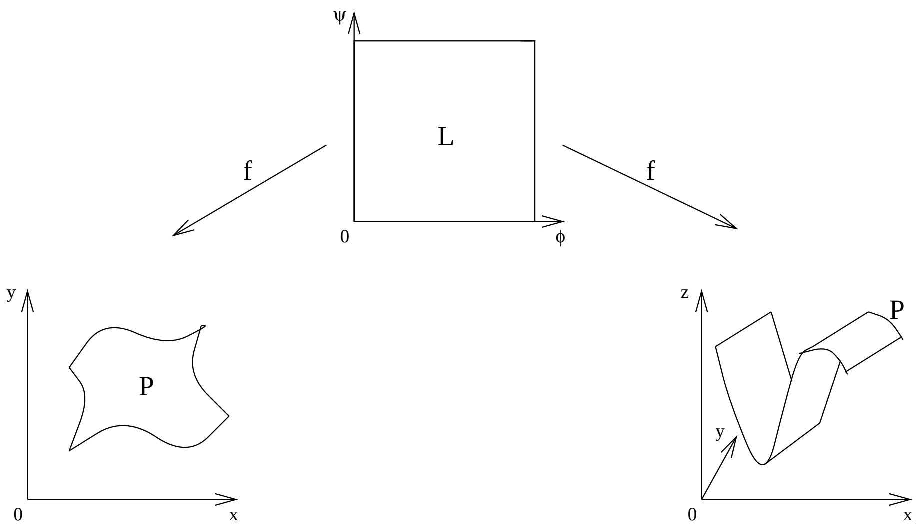
Fall 1: Das physikalische Gebiet ist ein Intervall oder eine Kurve $\alpha(t)$ mit $t \in [a, b]$ in der Ebene bzw. im Raum $\mathbb{R}^3$. Da Kurven gewissermaßen als eindimensional aufzufassen sind, ist als logisches Gebiet ein Intervall, das Einheitsintervall $[0, 1]$, ausreichend. Der logische Raum hat also die Dimension 1 und wird durch die Koordinate ϕ beschrieben. Je nach Dimension des physikalischen Raumes seien x, y und z die dazugehörigen Koordinaten. Die Transformation wird dann jeweils geschrieben als

$$
\begin{array}{l}
f(\phi) = x(\phi) \;\; \text{mit } f(0) = a, f(1) = b \\
\left.\begin{array}{l} f(\phi) = (x(\phi), y(\phi)) \\ f(\phi) = (x(\phi), y(\phi), z(\phi)) \end{array}\right\} \text{mit } f(0) = \alpha(a), f(1) = \alpha(b).
\end{array}
$$



Fall 2: Jetzt betrachtet man Flächen in der Ebene und im $\mathbb{R}^3$ als physikalische Gebiete. Dieser Fall erfordert ein logisches Gebiet in der Ebene, das geometrisch einfach figuriert ist, wie z.B. das Einheitsquadrat. Die Transformationen lauten mit ϕ und ψ als logische Koordinaten

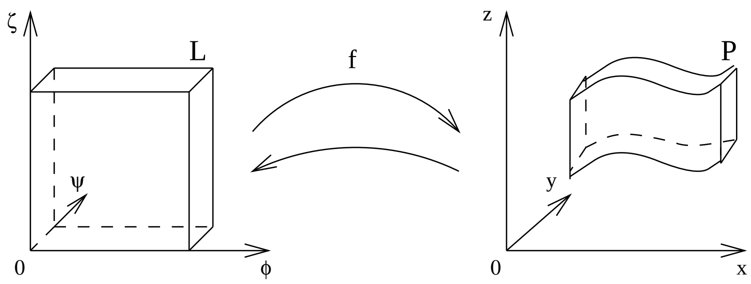
$$
\left.\begin{array}{lcl}
f(\phi, \psi) & = & ((x(\phi, \psi), y(\phi, \psi)) \\
f(\phi, \psi) & = & ((x(\phi, \psi), y(\phi, \psi), z(\phi, \psi))
\end{array}\right\} \text{mit } f|_{\partial L} = \partial P
$$



Fall 3: Im letzten Fall liegen sowohl das physikalische als auch das logisches Gebiet im $\mathbb{R}^3$. Die Transformation

$$f(\phi, \psi, \zeta) = (x(\phi, \psi, \zeta), y(\phi, \psi, \zeta), z(\phi, \psi, \zeta))$$

bildet L auf P ab.



Aus Gründen der Anschaulichkeit beschränkt sich die Arbeit im wesentlichen auf den zweiten Fall, und zwar auf die Konstruktion zweidimensionaler Gitter in der Ebene. Die Fälle, bei denen das physikalische Gebiet von der Dimension kleiner zwei ist, sind vereinfachte Formen des beschriebenen Falles. Man setze dann einfach für alle Punkte (ϕ, ψ) des logischen Raumes $\psi = 0$. Physikalische Gebiete mit Dimension drei werden auf ähnliche Weise wie im Fall 2 behandelt. Detailliertere Betrachtungen zur dreidimensionalen Gittergenerierung entnehme man [14].

Auf dem logischen Gebiet ist es nun einfach, ein Gitter mit einheitlichen Abständen und orthogonalen Winkeln zu wählen. Dieses Gitter wird durch die gewählte Transformation auf das physikalische Gebiet P abgebildet und konstruiert somit ein Gitter auf P. Die Wahl der Transformation ist für das Aussehen des Gitters innerhalb von P verantwortlich und stellt daher einen wichtigen Aspekt in dieser Arbeit dar. Es wird sich zeigen, daß sich insbesondere harmonische Abbildungen für den Zweck einer randangepaßten Gitterkonstruktion in P eignen.

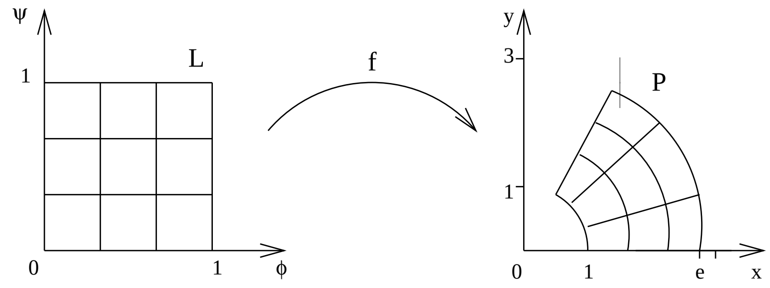


Abbildung 1.3: Konforme Transformation auf einen Kreisringsektor

Unter zusätzlichen Bedingungen – vgl. Kapitel 3 – kann bei der Erzeugung der zu bestimmenden Abbildungen die Eigenschaft der Winkeltreue für die Transformationsabbildung erzielt werden. Der Riemannsche Abbildungssatz liefert eine Aussage über die Existenz von konformen Abbildungen zwischen zwei Gebieten. Näheres dazu wird im 3. Kapitel behandelt. Es kann dann beispielsweise erreicht werden, daß ein orthogonales Gitter auf dem logischen Gebiet entsprechend ein orthogonales Gitter auf dem physikalischen Gebiet nach sich zieht, wie Abbildung (1.3) zeigt.

Im folgenden gelte die

Vereinbarung:
Unter dem Begriff der Transformation soll in dieser Arbeit stets ein Homöomorphismus $f : L \mapsto P$, bzw. $f : P \to L$, verstanden werden, der sich aus den beiden skalaren Feldern $x(\phi, \psi)$ und $y(\phi, \psi)$, bzw. $\phi(x, y)$ und $\psi(x, y)$, zusammensetzt und folgende Eigenschaften erfüllt:

$$
\begin{aligned}
f : (\phi, \psi) &\mapsto (x(\phi, \psi), y(\phi, \psi)), \\
f(\partial L) &= \partial P
\end{aligned}
$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
f : (x, y) &\mapsto (\phi(x, y), \psi(x, y)), \\
f(\partial P) &= \partial L
\end{aligned}
$$

Beachte, daß die Eigenschaft „f bijektiv“ beispielsweise aus dem Nichtverschwinden der Jacobideterminante folgt, also aus

$$\phi_x \psi_y - \psi_x \phi_y \neq 0.$$

Zum Verständnis des Prinzips der numerischen Gittererzeugung dient Abschnitt 1.3 mit einfachen Beispielen.

1.2.2 Adaptive Gittererzeugung

Die Art der Verteilung der Gitterpunkte auf dem physikalischen Gebiet hat einen großen Einfluß auf die Approximation der exakten Lösung. Die Diskretisierung von P kann so gestaltet werden, daß sie möglichst effizient wirkt, also die exakte Lösung sehr gut angenähert wird. Die Gitterpunktverteilung hängt wiederum von der gewählten Transformation ab, somit ist die Wahl der Transformation vom logischen auf das physikalische Gebiet von großer Bedeutung.

Eine Verbesserung für die Randbedingungen hat man bereits durch die Wahl einer randanpassenden Abbildung vom logischen auf das physikalische Gebiet erreicht, nun muß die Aufmerksamkeit noch auf die innere Gitterpunktverteilung gelenkt werden. Das Gitter soll durch die Transformation Gegebenheiten des Gebietes oder dem zu lösenden Differentialgleichungssystem angepaßt sein. Diese Art der Gittergenerierung bezeichnet man als *Adaptive Gittererzeugung*. Man unterscheidet dabei häufig zwei Formen: Die geometrische und die physikalische Anpassung.

Geometrische Anpassung bezeichnet die Anpassung des Gitters an die geometrischen Gegebenheiten des Gebietes, sowie die Verdichtung bzw. Verzerrung, entlang einer vorgegebenen Kurve auf dem Gebiet, an der die gesuchte Lösung beispielsweise eine starke Steigung hat. Eine Erweiterung stellt die physikalische Anpassung dar.

Bei der physikalischen Anpassung wird iterativ nach einem Gitter gesucht, das den Lösungseigenschaften angepaßt ist. So ist zum Beispiel eine Verfeinerung des Gitters in Regionen des Gebietes mit betragsmäßig hohem Gradienten der Lösung, wie bei Schockwellen, zur besseren Lösungsannäherung sinnvoll. Dies setzt eine gewisse Kenntnis der zu berechnenden Lösung voraus, jedoch sind in der Regel derartige Eigenschaften nicht im Detail a priori bekannt.

Die Idee der physikalischen Anpassung wird daher schrittweise verwirklicht, d.h. zunächst wird die Lösung des Differentialgleichungssystems auf einem Anfangsgitter berechnet. Dieser erste Lösungsansatz zeigt grob die Eigenschaften der gesuchten Funktion, anhand derer das Gitter modifiziert werden kann. Die Anwendung des modifizierten Gitters liefert eine bessere Annäherung der Lösung. So fährt man fort und findet nach genügend vielen Schritten eine sehr gute Approximation der exakten Lösung. Bei der auf dieser Weise entstehenden Gitterpunktbewegung sollten jedoch bestimmte Regeln beachtet werden: Die Randanpassung muß weiterhin gewährleistet sein, d.h. die Randgitterpunkte sollten sich nur auf dem Rand bewegen können, das Gitter darf nicht „zu schief“ werden, d.h. die Winkel der Gitterkurven in ihren Schnittpunkten sollten nicht zu klein werden, und die Gleichmäßigkeit sollte erhalten bleiben. Letzteres bedeutet, daß die Bewegung eines Punktes automatisch die Bewegung der umliegenden Punkte nach sich ziehen muß, d.h. die Punkte dürfen sich nicht unabhängig voneinander bewegen. Mit der Beachtung dieser Regeln schließt man aus, daß der Fehler der numerischen

Lösung trotz der Anpassung wieder größer wird.

Die adaptive Gittererzeugung ist vielversprechend für gute Approximationen von komplexen Strömungsproblemen. Sie leistet einen wesenlichen Beitrag zur Verbesserung der Vorhersagbarkeit von detaillierten Strukturen, wie zum Beispiel die eines Strömungsfeldes bei einem Flugzeug. Zusätzlich kann durch die Effizienz der Gitter Rechenzeit eingespart werden, da man bei geschickter Anpassung unter Umständen mit weniger Gitterpunkten genauere Ergebnisse erhalten kann. Dieses bringt dann gleichzeitig eine Einsparung von Speicherplatz mit sich. Das 4. Kapitel zeigt einen Algorithmus zur geometrischen Anpassung eines Gitters. In [10] wird die Erweiterung des Verfahrens zur Generierung physikalisch angepaßter Gitter unter Zuhilfenahme sogenannter charakteristischer Funktionen vorgestellt.

Das folgende eindimensionale Beispiel macht deutlich, wie eine geeignete Gitterpunktwahl das numerische Lösen einer Differentialgleichung vereinfachen und verbessern kann.

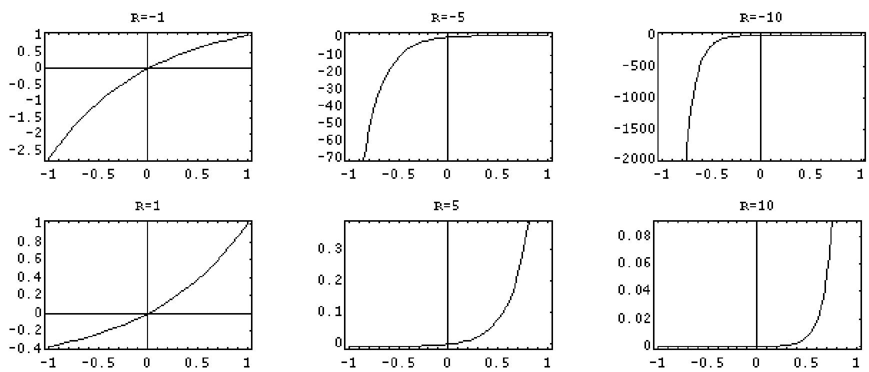
Auf dem Intervall $[0, 1]$ soll die eindimensionale Konvektions-Diffusionsgleichung aus der Strömungsmechanik

$$u_{xx} + Ru_x = 0 \tag{1.1}$$

mit $R \in \mathbb{R}$ und den Randbedingungen $u(0) = 0$ und $u(1) = 1$ betrachtet werden. Die exakte Lösung dieser stationären Gleichung lautet

$$u(x) = \frac{e^{-Rx} - 1}{e^{-R} - 1} \tag{1.2}$$

und beschreibt die Konzentration eines gelösten Stoffes bei x, der diffundiert und gleichzeitig durch einen Strom mit konstanter Geschwindigkeit R getragen wird. Für wachsendes $|R|$ entstehen Probleme an einem der beiden Ränder, also bei 0 oder 1. Die folgenden Abbildungen zeigen $u(x)$ für variierende R.



Man erkennt, daß sich u für betragsmäßig große R einer Treppenfunktion nähert. Diese bei entsprechendem R also problematische Konvektions-Diffusionsgleichung gilt es nun numerisch zu lösen. Da man nun mit Sicherheit Schwierigkeiten an einem der beiden Rändern voraussagen kann, entwickelt man sich mit Hilfe einer Transformation ein Gitter, welches das numerische Lösen wesentlich vereinfacht. Dazu transformiert man die Differentialgleichung mit Hilfe der Koordinatenfunktion

$$\phi \quad \mapsto \quad x(\phi),$$

die das Intervall $[0,1]$ auf das neue Intervall $[1,N]$, mit $N \geq 2$, abbildet. Diese Transformation soll Ränder auf Ränder abbilden, d.h. es gelte $x(1)=0$ und $x(N)=1$. Aus $u(x(\phi)) = \hat{u}(\phi)$ folgt

$$\begin{aligned} \hat{u}_\phi &= u_x x_\phi \\ \text{und} \qquad \hat{u}_{\phi\phi} &= u_{xx} x_\phi^2 + u_x x_{\phi\phi}. \end{aligned}$$

Jeweils umgeformt ergeben sich

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\hat{u}_\phi}{x_\phi}, \\ u_{xx} &= \frac{\hat{u}_{\phi\phi} - u_x x_{\phi\phi}}{x_\phi^2} \\ &= \frac{\hat{u}_{\phi\phi}}{x_\phi^2} - \frac{\hat{u}_\phi x_{\phi\phi}}{x_\phi^3}. \end{aligned}$$

Setzt man diese partiellen Ableitungen in die Konvektions-Diffusionsgleichung ein, so erhält man

$$\begin{aligned} u_{xx} + R u_x &= \tfrac{\hat{u}_{\phi\phi}}{x_\phi^2} - \tfrac{\hat{u}_\phi}{x_\phi^3} x_{\phi\phi} + R \tfrac{\hat{u}_\phi}{x_\phi} \\ &= \tfrac{\hat{u}_{\phi\phi}}{x_\phi^2} + \tfrac{1}{x_\phi}\left(R - \tfrac{x_{\phi\phi}}{x_\phi^2}\right)\hat{u}_\phi \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

mit den Randbedingungen $\hat{u}(\phi = 1) = 0$ und $\hat{u}(\phi = N) = 1$ für $\phi \in [1,N]$, wobei $N \geq 2$. Dieses transformierte Differentialgleichungssystem ist offensichtlich sehr leicht zu lösen, falls

$$R - \frac{x_{\phi\phi}}{x_\phi^2} = 0,$$

oder umgeformt

$$x_{\phi\phi} - R x_\phi^2 = 0 \tag{1.4}$$

gilt, mit den Randbedingungen $x(1) = 0$ und $x(N) = 1$. Die Lösung von (1.4) ergibt daher ein optimales Gitter für die transformierte Konvektions-Diffusionsgleichung (1.3). Die Lösung lautet

$$x(\phi) = -\frac{1}{R} \ln \frac{e^{-R} - N - \phi \cdot e^{-R} + \phi}{1 - N} \qquad \text{für } \phi \in [1,N].$$

Nun löst man die transformierte Gleichung (1.3) mit den neu berechneten Gitterpunkten, mit Hilfe derer sich die Gleichung auf

$$\frac{\hat{u}_{\phi\phi}}{x_\phi^2} = 0 \tag{1.5}$$

reduziert. Die mittels zentraler Differenzen bestimmbare numerische Lösung dieser Differentialgleichung ist dann die exakte Lösung.

Insgesamt wurde also die Konvektions-Diffusionsgleichung mit der allgemeinen Koordinatentransformation $\phi(x)$ transformiert und für diese neue Differentialgleichung zum numerischen Lösen ein Gitter gewählt, das die zu lösende Gleichung (1.3) auf eine leicht zu lösende Gleichung (1.5) reduziert und die exakte Lösung in den gewählten Gitterpunkten unter wesentlich einfacheren Berechnungen liefert, als es bei der Ausgangsgleichung (1.1) der Fall wäre. Das Problem, optimale Gitterpunkte zu bestimmen, führte auf das Lösen einer Differentialgleichung zurück. Ein solches Vorgehen faßt man unter die Methoden zur Gittererzeugung mittels Differentialgleichungen, zu denen auch die in Kapitel 3 und 4 aufgeführten Methoden zählen. Außer den Differentialgleichungsmethoden gibt es noch algebraische, variationelle und natürlich Hand- und Elementarmethoden zur numerischen Generierung von Gittern.

1.3 Elementare Transformationsbeispiele

Betrachtet werden in diesem Abschnitt drei sehr einfache gleich funktionierende Algorithmen zur Gittererzeugung auf Gebieten, deren Ränder bzw. Randsegmente durch lineare Abbildungen dargestellt werden können. Man kann solche physikalischen Gebiete als „lineare Verzerrungen“ ihrer logischen Gebiete, hier eines Intervalls, eines Quadrates und eines Würfels, betrachten. Auf diesen Gebieten sollen nun einfache Gitter erzeugt werden, die den Rändern angepaßt sind.

Handelt es sich bei dem physikalischen Gebiet um ein Intervall $[a, b]$, so bedeutet die Erzeugung eines derartigen Gitters nichts anderes, als die Verteilung der Gitterpunkte ϕ des logischen Gebietes $[0, 1]$ mittels der linearen Abbildung

$$x(\phi) = (1 - \phi)a + \phi b$$

auf dem physikalischen Intervall $[a, b]$. Ist beispielsweise das physikalische Gebiet durch $P = [2, 10]$ gegeben, so lautet die Transformation

$$x(\phi) = 8\phi + 2.$$

Sie streckt die Abstände der Gitterpunkte von L auf die Länge des physikalischen Gebiets P (vgl. Abb. 1.4). Im zweidimensionalen ist das physikalische

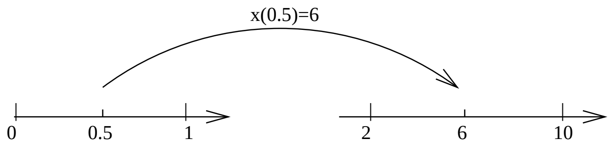


Abbildung 1.4: Lineare Abbildung von L nach P

Gebiet P ein Viereck mit den Ecken $\mathbf{x}_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$, wobei $i, j = 0, 1$. Die Transformation

$$\mathbf{x}(\phi, \psi) = (x(\phi, \psi), y(\phi, \psi)) \tag{1.6}$$

mit

$$\begin{aligned} x(\phi, \psi) &= (1-\phi)(1-\psi)x_{00} + (1-\phi)\psi x_{01} \\ &\quad +\phi(1-\psi)x_{10} + \phi\psi x_{11}, \\ y(\phi, \psi) &= (1-\phi)(1-\psi)y_{00} + (1-\phi)\psi y_{01} \\ &\quad +\phi(1-\psi)y_{10} + \phi\psi y_{11} \end{aligned} \tag{1.7}$$

erzeugt die Gitterlinien, indem eine der Variablen konstant und die andere die Werte des Intervalls $[0, 1]$ annimmt. In Abb. (1.5) z.B. wurde die dick eingezeichnete Linie mit $\phi = 0.5$ und $\psi \in [0, 1]$ eingesetzt in folgende Transformation von L auf P erzeugt:

$$(x, y) = (1 + \psi + \phi - 3\phi\psi, 4\psi + \phi - 3\phi\psi).$$

Man erhält diese Abbildung durch Einsetzen der Koordinaten der Eckpunkte des physikalischen Gebietes aus Abb. (1.5) in die allgemeine bilineare Gleichung (1.6), bzw. (1.7). Eine der linearen und bilinearen entsprechende Ab-

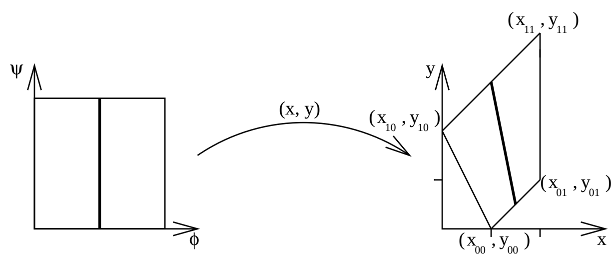


Abbildung 1.5: Bilineare Transformation von L auf P

bildung im Dreidimensionalen ist die trilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\phi, \psi, \zeta) &= ((1-\phi)(1-\psi)(1-\zeta)\mathbf{x}_{000} + (1-\phi)(1-\psi)\zeta\mathbf{x}_{001} \\ &\quad +(1-\phi)(1-\zeta)\psi\mathbf{x}_{010} + (1-\psi)(1-\zeta)\phi\mathbf{x}_{100} \\ &\quad +(1-\phi)\psi\zeta\mathbf{x}_{011} + (1-\psi)\phi\zeta\mathbf{x}_{101} \\ &\quad +(1-\zeta)\phi\psi\mathbf{x}_{110} + \phi\psi\zeta\mathbf{x}_{111}), \end{aligned}$$

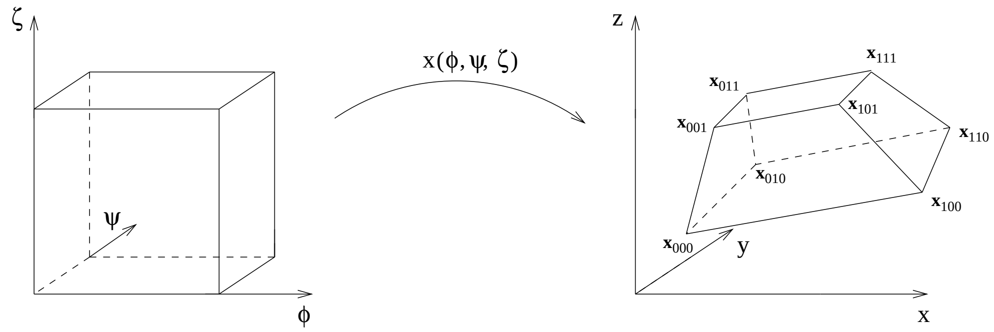


Abbildung 1.6: Trilineare Abbildung von L auf P

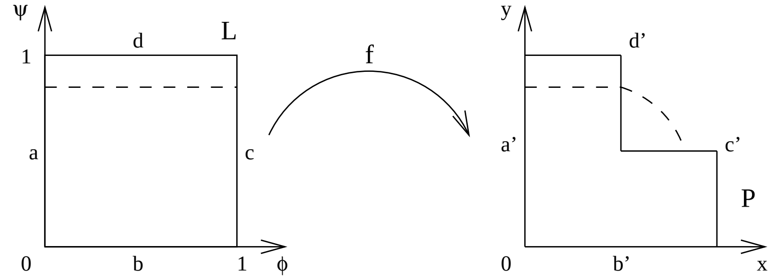
wobei $\mathbf{x}_{ijk} = (x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$, mit $i, j, k \in \{0, 1\}$, die Eckpunkte des verzerrten Würfels beschreiben.

Diese Art der Gittererzeugung ist eine der trivialsten Methoden, die für die Praxis jedoch nur selten ausreicht, aber das Prinzip vieler Gittererzeugungsmethoden deutlich macht. Kapitel 3 zeigt eine Methode zur Gittererzeugung auf krummlinig berandeten Gebieten, die im vierten Kapitel zu einer Methode erweitert wird, die das Gitter entlang von Kurven verfeinern kann.

1.4 Spillover

Auf der Suche nach einer Abbildung, die ein angepaßtes Gitter auf dem vorgegebenen Gebiet erzeugt, stößt man auf ein großes Problem der numerischen Gittererzeugung, dem sogenannten *Spillover*. Dieses Problem existiert bei physikalischen Gebieten, die nicht konvex geformt sind. Wird eine Abbildung auf ein nicht-konvexes Gebiet gesucht, die die Ränder homöomorph auf Ränder abbildet, so ist nicht garantiert, daß die Abbildung das Innere von L auf das Innere von P abbildet. Für eine Gitterlinie von L besteht damit die Möglichkeit, als Gitterlinien außerhalb von P abgebildet zu werden.

Das folgendes Bild zeigt diesen unerwünschten Effekt und erklärt seine Bezeichnung *Spillover*. Die einander entsprechenden Ränder sind mit den gleichen Buchstaben gekennzeichnet, die gestrichelt Linie in L entspricht der Gestrichelten in P.



Man erkennt, daß die Randpunkte zwar auf Randpunkte aus ∂P abgebildet werden, aber das Innere von L nicht vollständig auf das Innere von P abgebildet wird.

Diese Arbeit zeigt unter anderem, wie *Spillover*-erzeugende Abbildungen ausgeschlossen werden können, bzw. daß insbesondere harmonische Abbildungen als Transformationen geeignet sind. Wichtig ist in diesem Zusammenhang das Theorem von Rado, das mit Beweis im dritten Kapitel behandelt wird.

Kapitel 2

Eigenschaften harmonischer Abbildungen und Elemente der Differentialgeometrie

Zur numerischen Erzeugung von Gittern sind zahlreiche Methoden entwickelt worden, die auf unterschiedlichsten Ideen basieren und auf viele verschiedene Bereiche der Mathematik zurückgreifen, wie beispielsweise die algebraischen Methoden, oder die Methoden, die durch Lösen elliptischer partieller Differentialgleichungen Gittergeneration ermöglichen. Zu dieser letzten Gruppe zählen die beiden in dieser Arbeit beschriebenen verwandten Methoden. Die bereits sehr früh entwickelte Methode von Winslow basiert auf Grundeigenschaften harmonischer Abbildungen. Dvinsky [4] hat diese Methode erweitert, indem er sich einige Grundbegriffe und Zusammenhänge der Vektorrechnung und Differentialgeometrie zu Nutzen gemacht hat.

In diesem Kapitel soll nun die zum Verständnis von Kapitel 3 und 4 notwendige mathematische Theorie zur Verfügung gestellt werden. Dabei handelt es sich hauptsächlich um Differentialrechnung verbunden mit Vektorgeometrie, daher die Zusammenfassung unter dem Begriff Differentialgeometrie. Ziel war es, dieses Kapitel so kurz wie möglich zu halten, ohne dabei die Darstellung der definierten Begriffe in dem Gesamtzusammenhang der Differentialgeometrie zu vernachlässigen. Zunächst werden jedoch in einem kurzen Abschnitt die wichtigsten Eigenschaften harmonischer Abbildungen zusammengefaßt.

Dem Kapitel liegen im wesentlichen do Carmo [5], Klingenberg [7] und Schöne [8] zu Grunde. In Gray [6] werden Grundlagen der Differentialgeometrie mittels *Mathematica*[1] anschaulich gemacht und gleichzeitig der Umgang mit *Mathematica* eingeführt.

[1]Mathematisches Softwarepaket der Wolfram-Research Inc., das u.a. graphische Datenvisualisierung ermöglicht

2.1 Eigenschaften harmonischer Abbildungen

Definition 2.1 *Eine Funktion $h : U \to \mathbb{C}$, mit $U \subset \mathbb{R}^n$, U offen, heißt harmonisch, wenn sie zweimal stetig differenzierbar ist und der Laplace-Gleichung*

$$\Delta h = 0$$

genügt.

Betrachtet man nun die Höhenlinie einer harmonischen Funktion ϕ, so erkennt man aufgrund der Differenzierbarkeitsbedingung, die damit an ϕ gestellt ist, daß die Höhenlinien von ϕ stetig und glatt sind. Diese Eigenschaft nutzen Methoden der folgenden Kapitel aus, indem sie Gitterlinien durch Höhenlinien solcher Funktionen konstruieren.

Darüber hinaus gilt für harmonische Abbildungen das Minimum- bzw. Maximumprinzip, wie es z.B. aus der Funktionentheorie bekannt ist.

Satz 2.1 (Minimum- und Maximumprinzip)

1. *Es sei G ein Gebiet und $h : G \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion mit einem lokalen Minimum oder Maximum in einem Punkt $z_0 \in G$. Dann ist $f(z) \equiv f(z_0)$ für alle $z \in G$.*

2. *Sei $h : G \to \mathbb{R}$ auf G harmonisch und auf $G \cup \partial G$ eine stetige Funktion, so nimmt h sein Maximum und Minimum auf dem Rand ∂G an.*

Auf $G \subset \mathbb{R}^2$ kann man sich daher eine harmonische Funktion vorstellen als eine im Prinzip unebene streng monotone Fläche, d.h. es existiert kein lokales Maximum im Innern des Gebietes, es sei denn, die Funktion ist konstant.

Die Höhenlinie einer harmonischen Funktion, die auf $G \subset \partial G$ stetig ist, kann demnach keine geschlossene Kurve oder eine sich selbst schneidene Kurve sein, weil das Minimum und Maximum auf dem Rand und nicht im Innern angenommen werden.

Weil die Fläche streng monoton ist, kann der Fall einer Niveaufläche als Höhenlinie, sowie mehere Linien zur gleichen Höhe gehörend nicht auftreten.

2.2 Produkte der Vektorgeometrie

In der Differentialgeometrie werden unter anderem Flächen und Kurven und deren Tangentialflächen bzw. Normalen betrachtet. Diese Betrachtungen machen es unumgänglich, mit den Produkten der Vektorgeometrie zu arbeiten, da sie vielen geometrischen Konstruktionen zur Beschreibung dienen. Dabei unterscheidet man Skalar- und Vektorprodukt.

Definition 2.2 *Sei $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$. Die euklidische Norm (Länge) von $\mathbf{u}$ ist definiert durch $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$. Sei $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ein weiterer*

Vektor aus $\mathbb{R}^3$ *und* θ *der Winkel zwischen den Vektoren* $\mathbf{u}$ *und* $\mathbf{v}$ *mit* $0 \leq \theta \leq \pi$*. Dann heißt*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta$$

Skalar- oder natürliches inneres Produkt von $\mathbf{u}$ *und* $\mathbf{v}$*. Man schreibt häufig das Skalarprodukt in der Klammerdarstellung* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$*.*

Es gelten folgende leicht nachzuweisende Eigenschaften:

- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$,
- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}$ orthogonal zu $\mathbf{v}$,
- $\lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \lambda\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \lambda\mathbf{v} \rangle$,
- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$,
- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$, wobei θ wie oben definiert ist.

Das folgende Produkt hat eine im weiteren sehr nützliche geometrische Bedeutung.

Definition 2.3 *Es seien* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$*. Der eindeutig bestimmte Vektor* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$*, gegeben durch*

$$\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \qquad \text{für alle} \quad w \in \mathbb{R}^3,$$

heißt Vektor- oder Kreuzprodukt.

Bemerkung

1. Das Kreuzprodukt läßt sich schreiben als

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1),$$

denn mit den Einheitsvektoren e_i gilt $\mathbf{u} = \sum u_ie_i, \mathbf{v} = \sum v_ie_i, \mathbf{w} = \sum w_ie_i$ mit $i = 1, 2, 3$, also ist

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Laut Definition des Vektorproduktes gilt

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \forall w \in \mathbb{R}^3 \\ &= \sum_{i=1}^{3} w_i \cdot \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{e_i}) \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{3} \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{e_i}) \cdot \mathbf{e_i}, \mathbf{w} \right\rangle. \end{aligned}$$

Daraus folgt für das Kreuzprodukt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \sum_{i=1}^{3} \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{e_i})\mathbf{e_i} \\
&= \mathbf{e_1} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \mathbf{e_2} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \mathbf{e_3} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\
&= (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)
\end{aligned}
$$

2. Es gelten folgende Eigenschaften, die sich durch einfaches Nachrechnen und aus Determinanteneigenschaften ergeben:

   - $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$,
   - $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{u}, \mathbf{v}$ sind linear unabhängig,
   - $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0$ und $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$, d.h. sind $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ linear unabhängig, so ist das Kreuzprodukt von $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ ein zur $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$-Ebene orthogonaler Vektor,
   - $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2$.

   Die geometrische Deutung der Norm der Kreuzproduktes für $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ linear unabhängig ergibt sich durch

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \\
&= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - \cos^2\theta \\
&= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2(1 - \cos^2\theta) \\
&= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 \cdot \sin^2\theta \\
&= A^2,
\end{aligned}
$$

   wobei A der Flächeninhalt des durch $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ aufgespannten Parallelogramms ist.

2.3 Kurven

Ein Hauptschwerpunkt der Differentialgeometrie ist die Untersuchung von Flächen bezüglich Differenzierbarkeit und geometrischen Eigenschaften, wie Krümmungen, Torsionen etc.. Dabei kann eine Fläche aufgefaßt werden als zweidimensionales Analogon einer Kurve, wie man sie aus der Analysis kennt. Da wir die hier dargestellte Differentialgeometrie für die Gittererzeugung auf Gebieten der Dimension kleiner oder gleich drei nutzbar machen wollen, sind die folgenden Definitionen auf den $\mathbb{R}^3$ beschränkt. Sie gelten entsprechend erweitert auch in höheren Dimensionen.

2.3.1 Definitionen

Kurven können als Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ verstanden werden, die durch differenzierbare Funktionen charakterisiert sind.

Definition 2.4 *Es sei $I = (a, b)$ ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$. Dabei sind die Fälle $a = -\infty$ und $b = \infty$ zugelassen. Durch $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ sei eine differenzierbare Abbildung mit $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ gegeben, d.h. $x(t), y(t)$ und $z(t)$ sind differenzierbar.*
Eine solche Abbildung α heißt parametrisierte differenzierbare Kurve mit dem Parameter t. Der Vektor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ heißt Tangentenvektor der Kurve α bei t.

Ist nun eine parametrisierte differenzierbare Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eines offenen Intervalls I gegeben, so existiert für alle $t_0 \in I$ mit $\alpha'(t_0) \neq 0$ eine wohldefinierte Gerade:

Definition 2.5

1. *Die Gerade, die durch $\alpha(t_0)$ geht und den Tangentenvektor $\alpha'(t_0)$ enthält, heißt Tangente an α bei t_0 und wird mit $T^{\alpha}_{t_0}(t)$ bezeichnet.*

2. *Gilt $\alpha'(t) \neq 0$ für alle t, so heißt α regulär, d.h. die Kurve hat in jedem Punkt von I eine Tangente.*

Das Bild $\alpha(I)$ heißt Spur von α. Folgende Abbildungen zeigen die Spuren zweier regulärer parametrisierter differenzierbarer Kurven in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ mit der Tangente im Punkt $\alpha(t_0)$.

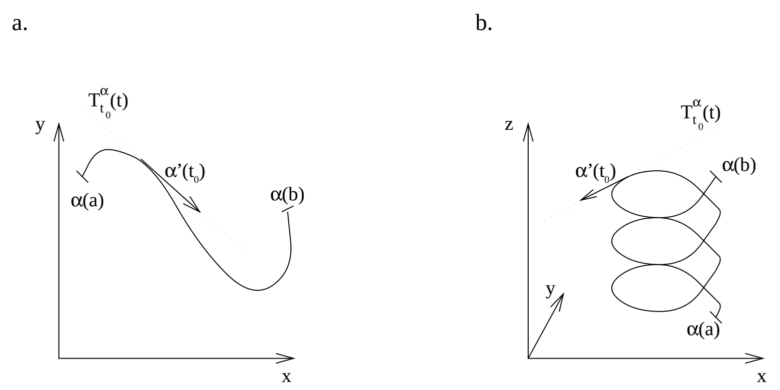


Abbildung 2.1: Spuren von Kurven a.) planar, b.) im $\mathbb{R}^3$ (Helix)

2.3.2 Die Bogenlänge

In diesem Abschnitt soll in möglichst kurzer Form gezeigt werden, welche Messung die Bogenlänge durchführt bzw. wie sich ihre Formel herleitet. Sie spielt eine entscheidende Rolle für die erste Fundamentalform, die in der Methode von Dvinsky bedeutsam ist und in einem folgenden Abschnitt behandelt wird.

Betrachtet man zwei Punkte $\alpha(\tau)$ und $\alpha(\tau + \Delta\tau)$ einer parametrisierten differenzierbaren regulären Kurve α, so beschreibt

$$\Delta\alpha(\tau) := \alpha(\tau + \Delta\tau) - \alpha(\tau)$$

den Sekantenvektor zwischen diesen Punkten. Mit Hilfe des Sekantenvektors läßt sich der Tangentenvektor in τ auf übliche Weise herleiten:

$$\begin{aligned} \alpha'(\tau) &= \frac{d\alpha}{dt}(\tau) \\ &= \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta\alpha(\tau)}{\Delta\tau}. \end{aligned}$$

Wegen dieser Gleichung gilt

$$\Delta\alpha(\tau) \approx \alpha'(\tau)\,\Delta\tau. \tag{2.1}$$

Nun kann die Länge Δs der Spur zwischen $\alpha(\tau)$ und $\alpha(\tau+\Delta\tau)$ durch $\|\Delta\alpha(\tau)\|$ und mittels der oberen Beziehungen folgendermaßen angenähert werden:

$$\begin{aligned} \Delta s &\approx \|\,\alpha(\tau + \Delta\tau) - \alpha(\tau)\,\| \\ &= \|\,\Delta\alpha(\tau)\,\| \\ &\approx \|\,\alpha'(\tau)\,\| \cdot |\Delta\tau| \\ &= \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2 + (z'(\tau))^2}\,\Delta\tau. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich dann die Definition der Bogenlänge.

Definition 2.6 *Die Länge einer parametrisierten differenzierbaren regulären Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ von einem Punkt $\alpha(t_1)$ bis zum Punkt $\alpha(t_2)$ mit $t_1 \leq t_2$, $t_1,\ t_2 \in I$ wird durch*

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(t)\| dt$$

gemessen und heißt Bogenlänge der Kurve α zwischen t_1 und t_2.

Es gilt

$$\alpha'(\tau) \approx \frac{\Delta\alpha(\tau)}{\Delta\tau},$$

also

$$\|\alpha'(\tau)\| \approx \frac{\|\Delta\alpha(\tau)\|}{\Delta\tau}.$$

Durch $\|\alpha'(\tau)\|$ wird also das Verhältnis der betrachteten Intervallänge und der Länge des Bildes des Intervalls beschrieben. Haben die Längen die gleichen Größen, so ist $\|\alpha'(\tau)\| = 1$, d.h. die Kurve α ist nach der Bogenlänge parametrisiert, und es gilt

$$s(\tau) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|\alpha'(\tau)\| d\tau = \tau.$$

2.4 Reguläre Flächen

Für die weiteren Betrachtungen ist der Begriff der regulären Fläche von zentraler Bedeutung. Die Übertragung der üblichen, aus der Differentialrechnung bekannten Begriffe auf in einem gewissen Sinne glatte, zwei-dimensionale Mengen – den regulären Flächen – ist ein bedeutender Bestandteil der Differentialgeometrie.

Anschaulich wird eine derartige Menge durch eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ ohne Ecken und Kanten repräsentiert, die mit Hilfe einer Abbildung vom $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^3$ dargestellt werden kann. Solche Flächen bezeichnet man als *reguläre Flächen* und definiert sie wie folgt.

Definition 2.7 *S sei eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ für die gilt:*
Für alle $p \in S$ existiert eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^3$ und eine Abbildung $\mathbf{x} : U \to V \cap S$ einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ auf $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ mit

1. *$\mathbf{x}$ ist differenzierbar, also für $\mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ mit $(u,v) \in U$ haben $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ stetige partielle Ableitungen beliebiger Ordnung in U.*

2. *$\mathbf{x} : U \to V \cap S$ ist ein Homöomorphismus; also hat $\mathbf{x}$ eine stetige Inverse $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \to U$, so daß $\mathbf{x}^{-1}$ die Einschränkung einer stetigen Abbildung $F : W \to \mathbb{R}^2$ ist, wobei $W \subset \mathbb{R}^3$ die Menge $V \cap S$ enthält.*

3. *Für alle $q \in U$ ist die lineare Abbildung, die durch die in $q \in U$ ausgewertete Jacobi-Matrix von $\mathbf{x}$ gegeben ist und als Differential*

$$d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

bezeichnet wird, injektiv, d.h. die Spalten der Matrix

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig. Die Matrix hat daher vollen Spaltenrang, nämlich Rang 2 und das Bild $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$ bildet eine Ebene, die durch die Basis $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ charakterisiert ist.

Eine solche Menge S nennt man eine reguläre Fläche. Die Abbildung $\mathbf{x}$ heißt Parametrisierung oder lokales Koordinatensystem in einer Umgebung von p.

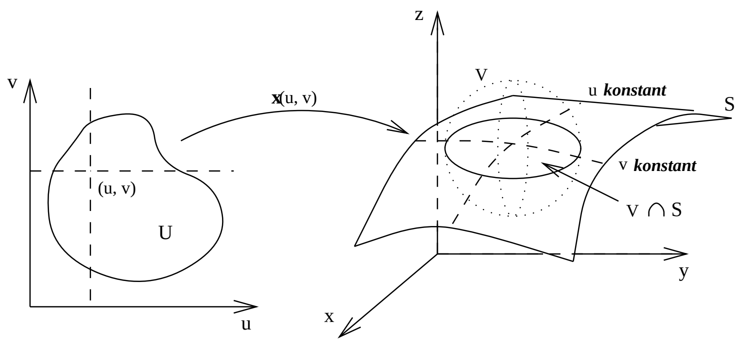


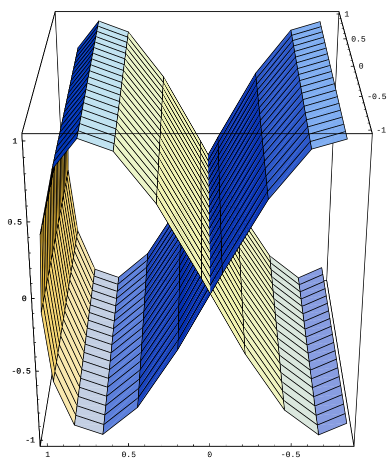
Abbildung 2.2: Reguläre Fläche

Das Bild zeigt die Umgebung U, die Fläche S mit $V \cap S$ und die Parametrisierung $\mathbf{x}$.

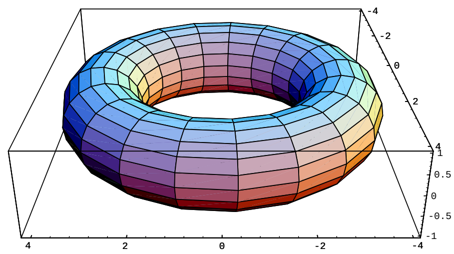
Die erste Bedingung der Definition an $\mathbf{x}$ macht erst Differentialgeometrie an Flächen möglich, da sie Kanten und Ecken auf einer regulären Fläche nicht zuläßt. Der Fall der Selbstdurchschneidungen wird durch die zweite Bedingung ausgeschlossen. Dieses ist besonders wichtig für die eindeutige Definition der Tangentialebene in einem Punkt an S, deren Existenz durch die dritte Bedingung gesichert wird.

Beispiele:

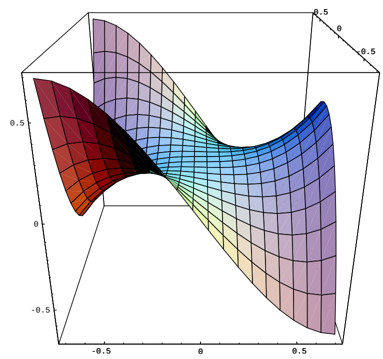
1. Eine Fläche mit einer Selbstdurchschneidung, also eine nicht-reguläre Fläche, kann durch $\mathbf{x}(u, v) = (\sin u, \sin 2u, v)$ mit $u \in [-1, 4]$ und $v \in [-1, 1]$ beschrieben werden. Wegen der Selbstdurchschneidung verstößt diese Fläche gegen die Homöomorphieeigenschaft ihrer Parametrisierung $\mathbf{x}$.



2. Durch $\mathbf{x}(u,v) = (\cos u(3+\cos v), \sin u(3+\cos v), \sin v)$ mit $u \in [0, 2\pi]$ und $v \in [0, 2\pi]$ ist ein Torus gegeben. Die Parametrisierung dieser Fläche erfüllt die drei Bedingungen für eine reguläre Fläche.



3. Auch beim „Affensattel“handelt es sich um eine reguläre Fläche. Eine Parametrisierung lautet z.B. $\mathbf{x}(u,v) = (u, v, u^3 - 3uv^2)$ mit $u \in [-0.7, 0.7]$ und $v \in [-0.7, 0, 7]$.



Nun sei durch eine Parametrisierung $\mathbf{x} : U \to V \cap S$ einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ auf $V \cap S$ mit

$$\mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \qquad (u,v) \in U,$$

eine reguläre Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$. gegeben. Hält man nun einen der Parameter, wie zum Beispiel u, konstant und variiert den anderen, im Beispiel dann v, so entsteht eine Kurve auf der Fläche S.

Definition 2.8 *Eine Kurve auf einer Fläche S, die man durch Festhalten eines und Variieren des anderen Parameters erhält, heißt Koordinatenkurve auf S bezüglich der Parametrisierung $\mathbf{x}$ und ist das Bild einer zur u- oder v-Achse parallelen Gerade unter $\mathbf{x}$ (vgl. Abbildung 2.2).*

Definition 2.9 *Es sei $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ eine parametrisierte Kurve auf S. Dann heißt der Tangentenvektor $\alpha'(0)$ mit $\alpha(0) = p \in S$ Tangentenvektor an S in p.*

Da die Anzahl der durch p laufenden Kurven mit $\alpha(0) = p$ unbeschränkt ist, gibt es unendlich viele Tangentenvektoren an S in p. Die linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$ bilden eine Ebene, von der gezeigt werden kann, daß alle anderen Tangentenvekoren in ihr enthalten sind. Es gilt folgende

Bemerkung: *Es sei S eine reguläre Fläche und $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ eine zu S gehörende Parametrisierung. $T_p(S)$ bezeichne die Menge aller Tangentenvektoren in p. Dann gilt für das Differential $d\mathbf{x}_q$ und alle $q \in U$:*

$$d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2) = T_p(S).$$

Beweis: Für den Beweis sei auf do Carmo [5] verwiesen, da er für die weiteren Betrachtungen unerheblich ist.

Definition 2.10 *Die Ebene $T_p(S)$, die alle Tangentenvektoren in einem Punkt p an einer Fläche S enthält, heißt Tangentialebene an S in p. Die Wahl der Parametrisierung bestimmt durch die Ableitungen der Koordinatenkurven eine Basis der Tangentialebene $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$. Diese Basis heißt die zur Parametrisierung $\mathbf{x}$ assoziierte Basis.*

Nun wird klar, daß eine Fläche mit einer Selbstdurchschneidung für die Bestimmung einer Tangentialebene ein Problem darstellt. In den Schnittpunkten einer solchen Fläche ist keine eindeutige Zuordnung einer Tangentialebene möglich, daher die Notwendigkeit der zweiten Bedingung in der Definition der regulären Fläche.

Bis jetzt ist lediglich die Parameterdarstellung einer Fläche S der Form $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ vorgestellt worden. Nun ist es aber auch möglich, eine implizite Darstellung der Fläche zu wählen. Dieses geschieht mit Hilfe einer Funktion f, die auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^3$ definiert ist. Durch die Menge

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = C\},$$

wobei C ein konstanter Wert ist, kann dann eine Fläche vollständig beschrieben werden, wie das Beispiel der Einheitssphäre zeigt:

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Nun sei eine Fläche durch die implizite Darstellung

$$f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) = C \tag{2.2}$$

gegeben. Eine Flächenkurve auf f erhält man durch Konstanthalten einer Variablen und Variieren der anderen Variablen in der Parameterdarstellung der Fläche, v_0 sei konstant:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0(u) &= (x(u), y(u), z(u)) \\ &:= \mathbf{x}(u, v_0) \\ &= (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Jeder Punkt dieser Flächenkurve erfüllt natürlich auch die implizite Darstellung

$$f(\mathbf{x}_0(u)) = f(\mathbf{x}(u, v_0)) = f(x(u), y(u), z(u)) = C,$$

was nach Anwendung der Kettenregel

$$\begin{aligned} 0 &= f_x x_u + f_y y_u + f_z z_u \\ &= \langle \operatorname{grad} f, \mathbf{x}_u \rangle \end{aligned}$$

liefert. Analog gilt

$$0 = \langle \operatorname{grad} f, \mathbf{x}_v \rangle.$$

Da $\mathbf{x}(u)$ eine beliebige Flächenkurve auf S darstellt und $\langle \operatorname{grad} f, \mathbf{x}_u \rangle = 0 = \langle \operatorname{grad} f, \mathbf{x}_v \rangle$ ist, ist der Gradient von f normal zur Fläche S und daher ein Vielfaches des Kreuzproduktes $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$. Auf Einheitslänge gebracht heißt dieser Vektor Einheitsnormalenvektor. Er wird in der Einführung der Christoffelsymbole wichtig sein und genauer definiert werden.

In der Gittererzeugung sind Tangentenvektoren an Koordinatenkurven und Normalen sehr nützlich, da man mit diesen die Beziehungen zwischen Abbildungen und deren Inverse beschreiben kann. Sie finden auch in der Gittererzeugungsmethode von Winslow Anwendung und werden daher an geeigneterer Stelle genau ausgeführt.

Ein wesentlicher Teil der Differentialgeometrie besteht nun darin, reguläre Flächen zu beschreiben und zu untersuchen, sowie Messungen an ihnen durchzuführen. Der folgende Abschnitt liefert einige für dieses Ziel wichtige Hilfsmittel.

2.5 Die Fundamentalformen

Die Differentialgeometrie beinhaltet drei wichtige Grundformen, die zur Beschreibung einer Fläche dienen. Mit ihnen wird es möglich, Längen, Winkel, Flächeninhalte und auch Krümmungseigenschaften einer Fläche bzw. von Flächenkurven zu messen. Diese Grundformen heißen *erste, zweite* und *dritte Fundamentalform.* Die Definitionen und die Aufgaben der ersten beiden Fundamentalformen werden in den folgenden Abschnitten erläutert, denn sie sind für die Gittererzeugungsmethode von Dvinsky von Bedeutung. Im Zusammenhang mit der ersten Fundamentalform taucht der Begriff des Metriktensors auf, dem ebenfalls ein Abschnitt gewidmet ist.

2.5.1 Die erste Fundamentalform

Die erste Fundamentalform ermöglicht Längenmessungen von Kurven auf einer Fläche und Messungen von Flächeninhalten, sowie Winkelmessungen zwischen Tangentenvektoren. Das Besondere dieser Messungen ist, daß sie durchführbar sind, ohne sich auf den $\mathbb{R}^3$, in dem die Fläche liegt, zu beziehen. Zur Definition der ersten Fundamentalform erinnere man sich zunächst an das Skalar- bzw. natürliche innere Produkt zweier Vektoren. Nun sei S eine reguläre Fläche und p ein Punkt dieser Fläche. $T_p(S)$ bezeichne wie üblich die Tangentialebene an S in p, also nach Definition 2.10 die Ebene, die alle Tangentenvektoren an S in p enthält.

Wird das innere Produkt nun ausschließlich auf Elemente der Tangentialebene angewandt, also auf Tangentenvektoren an S in p, so schreibt man für dieses Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Da es sich bei einem Skalarprodukt um eine symmetrische Bilinearform handelt, kann diesem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ eine quadratische Form zugeordnet werden.

Definition 2.11 *Die zum inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ der Tangentialebene $T_p(S)$ gehörende quadratische Form $I_p : T_p(S) \to \mathbb{R}$, gegeben durch*

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2 \geq 0, \quad w \in T_p(S),$$

heißt erste Fundamentalform.

Drückt man die erste Fundamentalform mit Hilfe der zu einer Parametrisierung $\mathbf{x}(u, v)$ bei p assozierten Basis $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ aus (vgl. Definition 2.10), so erhält man die bereits von Gauß verwendete Schreibweise für die erste Fundamentalform. Dazu betrachte man einen Tangentenvektor $w \in T_p(S)$. Nach Definition ist ein solcher Vektor Tangentenvektor an eine parametrisierte differenzierbare Flächenkurve $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ auf S, die durch den Punkt $p = \alpha(0) \in S$ geht. Daher ist $w = \alpha'(0)$, also

$$\begin{aligned} I_p(w) &= I_p(\alpha'(0)) \\ &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle_p \\
&= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p (u')^2 + 2\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p u'v' + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p (v')^2 \\
&= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p, \\
F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p, \\
G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Die Produkte (2.4) heißen *Koeffizienten der ersten Fundamentalform* in der zur Parametrisierung $\mathbf{x}$ assoziierten Basis $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ von $T_p(S)$.

Beispiele:

1. Die Parametrisierung $\mathbf{x}(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$ mit $(u,v) \in [-0.5\pi, 0.5\pi]^2$ beschreibt die Fläche einer Sphäre. Die Ableitungen lauten

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_u(u,v) &= (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u) \\
\mathbf{x}_v(u,v) &= (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0).
\end{aligned}
$$

   Daraus ergeben sich die Koeffizienten

$$
\begin{aligned}
E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = 1, \\
F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \\
G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \cos^2 u.
\end{aligned}
$$

2. Für den Affensattel $\mathbf{x}(u,v) = (u, v, u^3 - 3uv^2)$ gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_u(u,v) &= (1, 0, 3u^2 - 3v^2), \\
\mathbf{x}_v(u,v) &= (0, 1, -6uv),
\end{aligned}
$$

   so daß

$$
\begin{aligned}
E &= 1 + 9u^4 - 18u^2v^2 + 9v^4, \\
F &= -18u^3v + 18uv^3, \\
G &= 1 + 36u^2v^2.
\end{aligned}
$$

Die Bogenlänge (siehe Abschnitt 2.2.2) einer parametrisierten differenzierbaren Kurve $\alpha : [0,\tau] \to S$ mit $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ von $\alpha(0)$ bis $\alpha(\tau)$ ist

$$
L(\tau) = \int_0^\tau \|\alpha'(t)\| dt.
$$

Es gilt außerdem

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} = \sqrt{I_p(\alpha'(t))}.$$

Das bedeutet also, daß die Bogenlänge mit Hilfe der ersten Fundamentalform berechnet werden kann. In der Literatur zur Differentialgeometrie wird die erste Fundamentalform daher häufig auch in der Form

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2$$

oder

$$ds^2 = E(du)^2 + 2F\,du\,dv + G(dv)^2$$

eingeführt. Da nun die Bogenlänge wie eben gezeigt als Maß für die Streckung der Länge eines Intervalls auf die Länge des Bildes des Intervalls unter α gesehen werden kann, überträgt sich diese Eigenschaft aufgrund dieses Zusammenhangs auf die erste Fundamentalform.

Die Winkelmessung des Schnittwinkels θ bei p zweier parametrisierter regulärer Kurven $\alpha : I \to S$ und $\beta : I \to S$ und der Flächeninhalt eines Gebietes auf einer Fläche sind wie die Längenmessung leicht herleitbar und sollen hier nur angegeben und nicht weiter ausgeführt werden.
Für den Winkel θ gilt

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha'(p), \beta'(p) \rangle}{\|\alpha'(p)\| \|\beta'(p)\|}.$$

Für die Koordinatenkurven einer Parametrisierung $\mathbf{x}(u,v)$ ergibt sich daraus die einfache Winkelformel

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle}{\|\mathbf{x}_u\| \|\mathbf{x}_v\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Den Flächeninhalt $A(R)$ eines beschränkten abgeschlossenen Gebietes R auf einer regulären Fläche S, das in einer Koordinatenumgebung $\mathbf{x}(U) = V \cap S$ einer Parametrisierung $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ enthalten ist, berechnet man durch

$$\begin{aligned} A(R) &= \int\int_Q \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| du\,dv \\ &= \int\int_Q \sqrt{EG - F^2} du\,dv, \end{aligned}$$

wobei $Q = \mathbf{x}^{-1}(R)$ ist. Genaueres zu den Messungen mittels der ersten Fundamentalform ist in do Carmo [5] nachzulesen.

Später identifiziert man das Ausgangsgebiet U mit dem logischen Raum. Die Koordinaten des logischen Raumes seien ϕ_1 und ϕ_2. Häufig werden die Koeffizienten der ersten Fundamentalform dann auch mit

$$g_{ij} := \langle \mathbf{x}_{\phi_i}, \mathbf{x}_{\phi_j} \rangle_p \qquad \text{mit } i = 1, 2 \tag{2.5}$$

bezeichnet, so daß $E = g_{11}, F = g_{12} = g_{21}$ und $G = g_{22}$ sind. Diese Bezeichnung ist sinnvoll, da die Koeffizienten als Komponenten einer Matrix aufgefaßt werden können, die man Metriktensor, Fundamentaltensor oder Metrik-Matrix nennt. Dieser Tensor spielt in der Physik für die Relativitätstheorie eine wesentliche Rolle. Die geometrische Bedeutung des Metriktensors kann für die numerische Gittererzeugung nutzbar gemacht werden.

2.5.2 Der Metriktensor

In der Differentialgeometrie und in der Gittererzeugung nimmt der Metriktensor eine bedeutende Stellung ein. Viele Algorithmen arbeiten mit diesem Tensor, der als eine verallgemeinerte Darstellung der Fundamentalkoeffizienten der ersten Grundform gesehen werden kann.

Ein Metriktensor kann einer Abbildung zugeordnet werden, in unserem Fall betrachtet man die Abbildung zwischen logischem und physikalischem Raum. Die Koeffizienten des Metriktensors geben Auskunft über die Beschaffenheit dieser Abbildung. Die Dimension des physikalischen und des logischen Raumes beeinflussen das Aussehen des Tensors, seine Größe wird durch die Dimension des logischen Raumes bestimmt.

Für die Definition des Metriktensors betrachtet man die Jacobi-Matrix der Transformation von L, dem logischen, nach P, dem physikalischen Raum, gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : L &\to P, \\ \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_k \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x_1(\phi_1, ..., \phi_k) \\ x_2(\phi_1, ..., \phi_k) \\ . \\ . \\ . \\ x_n(\phi_1, ..., \phi_k) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei k die Dimension von L und n die Dimension von P beschreibt. In unserem Fall beschränken diese sich stets auf $n, k \leq 3$. Die Jacobi-Matrix ist dann definiert durch

$$(J_{ij}) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \phi_j} \right),$$

für $i = 1, ..., n$ und $j = 1, ..., k$ und hat die Größe $n \times k$..

Mit der Kenntnis der Gestalt der Jacobi-Matrix und folgender Definition kann der Metriktensor leicht berechnet werden.

Definition 2.12 (Metriktensor) *Gegeben seien der logische Raum L der Dimension k und der physikalische Raum der Dimension n mit der Transformation $\mathbf{x} : L \to P$. Die Jacobi-Matrix von $\mathbf{x}$ werde mit J bezeichnet.*

Dann ist der Metriktensor G der Abbildung $\mathbf{x}$ definiert als das Produkt von J^T mit J.

$$G = J^T \cdot J$$

G ist eine symmetrische $k \times k$-Matrix, wie man schnell sieht. Häufig wird der Metriktensor auch Fundamentaltensor oder Metrik-Matrix genannt.

Beispiele:

1. Der Metriktensor für den Fall eines Intervalls I als logisches und einer Kurve $\alpha(\phi) = (x(\phi), y(\phi), z(\phi))$ als physikalisches Gebiet (Fall 1) ist eine positive reelle Zahl, und zwar genau das Quadrat der Länge des Tangentenvektors:

$$\begin{aligned} G &= J^T \cdot J \\ &= (x_\phi, y_\phi, z_\phi) \cdot \begin{pmatrix} x_\phi \\ y_\phi \\ z_\phi \end{pmatrix} \\ &= x_\phi^2 + y_\phi^2 + z_\phi^2 \\ &= \|\alpha_\phi\|^2. \end{aligned}$$

2. Ist das physikalische Gebiet eine Fläche im $\mathbb{R}^3$, parametrisiert durch $\mathbf{x}(\phi, \psi)$,und das logische Gebiet eine einfach geformte Fläche in der Ebene (Fall 2), so hat der Metriktensor G die Dimension 2×2 und hat gerade die Koeffizienten der ersten Fundamentalform als Komponenten:

$$\begin{aligned} G &= J^T \cdot J \\ &= \begin{pmatrix} x_\phi & y_\phi & z_\phi \\ x_\psi & y_\psi & z_\psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_\phi & x_\psi \\ y_\phi & y_\psi \\ z_\phi & z_\psi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_\phi^2 + y_\phi^2 + z_\phi^2 & x_\phi x_\psi + y_\phi y_\psi + z_\phi z_\psi \\ x_\phi x_\psi + y_\phi y_\psi + z_\phi z_\psi & x_\psi^2 + y_\psi^2 + z_\psi^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für $k = 2$ ist die Verbindung der ersten Fundamentalform mit dem Metriktensor somit allein schon aus der Definition heraus klar. Betrachtet man den Fall einer beliebig gewählten Dimension k, so ist es notwendig, die erste Fundamentalform zu verallgemeinern, um den Zusammenhang zum Metriktensor zu erkennen. Für die Komponenten von $G = (g_{ij}) = J^T J$ gilt

$$g_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_l}{\partial \phi_i} \frac{\partial x_l}{\partial \phi_j}$$

für $1 \leq i, j \leq k$.
Da $\mathbf{x}(\phi_1, ..., \phi_k) = (x_1(\phi_1, .., \phi_k), ..., x_n(\phi_1, .., \phi_k))^T$, lassen sich die g_{ij} auch in der Skalarproduktschreibweise

$$g_{ij} = \langle \mathbf{x}_{\phi_i}, \mathbf{x}_{\phi_j} \rangle$$

mit $1 \leq i, j \leq k, k \leq 3$ schreiben.

Diese Form erinnert nun schon sehr an die Komponenten der ersten Fundamentalform (2.4) bzw. (2.5). Für den Fall $k = 2$ sind die Komponenten des 2×2 dimensionierten Metriktensors genau die Koeffizienten der ersten Fundamentalform.

Der folgende Satz zeigt die geometrische Bedeutung des Metriktensors bei beliebigen Dimensionen:

Satz 2.2 *Ein Koordinatensystem ist genau dann orthogonal, wenn für alle $i \neq j$ die Komponenten g_{ij} des Metriktensors verschwinden, wenn also die Metrik-Matrix G zur Abbildung $\mathbf{x}$ eine Diagonalmatrix ist.*

Beweis: Die Koordinatenkurven einer Abbildung $\mathbf{x}(\phi_1.., \phi_k)$ erhält man durch Variieren einer und Festhalten der anderen Variablen. Die ij-te Komponente des Metriktensors ist das Produkt des Tangentenvektors der i-ten mit dem der j-ten Koordinatenkurve. Es ist bekannt, daß

$$\langle \mathbf{x}_{\phi_i}, \mathbf{x}_{\phi_j} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}_{\phi_i} \perp \mathbf{x}_{\phi_j}$$

für $i \neq j$. Mit der Definition von G folgt sofort die Behauptung. □

Für den Fall $k = 2$ heißt das zum Beispiel, daß die Koordinatenkurven genau dann orthogonal verlaufen, wenn $F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$ ist. Somit ist der Metriktensor unter anderem ein Mittel, die Orthogonalität von Koordinatensystemen festzustellen.

Eine weitere nützliche Eigenschaft zeigt sich bei der Betrachtung der Bogenlängen auf den verschiedenen Gebieten. Es sei $I = [0, 1]$, L ein Gebiet im $\mathbb{R}^k$ und P ein Gebiet im $\mathbb{R}^n$, mit $k \leq n$.

$$\begin{aligned} \phi : I &\rightarrow L, \\ \phi(\tau) &= (\phi_1(\tau), \ldots, \phi_k(\tau)) \end{aligned}$$

beschreibe eine Kurve in L. Weiter sei

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : L &\rightarrow P, \\ \mathbf{x}(\phi_1, \cdots, \phi_k) &= (x_1(\phi_1, \ldots, \phi_k), \ldots, x_n(\phi_1, \ldots, \phi_k)) \end{aligned}$$

die Parametrisierung einer Fläche im $\mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha := \mathbf{x} \circ \phi : I &\rightarrow P, \\ \alpha(\tau) = \mathbf{x} \circ \phi(\tau) &= \mathbf{x}(\phi_1(\tau), \ldots, \phi_k(\tau)) \end{aligned}$$

das Bild der Kurve ϕ unter $\mathbf{x}$ und liegt als Flächenkurve auf $\mathbf{x}$ in P. Nun berechnet man die Bogenlängen L_{log} und L_{phys} der Kurven im logischen und physikalischen Gebiet. Es gilt

$$\begin{aligned}
\|\phi'(\tau)\| &= \sqrt{\langle \phi'(\tau), \phi'(\tau)\rangle} = \sqrt{\sum_{i+1}^{k}\left(\frac{d\phi_i}{d\tau}\right)^2}, \text{also} \\
L_{log} &= \int_0^1 \|\phi'(\tau)\| d\tau \\
&= \int_0^1 \sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{d\phi_i}{d\tau}\right)^2} d\tau \\
&= \int_0^1 \sqrt{\left\langle \frac{d\phi}{d\tau}, \frac{d\phi}{d\tau}\right\rangle} d\tau.
\end{aligned}$$

Für die Flächenkurve α gilt

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi_i}\frac{d\phi_i}{d\tau}.$$

Die Norm ist dann

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{d\alpha}{d\tau}\right\| &= \sqrt{\left\langle \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi_i}\frac{d\phi_i}{d\tau}, \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi_i}\frac{d\phi_i}{d\tau}\right\rangle} \\
&= \sqrt{\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial \mathbf{x}_l}{\partial \phi_i}\frac{d\phi_i}{d\tau}\right)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i,j=1}^{k}\left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi_i}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi_j}\right\rangle \frac{d\phi_i}{d\tau}\frac{d\phi_j}{d\tau}} \\
&= \sqrt{\sum_{i,j=1}^{k} g_{ij}\frac{d\phi_i}{d\tau}\frac{d\phi_j}{d\tau}} \\
&= \sqrt{\left\langle G\frac{d\phi}{d\tau}, \frac{d\phi}{d\tau}\right\rangle}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Bogenlänge der Kurve im physikalischen Raum

$$L_{phys} = \int_0^1 \sqrt{\left\langle G\frac{d\phi}{d\tau}, \frac{d\phi}{d\tau}\right\rangle} d\tau.$$

Somit mißt G, wie sich die Länge einer Kurve im physikalischen Raum im Gegensatz zur Länge im logischen Raum verändert. Ist G beispielsweise die Einheitsmatrix, so ist

$$L_{phys} = \int_0^1 \sqrt{\left\langle E\frac{d\phi}{d\tau}, \frac{d\phi}{d\tau}\right\rangle}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \sqrt{\left\langle \frac{d\phi}{d\tau}, \frac{d\phi}{d\tau} \right\rangle} \\
&= L_{log}
\end{aligned}
$$

In der Berechnung der Bogenlänge steckt dann auch die allgemeine Form der ersten Fundamentalform.

Die Ableitungen der Vektorfunktion ϕ nach t entsprechen den Tangentenvektoren der Koordinatenkurven im logischen Raum, die Bilder der Kurven im physikalischen Raum sind. Je größer die Ableitungen vom Betrage her sind, umso stärker werden die Kurven verzerrt. Die erste Fundamentalform gibt also ein Maß für die Verzerrung vom logischen zum physikalischen Raum an. Diese Eigenschaft macht Dvinsky sich für seine Version der Gittererzeugung zu Nutze. Sie ermöglicht eine Gitterpunktverfeinerung an vorgegebenen Stellen des Gebietes.

2.5.3 Die zweite Fundamentalform

Bis jetzt hat man die Maße der Länge einer Kurve, den Flächeninhalt einer gekrümmten Fläche und die Verzerrung einer Fläche unter einer Abbildung kennengelernt. All diese Maße entspringen der ersten Fundamentalform. Nun kann eine Fläche noch genauer geometrisch beschrieben werden, indem eine Art Krümmungsmaß für sie eingeführt wird. Dieses führt zur Definition der zweiten Fundamentalform. Sie macht eine Aussage über die sogenannte Normalkrümmung einer regulären Kurve auf einer Fläche S in einem Punkt p auf S und ist für die Berechnung der im nächsten Abschnitt eingeführten *Christoffel-Symbole* bedeutend. Zum Verständnis sollten zunächst die Begriffe des Einheitsnormalenvektors und der Orientierung einer Fläche eingeführt werden. Auf die Normalkrümmung wird nicht weiter eingegangen, da sie für die Gittererzeugung keine Rolle spielt. Es sei lediglich erwähnt, daß die zweite Fundamentalform ein wesentlicher Bestandteil der Untersuchung von Flächen auf Krümmungseigenschaften ist.

Satz 2.3 *Es sei S eine reguläre Fläche, $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ eine zugehörige Parametrisierung von einer offenen Menge U nach S bei $p \in S$. Außerdem sei $q \in \mathbf{x}(U)$ sei ein Punkt auf S. Dann ist die Abbildung*

$$
\begin{aligned}
N : \mathbf{x}(U) &\to \mathbb{R}^3 \quad mit \\
q &\mapsto \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}(q)
\end{aligned}
$$

für alle $q \in \mathbf{x}(U)$ differenzierbar. Jedem Punkt aus $\mathbf{x}(U)$ wird so ein Einheitsnormalenvektor zugeordnet.

Denn als Komposition differenzierbarer Funktionen ist N offensichtlich differenzierbar. Außerdem ist $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ orthogonal zur Tangentialebene, somit ist auch $N(q)$ orthogonal zur Tangentialebene. Der Vektor hat Länge 1, da die Norm eines Vektors seine Länge angibt.

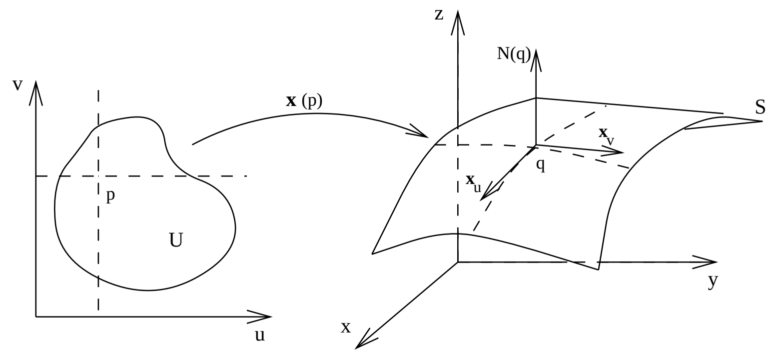


Abbildung 2.3: Einheitsnormalenvektor in einem Punkt q auf einer regulären Fläche

Durch die differenzierbare Abbildung $N : \mathbf{x}(U) \to \mathbb{R}^3$ wird jedem Bildpunkt von U ein Einheitsnormalenvektor zugeordnet.

Definition 2.13 *V sei eine offene Menge in S. Dann nennt man eine differenzierbare Abbildung $N : V \to \mathbb{R}^3$, die jedem $q \in V$ einen Einheitsnormalenvektor $N(q) \in \mathbb{R}^3$ an S in q zuordnet, ein differenzierbares Einheitsnormalenvektorfeld auf V.*

Diese Definition ist für den Begriff der Orientierung wichtig. Nicht alle Flächen haben ein Einheitsnormalenvektorfeld. Ein klassisches Beispiel einer solchen Fläche ist das Möbiusband. Beim einmaligen Umlauf der Fläche S wird aus dem Einheitsnormalenvektor $N(q)$ in $q \in S$ der Einheitsnormalenvektor $-N(q)$, so daß N daher nicht stetig und somit nicht differenzierbar auf dem gesamten Band definiert ist.

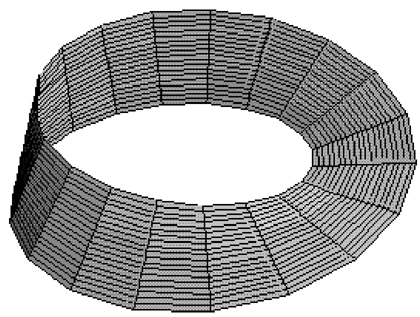


Abbildung 2.4: Möbiusband

Definition 2.14 *Es sei $S \in \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Man nennt S orientierbar, wenn ein differenzierbares Einheitsnormalenvektorfeld N für die gesamte Fläche S existiert. Ein derartiges Vektorfeld heißt Orientierung von S.*

Im folgenden ist es wichtig, stets reguläre Flächen zu betrachten, die orientierbar mit einer Orientierung N sind. Aus diesem Grund fällt beispielsweise ein Möbiusband aus den weiteren Betrachtungen heraus.

Die implizite Darstellung der Einheitssphäre lautet $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Die Werte des Einheitsnormalenvektorfeldes N einer orientierbaren Fläche liegen auf der Einheitssphäre.

Definition 2.15 *Es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $N : S \to \mathbb{R}^3$ eine Orientierung von S mit Werten in $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Dann heißt die Abbildung $N : S \to S_2$ Gauß-Abbildung von S.*

Das Differential der Gauß-Abbildung spielt im weiteren eine wesentliche Rolle.

Bemerkung: *Das Differential der Gauß-Abbildung bei $p \in S$ wird geschrieben als $dN_p : T_p(S) \to T_{N(p)}(S_2)$. Da nun die Tangentialebene $T_{N(p)}(S_2)$ lediglich die verschobene Tangentialebene durch p ist, diese also parallel zueinander sind, sind sie als äquivalent zu betrachten. Die Gauß-Abbildung führt demnach in die Tangentialebene von p: $dN_p : T_p(S) \to T_p(S)$.*

Für das Differential dN_p der Gauß-Abbildung bei $p \in S$ gilt:

Satz 2.4 *$dN_p : T_p(S) \to T_p(S)$ der Gauß-Abbildung bei $p \in S$ ist eine selbstadjungierte lineare Abbildung.*

Beweis: Das Differential ist offensichtlich linear. Es bleibt die Selbstadjungiertheit

$$\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle$$

für eine beliebige Basis $\{w_1, w_2\}$ der Tangentialebene an S in p zu zeigen. Der Beweis wird nun für die zu einer Parametrisierung $\mathbf{x}(u, v)$ von S bei p assoziierte Basis $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ von $T_p(S)$ geführt.
Nun werde eine parametrisierte Flächenkurve auf S durch

$$\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$$

mit $\alpha(0) = p \in S$ bezeichnet. Für die Ableitung im Punkt $t = 0$ gilt

$$\alpha'(0) = \mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0).$$

Daher folgt

$$\begin{aligned}
dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(\mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0)) \\
&= dN_p(\mathbf{x}_u u'(0)) + dN_p(\mathbf{x}_v v'(0)) \\
&= \frac{d}{dt} N(u(t), v(t))|_{t=0} \\
&= N_u u'(t) + N_v v'(t)|_{t=0} \\
&= N_u u'(0) + N_v v'(0).
\end{aligned}$$

Also ist $dN_p(\mathbf{x}_u) = N_u$ und $dN_p(\mathbf{x}_v) = N_v$. Somit gilt

$$\begin{aligned} \langle dN_p(\mathbf{x}_u), \mathbf{x}_v \rangle &= \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle, \\ \langle \mathbf{x}_u, dN_p(\mathbf{x}_v) \rangle &= \langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle. \end{aligned}$$

Aus der Definition des Einheitsnormalenvektors folgt

$$\begin{aligned} \langle N, \mathbf{x}_u \rangle &= 0, \\ \langle N, \mathbf{x}_v \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Leitet man nun mit Hilfe der Produktregel die erste Gleichung nach v und die zweite nach u ab, so ergeben sich

$$\begin{aligned} \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle &= 0, \\ \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Damit folgt sofort die Behauptung, denn

$$\begin{aligned} \langle dN_p(\mathbf{x}_u), \mathbf{x}_v \rangle &= \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle \\ &= -\langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle \\ &= \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_u, dN_p(\mathbf{x}_v) \rangle. \end{aligned}$$

□

Der selbstadjungierten Abbildung dN_p kann in kanonischer Weise eine quadratische Form $Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle$ mit $v \in T_p(S)$ auf dem Tangentialraum zugeordnet werden. Die quadratische Form $-Q$ definiert die zweite Fundamentalform.

Definition 2.16 *Die quadratische Form $II_p : T_p(S) \to \mathbb{R}$ mit*

$$II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$$

heißt zweite Fundamentalform der Fläche S bei $p \in S$.

Auch für die zweite Fundamentalform ist eine äquivalente Formulierung durch die Darstellung der Form in der Basis $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ möglich, die auf eine der ersten Fundamentalform sehr ähnlichen Form führt. Sie unterscheidet sich lediglich durch andere Koeffizienten.

Definition 2.17 *Es sei $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung der regulären Fläche S bei einem Punkt $p \in S$. Die zweite Fundamentalform von S kann geschrieben werden als*

$$II = e\,(u')^2 + 2f\,u'\,v' + g\,(v')^2.$$

e, f und g heißen Koeffizienten der zweiten Fundamentalform und sind definiert durch

$$\begin{aligned} e &:= -\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle, \\ f &:= -\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = -\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle, \\ g &:= -\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

Diese Formeln entstehen auf folgende Weise:
$\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ ist eine parametrisierte Kurve auf S mit $\alpha(0) = p$. Der Tangentenvektor an α in p lautet $\alpha' = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$, das Differential des Einheitsnormalenvektorfeldes in p ist gegeben durch $dN_p(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'$. Für die zweite Fundamentalform folgt daher

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle \\ &= -\langle N_u u' + N_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle \\ &= e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 \end{aligned}$$

mit e, f und g wie oben. Die Gleichungen der Fundamentalkoeffizienten sind leicht durch Ableiten von $\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = 0 = \langle N, \mathbf{x}_v \rangle$ nach u und v berechenbar, vgl. dazu auch den Beweis des letzten Satzes.

Die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform stehen im engen Zusammenhang mit denen der ersten Fundamentalform. Ihre Beziehungen zueinander, sowie die Berechnungen von Krümmungseigenschaften mit Hilfe der zweiten Fundamentalform sollen hier jedoch nicht weiter betrachtet werden, es sei zu diesem Zweck auf do Carmo [5] und Gray [6] verwiesen.

2.6 Die Christoffelsymbole

Hat man eine orientierte Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ mit einer Parametrisierung $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ in einer Orientierung von S gegeben, so kann, wie man im vorangegangen Kapitel sehen konnte, jedem Punkt $p \in \mathbf{x}(U) \subset S$ drei linear unabhängige Vektoren $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ und der Normalenvektor N zugeordnet werden. Stellt man nun die Ableitungen der Tangentenvektoren in u- und v-Richtung mittels dieser drei Vektoren dar, so ergeben sich die sogenannten Gauß-Gleichungen, die auch die Christoffelsymbole definieren.

Satz 2.5 (Gauß-Gleichungen) und Definition *Sei $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung mit Einheitsnormalenvektor N. Dann kann man die Ableitungen von $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$ in der Basis $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$ schreiben und erhält die sogenannten Gauß-Gleichungen*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + L_1 N, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + L_2 N, \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + L_3 N, \end{aligned}$$

wobei die L_i's den Koeffizienten der zweiten Fundamentalform entsprechen, also $L_1 = e, L_2 = f$ und $L_3 = g$, und die Koeffizienten Γ_{jk}^i für $i, j, k = 1, 2$ die Christoffelsymbole zweiter Art sind. Sie werden im Beweis explizit berechnet.

An dieser Stelle sollte erwähnt werden, daß es in der Differentialgeometrie auch den Begriff der Christoffelsymbole erster Art gibt. Sie werden meist mit Γ_{ijk} bezeichnet und haben für diese Arbeit keine weitere Bedeutung.

Beweis: Man berechnet explizit die gesuchten Koeffizienten L_i und Γ^i_{jk} mit $i, j, k \in \{1, 2\}$.

Dazu betrachte zunächst die Basis $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$ mit

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}.$$

Als einfache Folgerung aus der Definition des Vektorproduktes gelten die Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle &= 0, \\ \langle \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Wegen $(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \neq 0$ ist $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ orthogonal zur Ebene, die durch $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$ aufgespannt wird. Also folgt auch für N die Orthogonalität zu den Basisvektoren dieser Ebene und somit

$$\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_v \rangle = 0. \tag{2.6}$$

Da der Einheitsnormalenvektor die Länge 1 hat, gilt

$$\begin{aligned} \langle N, N \rangle &= \|N\| \cdot \|N\| \cdot \cos 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Durch skalare Multiplikation von der Gauß-Gleichungen mit N erhält man wegen (2.6)

$$\begin{aligned} e &= \langle \mathbf{x}_{uu}, N \rangle = L_1 \cdot 1, \\ f &= \langle \mathbf{x}_{uv}, N \rangle = L_2 \cdot 1, \\ g &= \langle \mathbf{x}_{vv}, N \rangle = L_3 \cdot 1. \end{aligned}$$

Es bleibt die Berechnung der Christoffelsymbole. Dazu bilde man die Skalarprodukte der Gauß-Gleichungen mit den Tangentenvektoren $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \\ \mathbf{x}_u(u, v) &= (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v)), \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v)), \\ \mathbf{x}_{uu}(u, v) &= (x_{uu}(u, v), y_{uu}(u, v), z_{uu}(u, v)), \\ \mathbf{x}_{vv}(u, v) &= (x_{vv}(u, v), y_{vv}(u, v), z_{vv}(u, v)). \end{aligned}$$

Daher folgen für

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{aligned}$$

die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
E_u &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_u = 2x_{uu}x_u + 2y_{uu}y_u + 2z_{uu}z_u = 2\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle, \\
E_v &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_v = 2x_{uv}x_u + 2y_{uv}y_u + 2z_{uv}z_u = 2\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle, \\
F_u &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_u = x_{uu}x_v + x_{uv}x_u + y_{uu}y_v + y_{uv}y_u + z_{uu}z_v + z_{uv}z_u, \\
F_v &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_v = x_{uv}x_v + x_{vv}x_u + y_{uv}y_v + y_{vv}y_u + z_{uv}z_v + z_{vv}z_u, \\
G_u &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_u = 2x_{uv}x_v + 2y_{uv}y_v + 2z_{uv}z_v = 2\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle, \\
G_v &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_v = 2x_{vv}x_v + 2y_{vv}y_v + 2z_{vv}z_v = 2\langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle
\end{aligned}
$$

und somit

$$
\begin{aligned}
F_u - \frac{1}{2}E_v &= \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle, \\
F_v - \frac{1}{2}G_u &= \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle.
\end{aligned}
$$

Zusammengefaßt ergeben sich aus den Produkten der Gauß-Gleichungen mit $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$ die folgenden drei Gleichungssysteme

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle &= \Gamma^1_{11}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle + \Gamma^2_{11}\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = \Gamma^1_{11}E + \Gamma^2_{11}F = \tfrac{1}{2}E_u \\
\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle &= \Gamma^1_{11}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle + \Gamma^2_{11}\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G = F_u - \tfrac{1}{2}E_v \\
\\
\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle &= \Gamma^1_{12}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle + \Gamma^2_{12}\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = \Gamma^1_{12}E + \Gamma^2_{12}F = \tfrac{1}{2}E_v \\
\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle &= \Gamma^1_{12}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle + \Gamma^2_{12}\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \Gamma^1_{12}F + \Gamma^2_{12}G = \tfrac{1}{2}G_u \\
\\
\langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle &= \Gamma^1_{22}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle + \Gamma^2_{22}\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = \Gamma^1_{22}E + \Gamma^2_{22}F = F_v - \tfrac{1}{2}G_u \\
\langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle &= \Gamma^1_{22}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle + \Gamma^2_{22}\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \Gamma^1_{22}F + \Gamma^2_{22}G = \tfrac{1}{2}G_v.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Da aus den Definitionen für die Koeffizienten der ersten Fundamentalform und der linearen Unabhängigkeit von $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$

$$
\begin{aligned}
EG - F^2 &= \|\mathbf{x}_u\|^2\|\mathbf{x}_v\|^2 - \|\mathbf{x}_u\|^2\|\mathbf{x}_v\|^2 \cdot \cos\alpha \\
&= \underbrace{\|\mathbf{x}_u\|^2\|\mathbf{x}_v\|^2}_{\neq 0}\underbrace{(1 - \cos\alpha)}_{\neq 0} \\
&\neq 0,
\end{aligned}
$$

wobei $\alpha \neq 0$ den Winkel zwischen $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$ bezeichnet, folgt, sind die drei Gleichungssysteme für die jeweilige Parametrisierung eindeutig lösbar und die Christoffelsymbole somit schnell berechenbar, wenn die Koeffizienten der ersten Fundamentalform vorliegen. □

Das folgende Beispiel zeigt eine solche Berechnung.

Eine Fläche sei parametrisiert durch

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)),$$

wobei f differenzierbar und $f(v) \neq 0$ ist. Die Koeffizienten der ersten Fundamentalform lauten

$$\begin{aligned}
E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle &= \langle (-f(v)\sin u, f(v)\cos u, 0), (-f(v)\sin u, f(v)\cos u, 0) \rangle \\
&= f^2(v)\sin^2 u + f^2(v)\cos^2 u \\
&= f^2(v), \\
F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle &= 0, \\
G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle &= (f'(v))^2 + (g'(v))^2.
\end{aligned}$$

Also sind

$$\begin{array}{rclcrcl}
E_u &=& 0 &,& E_v &=& 2ff', \\
F_u &=& 0 &,& F_v &=& 0, \\
G_u &=& 0 &,& G_v &=& 2(f'f'' + g'g'').
\end{array}$$

Eingesetzt in die drei Gleichungssysteme wird es dann möglich, die Christoffelsymbole Γ^i_{jk} für die Fläche zu berechnen:

$$\begin{array}{rclcrcl}
\Gamma^1_{11} &=& 0 &,& \Gamma^2_{11} &=& -\frac{ff'}{(f')^2+(g')^2} \\
\Gamma^1_{12} &=& \frac{ff'}{f^2} &,& \Gamma^2_{12} &=& 0 \\
\Gamma^1_{22} &=& 0 &,& \Gamma^2_{22} &=& \frac{f'f''+g'g''}{(f')^2+(g')^2}.
\end{array}$$

Diese elementare Einführung genügt für die Anwendung in der Gittererzeugungsmethode. Die Beziehungen zwischen erster und zweiter Fundamentalform und ihre weiteren geometrischen Bedeutungen, sowie nähere Ausführungen zu den Christoffelsymbolen finden sich in [5], [6], [7] und [8].

Kapitel 3

Die Methode von A.M. Winslow

3.1 Einführung

Schon gegen Ende der 50-er Jahre existierten Gittererzeugungsprogramme, die relativ gute Ergebnisse lieferten, aber auch noch einige Mängel aufwiesen. So gab es beispielsweise ein für den IBM-704 entwickeltes Programm, das auf einem beliebig geformten Gebiet Dreiecksgitter in folgender Weise konstruierte: Ausgehend von drei vorgegebenen Punkten auf dem Rand des Gebietes wird der Schwerpunkt des durch die Punkte festgelegten Dreiecks bestimmt und mit diesem das Dreieck in drei kleinere aufgeteilt. Nun wird für jedes kleine Dreieck auf die gleiche Weise vorgegangen, bis die gewünschte Netzdichte erreicht ist. Dabei entsteht ein relativ gleichmäßiges, aus kleinen Dreiecken bestehendes Gitter, das für die Anwendung der Finiten Elemente Verfahren geeignet ist.

In bezug auf den Rechenaufwand ist diese Methode bereits als sehr gut einzustufen, doch es stellt sich ein beachtliches Problem für die Konstruktion derartiger Gitter auf nicht-konvexen Gebieten mittels dieser einfachen Methode dar. Bei nicht-konvexen Gebieten besteht für äußere Gitterpunkte die Gefahr, außerhalb des betrachteten Gebietes zu liegen (vgl. Abb. 3.1). Mit diesem Problem befaßte sich Alan M. Winslow vom Lawrence Radiation Laboratory Livermore, Kalifornien, in den 60-er Jahren. Er suchte nach einer Methode, die auf einer beliebigen Fläche, insbesondere auch auf nicht-konvexen Gebieten, ein Gitter mit glatten Netzlinien konstruiert, ohne daß ein Punkt außerhalb des Gebietes fällt. 1963 veröffentlichte er seine Idee, die als eine der grundlegensten Ideen zur Generierung glatter Gitter bezeichnet werden kann. Während bei der oben beschriebenen Methode der logische Raum keine Rolle spielt, benötigt Winslow die Unterscheidung von physikalischen und logischen Raum. Er nutzt harmonische Abbildungen zur Transformation der Gebiete aufeinander und erzielt sehr gute Ergebnisse.

Diese Idee soll Inhalt dieses Kapitels sein. Im anschließenden 4. Kapitel wird die von A.S. Dvinsky Ende der 80-er Jahre entwickelte Erweiterung der

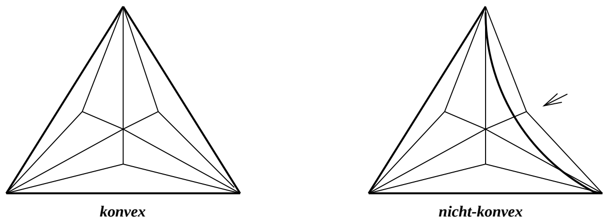


Abbildung 3.1: Einfache Gittererzeugungmethode auf konvexem und nicht-konvexem Gebiet

Winslow-Methode vorgestellt.

3.2 Bezeichnungen

An dieser Stelle soll zunächst an die in der Gittererzeugung üblichen Begriffe und Bezeichnungen erinnert werden: Das vorgegebene, in beliebiger Weise geformte Gebiet heißt *physikalisches Gebiet*, während unter dem Begriff *logisches Gebiet* ein Gebiet mit einer einfachen geometrischen konvexen Form, beispielsweise ein Quadrat, verstanden wird. Mit P wird wie üblich das physikalische und mit L das logische Gebiet bezeichnet. Die Methode erzeugt Gitter auf Flächen in der Ebene, P und L sind demnach Teilmengen des $\mathbb{R}^2$, entsprechend dem 2. Fall aus Kapitel 1.2.1. Durch die Koordinatenachsen x und y werde das physikalische, durch ϕ und ψ das logische Gebiet beschrieben. Gleichzeitig werden ϕ und ψ als zwei skalare Felder aufgefaßt:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (x,y) &\mapsto \phi(x,y), \\ \psi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (x,y) &\mapsto \psi(x,y). \end{aligned}$$

Es bezeichne f eine bijektive Abbildung von P auf L, die sich aus ϕ und ψ zusammensetzt:

$$\begin{aligned} f : P &\rightarrow L, \\ (x,y) &\mapsto (\phi(x,y), \psi(x,y)). \end{aligned}$$

Aufgrund der verlangten Bijektion gelte im folgendem

$$\phi_x \psi_y - \phi_y \psi_x \neq 0.$$

3.3 Die Idee

3.3.1 Der AH-Gittererzeuger

Winslows Idee baut auf einer sehr einfachen Grundidee auf, die von A.A. Amsden und C.W. Hirt stammt. Ziel war es, ein möglichst glattes Gitter auf einem Gebiet P zu erzeugen, um den Fehler der mit einem Differenzenverfahren berechneten Lösung des Problems gering zu halten. Sie suchten nach einer Abbildung g von L nach P, die sich aus den Abbildungen x und y zusammensetzt und die Ränder homöomorph aufeinander abbildet:

$$
\begin{aligned}
g : L &\rightarrow P, \\
(\phi, \psi) &\mapsto (x(\phi, \psi), y(\phi, \psi)), \\
g(\partial L) &= \partial P \quad \text{homöomorph.}
\end{aligned}
$$

Diese Abbildung sollte zudem die Gitterlinien des Quadrates auf glatte Linien in P abbilden.

Ihre Idee war nun, eine Abbildung zwischen diesen Gebieten zu suchen, die sich aus zwei harmonischen Funktionen zusammensetzt, d.h. deren Komponenten die Laplace-Gleichungen erfüllen. Die Höhenlinien der harmonischen Funktionen bilden dann die Gitterlinien. Der Vorteil dieser Wahl ist offensichtlich, wenn man die Glattheitseigenschaften und das für harmonische Abbildungen geltene Maximumprinzip betrachtet. Die Gitterlinien des logischen Gebietes werden so auf steige, glatte und sich nicht selbst schneidene Höhenlinien über dem physikalischen Gebiet abgebildet. Die Gittererzeugung besteht damit aus dem Lösen von

$$
\begin{aligned}
x_{\phi\phi} + x_{\psi\psi} &= 0, \\
y_{\phi\phi} + y_{\psi\psi} &= 0
\end{aligned}
$$

mit den Dirichlet-Randwertbedingungen, die sich aus den Formen des logischen und des physikalischen Gebietes ergeben. Solange es sich bei P um ein konvexes Gebiet handelt, ist nach dem Theorem von T. Rado (siehe folgenden Abschnitt) die Bijektivität der Abbildung garantiert, d.h. das Innere von L wird auf das Innere von P abgebildet. Ist das physikalische Gebiet jedoch nicht konvex, so besteht die bereits angesprochene Gefahr eines *Spillovers*. Das Gitter überlappt an einigen Stellen des Gebietes und die Gitterlinien fallen teilweise außerhalb von P. Damit ist diese Methode für nicht-konvexe Gebiete i.a. unbrauchbar, für konvexe Gebiete aber sehr gut, so daß sie als Basis für weitere Entwicklungen diente.

3.3.2 Das Theorem von T. Rado

Einen grundlegenden Vorteil, den die harmonischen Abbildungen mit sich bringen, zeigt folgender Satz.

Satz 3.1 (Theorem von Rado) *Es seien L und P beschränkte und einfach zusammenhängende Gebiete in der Ebene. Ist L konvex und f eine harmonische Abbildung mit*

$$\begin{aligned} f : P &\to L, \\ (x, y) &\mapsto (\phi(x, y), \psi(x, y)), \end{aligned}$$

derart, daß ∂P homöomorph auf ∂L durch f abgebildet wird, so ist die Jacobi-Determinante von f im Innern von P ungleich Null, d.h.

$$\phi_x \psi_y - \phi_y \psi_x \neq 0$$

für alle $(x, y) \in P$.

Beweis: Es bezeichne $\mathring{P}$ das Innere von P. Angenommen, es existiere ein Punkt $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathring{P}$ mit

$$\phi_x(p_0)\psi_y(p_0) - \phi_y(p_0)\psi_x(p_0) = 0,$$

d.h. die Spalten der Jacobi-Matrix sind linear abhängig, so daß es $c_1, c_2 \in \mathbb{R}, (c_1, c_2) \neq (0, 0)$ gibt mit

$$\begin{aligned} c_1\phi_x(p_0) + c_2\psi_x(p_0) &= 0, \\ c_1\phi_y(p_0) + c_2\psi_y(p_0) &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Man betrachtet nun die Hilfsfunktion h definiert durch

$$h(x, y) := c_1\phi(x, y) + c_2\psi(x, y).$$

Da f harmonisch ist, hat man $\Delta\phi = \Delta\psi = 0$ und somit

$$\Delta h = c_1\Delta\phi + c_2\Delta\psi = 0.$$

Also ist h eine harmonische Funktion, deren Gradient wegen (3.1) an der Stelle p_0 verschwindet, d.h.

$$\operatorname{grad} h(p_0) = c_1 \operatorname{grad} \phi(p_0) + c_2 \operatorname{grad} \psi(p_0) = 0.$$

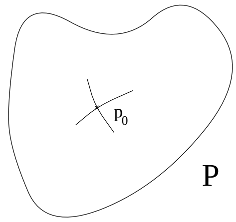
Aus diesem Grund kann die Taylorentwicklung von h um p_0 geschrieben werden als

$$\begin{aligned} h(x, y) &= h(x_0, y_0) + Dh(p_0)[(x, y) - p_0] + S_2 + S_3 + \dots \\ &= h(x_0, y_0) + \operatorname{grad} h(p_0)[(x, y) - p_0] + S_2 + S_3 + \dots \\ &= h(x_0, y_0) + S_2 + S_3 + \dots, \end{aligned}$$

wobei mit S_k Polynome k-ter Ordnung bezeichnet werden. Nach dem Knotentheorem von Courant [16] hat die Niveaumenge

$$N := \{p \in P | h(p) = h(p_0)\}$$

daher mindestens vier Strahlen in P, die von p_0 ausgehen. Es soll nun gezeigt werden, daß alle Strahlen getrennt zum Rand führen, also mindestens vier Schnittpunkte mit dem Rand existieren. Dazu ist eine Fallunterscheidung notwendig:



1. Fall: Nimmt man nun an, daß ein Strahl im Innern von P abbricht, so folgt, daß es dort ein lokales Maximum von h gibt. Da h, wie oben gezeigt, harmonisch ist, folgt dann mit dem Maximumprinzip, daß h konstant auf P ist mit $h(p) \equiv h(p_0) = c_1\phi + c_2\psi$ für alle $(\phi, \psi) \in L$. Daher ist L die Gerade
$$L = \{(\phi, \psi) | c_1\phi + c_2\psi = h(p_0)\}.$$
P würde somit von f auf die Gerade L abgebildet werden, das Bild des Randes ∂P läge somit auf dieser Geraden. Das aber steht im Widerspruch zur Homöomorphieeigenschaft von f bzgl. des Randes.

2. Fall: Nun gibt es noch die Möglichkeit, daß es sich bei der Höhenlinie um eine geschlossene Kurve handelt. Dann existiert aber ein lokales Extremum innerhalb dieser Kurve, so daß auch hier nach dem Maximumprinzip h konstant auf P ist. Der Widerspruch folgt dann in Analogie zum ersten Fall.

Abbildung 3.2: Erster und zweiter Fall

Also führen die Strahlen bis zum Rand und schneiden ihn mindestens viermal. Nun sei $p_1 \in N \cap \partial P$, also einer dieser Randpunkte. Dann gilt
$$f(p_1) = (\phi(p_1), \psi(p_1)).$$
Es gilt
$$c_1\phi(p_1) + c_2\psi(p_1) = h(p_1) = h(p_0),$$

da $p_1 \in N$. Analog gilt dieses für die anderen drei Randpunkte p_r, sie liegen also auf einer Geraden. Das ist aber ein Widerspruch zur Konvexität von L, denn eine Gerade, die durch das Innere eines konvexen Gebietes läuft, kann den Rand des Gebietes nicht mehr als zweimal schneiden. Die Gerade $\{(\phi,\psi)|c_1\phi + c_2\psi = h(p_0)\}$ läuft durch das Innere von L, da p_0 aus $\mathring{P}$ stammt. Damit hat man einen Widerspruch und die Behauptung ist bewiesen. □

3.3.3 Der Winslow-Gittererzeuger

Winslows Gedankengang bestand nun aus folgende Überlegungen: Da bei einer Abbildung, die sich aus den Lösungen der Laplace-Gleichungen zusammensetzt, vom logischen Gebiet auf das eventuell nicht-konvexe physikalische Gebiet die Möglichkeit für das Auftreten eines Spillovers existiert, ist es sinnvoller, eine Abbildung f von P auf das in jedem Fall konvexe logische Gebiet L zu suchen und diese dann umzukehren. Dann sind die Voraussetzungen für den Satz von Rado erfüllt, so daß man eine Transformation von P nach L im vereinbarten Sinne erhält.

Er wendet also den AH-Erzeuger zunächst auf die umgekehrte Richtung an. Die Umkehrtransformation f^{-1} bildet dann das logische Gebiet auf das physikalische Gebiet ab, und zwar so, daß kein Punkt aus L außerhalb von P abgebildet wird. Für eine Abbildung f von P nach L gelte also

$$\begin{aligned} f : P &\rightarrow L, \\ (x,y) &\mapsto (\phi(x,y), \psi(x,y)), \\ f|_{\partial P} &= \partial L \quad \text{homöomorph,} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{yy} &= 0, \\ \psi_{xx} + \psi_{yy} &= 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

wobei die Randbedingungen dadurch festgelegt werden, daß vier auszuwählende Randstücke von P auf die vier Seiten eines Quadrates L abgebildet werden. In Abbildung 3.4 wird das Teilstück $a \subset \partial P$ auf $a' \subset \partial L$, b auf b', usw. abgebildet. Die Höhenlinien der Funktionen ϕ und ψ über P, mit

$$\begin{aligned} &\phi = \omega_0^\phi, \quad \phi = \omega_1^\phi, \quad \ldots \quad \phi = \omega_m^\phi, \\ &\psi = \omega_0^\psi, \quad \psi = \omega_1^\psi, \quad \ldots \quad \psi = \omega_n^\psi \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 0 = \omega_0^\phi < \omega_1^\phi < \ldots < \omega_m^\phi = \phi_{max}, \\ 0 = \omega_0^\psi < \omega_1^\phi < \ldots < \omega_n^\psi = \psi_{max} \end{aligned}$$

werden durch $\phi(x,y)$ und $\psi(x,y)$ auf die zu den Achsen parallelen Gitterlinien des Quadrates abgebildet, da ϕ und ψ die Koordinaten des logischen Gebietes bezeichnen.

Die Höhenlinien der harmonischen Funktionen ϕ und ψ auf P sind die gesuchten Gitterlinien, deren Schnittpunkte die gesuchten Gitterpunkte. Durch die Randbedingungen

$$\begin{array}{rcll} \psi &=& 0 & \text{auf} \quad a \subset \partial P, \\ \psi &=& \psi_{max} & \text{auf} \quad c \subset \partial P, \\ \phi &=& 0 & \text{auf} \quad d \subset \partial P, \\ \phi &=& \phi_{max} & \text{auf} \quad b \subset \partial P \end{array}$$

und vorherigem Festlegen von a, b, c und d wird das Aussehen des Gitters dann letztlich bestimmt. Werden die vier Eckpunkte gleichmäßig, mit relativ gleichmäßigen Abständen verteilt, so ergeben die Höhenlinien von ϕ und ψ ein gleichmäßiges Gitter mit „nicht zu spitzen Winkeln", siehe Bild 3.3. Gesucht sind nun die Äquipotentiale L_i^ϕ und L_i^ψ, d.h. alle (x, y)-Paare, die in ϕ oder ψ eingesetzt die Konstanten ω_i^ϕ bzw. ω_i^ψ liefern. Die Diskretisierung der Intervalle $[0, \phi_{max}]$, bzw. $[0, \psi_{max}]$ durch die Niveaus

$$(\omega_i^\phi)_{i=1,..,m} \quad \text{und} \quad (\omega_j^\psi)_{j=1,..,n}$$

ist nicht notwendig als äquidistant vorausgesetzt. Sie können beliebig aus der Menge der reellen Zahlen gewählt werden. In der Anwendung jedoch findet man meist eine äquidistante Diskretisierung. Die Äquipotentiale lauten

$$\begin{array}{ll} L_i^\phi := \{(x, y) \in P | \phi(x, y) = \omega_i^\phi \in \mathbb{R}\} & \text{für} \quad i = 0, 1, ..., m, \\ L_i^\psi := \{(x, y) \in P | \psi(x, y) = \omega_j^\psi \in \mathbb{R}\} & \text{für} \quad j = 0, 1, ..., n, \end{array}$$

wobei

$$\begin{array}{lcl} \omega_0^\phi = 0 & , & \omega_m^\phi = \phi_{max}, \\ \omega_0^\psi = 0 & , & \omega_n^\psi = \psi_{max}. \end{array}$$

Je nach gewünschter Netzdichte wählt man die Konstanten ω_i^ϕ und ω_j^ψ. Zur Ermittlung der Schnittpunkte der Netzlinien in P betrachte man beispielsweise den Punkt $P_{21} \in P$ aus Figur 3.4. Dieser Punkt ist Schnittpunkt der

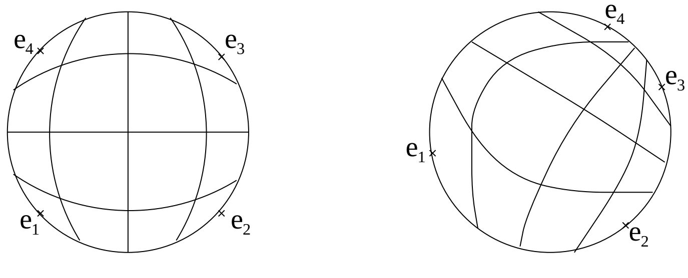


Abbildung 3.3: Unterschiedliche Verteilung der Eckpunkte e_i bei gleichem Gebiet

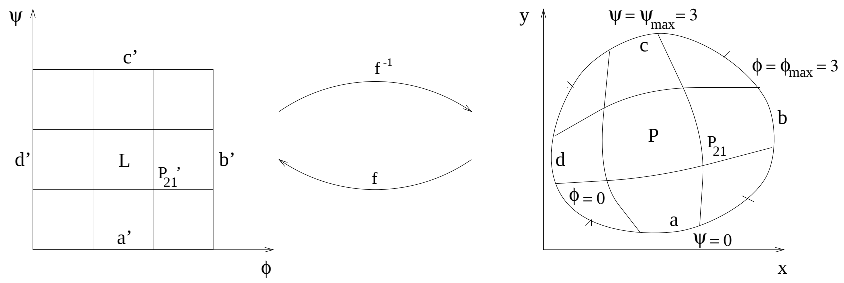


Abbildung 3.4: Transformation von L nach P und Höhenlinien auf P

Höhenlinie $\phi = \omega_2^\phi$ mit der Höhenlinie $\psi = \omega_1^\psi$. Berechnet man nun die umgekehrte Abbildung von f

$$\begin{aligned} f^{-1} =: g : L &\rightarrow P, \\ (\phi, \psi) &\mapsto (x(\phi, \psi), y(\phi, \psi)), \end{aligned}$$

so können ϕ und ψ entsprechend in g eingesetzt werden, so daß g damit die Koordinaten für die Punkte in P liefert. Für P_{21} lauten sie

$$P_{21} = g(\omega_2^\phi, \omega_1^\psi) = (x(\omega_2^\phi, \omega_1^\psi), y(\omega_2^\phi, \omega_1^\psi)).$$

Die Laplace-Gleichungen müssen daher in Variablen von $x(\phi, \psi)$ und $y(\phi, \psi)$ ausgedrückt werden. Abschnitt 3.4 behandelt diese Transformation vom logischen zum physikalischen Raum.

Unter Umständen kann die Wahl der Eckpunkte in P – und damit die Festlegung der Randstücke a, b, c und d in P – zu äußerst spitzen Winkeln bei den Schnittpunkten der Gitterlinien führen (vgl. Figur 3.3).

Wo es sinnvoll ist, derartige Situationen zu vermeiden, können zusätzliche Bedingungen an ϕ und ψ zur Generierung eines orthogonalen Gitters aufgestellt werden:

Satz 3.2 *Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\phi, \psi : G \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Abbildungen mit $\phi_x\psi_y - \psi_x\phi_y \neq 0$. Es gelte*

$$\begin{aligned} \phi_x &= \psi_y, \\ \phi_y &= -\psi_x. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dann sind ϕ und ψ harmonisch und die sich aus ϕ und ψ zusammensetzende Abbildung

$$\begin{aligned} f : G &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (\phi(x, y), \psi(x, y)) \end{aligned}$$

ist eine winkeltreue Transformation.

Beweis: Wegen 3.3 hat man

$$\begin{aligned} \phi_{xx} &= \psi_{yx}, \\ \phi_{xy} &= \psi_{yy}, \\ \phi_{yx} &= -\psi_{xx}, \\ \phi_{yy} &= -\psi_{xy}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

so daß

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \phi_{xx} + \phi_{yy} &= \psi_{yx} - \psi_{xy} &= 0, \\ \Delta\psi &= \psi_{xx} + \psi_{yy} &= -\phi_{yx} + \phi_{xy} &= 0. \end{aligned}$$

Daher sind ϕ und ψ harmonisch.

Durch Identifikation von $\overline{\mathbb{R}^2}$ mit $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und $z := x + \mathbf{i}y$ ist eine Funktion

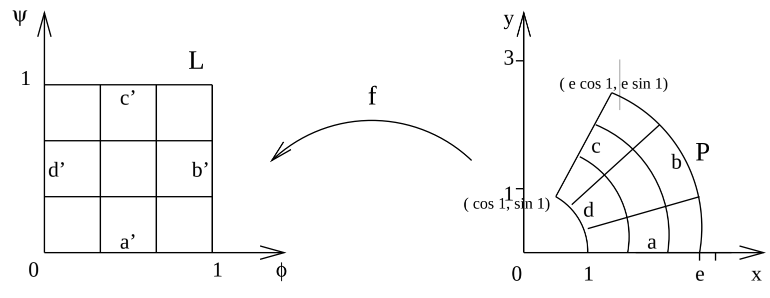
$$f : G \to \hat{\mathbb{C}}$$

durch

$$z \mapsto \phi(z) + \mathbf{i}\psi(z)$$

definiert.
Wegen (3.3) genügt f den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Daher ist f holomorph. Die Umkehrung f^{-1} existiert wegen $\phi_x\psi_y - \phi_y\psi_x \neq 0$. Da f bijektiv ist, ist f^{-1} holomorph und f damit biholomorph. Dies ist äquivalent mit: f ist konform. $\square$

Zur Illustration soll nun ein einfaches Beispiel betrachtet werden. Das logische Gebiet sei das Einheitsquadrat $L = \{(\phi, \psi) | 0 \leq \phi, \psi \leq 1\}$. Das physikalische Gebiet sei durch einen Kreisringsektor wie in der Abbildung gegeben.



Die gesuchte Transformation $f : P \to L$ mit $f(x,y) = (\phi(x,y), \psi(x,y))$ soll a auf a', b auf b', usw. abbilden und außerdem der Bedingung (3.3) des vorangegangenen Satzes genügen. Man überlegt sich unmittelbar, daß die durch

$$\begin{aligned} \phi(x,y) &= \log(\sqrt{x^2 + y^2}), \\ \psi(x,y) &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned}$$

gegebene Transformation $f : P \mapsto L$ die Randbedingungen erfüllt, denn $f^{-1} : L \mapsto P$ ist durch

$$\begin{aligned} x(\phi, \psi) &= \exp(\phi) \cdot \cos\psi, \\ y(\phi, \psi) &= \exp(\phi) \cdot \sin\psi \end{aligned}$$

gegeben, wodurch die Randstücke auf ihre entsprechenden Randstücke in P abgebildet werden. Die Bedingung (3.3) des obigen Satzes ist erfüllt:

$$\begin{aligned} \phi_x &= \frac{x}{x^2 + y^2} \\ &= \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \right) \cdot \frac{1}{x} \\ &= \psi_y \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \phi_y &= \frac{y}{x^2 + y^2} \\ &= \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \right) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot y \\ &= -\psi_x. \end{aligned}$$

Nach dem vorausgegangenen Satz ist f harmonisch und führt das orthogonale Gitter von P in das orthogonale Gitter von L über.

An dieser Stelle sollte der Riemannsche Abbildungsatz erwähnt werden. Er behandelt die Existenz und Eindeutigkeit konformer Abbildungen zwischen einfach zusammenhängenden Gebieten, in diesem Fall L und P. Eine solche Abbildung ist durch die Angabe eines Punktes und einer Richtung jeweils im logischen und im physikalischen Raum, die einander entsprechen sollen, eindeutig bestimmt. Man kann es auch so formulieren: Die Angabe von drei Parametern, beispielsweise drei Punkte des Randes von L, die auf drei Punkte des Randes von P abgebildet werden sollen, bestimmt die eindeutige konforme Abbildung. Für die Gittererzeugung bedeutet das, daß die Existenz einer konformen Transformation eher unwahrscheinlich ist, denn gefordert ist die Abbildung der Ränder aufeinander, also weit mehr, als der Riemannsche Abbildungssatz vorschreibt. Im vorangegangenen Beispiel war es so, daß die durch drei Randpunkte bestimmte konforme Abbildung den Rest des Randes von L auf den Rand von P abbildete, was im Regelfall nicht so sein muß.

3.4 Transformation der Laplace-Gleichungen

Zur Transformation der Laplace-Gleichungen muß zunächst folgendes gezeigt werden.

Satz 3.3 *Für* $\phi(x,y) = \phi(x(\phi,\psi), y(\phi,\psi))$ *und* $\psi(x,y) = \psi(x(\phi,\psi), y(\phi,\psi))$ *und* $J = x_\psi y_\phi - x_\phi y_\psi \neq 0$ *gelten folgende vier Gleichungen:*

$$\begin{aligned} \phi_x &= -\tfrac{1}{J} y_\psi, \\ \phi_y &= \tfrac{1}{J} x_\psi, \\ \psi_x &= \tfrac{1}{J} y_\phi, \\ \psi_y &= -\tfrac{1}{J} x_\phi. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Beweis: Durch Ableiten von ϕ nach ϕ und ψ, und Ableiten von ψ nach ψ und ϕ erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial\phi} &= 1 = \phi_x x_\phi + \phi_y y_\phi, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\psi} &= 0 = \phi_x x_\psi + \phi_y y_\psi, \\ \frac{\partial\psi}{\partial\psi} &= 1 = \psi_x x_\psi + \psi_y y_\psi, \\ \frac{\partial\psi}{\partial\phi} &= 0 = \psi_x x_\phi + \psi_y y_\phi, \end{aligned}$$

in Matrixschreibweise ausgedrückt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} x_\phi & x_\psi \\ y_\phi & y_\psi \end{pmatrix}}_{A} = E,$$

wobei E die 2×2-Einheitsmatrix bezeichne. Daraus folgt $M = A^{-1}$. Durch Berechnen von A^{-1} und Komponentenvergleich folgt die Behauptung, denn

$$\begin{pmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{pmatrix} = M = A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{J} y_\psi & \frac{1}{J} x_\psi \\ \frac{1}{J} y_\phi & -\frac{1}{J} x_\phi \end{pmatrix}.$$

$\square$

Damit ist es also gelungen, die partiellen Ableitungen von ϕ und ψ nach x und y durch die partiellen Ableitungen von x und y nach ϕ und ψ auszudrücken. Durch nochmaliges Ableiten der Gleichungen (3.5) nach x und y erhält man die transformierten Laplace-Gleichungen.

Satz 3.4 (Transformierte Laplace-Gleichungen) *1. Für* $J \neq 0$ *sind*

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{J^3}[x_\psi(\alpha y_{\phi\phi} - 2\beta y_{\phi\psi} + \gamma y_{\psi\psi}) - y_\psi(\alpha x_{\phi\phi} - 2\beta x_{\phi\psi} + \gamma x_{\psi\psi})] = 0, \\ \tfrac{1}{J^3}[x_\phi(\alpha y_{\phi\phi} - 2\beta y_{\phi\psi} + \gamma y_{\psi\psi}) - y_\phi(\alpha x_{\phi\phi} - 2\beta x_{\phi\psi} + \gamma x_{\psi\psi})] = 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha &= x_\psi^2 + y_\psi^2, \\ \beta &= x_\phi x_\psi + y_\phi y_\psi, \\ \gamma &= x_\phi^2 + y_\phi^2 \end{aligned} \tag{3.7}$$

die transformierten Gleichungen der Laplace-Gleichungen (3.2).

2. Für $J \neq 0$ sind diese äquivalent zu dem quasilinearen System

$$\begin{aligned} \alpha x_{\phi\phi} - 2\beta x_{\phi\psi} + \gamma x_{\psi\psi} &= 0, \\ \alpha y_{\phi\phi} - 2\beta y_{\phi\psi} + \gamma y_{\psi\psi} &= 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Beweis:

1. Wegen $\phi_x = -\frac{1}{J} y_\psi$ folgt

$$\begin{aligned} \phi_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(-\frac{1}{J} y_\psi) \\ &= \frac{1}{J^2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(J) y_\phi - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(y_\psi) J\right] \\ &= \frac{1}{J^2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} J\right) y_\psi - \frac{1}{J}(y_{\psi\psi} y_\phi^2 x_\psi - y_{\psi\psi} y_\phi y_\psi x_\phi - y_{\psi\phi} y_\phi y_\psi x_\psi + y_{\psi\phi} y_\psi^2 x_\phi)\right] \\ &= \frac{1}{J^3}(x_{\psi\psi} y_\phi^2 y_\psi - x_{\psi\phi} y_\psi^2 y_\phi + y_{\phi\psi} y_\phi y_\psi x_\psi \\ &\quad -y_{\phi\phi} y_\psi^2 x_\psi - x_{\phi\psi} y_\phi y_\psi^2 + x_{\phi\phi} y_\psi^3 \\ &\quad -y_{\psi\psi} y_\phi y_\psi x_\phi + y_{\psi\phi} y_\psi^2 x_\phi - y_{\psi\psi} y_\phi^2 x_\psi \\ &\quad +y_{\psi\psi} y_\phi y_\psi x_\phi + y_{\psi\phi} y_\phi y_\psi x_\psi - y_{\psi\phi} y_\psi^2 x_\phi) \\ &= \frac{1}{J^3}(x_{\psi\psi} y_\phi^2 y_\psi - y_{\phi\phi} y_\psi^2 x_\psi - y_{\psi\psi} y_\phi^2 x_\psi \\ &\quad +x_{\phi\phi} y_\psi^3 - 2x_{\phi\psi} y_\psi^2 y_\phi + 2y_{\psi\phi} y_\phi y_\psi x_\psi). \end{aligned}$$

Analog wird ϕ_{yy} berechnet:

$$\begin{aligned} \phi_{yy} &= \frac{1}{J^3}(-2x_{\psi\phi} x_\psi x_\phi y_\psi + 2y_{\phi\psi} x_\phi x_\psi^2 + x_{\psi\psi} x_\phi^2 y_\psi \\ &\quad -y_{\phi\phi} x_\psi^3 + x_{\phi\phi} x_\psi^2 y_\psi - y_{\psi\psi} x_\psi x_\phi^2). \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{yy} &= \frac{1}{J^3}[x_\psi(-y_{\phi\phi} y_\psi^2 - y_{\phi\phi} x_\psi^2 + 2y_{\psi\phi} y_\phi y_\psi \\ &\quad +2y_{\phi\psi} x_\phi x_\psi - y_{\psi\psi} y_\phi^2 - y_{\psi\psi} x_\phi^2) \\ &\quad -y_\psi(-x_{\phi\phi} y_\psi^2 - x_{\phi\phi} x_\psi^2 + 2x_{\phi\psi} y_\psi y_\phi \\ &\quad +2x_{\psi\phi} x_\psi x_\phi - x_{\psi\psi} y_\phi^2 - x_{\psi\psi} x_\phi^2)] \\ &= \frac{1}{J^3}[x_\psi[(-x_\psi^2 - y_\psi^2) y_{\phi\phi} + 2(y_\phi y_\psi + x_\phi x_\psi) y_{\phi\psi} \\ &\quad -(y_\phi^2 + x_\phi^2) y_{\psi\psi}] - y_\psi[(-x_\psi^2 - y_\psi^2) x_{\phi\phi} + 2(y_\psi y_\phi \\ &\quad +x_\psi x_\phi) x_{\phi\psi} - x_{\psi\psi}(y_\phi^2 + x_\phi^2)]] \\ &= 0, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{yy} &= \frac{1}{J^3}[x_\psi(\alpha y_{\phi\phi} - 2\beta y_{\phi\psi} + \gamma y_{\psi\psi}) \\ &\quad -y_\psi(\alpha x_{\phi\phi} - 2\beta x_{\phi\psi} + \gamma x_{\psi\psi})] \\ &= 0 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha &= x_\psi^2 + y_\psi^2, \\ \beta &= x_\phi x_\psi + y_\phi y_\psi, \\ \gamma &= x_\phi^2 + y_\phi^2. \end{aligned}$$

Analog berechne man $\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0$. Damit ist die erste Behauptung bewiesen.

2. "$\Leftarrow$"
Mit (3.8) gelten trivialerweise die transformierten Laplace-Gleichungen (3.6).
"$\Rightarrow$"
Definiere

$$\begin{aligned} u &:= \alpha y_{\phi\phi} - 2\beta y_{\phi\psi} + \gamma y_{\psi\psi}, \\ v &:= \alpha x_{\phi\phi} - 2\beta x_{\phi\psi} + \gamma x_{\psi\psi}. \end{aligned}$$

Dann sind die Gleichungen (3.8) äquivalent zur Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} x_\psi & y_\psi \\ x_\phi & y_\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} = 0.$$

Sie gilt genau dann, wenn $u = 0$ und $v = 0$, oder wenn $J = 0$. Voraussetzung war aber $J \neq 0$, daher folgt die Behauptung. $\square$

Nun hat man die Gleichungen (3.6) als die transformierten Laplace-Gleichungen gefunden. Die Lösungen dieser Gleichungen $x(\phi, \psi)$ und $y(\phi, \psi)$ bilden zusammen die Transformation des Quadrates L auf das physikalische Gebiet P, die Höhenlinien auf P erhält man durch Einsetzen von jeweils einem konstanten ϕ und variablen ψ und umgekehrt. Die Schnittpunkte der Höhenlinien sind die Bilder dieser Paare (ϕ, ψ). So werden schließlich die orthogonalen Gitterlinien des Quadrates auf die Höhenlinien von ϕ und ψ auf P transformiert.

Satz 3.5 *Eine notwendige Bedingung für ein orthogonales Schneiden der Höhenlinien von ϕ und ψ in P für die zu den transformierten Laplace-Gleichungen* (3.6) *äquivalenten Gleichungen* (3.8) *ist*

$$\beta = 0.$$

Beweis: Es sei $f(\phi, \psi) = (x(\phi, \psi), y(\phi, \psi))$ eine Transformation von L auf P, die die Gitterlinien des Quadrates winkel- und orientierungstreu auf P abbildet. Die Abbildung x ist daher als Realteil, y als Imaginärteil einer biholomorphen Funktion aufzufassen:

$$f(\phi, \psi) = x(\phi, \psi) + \mathbf{i} y(\phi, \psi).$$

Es gelten daher die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x_\phi &= y_\psi, \\ x_\psi &= -y_\phi. \end{aligned}$$

Für $\beta = x_\phi x_\psi + y_\phi y_\psi$ folgt sofort

$$\begin{aligned} \beta &= x_\phi x_\psi + y_\phi y_\psi \\ &= -x_\phi y_\phi + y_\phi x_\phi \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. $\square$

Es sei nun f die Abbildung, die sich aus den Lösungen der Gleichung (3.8), also aus ϕ und ψ, zusammensetzt:

$$f(\phi, \psi) = (x(\phi, \psi), y(\phi, \psi)).$$

Berechnet man die Koeffizienten der ersten Fundamentalform von f, so sieht man schnell, daß α, β und γ mit ihnen übereinstimmen, denn es gilt

$$f_\phi = \begin{pmatrix} x_\phi \\ y_\phi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f_\psi = \begin{pmatrix} x_\psi \\ y_\psi \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle f_\phi, f_\phi \rangle = x_\phi^2 + y_\phi^2 = \gamma, \\ g_{12} = g_{21} &= \langle f_\phi, f_\psi \rangle = x_\phi x_\psi + y_\phi y_\psi = \beta, \\ g_{22} &= \langle f_\psi, f_\psi \rangle = x_\psi^2 + y_\psi^2 = \alpha. \end{aligned}$$

Bemerkung: Nach Satz 2.2 gilt für die Transformation f, daß f genau dann ein orthogonales Gitter erzeugt, wenn $g_{12} = \beta = 0$ ist. Damit folgt die Behauptung des letzten Satzes dann ebenfalls sofort.

Bemerkung: Durch Setzen von $\beta = 0$ in den Gleichungen (3.8) erhält man i.a. kein orthogonales Gitter. Zu lösen wären in diesem Fall die Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha x_{\phi\phi} + \gamma x_{\psi\psi} &= 0, \\ \alpha y_{\phi\phi} + \gamma y_{\psi\psi} &= 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Für die Lösungen x und y dieser Gleichungen gilt jedoch nicht notwendigerweise $\beta = x_\phi x_\psi + y_\phi y_\psi = 0$.

Betrachte beispielsweise die Transformation $f(\phi, \psi) = (\phi, \phi - \psi)$. Obwohl die Komponenten $x = \phi$ und $y = \phi - \psi$ den Gleichungen (3.9) genügen, ist $\beta = -1 \neq 0$ und das Gitter über P nicht orthogonal.

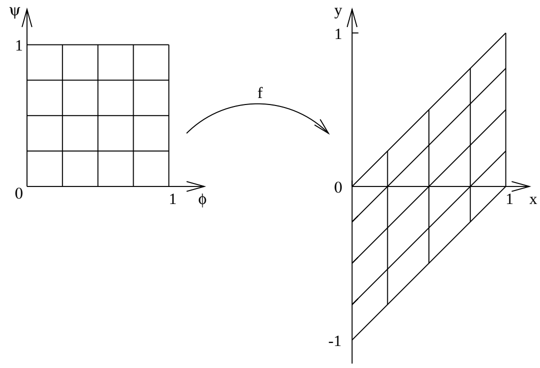


Abbildung 3.5: Durch $f(\phi, \psi) = (\phi, \phi - \psi)$ generiertes nicht-orthogonales Gitter

3.5 Implementierung der Methode

Das im Anhang A aufgelistete FORTRAN-Programm HTTM berechnet ein Gitter auf einem auszuwählenden physikalischen Gebiet mit Hilfe der Winslow-Gleichungen (3.8) und vorgegebenen Randgitterpunkten. Grundlage für das Programm mit seinen 8 Unterprogrammen

- B_PARM.for
- BSET.for
- COEFF_ITTM.f
- DISCRTZ.for
- SELECT.for
- SOR_9PT_XY.f
- TFI.for
- TS.for

bilden die Programme TFI und ITTM, die unter anderem in Knupp-Steinberg [1] enthalten sind.

Das Programm TFI (transfinite Interpolation) ist ein Gittererzeugungsprogramm, das einen sehr einfachen Algorithmus durchführt. Dieses Programm ist mit Kürzungen und kleinen Abänderungen in HTTM enthalten. Die zum Programm TFI gehörenden Unterprogramme sind als „*.for"-Programme kenntlich gemacht. Mit Hilfe der in Knupp-Steinberg [1] beschriebenen transfiniten Interpolation wird ein Gitter erzeugt, das dem Programm dann als Anfangsgitter dient.

ITTM stellt die inhomogene Version der Winslow-Methode dar. Thompson, Thames und Mastin, drei sehr bedeutende Namen in der Geschichte der numerischen Gittererzeugung (siehe beispielsweise [15]), griffen die Idee Winslows auf und führten zusätzlich Gewichtsfunktionen ein, die Einfluß auf die Gitterkonstruktion im Innern des physikalischen Gebietes nehmen, indem diese Gewichtsfunktionen in die Winslow-Gleichungen eingehen, so daß schließlich zwei inhomogene Gleichungen zu lösen sind. Auf eine detaillierte Ausführung dieses Vorgehens soll verzichtet werden; für die Winslow-Methode genügt die Betrachtung der homogenen Gleichungen (3.8). Daher wurde das Programm an einigen Stellen vereinfacht. Hinzugefügt wurde zur Liste der auswählbaren physikalischen Gebiete die Form einer schematischen Darstellung der linken menschlichen Herzkammer, deren Konstruktion anhand von Daten aus Daniel D. Streeters "Gross-morphology and fiber geometry of the heart"[11] erfolgte. Es sei noch darauf hingewiesen, daß das Programm ITTM in der Weise, wie es durch [1] gegeben wird, falsch ist und damit nicht das gewünschte Gitter liefert. Der Fehler liegt dabei im Aufruf der wegen der Parameter unzulässigen Subroutine SOR_9PT. Ungeändert werden nach Berechnung des Anfanggitters keine weiteren Iterationen durchgeführt und die Daten des Anfanggitters ausgegeben. Für das Programm HTTM wurde daher der zweimalige Aufruf dieses Unterprogramms – jeweils zum Lösen beider Gleichungen (3.8) – durch den Aufruf der Subroutine SOR_9PT_XY ersetzt, die die Winslow-Gleichungen gleichzeitig behandelt und gültige Parameter enthält, so daß eine tatsächliche Iteration stattfinden kann. Weiterhin wurde das Programm durch einen Befehl zum Speichern der Daten in eine von *Mathematica* lesbare Datei ergänzt, so daß dann auch der dazugehörige Plot erzeugt werden konnte.

Im Groben verläuft der Algorithmus folgendermaßen: Der Benutzer hat das physikalische Gebiet in seiner Form und Größe, sowie die Anzahl der Gitterzellen auszuwählen. Mit Hilfe der transfiniten Interpolation und Angaben über die Verteilung der Randgitterpunkte wird ein Anfangsgitter auf dem Gebiet berechnet. Dieses geschieht mit dem ersten Programmteil, bestehend aus den sechs Unterprogrammen (*.for) zur transfiniten Interpolation.

Nun werden die Metrik-Koeffizienten α, β und γ der Winslow-Gleichungen mit Hilfe der Gitterpunkte $(x_{ij}^{old}, y_{ij}^{old})$ des Anfangsgitters errechnet und als Werte in die Gleichungen (3.8) eingesetzt. So wird aus dem quasilinearen System ein lineares System, das durch finite Differenzen approximiert und mit Hilfe des 9-Punkte-SOR-Verfahrens gelöst wird. Das ergibt dann die neuen Werte für die Gitterpunkte $(x_{ij}^{new}, y_{ij}^{new})$. Liegen die Differenzen der alten und neuen Werte betragsmäßig über der vorgegebenen Toleranzgrenze tol, werden die alten Werte durch die Neuen ersetzt und die Berechnung der Metrik-Koeffizienten mit allen folgenden Schritten wiederholt. Das geschieht solange, bis die Toleranzgrenze durch die Differenz erfüllt wird, d.h. bis für alle $i = \{2, \ldots, n\}$ und $j = \{2, \ldots, m\}$

$$\begin{aligned} |x_{ij}^{old} - x_{ij}^{new}| &\leq tol, \\ |y_{ij}^{old} - y_{ij}^{new}| &\leq tol \end{aligned}$$

gilt, so daß das Programm dann durch Ausgabe der endgültigen Gitterdaten in die Datei GITTER.dat endet.

3.5.1 Die Subroutinen

Dieser Abschnitt beinhaltet die Beschreibung aller Unterprogramme in der Reihenfolge des Programmablaufes.

Erzeugung des Anfangsgitters durch TFI

Das Hauptprogramm startet mit dem Aufruf der Subroutine

DISCRTZ

ohne Parameterliste. Der Benutzer gibt die Anzahl m und n $(m, n \leq 80)$ der gewünschten Gitterzellen in x- und y-Richtung ein, aus denen dann die 7 globalen Konstanten dx, dy, tdx, tdy, dxx, dxy und dyy berechnet werden. Die Konstanten $dx = 1/m$ und $dy = 1/n$ geben die Schrittweiten in ξ- und η-Richtung auf dem logischen Gebiet, dem Einheitsquadrat, bei gleichmäßiger Verteilung der Randgitterpunkte an. Die Konstanten $tdx = 2\,dx$ und $tdy = 2\,dy$ gehen in die Aufstellung der Differenzenquotienten (siehe Subroutine COEFF_ITTM), dxx, dxy und dyy in die Subroutine SOR_9PT_XY ein.

Das Hauptprogramm fährt fort mit dem Aufruf der Subroutine

SELECT,

in der der Benutzer das physikalische Gebiet auszuwählen hat. In dieser Arbeit werden beispielhaft fünf Standardgebiete mit einer Einheitsgröße zur Auswahl angeboten. Man hat aber auch die Möglichkeit, eine andere Größe zu bestimmen, wobei das Verhältnis der Seiten zueinander aber immer gleich bleibt. Das Programm legt somit die Eckpunkte (a_i, b_i) für $i = \{1, \ldots, 4\}$ – alle Gebiete zeichnen sich durch vier logische Ecken aus – fest. An dieser Stelle des Programms ist es natürlich auch möglich, andere Gebiete aus den vorgegebenen zu konstruieren, bzw. ganz neue Gebiete zu beschreiben und sie dort einzubauen. Ein Beispiel für ein solches Gebiet ist die schematische Form des Querschnittes einer menschlichen linken Herzkammer, die sich aus zwei verschieden geformten halben Hufeisen zusammensetzt.

Die Routine TS wird folgendermaßen aufgerufen:

CALL TS(*tb, tt, tl, tr*).

Bei den Parametern dieser Routine handelt es sich um Referenzparameter vom Typ Real. TS hat die Aufgabe, die Randgitterpunkte auf dem logischen Gebiet festzulegen. Bei m Gitterzellen in ξ-Richtung müssen also $m+1$ Gitterpunkte auf dem unteren (bottom) und oberen Rand (top), bei n Gitterzellen in η-Richtung $n+1$ Gitterpunkte für links (left) und rechts (right) berechnet werden. Die Parameter tb und tt sind daher Vektoren der Länge $m+1$, tl und tr Vektoren der Länge $n+1$ mit reellen Komponenten.

Die Routine setzt zunächst die Vektoren so, daß die Randpunkte gleichmäßig auf den jeweiligen Randstücken verteilt werden, somit sind die Gitterzellen auf dem logischen Gebiet Rechtecke der Größe $(1/m) \times (1/n)$. Da die maximale Anzahl der einzelnen Gitterzellen in jeweils eine Richtung 80 ist, sind die Längen der Vektoren tb, tt, tl und tr durch 81 beschränkt. Die Berechnung der Vektorkomponenten erfolgt auf einfache Weise durch

$$\begin{array}{rclcl} tb(i) & = & (i-1)\cdot\frac{1}{m} & = & tt(i) \text{ für } i=1,\ldots,m+1, \\ tl(j) & = & (j-1)\cdot\frac{1}{n} & = & tr(j) \text{ für } j=1,\ldots,n+1. \end{array}$$

Nachdem die gleichmäßige Aufteilung feststeht, erfolgt die Abfrage nach der Art einer Alternativverteilung der Randgitterpunkte. Wählt der Benutzer die Standardparametrisierung uniform, so fährt das Programm bereits mit der nächsten Routine fort, im anderen Fall wird die Parametrisierung jedes Randstückes abgefragt. Dabei gibt es drei Wahlmöglichkeiten:

1. <u>uniform:</u> Entscheidet sich der Benutzer bei einem Randstück für die erste Möglichkeit, der einheitlichen Verteilung, so werden die bereits berechneten Werte $tb(i)$ (bzw. $tt(i), tl(j), tr(j)$) für das jeweilige Randstück übernommen, d.h. das Programm springt direkt zur nächsten Routine.

2. <u>quadratic:</u> Bei Wahl einer quadratischen Parametrisierung sind die drei Konstanten $xi0, Q0$ und $R0$ mir den Optionen

$$\begin{array}{ccccc} 0 & < & xi0 & < & 1, \\ 0 & < & Q0 & < & 1, \\ 0 & < & R0 & & \end{array}$$

   anzugeben. Nach Überprüfung von Monotonieeigenschaften dieser Konstanten werden die Vektorkomponenten des jeweiligen Randes berechnet. Betrachtet werden soll beispielsweise das untere Randstück tb des logischen Gebietes. Ist die i-te Komponente des Vektors, der die Randgitterpunkte gleichmäßig verteilt, kleiner oder gleich der angegebenen Konstante $xi0$, so berechnet sich der neue Wert der i-ten Komponenete durch

$$tb(i) = \frac{i-1}{m}\cdot\left(\frac{Q0}{xi0}\left(2-\frac{i-1}{m\cdot xi0}\right) - R0\left(1-\frac{i-1}{m\cdot xi0}\right)\right), \qquad (3.10)$$

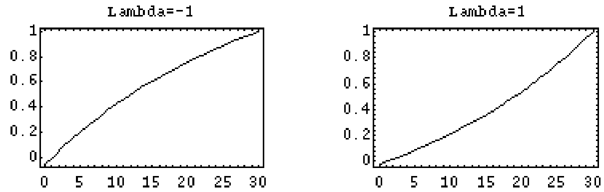
   im anderen Fall durch

$$tb(i) = 1-\frac{i-1}{m}\left(\frac{1-Q0}{1-xi0}\cdot\left(2-\frac{1-\frac{i-1}{m}}{1-xi0}\right) - R0\left(1-\frac{1-\frac{i-1}{m}}{1-xi0}\right)\right) (3.11)$$

3. <u>stretched:</u> Im letzten Fall – der gestreckten Parametrisierung – ist vom Benutzer ein Streckungsparameter λ mit $0 \neq \lambda \leq 10$ anzugeben. Die Funktion

$$tb(i) = \frac{e^{\lambda\frac{i-1}{m}}-1}{e^{\lambda}-1}, \qquad i=1,\ldots,m+1 \qquad (3.12)$$

bestimmt die i-te Komponente des tb-Vektors. Für $\lambda > 0$ findet eine Stauchung, für $\lambda < 0$ eine Streckung der Randgitterpunkte statt, wie auch das folgende Bild der Funktion $tb(i)$ zeigt.



Die Abfrage nach der Art der Parametrisierung wird nun für jedes einzelne Randstück vorgenommen, so daß bei Beendigung dieser Routine die Vektorkomponenten $tb(i)$, $tt(i)$, $tl(i)$ und $tr(i)$ für $i = 1, \ldots, m+1$ und $j = 1, \cdots, n+1$ feststehen.

Die direkt folgende Routine B_PARM wird im Hauptprogramm durch

CALL B_PARM (*tb, tt, tl, tr, xb_bdry, yb_bdry, xt_bdry, yt_bdry, xl_bdry, yl_bdry, xr_bdry, yr_bdry*)

aufgerufen. Die Parameter haben folgende Bedeutung:

tb, tt, tl, tr: Werteparameter vom Typ Real. Ihre Vektorkomponenten geben die Lage der Randgitterpunkte auf den jeweiligen Randstücken an und werden durch die vorangegangene Routine TS gegeben.

xb_bdry, yb_bdry: Referenzparameter vom Typ Real. Gibt als Vektor durch die Komponenten die x- bzw. y-Koordinaten der den im logischen Gebiet liegenden unteren Randpunkten entsprechenden Punkte im physikalischen Gebiet an.

xt_bdry, yt_bdry: analog *xb_bdry, yb_bdry* für obere Randgitterpunkte des logischen Gebietes.

xl_bdry, yl_bdry: s.o. für linke Randgitterpunkte.

xr_bdry, yr_bry: s.o. für rechte Randgitterpunkte.
Diese Routine verteilt die Randgitterpunkte auf dem physikalischen Gebiet im gleichen Verhältnis, wie auf dem logischen Gebiet. Dabei gehen auch die Eckpunkte (a_i, b_i) des physikalischen Gebietes ein, die in der Routine SELECT bestimmt worden sind. Je nach Form des physikalischen Gebietes bestimmt sich die Verteilung der Eckpunkte. Auf eine detaillierte Beschreibung für jedes einzelne Gebiet soll hier verzichtet werden, da sie im Programmtext gut nachvollziehbar sind.

Der Befehl

CALL BSET(*xb_bdry, yb_bdry, xt_bdry, yt_bdry, xl_bdry, yl_bdry, xr_bdry, x, y*)

ruft die Routine BSET auf, die die Randgitterpunkte in Matrixschreibweise durchnumeriert. Eingangsparameter sind xb_bdry, yb_bdry, xt_bdry, yt_bdry, xl_bdry, yl_bdry, xr_bdry, und yr_bdry. Ausgeliefert werden die Parameter x und y vom Typ Real. Für die Referenzparameter sind Felder der Größe 81×81 reserviert. Jedem Gitterpunkt, auch den inneren Gitterpunkten, wird ein Indexpaar (ij) zugeordnet, das dann in einer Feldkomponente gespeichert wird. In dieser Routine werden zunächst nur die Randgitterpunkte durchnumeriert und in die dafür vorgesehene Stelle gesetzt. Die Zahl i beschreibt dabei die vertikale, die Zahl j die horizontale Durchnumerierung. Gezählt wird von unten nach oben, bzw. von links nach rechts (vom logischen Gebiet aus betrachtet). Die Ausgabekoordinaten dieser Routine lauten dann

$$\begin{aligned}
(x_{i,1}, y_{i,1}) &:= (xb_bdry(i), yb_bdry(i)),\\
(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) &:= (xt_bdry(i), yt_bdry(i)),\\
(x_{1j}, y_{1,j}) &:= (xl_bdry(i), yl_bdry(i)),\\
(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) &:= (xr_bdry(i), yr_bdry(i)).
\end{aligned}$$

Nachdem nun die Randgitterpunkte bestimmt und durchnumeriert sind, werden die übrigen Koordinaten – also die inneren Gitterpunkte –

$$(x_{ij}, y_{ij}) \qquad , i = 2, \ldots, m, j = 2, \ldots, n$$

berechnet.
Dazu wird nun im Hauptprogramm die Routine

TFI

aufgerufen, die als Werteparameter die gleichen wie die vorangegangene Routine BSET benötigt. Referenzparameter sind wieder x und y zur Beschreibung der Koordinaten der inneren Gitterpunkte. Zur Berechnung dieser Punkte dient die Formel zur transfiniten Interpolation aus Knupp-Steinberg [1]:

$$\begin{aligned}
x_{i,j} &= (1-s)\, xb_bdry(i) + s\, xt_bdry(i) + (1-r)\, xl_bdry(j)\\
&\quad +r\, xr_bdry(j) - [rs\, xr_bdry(n+1) +\\
&\quad (1-r)s\, xl_bdry(n+1) + r(1-s)\, xr_bdry(1)\\
&\quad +(1-r)(1-s)\, xl_bdry(1)],\\
y_{i,j} &= (1-s)\, yb_bdry(i) + s\, yt_bdry(i) + (1-r)\, yl_bdry(j)\\
&\quad +r\, yr_bdry(j) - [rs\, yr_bdry(n+1) +\\
&\quad (1-r)s\, yl_bdry(n+1) + r(1-s)\, yr_bdry(1)\\
&\quad +(1-r)(1-s)\, yl_bdry(1)].
\end{aligned}$$

TFI berechnet die $(m-1) \times (n-1)$ Gitterpunkte und speichert sie in den Feldern x und y.

Nach Beendigung dieser Routine liegen (x_{ij}, y_{ij}) für $i = 1, \ldots,$ m+1 und $j = 1, \ldots, n+1$ vor. Diese Punkte bilden das Anfangsgitter für das weitere Programm.

Erzeugung des endgültigen Gitters

Nun arbeitet das Programm weiter mit der Routine

COEFF_ITTM.

Werteparameter sind die durch TFI gelieferten Anfangsgitterpunkte x und y vom Typ Real und die Randgitterpunkte, die durch BSET bestimmt werden. Vom gleichem Typ mit gleicher Feldgröße – 81×81 – sind die Ausgangsparameter a_{11}, a_{12}, a_{22}. Mit zentralen Differenzen werden nun die Tangenten in jedem inneren Gitterpunkt berechnet:

$$\begin{aligned} x_{xi} &= (x_{i+1,j} - x_{i-1,j})/tdx, \\ x_{eta} &= (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})/tdy, \\ y_{xi} &= (y_{i+1,j} - y_{i-1,j})/tdx, \\ y_{eta} &= (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})/tdy. \end{aligned}$$

Diese Werte bestimmen dann die lokalen Metriken g_{ij} $(i, j = 1, 2)$ in den inneren Gitterpunkten nach Gleichung (3.7), also

$$\begin{aligned} g_{11} &= x_\xi^2 + y_\xi^2, \\ g_{12} &= x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta, \\ g_{22} &= x_\eta^2 + y_\eta^2. \end{aligned}$$

COEFF_ITTM berechnet nun weiter

$$\begin{aligned} a_{11} &= g_{22}, \\ a_{12} &= -2g_{12}, \\ a_{22} &= g_{11}, \end{aligned}$$

die die Koeffizienten für die zu lösenden Winslow-Gleichungen (3.8) darstellen. Durch Einsetzen werden aus den quasilinearen Gleichungen lineare Gleichungen, die in der letzten Routine

SOR_9PT_XY

mit Hilfe des SOR-Verfahrens gelöst werden.

3.6 Numerische Ergebnisse

In diesem Kapitel werden beispielhaft einige Gebiete vorgestellt, auf denen der Winslow-Gittererzeuger angewendet wurde. Die gezeigten Gitter sind Ergebnisse des aufgelisteten Programms HTTM.

Konstruktion von Gittern auf dem Einheitsquadrat

Der einfachste Fall eines physikalischen Gebietes stellt das Einheitsquadrat dar, auf dem die Konstruktion eines Gitters ohne Randgittervorgaben, d.h. mit äquidistanten Gitterlinien, ein triviales Problem ist. Nun können, wie in

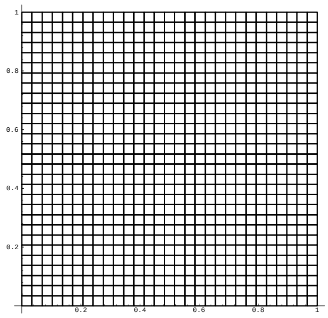


Abbildung 3.6: Quadrat ohne Zusatzbedingungen

der Programmbeschreibung ausgeführt, die Gitterpunkte auf dem Rand durch Angabe von Parametern in verschiedene Richtungen gelenkt werden, so daß sie nicht mehr äquidistant angeordnet sind. Eine derartige Verschiebung kann wesentlich zum Aussehen des Gitters im Innern des Gebietes beitragen. In Abbildung 3.7 sind zwei Gitter zu sehen, deren Gitterpunkte des rechten und oberen Randes zur rechten oberen Ecke gelenkt wurden, d.h. ihre Abstände zueinander vergrößern sich mit der Entfernung zur Ecke. Bei dem ersten Gitter erfolgte die Berechnung der jeweiligen fehlenden Komponenten mit Hilfe der quadratischen Funktion (3.10) bzw. (3.11). Die x-Komponenten der 30 Gitterpunkte des rechten Randes beispielsweise sind 1, die y-Komponenten berechnen sich aus der Funktion

$$
\begin{aligned}
tr(i) &= \begin{cases} \frac{i-1}{29}\left(\frac{0.8}{0.6}\left(2-\frac{i-1}{29\cdot 0.6}\right)-\left(1-\frac{i-1}{29\cdot 0.6}\right)\right) & i=1,\ldots,18 \\ 1-\left(1-\frac{i-1}{29}\right)\left(\frac{1-0.8}{1-0.6}\left(2-\frac{1-\frac{i-1}{29}}{1-0.6}\right)-\left(1-\frac{1-\frac{i-1}{29}}{1-0.6}\right)\right) & i=19,\ldots,30 \end{cases} \\
&= \begin{cases} -\frac{5(i-88)(i-1)}{7569} & i=1,\ldots,18 \\ -\frac{5i^2-300i+1136}{3364} & i=19,\ldots,30 \end{cases},
\end{aligned}
$$

die durch Einsetzen der Parameter $xi0$, $Q0$ und $R0$ in (3.10) und (3.11) entsteht. Der untere und linke Rand behält jeweils die äquidistante Aufteilung.

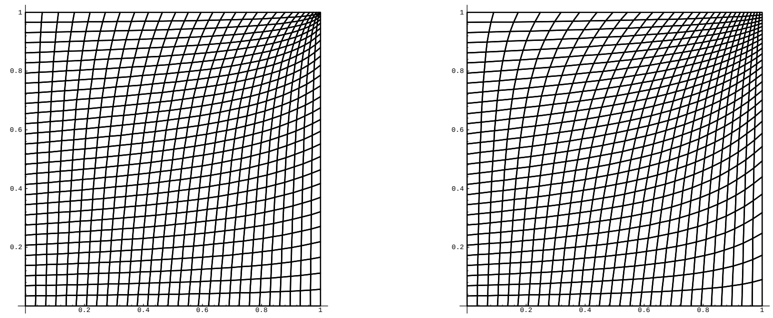


Abbildung 3.7: Quadrat mit quadratischer Streckung der rechten und oberen Randpunkte durch die Parameter $xi0 = 0.6$, $Q0 = 0.8$, $R0 = 1$ und mit exponentieller Streckung durch $\lambda = -2.5$

Eine exponentielle Verteilung mit ähnlichem Aussehen kann mit der Funktion (3.12) durch Angabe des Parameters λ erreicht werden und ist in der zweiten Teilabbildung von 3.7 dargestellt. Mit $\lambda = -2.5$ lautet die Funktion, die für die Verteilung zuständig ist, für den rechten Rand

$$tr(i) \quad = \quad \frac{e^{-2.5\frac{i-1}{29}} - 1}{e^{-2.5} - 1} \quad \text{für } i = 1, \ldots, 30.$$

Das Programm ermöglicht somit eine Verfeinerung der Gitter an bestimmten Bereichen der Ränder und zwangsläufig auch in Regionen im Innern, wie die Abbildungen zeigen. Das ist sinnvoll zur Lösung von partiellen Differen-

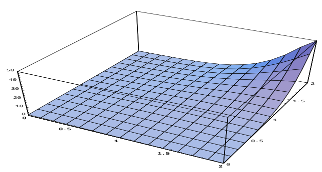


Abbildung 3.8: Lösungsfläche mit Anstieg zu einem Randpunkt

tialgleichungen, deren Lösungen zum Rand hin einen starken Anstieg verzeichnen, wie sie zum Beispiel in Abbildung 3.8 zu sehen ist. Diese Art der Gitterverfeinerung versagt aber offensichtlich dann, wenn eine Verfeinerung nicht zu den Rändern hin, sondern zu einem Punkt oder einer Region im Innern des Gebietes erwünscht ist. Wie dieses Problem zu lösen ist, zeigt A.S. Dvinsky in seiner Arbeit zur numerischen Gittererzeugung, die Gegenstand des nächsten Kapitels ist.

Gitterkonstruktion auf einem L-förmigen Gebiet

Als erste Anwendung des Winslow-Gittererzeugers auf ein nicht-konvexes Gebiet soll das L-förmige Gebiet aus Abbildung 3.9 betrachtet werden. Wie im ersten und dritten Kapitel dargestellt, besteht bei einem derartigen Gebiet bei Anwendung des AH-Gittererzeugers die Spillovergefahr. Durch Anwenden der Winslow-Gleichungen beugt man dieser Gefahr vor, so daß eine Gitterkonstruktion wie in der Abbildung zu sehen ist. Bei diesem Gebiet ist zu

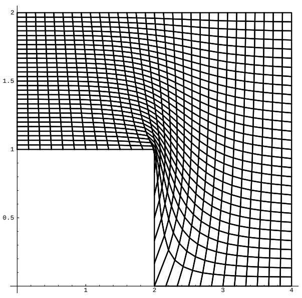


Abbildung 3.9: Ein durch den Winslow-Gittererzeuger entstandenes Gitter

beachten, daß es zwar aus sechs physikalischen, aber nur aus vier logischen Ecken besteht, die den vier Ecken des Einheitsquadrates zugeordnet werden.

Gitter auf einem Talgebiet

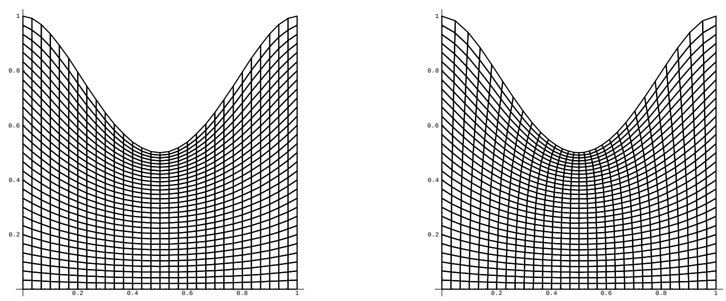


Abbildung 3.10: Talgebiet mitäquidistanter Randpunktverteilung und Konzentration der oberen Rangitterpunkte im Tiefpunkt durch quadratische Streckung mit den Parametern $xi0 = Q0 = R0 = 0.5$

Bis jetzt hat man Gebiete betrachtet, die durch Geraden begrenzt sind. In Abbildung 3.10 ist ein Talgebiet zu sehen, dessen oberer Rand eine gekrümmte Linie ist. Durch quadratische Streckung der Punkte auf der oberen Randkurve können die Punkte zum Tiefpunkt verdichtet werden.

Gitterkonstruktion um ein stromlinienförmiges Objekt

Das Gebiet der Abbildung 3.11 findet eine Anwendung in der Strömungsmechanik. Das eingeschlossene Gebiet stellt den Querschnitt eines stromlinienförmigen Körpers dar. Die logischen Ecken des Gebietes befinden sich alle auf der senkrechten Geraden vom Ursprung zum Punkt (0,2). Die linke und rechte Kante des logischen Gebiets werden durch die Strecken vom Ursprung zum Punkt (0,1) und vom Punkt (0,1) bis zum Punkt (0,2) repräsentiert. Durch Variation der Parameter kann das Objekt gestreckt oder gestaucht und

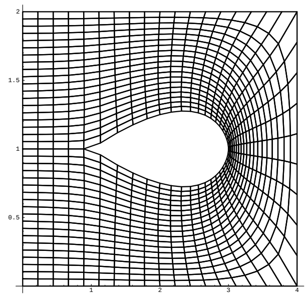


Abbildung 3.11: Querschnitt eines stromlinienförmigen Objektes

so dem vorliegenden praktischen Problem angepaßt werden. Die Abbildung

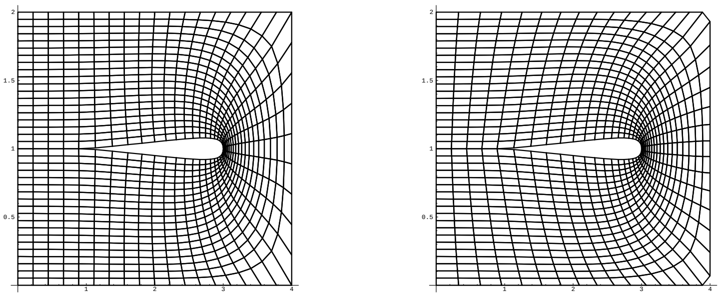


Abbildung 3.12: Querschnitt eines Flugzeugruders

3.12 zeigt beispielsweise den Querschnitt eines Flugzeugruders. Mit Hilfe des konstruierten Gitters wird die Untersuchung von Windströmungen um das Ruder ermöglicht.

Die linke menschliche Herzkammer

Zur Berechnung von Spannungszuständen der Herzkammerwände ist die Diskretisierung eines Querschnittes eines Herzens notwendig. Das erste Gebiet der Abbildung 3.13 zeigt einen schematischen Querschnitt einer linken menschlichen Herzkammer mit dem von HTTM erzeugtem Standardgitter. Durch

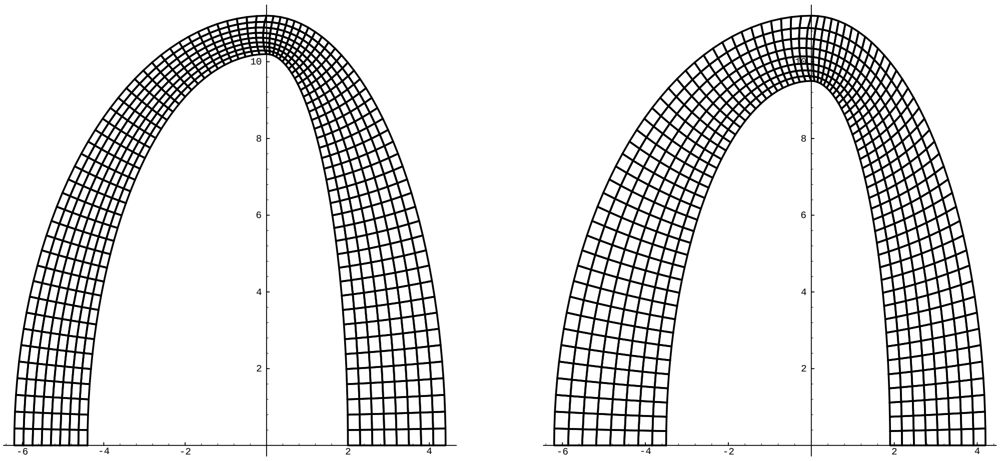


Abbildung 3.13: Schematische Darstellung eines Querschnittes der linken menschlichen Herzkammer nach den Maßen von D. Streeter und mit Variation der Maße

geeignete Eckpunktwahl können verschiedene Größen und Formen der Herzkammer nachgebildet und so z.B. eine Hypertrophie im Rahmen der hypertensiven Herzerkrankungen dargestellt werden.

Gitter auf weiteren Gebieten

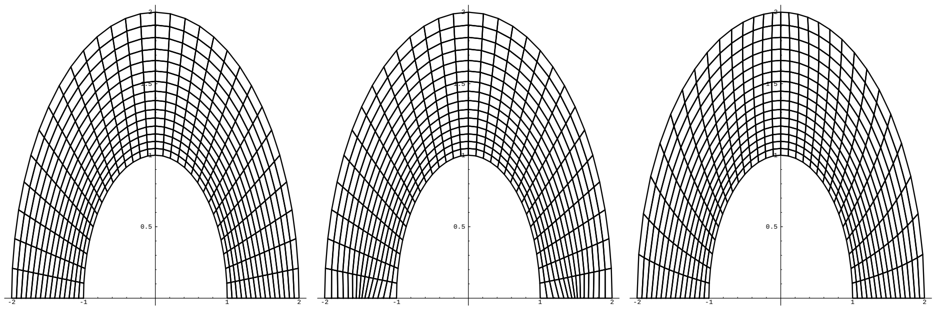


Abbildung 3.14: Hufeisen

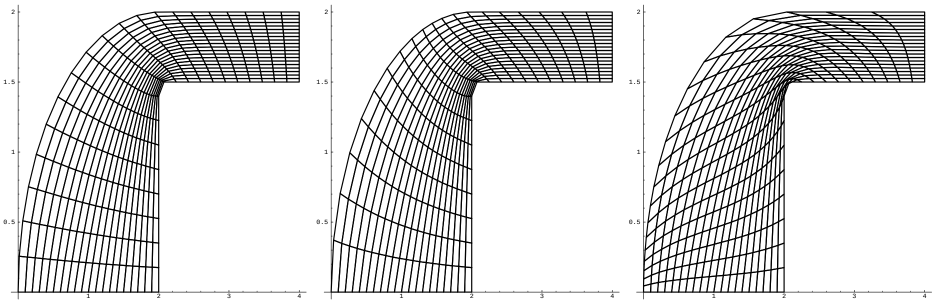


Abbildung 3.15: Stufenform

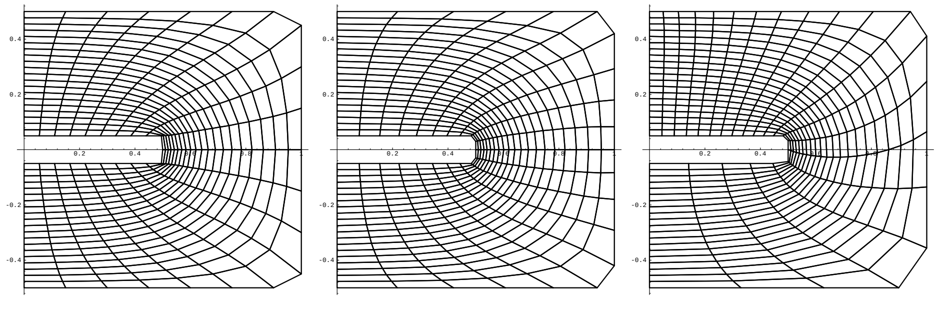


Abbildung 3.16: C-Form

Kapitel 4

Adaptive Gittererzeugung durch harmonische Abbildungen auf Riemann-Mannigfaltigkeiten

4.1 Einführung

In Kapitel 3 wurde eine elementare Methode zur Gittererzeugung vorgestellt, die mit Hilfe harmonischer Abbildungen logische auf physikalische Gebiete abbildet und auf diese Weise Gitter erzeugt. Diese Methode wurde Ende der 80-er Jahre durch Arkardy S. Dvinsky von der Creare Incorporation in Hanover, New Hampshire, zu einer Methode weiterentwickelt, die durch Anwenden des sogenannten HSY-Theorems eine hohe Zuverlässigkeit für die Existenz und Eindeutigkeit von bijektiven Abbildungen zwischen physikalischen und logischen Räumen garantiert. Die Winslow-Methode basiert auf harmonischen Abbildungen, die als Lösungen der Laplace-Gleichungen verstanden werden und deren Äquipotentiale die Gitterlinien bilden. Dvinsky verallgemeinert die Methode, indem er den Flächenbegriff auf den Begriff der Riemann-Mannigfaltigkeiten ausdehnt und mit einer erweiterten Definition der harmonischen Abbildungen arbeitet. Letzteres ist wesentlich für die Methode, da das HSY-Theorem diese Definition als Grundlage hat. Man erhält die gesuchten harmonischen Abbildungen durch Lösen der Euler-Lagrange-Gleichungen, die im euklidischen Fall den Laplace-Gleichungen entsprechen und sich somit auf die Winslow-Gleichungen beschränken. Diese erweiterte Methode liefert ein klassisches Beispiel für eine adaptive Gittererzeugungsmethode, bei der das Gitter sowohl geometrisch als auch physikalisch angepaßt wird, so wie es Abschnitt 1.2.2 zur adaptiven Gittererzeugung beschreibt.

4.2 Die Idee

Dieser Abschnitt soll einen groben Überblick der Vorgehensweise von Dvinsky vermitteln, die in den folgenden Abschnitten detailliert dargestellt wird.

Die Grundidee ist identisch mit der der Winslow-Methode: man sucht eine harmonische Abbildung gemäß der erweiterten Definition zwischen dem logischen und dem physikalischen Raum und transformiert mit dieser Abbildung das orthogonale Gitter des logischen Gebietes zu einem randangepaßten Gitter auf dem physikalischen Gebiet. Das zu lösende Problem, ein System partieller Differentialgleichungen, wird entsprechend transformiert und kann dann mit Hilfe des transformierten Gitters gelöst werden.

Die harmonischen Abbildungen erhält man durch Lösen der Euler-Lagrange-Gleichungen, wie man gleich sehen wird.

Zusätzlich macht man sich die geometrische Bedeutung des Metriktensors zu Nutze. Im zweiten Kapitel wurde gezeigt, wie er als Maß für die Verzerrung einer Fläche in einem Punkt durch eine Abbildung interpretiert werden kann. Durch die Wahl eines geeigneten Metriktensors kann die Verzerrung an bestimmten Stellen des betrachteten Gebietes in gewünschte Richtungen gelenkt werden, so daß das Gitter beispielsweise entlang einer Linie oder einer Kurve verfeinert wird.

Nun gibt es, wie bereits angedeutet, zwei Formen der Gitteranpassung. Unter der geometrischen Anpassung versteht man die Anpassung des Gitters anhand vorgegebener geometrischer Daten, speziell entlang von Kurven, die als Nullstellenmengen gegeben werden. Um die geometrische Anpassung durchführen zu können, muß bekannt sein, wo es überhaupt sinnvoll ist, das Gitter zu verfeinern, also wie die Kurven lauten, entlang derer die verfeinerte Verzerrung durchgeführt werden soll. Es wird daher vorausgesetzt, daß Eigenschaften der Lösung, wie ein sehr starker Anstieg in bestimmte Richtungen entlang einer Kurve, a priori bekannt sind. Diese Lösungseigenschaften mit Kenntnis der Kurve ist die Basis der geometrischen Anpassung. Sind schon vor Lösen der partiellen Differentialgleichung beispielsweise betragsmäßig hohe Gradienten an bestimmten Stellen bekannt, so ist ein feineres Gitter an diesen Stellen sinnvoll, da es in der Regel zu einer besseren Approximation der Lösung führen wird. Im letzten Kapitel wird anhand eines Beispiels die geometrische Anpassung gezeigt. Die Lösung der in diesem Beispiel betrachteten Differentialgleichung hat das Aussehen eines zentrierten Berges, so daß also sinnvoller Weise eine Verfeinerung entlang eines zentrierten Kreises angestrebt wird. Wie die Metrik dabei zu wählen ist, wird in folgenden Abschnitten erklärt.

Sind keine Lösungseigenschaften im Vorhinein bekannt, so kann die Metrik nicht direkt bestimmt werden, und man arbeitet mit der physikalischen Anpassung: Das Problem wird zunächst auf dem Einheitsquadrat mit einheitlichen Gitterzellen gelöst, so daß man ein Ergebnis erhält, anhand dessen schon grobe Lösungseigenschaften erkennbar sind. Auf Grund der grob erkennbaren Lösungseigenschaften erstellt man nun eine charakteristische Funktion, die die Metrik im physikalischen Gebiet festlegt. Nun sucht man die eindeutig bestimmte harmonische Abbildung zwischen dem physikalischen und dem logischen Gebiet, einem Rechteck mit euklidischer Metrik, die nach dem HSY-Theorem existieren muß. Wie bei der Winslow-Methode liefert diese harmonische Abbildung ein adaptives Gitter, auf welchem dann das Problem mittels krummliniger Koordinaten, zentraler Differenzen und dem SOR-Verfahren gelöst wird. An dieser Lösung werden Lösungseigenschaften nun schon klarer erkennbar. Man formuliert die neue charakteristische Funktion und erhält eine neue Metrik für das physikalische Gebiet und somit eine harmonische Abbildung, die dann wieder ein verbessertes Gitter erzeugt. So fährt man bis zu einer gewünschten Genauigkeit fort.

Die physikalische Anpassung soll in dieser Arbeit nicht weiter behandelt werden. In [10] wird die physikalische Anpassung am Beispiel der Konvektions-Diffusions-Gleichung durchgeführt.

Die folgenden Abschnitte umfassen die erweiterte Definition harmonischer Abbildungen, das HSY-Theorem und eine detaillierte Beschreibung der Teilschritte.

4.3 Harmonische Abbildungen

Bisher hat man harmonische Abbildungen als Lösungen einer partiellen Differentialgleichungen der Form

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

auf einem Gebiet Ω mit Nebenbedingungen auf dem Rand $\partial\Omega$ kennengelernt. Dabei heißt $\Delta u = 0$ Laplace- oder Potentialgleichung. Die Lösungen u beschreiben physikalische Potentiale, wie beispielsweise das elektrostatische Potential bei der Ladungsverteilung. Wichtig bei derartigen Randwertaufgaben ist, daß sie sinnvoll gestellt sind, d.h. die gesuchten Funktionen sind im Innern des Gebietes Ω zweimal stetig differenzierbar und auf $\partial\Omega$ stetig. Mit dieser Form harmonischer Abbildungen arbeitete Winslow in seiner Gittererzeugungsmethode.

Um nun die erweiterte Definition harmonischer Abbildungen einzuführen, ist es sinnvoll, die physikalischen Zusammenhänge des Energieintegrals zu erwähnen.

Im $\mathbb{R}^3$ bewege sich ein Objekt, dessen Bewegung durch die Raumkurve

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : [0, \tau] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

im $\mathbb{R}^3$ beschrieben werden kann. Dabei gibt $\mathbf{x}(t)$ die Raumkoordinate eines Objektes zum Zeitpunkt t an. Ziel ist es, diese Raumkurve zu bestimmen, also die Bewegung als Kurve darzustellen. Die Geschwindigkeit wird durch die Ableitung von $\mathbf{x}$ nach der Zeitvariablen t

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

beschrieben. Für den Ruhezustand gilt $\mathbf{x}(t) = c =$ konstant, also $\dot{\mathbf{x}} = 0$. Die Gesamtenergie des Objektes im betrachteten Zeitraum ist durch

$$\begin{array}{rcl} L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) & \mapsto & L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \end{array}$$

gegeben. Über die Gesamtenergie ist es nun möglich, die Raumkurve $\mathbf{x}$ bestimmen. Da eine Bewegung immer mit minimaler Energie stattfindet, sich das Objekt also mit minimaler Energie gemäß der Raumkurve $\mathbf{x}$ bewegt, gilt für die gegebene Gesamtenergie L

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \to minimal.$$

Aus der Variationsrechnung ist bekannt, daß die gesuchte Raumkurve der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0$$

genügt. Aus dieser Gleichung erhält man direkt eine Differentialgleichung für die Raumkurve $\mathbf{x}$, die sogenannte Bewegungsgleichung.

Nun wird die Energie nicht im physikalischen, sondern im mathematischen Sinne aufgefaßt. Statt von Flächen wird im folgenden von Mannigfaltigkeiten gesprochen, die als eine Verallgemeinerung der sonst betrachteten Punktmengen – also Kurven und Flächen – gesehen werden. Eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum, der sich lokal nicht wesentlich vom $\mathbb{R}^2$ unterscheidet. Für die Gittererzeugung auf Flächen in der Ebene genügt die Betrachtung der zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten. Unter einer Riemann-Mannigfaltigkeit versteht man eine Mannigfaltigkeit, auf der ein Maßtensor $(g_{\alpha\beta})$ eingeführt ist. Dieser Maßtensor induziert ein Skalarprodukt im Tangentialraum, so daß die Längenmessung von Flächenkurven ermöglicht wird. Hier geht die Bedeutung der schon beschriebenen ersten Fundamentalform ein.

Betrachtet wird das Energieintegral für Abbildungen zwischen Riemann-Mannigfaltigkeiten. Im folgenden gelte die verkürzende

Einsteinsche Summationskonvention: *Über doppelt auftretende Indices, von denen der eine oben und der andere unten steht, ist zu summieren, z.B.*

$$g_{ik} u^i u^k \quad = \quad \sum_{i,k} g_{ik} u^i u^k.$$

Im Nenner eines Bruches werden Summationsindices nach oben gesetzt:

$$g^{ij} \frac{\partial x}{\partial z^i} \frac{\partial x}{\partial z^j} \quad = \quad \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial x}{\partial z^i} \frac{\partial x}{\partial z^j}.$$

Diese Konvention stammt aus der Relativitätstheorie und verhilft in diesem Bereich zu einer großen Schreiberleichterung.

Auch der folgende Begriff der Energiedichte spielt in der Relativitätstheorie eine Rolle. Auf die physikalische Bedeutung soll hier nicht eingegangen werden, da sie keine Ergebnisse für die numerische Gittererzeugung bringt. Bei näherem Interesse sei auf Eckelt [19] verwiesen.

Definition 4.1 *Es seien X und Z zwei Riemann-Mannigfaltigkeiten der Dimension n mit den Metriktensoren $(g_{\alpha\beta})$ und (G_{ij}) und den Koordinatenkurven $x = (x^1, ..., x^n)$ und $z = (z^1, ..., z^n)$. Es sei $(G^{ij}) = (G_{ij})^{-1}$. Für eine stetig differenzierbare Abbildung $x : Z \to X$ heißt*

$$e(x) := \frac{1}{2} G^{ij}(z) g_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial x^\alpha}{\partial z^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial z^j}$$

die Energiedichte von x.

Über die Energie

$$E(x) = \int_Z e(x) dZ$$

gelangt man nun zur Definition harmonischer Abbildungen.

Definition 4.2 und Satz *Es sei $x : Z \to X$ eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung. Die Energie dieser Abbildung $E(x) = \int_Z e(x) dZ$ sei gegeben. Ist $E(x) < \infty$ und x ein Punkt, der das Energieintegral minimiert, so heißt x harmonisch und erfüllt die dazugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen:*

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial z^k} \sqrt{G} G^{kj} \frac{\partial x^\lambda}{\partial z^j} + G^{kj} \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial z^k} \frac{\partial x^\beta}{\partial z^j} = 0,$$

wobei $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ die Christoffelsymbole zweiter Art von x und $G = \det(G_{ij})$ sind.

Betrachten wir als Riemann-Mannigfaltigkeiten nun ausschließlich Flächen im $\mathbb{R}^2$, deren Abstandsbegriff durch die euklidische Metrik definiert ist, so gilt für die Metriktensoren $g_{\alpha\beta}$, bzw. G_{ij}

$$g_{\alpha\beta} = G_{ij} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d.h. die Krümmungen derartiger Flächen sind Null. Also sind $E_u = E_v = F_u = F_v = G_u = G_v = 0$. Die Christoffelsymbole berechnen sich aus den drei Gleichungssystemen (2.7), so daß

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = 0$$

für alle $\alpha, \beta, \lambda = 1, 2$. In diesem Fall reduzieren sich die Euler-Lagrange Gleichungen also auf die bekannten Laplace-Gleichungen

$$\begin{aligned}\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z^k}\left(G^{kj}\frac{\partial x^\lambda}{\partial z^j}\right) &= \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z^k}\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial z^k}\right) \\ &= x^\lambda_{z^1 z^1} + \ldots + x^\lambda_{z^n z^n}\end{aligned}$$

für $\lambda = 1, \ldots, n$. Der erweiterte Begriff ist damit durchaus verträglich mit der üblichen Definition harmonischer Abbildungen.

Ziel ist es, die neu definierten harmonischen Abbildungen für die Gittererzeugung auf Flächen zu nutzen. Da Flächen als zweidimensionales Analogon einer Riemann-Mannigfaltigkeit aufgefaßt werden können, erfolgt die Summation nur über 1 und 2. Die Metriktensoren sind von der Dimension 2×2.

Das folgende Theorem zeigt, unter welchen hinreichenden Bedingungen harmonische Abbildungen zwischen Riemann-Mannigfaltigkeiten existieren und eindeutig sind.

4.4 Das Theorem von Hamilton, Schön und Yau und seine Anwendung

Für das Theorem von Hamilton, Schön und Yau – HSY-Theorem – werden zwei Riemann-Mannigfaltigkeiten X und Z mit jeweils den Metriken $g_{\alpha\beta}$ und G_{ij} betrachtet.Wie üblich beschreiben ∂X und ∂Z die Ränder der Gebiete. Die Abbildung $\phi : X \to Z$ sei ein Diffeomorphismus zwischen den beiden Riemann-Mannigfaltigkeiten. Die folgende Definition harmonischer Abbildungen ist äquivalent zur vorangegangenen:

Definition 4.3 *Es sei $\phi : X \to Z$ ein Diffeomorphismus zwischen zwei Riemann-Mannigfaltigkeiten und f eine Abbildung mit*

$$\begin{aligned} f : X &\to Z, \\ f|_{\partial X} &= \phi|_{\partial X}. \end{aligned}$$

Das Energiefunktional ist definiert durch

$$E(f) = \frac{1}{2}\int_X \|df\|^2 dX.$$

Die Abbildung f heißt harmonisch, wenn sie das Energiefunktional E minimiert.

Satz 4.1 (Hamilton-Schoen-Yau-Theorem) *Ist die Krümmung von Z nicht positiv und zusätzlich der Rand ∂Z konvex bezüglich seiner Metrik G_{ij}, so existiert eine eindeutig bestimmte harmonische Abbildung*

$$f : X \to Z,$$

die homotop zu ϕ ist, d.h. es existiert eine Familie $g_t : X \to Z, t \in [0,1]$, die ϕ stetig in f überführt, also

$$\begin{aligned} g_0(x) &= \phi(x), \\ g_t(x) &= (1-t)\phi(x) + t\,f(x) \;\; \forall x \in \partial X, t \in [0,1], \\ g_1(x) &= f(x). \end{aligned}$$

Beweis: Der Beweis dieses Satzes ist Inhalt von [10].

Für die Gittererzeugung ist dieser Satz von großer Bedeutung, da er eine hinreichende Bedingung für die Existenz und Eindeutigkeit harmonischer Abbildungen zwischen zwei Riemann-Mannigfaltigkeiten, die hier als zweidimensionale Flächen betrachtet werden, liefert. Die Anwendung auf die Gittererzeugung ist folgendermaßen. Die beiden Riemann-Mannigfaltigkeiten entsprechen dem physikalischen und dem logischen Raum, es sei P dabei das Ausgangsgebiet X und L das Zielgebiet Z.

Auch hier seien L und P Gebiete des $\mathbb{R}^2$. Um von der Summationskonvention Gebrauch machen zu können, werden die Koordinaten des logischen Raumes nun mit (ϕ_1, ϕ_2) und die des physikalischen Raumes mit (x_1, x_2) bezeichnet. Wie bei Winslow ist eine Abbildung von L nach P gesucht, die die Ränder auf Ränder abbildet und harmonisch (jetzt im erweiterten Sinne) ist. Gesucht sind demnach die Lösungen x_1 und x_2 der Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial \phi_k}\sqrt{G}G^{kj}\frac{\partial x_1}{\partial \phi_j} + G^{kj}\Gamma^1_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial \phi_k}\frac{\partial x_\beta}{\partial \phi_j} = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial \phi_k}\sqrt{G}G^{kj}\frac{\partial x_2}{\partial \phi_j} + G^{kj}\Gamma^2_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial \phi_k}\frac{\partial x_\beta}{\partial \phi_j} = 0.$$

Nach dem HSY-Theorem existieren die Lösungen dieser Gleichungen auf jeden Fall, falls das Zielgebiet konvex bezüglich seiner Metrik ist und eine nichtpositive Krümmung hat. Es gibt also keine Probleme, wenn wir euklidische Metriken annehmen und das physikalische Gebiet konvex ist.

Da im allgemeinen das physikalische Gebiet nicht konvex ist, müßte jetzt analog zur Winslow-Methode eine Abbildung von P nach L gesucht werden, die die oben genannten Eigenschaften erfüllt, d.h. deren Komponenten ϕ_1 und ϕ_2 die Gleichungen

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_k}\sqrt{g}g^{kj}\frac{\partial \phi_1}{\partial x_j} + g^{kj}\Gamma^1_{\alpha\beta}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_k}\frac{\partial \phi_\beta}{\partial x_j} = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_k}\sqrt{g}g^{kj}\frac{\partial \phi_2}{\partial x_j} + g^{kj}\Gamma^2_{\alpha\beta}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_k}\frac{\partial \phi_\beta}{\partial x_j} = 0$$

erfüllen. Zur Vereinfachung soll hier nun der einfachere Fall eines konvexen physikalischen Gebietes betrachtet werden, so daß sich die Transformation dieser Gleichungen erübrigt und das HSY-Theorem direkt für die Abbildung von L nach P anwendbar ist.

4.5 Die Wahl der Riemann-Metrik

Wie man bei der Einführung der ersten Fundamentalform gesehen hat, induziert diese eine Metrik, die die lokale Verzerrung mißt. Diese Eigenschaft macht man sich nun für die adaptive Gittererzeugung zu Nutze.

Ziel ist die Verfeinerung des Gitters entlang einer vorgegebener Kurve – die geometrische Anpassung. Die Verzerrung, also die Metrik der Fläche, die abgebildet wird, soll entlang dieser Kurve sehr groß sein und sich stetig mit zunehmenden Abstand von dieser Kurve verringern. Die Metrik gehe demnach zur euklidischen Metrik $g_{ij} = \delta_{ij} =$ über, je weiter man sich von der Kurve entfernt. Eine solche Metrik erhält man auf folgende Weise:

Zunächst beschreibe man die Kurve als Nullstellenmenge einer Funktion $F(x)$. Nun muß eine Abstandsfunktion f gewählt werden, die sich umgekehrt proportional zum Abstand zur Kurve F verhält, d.h.

$$\begin{array}{ll} f(F) & \text{groß, bei kleinem Abstand zu } F \text{ und} \\ f(F) & \text{klein, bei großem Abstand zu } F. \end{array}$$

Gefordert ist jetzt noch ein Maß für die Richtung, in der die Verzerrung stattfinden soll. Dieses Maß lautet

$$\frac{F_{x_i} F_{x_j}}{(\mathrm{grad} F)^2}.$$

Denn das Ziel ist es, längs der Normalen $n = (F_{x_1}, F_{x_2})$ das Gitter stark zu verzerren. Die Matrix $\frac{F_{x_i} f_{x_j}}{(\mathrm{grad} F)^2}$ werde mit A bezeichnet und hat die Eigenwerte 0 und 1. Aus der linearen Algebra weiß man nun – da A symmetrisch und positiv definit ist –, daß $0 \leq \langle Ax, x \rangle \leq 1$. $\langle Ax, x \rangle$ soll nun maximal werden. Setzt man den Normalenvektor ein, so ist $\langle An, n \rangle = 1$, also maximal. somit hat man mit Hilfe dieser Metrik die größtmögliche Verzerrung erreicht.

Die endgültige Metrik ist dann gegeben durch

$$g_{ij} = \delta_{ij} + f(F) \frac{F_{x_i} F_{x_j}}{(\mathrm{grad} F)^2}. \tag{4.1}$$

Aus dieser Formel erkennt man die Notwendigkeit der Richtungsangabe. Ohne Beachtung der Richtung würde auf jede Komponente g_{ij} der gleiche Faktor $f(F)$ hinzuaddiert und somit keine Verzerrung in gewünschte Richtungen erfolgen.

In dem folgendem Beispiel soll ein Gitter konstruiert werden, das entlang der vertikalen Gerade $x_1 = x_0$ in x_1-Richtung verfeinert werden soll. Man wähle die Metrik g_{ij} so, daß g_{11} maximal wird für $x_1 \to x_0$ und $g_{11} \to 1$ für $|x_1 - x_0| \to \infty$. Da keine Verzerrungen in andere Richtungen konstruiert werden sollen, wählt man

$$\begin{aligned} g_{12} &= 0, \\ g_{22} &= 1, \end{aligned}$$

d.h. für $(x_1 - x_0) \rightarrow \infty$ nähert sich (g_{ij}) der Einheitsmatrix. Die Abstandsfunktion f, die die oben genannten Bedingungen erfüllt, lautet z.b.

$$f(x_1 - x_0) = Ae^{-B(x_1 - x_0)^2} \tag{4.2}$$

sein. Mit dieser Metrik sieht das Gitter so aus, wie es in Abbildung 4.1 zu sehen ist. Dieses Beispiel läßt sich auf einfache Weise auf ein zweidimensio-

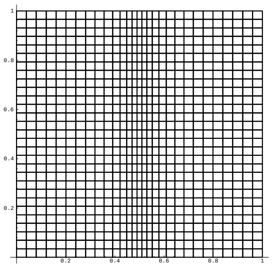


Abbildung 4.1: Vertikale Gitterverfeinerung

nales Beispiel übertragen: Es soll nun eine Metrik gefunden werden, die nahe einer Kreislinie das Gitter verfeinert. Da man eine Kreislinie auffassen kann als eine Gerade in Polarkoordinaten, kann man analog zum ersten Beispiel die Metrik schreiben als

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{f(\rho - R)(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}{\rho^2}, \\ g_{22} &= \frac{(x - x_c)^2 + f(\rho - R)(y - y_c)^2}{\rho^2}, \\ g_{12} = g_{21} &= \frac{(x - x_c)(y - y_c)(f(\rho - R) - 1)}{\rho^2}. \end{aligned}$$

(Im Kreis gilt $\rho = R$, das entspricht $x_1 = x_0$ aus dem ersten Beispiel, also ersetze $f(x_1 - x_0)$ gegen $f(\rho - R)$.)

4.6 Implementierung

In dem C-Programm GITTER werden, wie bereits angedeutet, zur Vereinfachung im folgenden nur konvexe Gebiete betrachtet. Implementiert wird nun die Dvinsky-Methode speziell für das Einheitsquadrat als physikalisches Gebiet. Es sind die Gleichungen

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\sqrt{g}} \tfrac{\partial}{\partial x_k} \sqrt{g} g^{kj} \tfrac{\partial \phi_1}{\partial x_j} + g^{kj} \Gamma^1_{\alpha\beta} \tfrac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_k} \tfrac{\partial \phi_\beta}{\partial x_j} &= 0, \\ \tfrac{1}{\sqrt{g}} \tfrac{\partial}{\partial x_k} \sqrt{g} g^{kj} \tfrac{\partial \phi_2}{\partial x_j} + g^{kj} \Gamma^2_{\alpha\beta} \tfrac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_k} \tfrac{\partial \phi_\beta}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

auf dem Einheitsquadrat mit den Metriken, die sich aus vorgegebenen Nullstellenmengen und (4.1) ergeben, zu lösen. Zu diesem Zweck sind die NAG[1]-Routinen d03Eeef und d03edf verwendet worden. Betrachtet wird weiter der vereinfachte Fall einer Nullkrümmung – die euklidische Krümmung – ,so daß sich (4.3) auf folgende Formen reduzieren:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\sqrt{g}}\tfrac{\partial}{\partial x_k}\sqrt{g}g^{kj}\tfrac{\partial\phi_1}{\partial x_j} &= 0, \\ \tfrac{1}{\sqrt{g}}\tfrac{\partial}{\partial x_k}\sqrt{g}g^{kj}\tfrac{\partial\phi_2}{\partial x_j} &= 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Ohne Verwendung der Summationskonvention mit ursprünglicher Bezeichnung der Koordinaten lauten diese Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}g^{11}\phi_x)_x + \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}g^{12}\phi_x)_y + \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}g^{21}\phi_y)_x + \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}g^{22}\phi_y)_y &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}g^{11}\psi_x)_x + \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}g^{12}\psi_x)_y + \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}g^{21}\psi_y)_x + \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}g^{22}\psi_y)_y &= 0. \end{aligned}$$

Weitere Berechnungen ergeben dann

$$\begin{aligned} \alpha\phi_{xx} + \beta\phi_{xy} + \gamma\phi_{yy} + \delta\phi_x + \epsilon\phi_y &= 0, \\ \alpha\psi_{xx} + \beta\psi_{xy} + \gamma\psi_{yy} + \delta\psi_x + \epsilon\psi_y &= 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

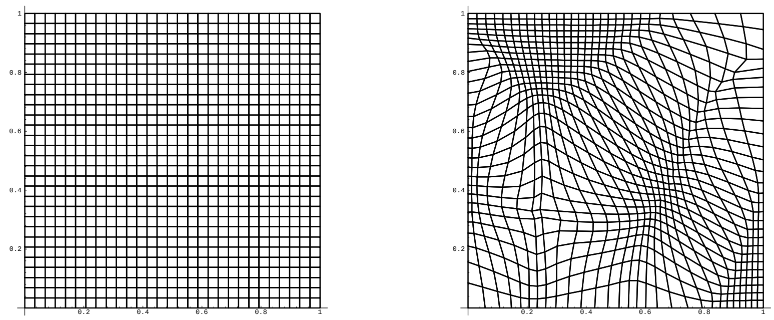
mit

$$\begin{aligned} \alpha &= g^{11}, \\ \beta &= (g^{12} + g^{21}), \\ \gamma &= g^{22}, \\ \delta &= \frac{1}{2g}g_y g^{12} + (g^{12})_y + (g^{11})_x + \frac{1}{2g}g_x g^{11}, \\ \epsilon &= \frac{1}{2g}g_x g^{21} + (g^{22})_y + (g^{21})_x + \frac{1}{2g}g_y g^{22}. \end{aligned}$$

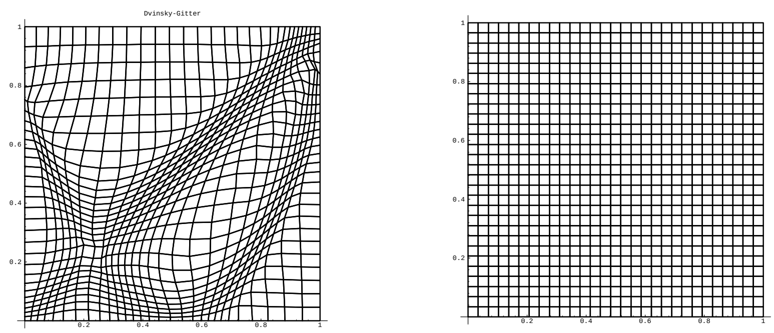
Durch Lösen der Gleichungen (4.4) bzw. (4.5) erhält man nun eine Abbildung g vom physikalischen in den logischen Raum, die sich aus ϕ und ψ zusammensetzt. d03eef diskretisiert die Gleichungen auf einem 7-Punkte Stern. Die Eingangsparameter vom Typ Integer NGX und NGY geben die Anzahl der Gitterpunkte in x- und y-Richtung an, wobei auch die Randpunkte zu diesen gezählt werden, d.h. bei NGX=NGY= 30 entstehen 29×29 Gitterzellen auf dem Quadrat. Begrenzt wird das physikalische Gebiet durch die Parameter $xmin$, $xmax$, $ymin$ und $ymax$, die entsprechend dem Einheitsquadrat gewählt werden. Zentrale Differenzen approximieren die Ableitungen. Das Feld a der Größe $NGX \times NGY$ speichert die berechneten Gitterpunkte vom Typ Real. Nun arbeitet die Routine d03edf mit den diskretisierten Gleichungen weiter und löst sie mittels eines Mehrgitterverfahrens. Der Parameter

[1]Numerical Algorithms Group, Bibliothek von Unterroutinen zu diversen Problemen der numerischen Mathematik

maxit bestimmt dabei die Anzahl der durchzuführenden Iterationen. Eine detaillierte Beschreibung der NAG-Routinen ist in [17] gegeben. Damit hat man jedoch nicht das gewünschte Gitter gefunden, denn man sucht ja nach einer Abbildung, die in die umgekehrte Richtung abbildet. Ziel ist es daher, die Umkehrabbildung g^{-1} zu finden. Da man die Bildpunkte auf L der Gitterpunkte eines Einheitsgitters auf P durch g gegeben hat, bietet sich es an, die Umkehrabbildung durch Interpolation mit Hilfe der NAG-Routinen e01saf und e01sbf (siehe [17]) zu bestimmen. Anschaulich kann man sich die endgültige Gitterkonstruktion nun folgendermaßen vorstellen: Man verzerrt das durch g entstandene Bildgitter auf L zurück zum Einheitsgitter und führt die gleichen Verzerrungen an einem Einheitsgitter auf P durch. Das dadurch entstehende Gitter ist dann das gesuchte Gitter auf P, also das Bild von g^{-1} eines Einheitsgitters (vgl. Abbildung 4.2).



$$P \xrightarrow{g} L$$



$$P \xleftarrow{g^{-1}} L$$

Abbildung 4.2: Abbildung g als Lösung der Euler-Lagrange Gleichung und Umkehrabbildung

Die Punktmenge, entlang derer nun das Gitter verfeinert werden soll, sei nun beispielsweise durch eine Parabel und der Ursprungsgeraden gegeben:

$$N_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, F(x,y) = (y-x)(y-3(x-0.5)^2) = 0\}. \tag{4.6}$$

Die Ableitungen von F lauten

$$\begin{aligned} F_x(x,y) &= 2y - 6x + 9x^2 - 6xy + 0.75, \\ F_y(x,y) &= 2y - 2x - 3x^2 - 0.75. \end{aligned}$$

Nun muß eine dem Problem angepaßte Abstandsfunktion f gewählt werden. Im vorherigen Abschnitt wurde die Funktion (4.2) vorgeschlagen. Durch Variation der Parameter A und B können dann verschiedene Ergebnisse erzielt werden. Einige werden im folgenden Abschnitt gezeigt. Die Metrik g_{ij} berechnet sich dann direkt aus der Formel (4.1). Zur Berechnung der Komponenten der inversen Matrix $(g_{ij})^{-1} = (g^{ij})$ nutzt man die Beziehung

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Damit kann z.B. der Koeffizient α der Gleichung (4.5) folgendermaßen berechnet werden:

$$\alpha = g^{11} = \frac{g_{22}}{g}.$$

Analog erfolgt die Berechnung der übrigen Koeffizienten.

4.7 Numerische Ergebnisse

Dieser Abschnitt zeigt nun beispielhaft einige Ergebnisse des Programms GITTER mit verschiedenen Verfeinerungsstufen entlang ausgewählter Nullstellenmengen auf dem Einheitsquadrat.

Gitterverfeinerung entlang von Geraden

Die Abbildung 4.3 zeigt Gitteradaptionen entlang der Menge $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, F = y - x = 0\}$, die durch verschiedene Parameter konstruiert worden sind. Auf gleiche Weise ist es möglich, jede andere Gerade als Nullstellenmenge zu formulieren und die Gitterverfeinerung durchzuführen. Durch Multipli-

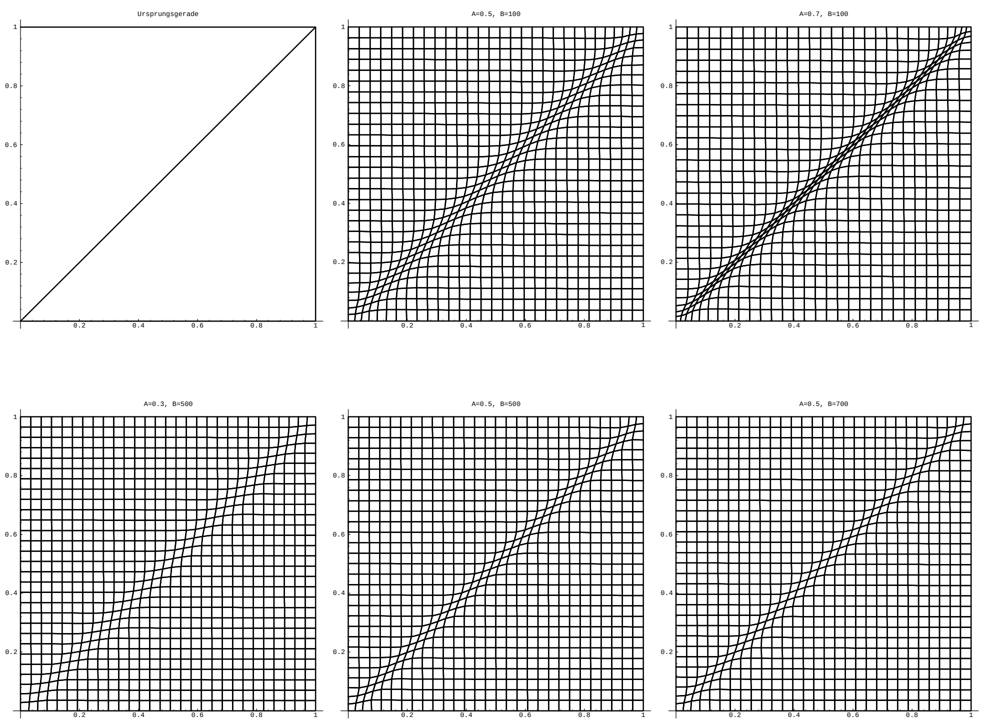


Abbildung 4.3: Gitterverfeinerungen entlang der Ursprungsgeraden

kation der entsprechenden Funktionen F ist eine Kombination der Linien als Nullstellenfunktion gegeben. Die Funktion F für die in Abbildung 4.4 lautet daher

$$F(x, y) = (y - x)(y + x - 1).$$

So wird es möglich, die verschiedensten Verfeinerungslinien zu konstruieren. Diese Linien sollten so gelegt sein, daß sie den Lösungseigenschaften angepaßt sind und dort liegen, wo ein starker Anstieg zu erwarten ist. Die

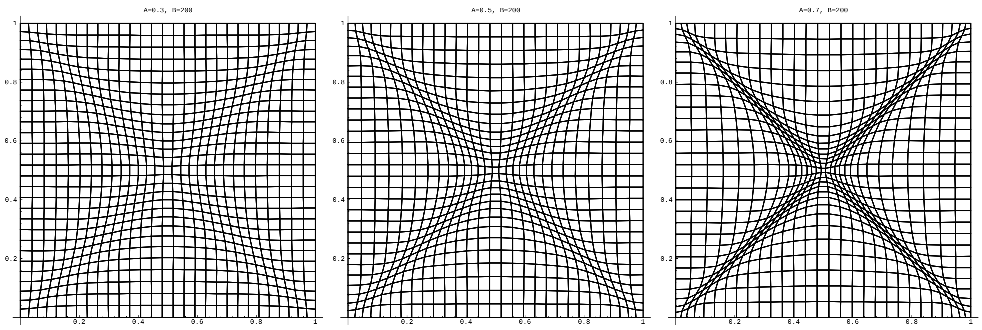


Abbildung 4.4: Kombination zweier Geraden

Parameter sind ebenfalls danach zu wählen: Der Anstieg kann beispielsweise so sein, daß die Lösung in einer bestimmten Region ansteigt, aber dann plötzlich wieder flach ist, so daß das Gitter entlang dieser Region fein und in einem schnellen Übergang grob werden sollte. Dann gibt es natürlich auch Lösungen, bei denen ein eher langsamer Übergang vom Feinen ins Grobe sinnvoll ist, nämlich dann. wenn die Lösung in einer größeren Region ansteigend ist

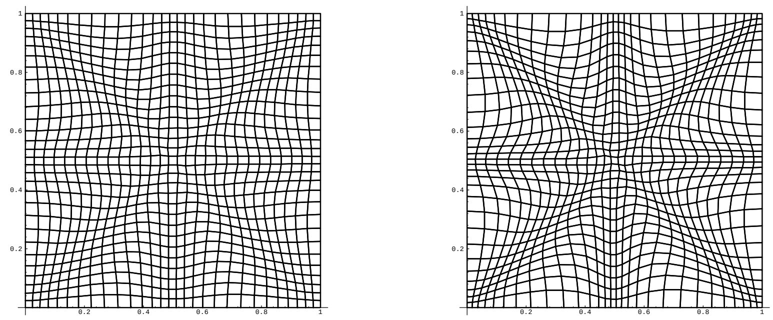


Abbildung 4.5: Langsamer und schneller Übergang vom Groben ins Feine

(vgl. Abb. 4.5).

In Abbildung 4.6 ist eine Lösung eines Problems zu sehen, bei der ein Gitter, wie es daneben dargestellt ist, sinnvoll wäre. Die Nullstellenfunktion F ist bei diesem Problem durch

$$F(x,y) = (y-x)(y+x-1)(x-0.5)$$

gegeben.

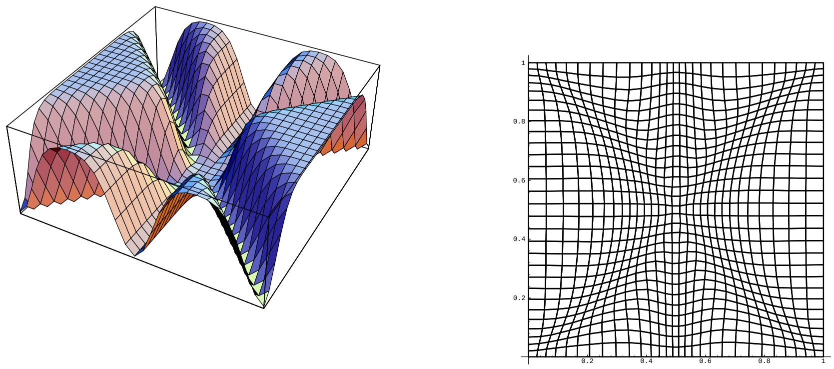


Abbildung 4.6: Eine Lösungsfläche mit geeignetem Gitter

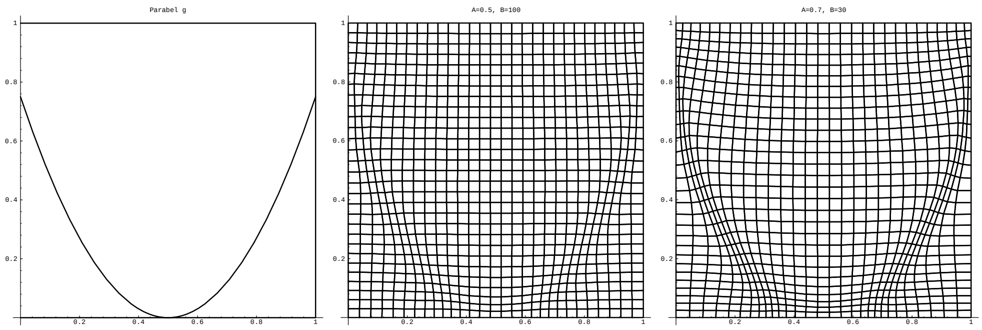


Abbildung 4.7: Gitterverfeinerung entlang einer Parabel

Gitterverfeinerung entlang von Kurven

Am Beispiel der Parabel $g(x) = 3(x-0.5)^2$ ist die Konstruktion verschiedener Gitter entlang einer Kurve in Abbildung 4.7 zu sehen.

Gitterverfeinerung entlang geschlossener Kurven

Die nun betrachtete Nullstellenmenge sei der Kreis

$$\begin{aligned} K &= \{(x,y) \in \mathbb{R} \,|\, F(x,y) = 0\} \\ F &= (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 - 0.25^2 \end{aligned}$$

Man erkennt sehr leicht, bei welchem Problem welches Gitter am sinnvollsten ist.

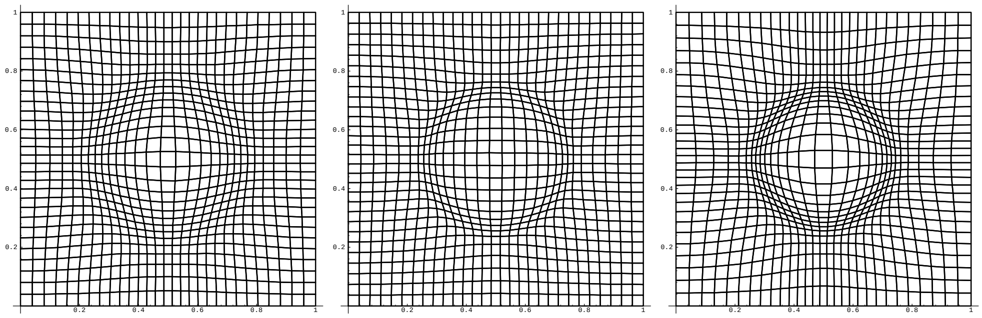


Abbildung 4.8: Gitterverfeinerung entlang eines Kreises

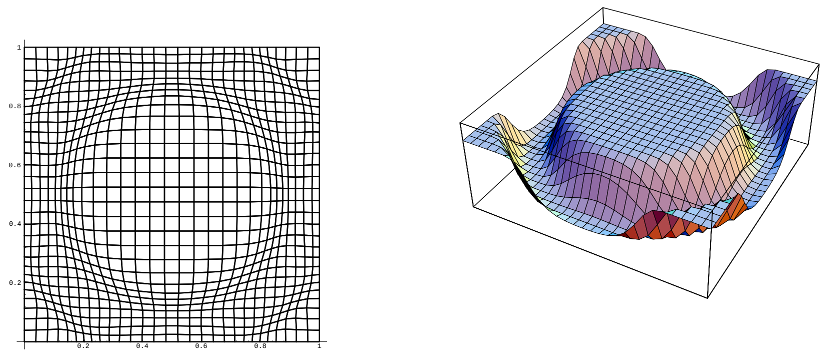


Abbildung 4.9: Gitter mit passender Lösung

Durch Kombination von Kreisen verschiedener Radien mit gleichen Mittelpunkten können dann auch Gitter wie in Abbildung 4.9 konstruiert werden.

Kapitel 5

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde zunächst das Prinzip der meisten Gittererzeugungsalgorithmen – die Unterscheidung zwischen physikalischem und logischem Raum – erläutert. Der Schwerpunkt der Arbeit lag in der Beschreibung und Untersuchung der Methode von A.M. Winslow, deren Idee in der Verwendung harmonischer Abbildungen lag. Das Theorem von T. Rado hatte dabei einen besonderen Stellenwert und wurde daher ausführlich bewiesen.

Es konnten Aussagen zur Erzeugung orthogonaler Gitter formuliert und bewiesen werden. Die Konstruktion eines Gebietes zur Repräsentation der linken menschlichen Herzkammer hat beispielhaft demonstriert, daß aus vorliegenden Standardgebieten neue Formen konstruiert und auf praktische Probleme, wie aus der Medizin, angewendet werden können.

Schon in der Winslow-Methode konnten Ansätze zur adaptiven Gittererzeugung in Form von Randverzerrungen realisiert werden. Die Methode von A.S. Dvinsky als Weiterentwicklung der Winslow-Methode wurde auf das Ziel der geometrischen Adaption hin untersucht. Eine zentrale Bedeutung hatte bei dieser Methode das Theorem von Hamilton, Schön und Yau, das die Existenz und Eindeutigkeit der harmonischen Abbildungen sichert. Durch den Einblick in die Differentialgeometrie konnte gezeigt werden, wie durch die Wahl der Metrik die Gitterverzerrung beeinflußt werden kann.

Da hier ausschließlich die zweidimensionale Gittererzeugung behandelt wurde, könnten weitere Betrachtungen nun im Bereich der höherdimensionalen Gittererzeugung verlaufen. Dabei ist dann jedoch zu beachten, daß das Theorem von Rado bereits für $n = 3$ nur noch eine Vermutung ist.

Anhang A

Die Implementierung der Winslow-Methode

Grundlage für das folgende Programm bildete das Programm ITTM aus Knupp-Steinberg [1], in dem jedoch die inhomogene Version der Winslow-Methode betrachtet wurde. Aufgrund dessen und seiner Länge soll hier nun eine geänderte, verkürzte Fassung betrachtet werden. Eine ausführliche Beschreibung mit Erklärung der einzelnen Parameter enthält Kapitel 3.6.

Das Hauptprogramm

Erzeugt werden soll ein Gitter auf einem Gebiet der Ebene mit Hilfe der homogenen Winslow-Gleichungen (3.8).

```
      program httm
      real*4 x(81,81), y(81,81)
      real*4 a11(81,81), a12(81,81), a22(81,81)
      real*4 tb(81),tt(81),tl(81),tr(81)
      real*4 xb_bdry(81),xt_bdry(81),xl_bdry(81),xr_bdry(81)
      real*4 yb_bdry(81),yt_bdry(81),yl_bdry(81),yr_bdry(81)
      common /consts/imth,idmn,m,n,dx,dy,tdx,tdy,dxx,dxy,dyy
      common /sor/ncntmax,xerr,omg
      common /pqcom/q0,xlam,ets
 1    continue
c     Wahl der Anzahl der Gitterzellen in x- und y-Richtung
      call discrtz
      write(6,*)
      write(6,*) ' Physikalisches Gebiet: '
c     Wahl des physikalischen Gebietes, Auswahlmoeglichkeit unter
c     5 Standardgebieten
      call select
c     Verteilung der Randgitterpunkte auf logischem Gebiet
      call ts(tb,tt,tl,tr)
c     Verteilung der Randgitterpunkte auf physikalischem Gebiet
      call b_parm(tb,tt,tl,tr,
     $ xb_bdry,yb_bdry,xt_bdry,yt_bdry,xl_bdry,yl_bdry,xr_bdry,yr_bdry)
c     Durchnumerierung der Randgitterpunkte
      call bset(xb_bdry,yb_bdry,xt_bdry,yt_bdry,xl_bdry,yl_bdry,
     $ xr_bdry,yr_bdry,x,y)
c     Erzeugung des Anfangsgitters
      call tfi(xb_bdry,yb_bdry,xt_bdry,yt_bdry,xl_bdry,yl_bdry,
     $ xr_bdry,yr_bdry,x,y)
```

```
c     Loesen der Winslow-Gleichungen
      icntmax = 100
      ncntmax = 100
      tol = 5.e-05
      omg = 1.7
      icnt = 0
 10   icnt = icnt+1
      if (icnt.ge.icntmax) then
         write(6,*) 'Zaehler der aeusseren Schleife ueberschritten '
         go to 99
      end if
c     Berechnung der Koeffizienten der Winslow-Gleichungen
c     f"ur die inneren Gitterpunkte
      call coeff_ittm(x,y,a11,a12,a22)
      xerr = 0.
      call sor_9pt_xy(x,y,a11,a12,a22,rhsx,rhsy)
      write(6,*) ' icnt, xerr, tol: ',icnt,xerr,tol
      if (xerr.gt.tol) go to 10
      write(6,*) ' Toleranzgrenze erfuellt nach icnt = ',icnt
      write(6,*)
 99   continue
      write(6,*) ' TTM Gitter '
c     Ausgabe der Gitterdaten
 999  continue
      open(13,file='gitter.dat',status='unknown')
      do j = 1, n
do i = 1, m
          write(13,115) x(i,j),y(i,j),x(i+1,j),y(i+1,j),x(i+1,j+1),
     +   y(i+1,j+1),x(i,j+1),y(i,j+1),x(i,j),y(i,j)
        end do
      end do
 115  format(10f8.3)
c     Ende der Ausgabe
      write(6,*) ' Weiterer Durchlauf? (1=ja) '
      read(5,*) ians
      if (ians.eq.1) go to 1
      end
```

Die Routine DISCRTZ

Sie ist Bestandteil des Programms TFI zur Erzeugung des Anfangsgitters. Es werden die gewünschte Anzahl der Gitterzellen (m Zellen in ξ-Richtung und n Zellen in η-Richtung) abgefragt und notwendige Konstanten für beispielsweise die Differenzen berechnet.

```
      subroutine discrtz
      common /consts/imth,idmn,m,n,dx,dy,tdx,tdy,dxx,dxy,dyy
      write(6,*) ' Input: m, n '
      read(5,*) m
      read(5,*) n
      dx = 1./m
      dy = 1./n
      tdx = 2.*dx
      tdy = 2.*dy
      dxx = dx*dx
      dxy = 4.*dx*dy
      dyy = dy*dy
      return
      end
```

Die Routine SELECT

Nun wählt der Benutzer das gewünschte Gebiet, entweder als Standardgröße (Default Domain) oder als inividuell einzugebene Größe (Tailor). Im Orginalprogramm hat man die Wahl zwischen 18 verschiedenen Gebieten, hier werden vier ausgewählte Formen betrachtet. Das 5. Gebiet stellt die neu konstruierte Form der linken menschlichen Herzkammer dar.

```
      subroutine select
      common /consts/imth,idmn,m,n,dx,dy,tdx,tdy,dxx,dxy,dyy
      common /corners/a1,b1,a2,b2,a3,b3,a4,b4,a5,a6
      write(6,*) ' Input: 1) Quadrat'
      write(6,*) '        2) L-Gebiet'
      write(6,*) '        3) Talgebiet '
      write(6,*) '        4) Stromlinienform '
      write(6,*) '        5) Linke menschliche Herzkammer '
      read(5,*) idmn
      write(6,*) ' 1) Standardgebiet, oder 2) Variation der Groessen? '
      read(5,*) idef
      a1 = 0.
      b1 = 0.
          if (idmn.eq.1) then
c----------- Quadrat
      if (idef.eq.1) then
            a3 = 1.
         else
            write(6,*) ' Input: a3 '
            read(5,*) a3
         end if
         a2 = a3
         b2 = 0.
         b3 = a3
         a4 = 0.
         b4 = a3
      end if
         if (idmn.eq.2) then
c----------- L-Gebiet
      if (idef.eq.1) then
            a1 = 2.0
            b1 = 1.0
         else
            write(6,*) ' Input: a1,b1 '
            read(5,*) a1
            read(5,*) b1
         end if
      end if
          if (idmn.eq.3) then
c----------- Talgebiet
      if (idef.eq.1) then
            a1 = 0.5
         else
            write(6,*) ' Input: a1 '
            read(5,*) a1
         end if
      end if

      if (idmn.eq.4) then
c----------- Stromlinienform
      if (idef.eq.1) then
            a1 = 0.25
         else
            write(6,*) ' Input: a1 '
            read(5,*) a1
         end if
      end if
c----------- Linke menschliche Herzkammer
        if (idef.eq.1) then
           a1=2
           a2=10.2
           a3=4.4
           a4=11.2
           a5=-4.4
           a6=-6.2
        else
  50         write(6,*) ' Input: a1, a2, a3, a4, a5, a6:'
             write(6,*) ' a1,a3>0; a5,a6<0; a1<a3; a2<a4; a6<a5'
```

```
          read(5,*) a1
          read(5,*) a2
          read(5,*) a3
          read(5,*) a4
          read(5,*) a5
          read(5,*) a6
          if ( (a1.gt.a3) .or. (a2.gt.a4) .or. (a5.lt.a6)
     $ .or. (a5.ge.0) .or. (a6.ge.0) .or. (a1.le.0) .or.
     $ (a3.le.0) ) then
           write(6,*) 'Falsche Eingabe von a1,a2,a3,a4,a5 or a6.'
           write(6,*)'Neue Eingabe.'
           goto 50
          end if
          if (a1.gt.a3) then
           write(6,*) 'Falsche Eingabe von a1 and a3. Neue Eingabe.'
           goto 50
          end if
          if (a2.gt.a4) then
           write(6,*) 'Falsche Eingabe von a2 and a4. Neue Eingabe.'
           goto 50
          end if
        end if
      end if
      return
      end
```

Die Routine TS

In dieser Routine werden die Randgitterpunkte auf dem logischen Gebiet verteilt. Der Benutzer kann sich für die gleichmäßige Verteilung oder für eine quadratische oder exponentielle Verteilung entscheiden.

```
      subroutine ts(tb,tt,tl,tr)
      real*4 tb(81),tt(81),tl(81),tr(81)
      common /consts/imth,idmn,m,n,dx,dy,tdx,tdy,dxx,dxy,dyy
      do 1 i = 1, m+1
          tb(i) = (i-1)*dx
          tt(i) = tb(i)
1     continue
      do 2 j = 1, n+1
          tl(j) = (j-1)*dy
          tr(j) = tl(j)
2     continue
      write(6,*) ' Standardparametrisierung des gesamten Randes? (1=ja) '
      read(5,*) idf
      if (idf.eq.1) return
10    continue
      write(6,*) ' tb:'
      write(6,*) ' (0) uniform '
      write(6,*) ' (1) quadratic '
      write(6,*) ' (2) stretched '
      read(5,*) itb
      if (itb.eq.1) then
12       write(6,*) ' bottom: xi0, Q0, R0 '
         read(5,*) xi0
         read(5,*) q0
         read(5,*) r0
         if ( (xi0.le.0.) .or. (xi0.ge.1.) ) then
            write(6,*) ' Falsche Eingabe von xi0. Neue Eingabe. '
            go to 12
         end if
         if ( (q0.le.0.) .or. (q0.ge.1.) ) then
            write(6,*) ' Falsche Eingabe von q0. Neue Eingabe. '
            go to 12
         end if
         if (r0.lt.0.) then
```

```
            write(6,*) ' Keine negativen Werte fuer R0. Neue Eingabe. '
            go to 12
         end if
c        Ueberpruefung von Monotonieeigenschaften.
         xnu1 = q0/xi0
         xnu2 = (1.-q0)/(1.-xi0)
         rmax = 2.*max( xnu1, xnu2 )
         if ( r0.ge.rmax ) then
            write(6,*) ' Wahl der Parameter ist nicht monoton.
     $   Neue Eingabe. '
            go to 12
         end if
         do 14 i = 1, m+1
            xi = (i-1)*dx
            if (xi.le.xi0) then
               xmu1 = xi/xi0
               tb(i) = xi*( xnu1*(2.-xmu1) -r0*(1.-xmu1) )
            else
               xmu2 = (1.-xi)/(1.-xi0)
               tb(i) = 1.-(1.-xi)*( xnu2*(2.-xmu2) -r0*(1.-xmu2) )
            end if
 14      continue
      end if
      if (itb.eq.2) then
 16      write(6,*) ' bottom: lambda '
         read(5,*) xlam
         if ( (xlam.eq.0.) .or. (xlam.gt.10.) ) then
            write(6,*) ' Falsche Eingabe. Neue Eingabe. '
            go to 16
         end if
         fctr = 1./(exp(xlam)-1.)
         do 18 i = 1, m+1
            xi = (i-1)*dx
            tb(i) = fctr*(exp(xlam*xi)-1.)
 18      continue
      end if
 20   continue
      write(6,*) ' tt:'
      write(6,*) ' (0) uniform '
      write(6,*) ' (1) quadratic '
      write(6,*) ' (2) stretched '
      read(5,*) itt
      if (itt.eq.1) then
 22      write(6,*) ' top: xi0, Q0, R0 '
         read(5,*) xi0
         read(5,*) q0
         read(5,*) r0
         if ( (xi0.le.0.) .or. (xi0.ge.1.) ) then
            write(6,*) ' Falsche Eingabe von xi0. Neue Eingabe. '
            go to 22
         end if
         if ( (q0.le.0.) .or. (q0.ge.1.) ) then
            write(6,*) ' Falsche Eingabe von q0. Neue Eingabe. '
            go to 22
         end if
         if (r0.lt.0.) then
            write(6,*) ' Keine negativen Werte fuer R0. Neue Eingabe. '
            go to 22
         end if
c        Ueberpruefung von Monotonieeigenschaften
         xnu1 = q0/xi0
         xnu2 = (1.-q0)/(1.-xi0)
         rmax = 2.*max( xnu1, xnu2 )
         if ( r0.ge.rmax ) then
            write(6,*) ' Wahl der Parameter ist nicht monoton.
     $   Neue Eingabe. '
            go to 22
```

```
         end if
         do 24 i = 1, m+1
            xi = (i-1)*dx
            if (xi.le.xi0) then
               xmu1 = xi/xi0
               tt(i) = xi*( xnu1*(2.-xmu1) -r0*(1.-xmu1) )
            else
               xmu2 = (1.-xi)/(1.-xi0)
               tt(i) = 1.-(1.-xi)*( xnu2*(2.-xmu2) -r0*(1.-xmu2) )
            end if
 24      continue
      end if
      if (itt.eq.2) then
 26      write(6,*) ' top: lambda '
         read(5,*) xlam
         if ( (xlam.eq.0.) .or. (xlam.gt.10.) ) then
            write(6,*) ' Falsche Eingabe. Neue Eingabe. '
            go to 26
         end if
         fctr = 1./(exp(xlam)-1.)
         do 28 i = 1, m+1
            xi = (i-1)*dx
            tt(i) = fctr*(exp(xlam*xi)-1.)
 28      continue
      end if
 30   continue
      write(6,*) ' tl:'
      write(6,*) ' (0) uniform '
      write(6,*) ' (1) quadratic '
      write(6,*) ' (2) stretched '
      read(5,*) itl
      if (itl.eq.1) then
 32      write(6,*) ' left: xi0, Q0, R0 '
         read(5,*) xi0
         read(5,*) q0
         read(5,*) r0
         if ( (xi0.le.0.) .or. (xi0.ge.1.) ) then
            write(6,*) ' Falsche Eingabe von xi0. Neue Eingabe. '
            go to 32
         end if
         if ( (q0.le.0.) .or. (q0.ge.1.) ) then
            write(6,*) ' Falsche Eingabe von q0. Neue Eingabe. '
            go to 32
         end if
         if (r0.lt.0.) then
            write(6,*) ' Keine negative Werte fuer R0. Neue Eingabe. '
            go to 32
         end if
c        Ueberpruefung von Monotonieeigenschaften.
         xnu1 = q0/xi0
         xnu2 = (1.-q0)/(1.-xi0)
         rmax = 2.*max( xnu1, xnu2 )
         if ( r0.ge.rmax ) then
            write(6,*) ' Wahl der Parameter ist nicht monoton.
     $   Neue Eingabe. '
            go to 32
         end if
         do 34 j = 1, n+1
            xi = (j-1)*dy
            if (xi.le.xi0) then
               xmu1 = xi/xi0
               tl(j) = xi*( xnu1*(2.-xmu1) -r0*(1.-xmu1) )
            else
               xmu2 = (1.-xi)/(1.-xi0)
               tl(j) = 1.-(1.-xi)*( xnu2*(2.-xmu2) -r0*(1.-xmu2) )
            end if
 34      continue
      end if
```

```
      if (itl.eq.2) then
 36      write(6,*) ' left: lambda '
         read(5,*) xlam
         if ( (xlam.eq.0.) .or. (xlam.gt.10.) ) then
            write(6,*) ' Falsche Eingabe. Neue Eingabe. '
            go to 36
         end if
         fctr = 1./(exp(xlam)-1.)
         do 38 j = 1, n+1
            xi = (j-1)*dy
            tl(j) = fctr*(exp(xlam*xi)-1.)
 38      continue
      end if
 40   continue
      write(6,*) ' tr:'
      write(6,*) ' (0) uniform '
      write(6,*) ' (1) quadratic '
      write(6,*) ' (2) stretched '
      read(5,*) itr
      if (itr.eq.1) then
 42      write(6,*) ' right: xi0, Q0, R0 '
         read(5,*) xi0
         read(5,*) q0
         read(5,*) r0
         if ( (xi0.le.0.) .or. (xi0.ge.1.) ) then
            write(6,*) ' Falsche Eingabe von xi0. Neue Eingabe. '
            go to 42
         end if
         if ( (q0.le.0.) .or. (q0.ge.1.) ) then
            write(6,*) ' Falsche Eingabe von q0. Neue Eingabe. '
            go to 42
         end if
         if (r0.lt.0.) then
            write(6,*) ' Keine negativen Werte fuer R0. Neue Eingabe. '
            go to 42
         end if
c        monotonicity condition
         xnu1 = q0/xi0
         xnu2 = (1.-q0)/(1.-xi0)
         rmax = 2.*max( xnu1, xnu2 )
         if ( r0.ge.rmax ) then
            write(6,*) ' Wahl der Parameter ist nicht monoton.
     $   Neue Eingabe. '
            go to 42
         end if
         do 44 j = 1, n+1
            xi = (j-1)*dy
            if (xi.le.xi0) then
               xmu1 = xi/xi0
               tr(j) = xi*( xnu1*(2.-xmu1) -r0*(1.-xmu1) )
            else
               xmu2 = (1.-xi)/(1.-xi0)
               tr(j) = 1.-(1.-xi)*( xnu2*(2.-xmu2) -r0*(1.-xmu2) )
            end if
 44      continue
      end if
      if (itr.eq.2) then
 46      write(6,*) ' right: lambda '
         read(5,*) xlam
         if ( (xlam.eq.0.) .or. (xlam.gt.10.) ) then
            write(6,*) ' Falsche Eingabe. Neue Eingabe. '
            go to 46
         end if
         fctr = 1./(exp(xlam)-1.)
         do 48 j = 1, n+1
            xi = (j-1)*dy
```

```
          tr(j) = fctr*(exp(xlam*xi)-1.)
 48     continue
      end if
      return
      end
```

Die Routine B_PARM

Nun werden die Randgitterpunkte des physikalischen Gebietes bestimmt, die sich aus den Vorgaben des logischen Gebietes ergeben.

```
      subroutine b_parm(tb,tt,tl,tr,
     $ xb_bdry,yb_bdry,xt_bdry,yt_bdry,xl_bdry,yl_bdry,xr_bdry,yr_bdry)
      real*4 tb(81),tt(81),tl(81),tr(81)
      real*4 xb_bdry(81),xt_bdry(81),xl_bdry(81),xr_bdry(81)
      real*4 yb_bdry(81),yt_bdry(81),yl_bdry(81),yr_bdry(81)
      common /consts/imth,idmn,m,n,dx,dy,tdx,tdy,dxx,dxy,dyy
      common /corners/a1,b1,a2,b2,a3,b3,a4,b4,a5,a6
      pi = 4.*atan(1.)
      if (idmn.eq.1) then
c----------- Quadrat
         do 1 k = 1, m+1
            xb_bdry(k) = tb(k)*a2 + (1.-tb(k))*a1
            yb_bdry(k) = tb(k)*b2 + (1.-tb(k))*b1
            xt_bdry(k) = tt(k)*a3 + (1.-tt(k))*a4
            yt_bdry(k) = tt(k)*b3 + (1.-tt(k))*b4
 1       continue
         do 2 k = 1, n+1
            xl_bdry(k) = tl(k)*a4 + (1.-tl(k))*a1
            yl_bdry(k) = tl(k)*b4 + (1.-tl(k))*b1
            xr_bdry(k) = tr(k)*a3 + (1.-tr(k))*a2
            yr_bdry(k) = tr(k)*b3 + (1.-tr(k))*b2
 2       continue
      end if
      if (idmn.eq.2) then
c----------- L-Gebiet
        do 15 i = 1, m+1
            xt_bdry(i) =  4.*tt(i)
            yt_bdry(i) =  2.
            if (tb(i).le.a1/(4.+b1)) then
               xb_bdry(i) = (4.+b1)*tb(i)
               yb_bdry(i) = b1
            end if
            if ((tb(i).gt.a1/(4.+b1)).and.(tb(i).lt.(a1+b1)/(4.+b1)))
     $ then
               xb_bdry(i) = a1
               yb_bdry(i) = a1+b1-(4.+b1)*tb(i)
            end if
            if (tb(i).ge.(a1+b1)/(4.+b1)) then
               xb_bdry(i) = (4.+b1)*tb(i) - b1
               yb_bdry(i) = 0.
            end if
c15      continue
         do 16 j = 1, n+1
            xl_bdry(j) = 0.
            yl_bdry(j) = (2.-b1)*tl(j)+b1
            xr_bdry(j) = 4.
            yr_bdry(j) = 2.*tr(j)
 16      continue
      end if
      if (idmn.eq.3) then
c----------- Talgebiet
         do 7 i = 1, m+1
            xb_bdry(i) = tb(i)
            yb_bdry(i) = 0.
            xt_bdry(i) = tt(i)
```

```
         yt_bdry(i) = 1.+16.*(a1-1.)*tt(i)*tt(i)*(1.-tt(i))*(1.-tt(i))
 7       continue
         do 8 j = 1, n+1
            xl_bdry(j) = 0.
            yl_bdry(j) = tl(j)
            xr_bdry(j) = 1.
            yr_bdry(j) = tr(j)
 8       continue
      end if
      if (idmn.eq.4) then
c----------- Stromlinienform
           do 9 i = 1, m+1
            if (tb(i).le.0.1) then
               xb_bdry(i) = 10.*tb(i)
               yb_bdry(i) = 1.
            end if
            if ((tb(i).gt.0.1).and.(tb(i).le.0.5)) then
               q = (tb(i)-0.1)*(tb(i)-0.2)*(tb(i)-0.5)
         xb_bdry(i) = -1./3. + 15.*tb(i) -50.*tb(i)*tb(i)/3. + 13.889*q
         yb_bdry(i) = (1.-5.*a1/3.) + 20.*a1*tb(i)
     $      -100.*a1*tb(i)*tb(i)/3. + 25.*(40.*a1-3.)*q/9.
c               if (a1.eq.0.) yb_bdry(i) = 1.
               if (a1.eq.0.) then
                  sss = 1.25*(tb(i)-0.1)
                  xb_bdry(i) = 2.-cos(2.*pi*sss)
                  yb_bdry(i) = 1.+0.025*sin(2.*pi*sss)
               end if
            end if
            if ((tb(i).gt.0.5).and.(tb(i).lt.0.9)) then
               s = 1.-tb(i)
               q = (s-0.1)*(s-0.2)*(s-0.5)
               xb_bdry(i) = -1./3. + 15.*s -50.*s*s/3. + 13.889*q
               yb_bdry(i) = (1.-5.*a1/3.) + 20.*a1*s -100.*a1*s*s/3. +
     $                    25.*(40.*a1-3.)*q/9.
               yb_bdry(i) = 2.-yb_bdry(i)
c               if (a1.eq.0.) yb_bdry(i) = 1.
               if (a1.eq.0.) then
                  sss = 1.25*(tb(i)-0.1)
                  xb_bdry(i) = 2.-cos(2.*pi*sss)
                  yb_bdry(i) = 1.+0.025*sin(2.*pi*sss)
               end if
            end if
            if (tb(i).ge.0.9) then
               xb_bdry(i) = 10.*(1.-tb(i))
               yb_bdry(i) = 1.
            end if
            if (tt(i).le.0.4) then
               xt_bdry(i) = 10.*tt(i)
               yt_bdry(i) = 2.
            end if
            if ((tt(i).gt.0.4).and.(tt(i).lt.0.6)) then
               xt_bdry(i) = 4.
               yt_bdry(i) = 6.-10.*tt(i)
            end if
            if (tt(i).ge.0.6) then
               xt_bdry(i) = 10.*(1.-tt(i))
               yt_bdry(i) = 0.
            end if
c9       continue
         do 10 j = 1, n+1
            xl_bdry(j) = 0.
            yl_bdry(j) = 1.+tl(j)
            xr_bdry(j) = 0.
            yr_bdry(j) = 1.-tr(j)
 10      continue
      end if
      if (idmn.eq.5) then
c----------- Linke menschliche Herzkammer
```

```
          do 29 i=1,m/2+1
            xb_bdry(i)= a5*cos(pi*tb(i))
            yb_bdry(i)= a2*sin(pi*tb(i))
            xt_bdry(i)= a6*cos(pi*tt(i))
            yt_bdry(i)= a4*sin(pi*tt(i))
29        continue
          do30 i=m/2+1, m+1
            xb_bdry(i)=-a1*cos(pi*tb(i))
            yb_bdry(i)= a2*sin(pi*tb(i))
            xt_bdry(i)=-a3*cos(pi*tt(i))
            yt_bdry(i)= a4*sin(pi*tt(i))
30        continue
          do 31 j=1,n+1
            xl_bdry(j)=(1.-tl(j))*a5 + tl(j)*a6
            yl_bdry(j)= 0.
            xr_bdry(j)= (1.-tr(j))*a1 + tr(j)*a3
            yr_bdry(j)= 0.
31        continue
      end if
      return
      end
```

Die Routine BSET

Jedem Gitterpunkt wird ein Indexpaar zugeordnet. Die schon bekannten Randpunkte werden auf die entsprechenden Felder gesetzt.

```
      subroutine bset(xb_bdry,yb_bdry,xt_bdry,yt_bdry,
     $ xl_bdry,yl_bdry,xr_bdry,yr_bdry,x,y)
      real*4 x(81,81), y(81,81)
      real*4 xl_bdry(81),xr_bdry(81),xb_bdry(81),xt_bdry(81)
      real*4 yl_bdry(81),yr_bdry(81),yb_bdry(81),yt_bdry(81)
      common /consts/imth,idmn,m,n,dx,dy,tdx,tdy,dxx,dxy,dyy
      do 1 i = 1, m+1
         x(i,1) = xb_bdry(i)
         y(i,1) = yb_bdry(i)
         x(i,n+1) = xt_bdry(i)
         y(i,n+1) = yt_bdry(i)
1     continue
      do 2 j = 1, n+1
         x(1,j) = xl_bdry(j)
         y(1,j) = yl_bdry(j)
         x(m+1,j) = xr_bdry(j)
         y(m+1,j) = yr_bdry(j)
2     continue
      return
      end
```

Die Routine TFI

In dieser Routine wird durch transfinite Interpolation das Anfangsgitter erzeugt.

```
      subroutine tfi(xb,yb,xt,yt,xl,yl,xr,yr,x,y)
      real*4 x(81,81), y(81,81)
      real*4 xl(81),xr(81),xb(81),xt(81)
      real*4 yl(81),yr(81),yb(81),yt(81)
      common /consts/imth,idmn,m,n,dx,dy,tdx,tdy,dxx,dxy,dyy
      do 1 j = 2, n
         s = (j-1)*dy
         do 2 i = 2, m
            r = (i-1)*dx
```

```
          x(i,j) = (1.-s)*xb(i) + s*xt(i) + (1.-r)*xl(j)
     $                     + r*xr(j) - ( r*s*xr(n+1) +
     $                     (1.-r)*s*xl(n+1) + r*(1.-s)*xr(1)
     $                     + (1.-r)*(1.-s)*xl(1) )
          y(i,j) = (1.-s)*yb(i) + s*yt(i) + (1.-r)*yl(j)
     $                     + r*yr(j) - ( r*s*yr(n+1) +
     $                     (1.-r)*s*yl(n+1) + r*(1.-s)*yr(1)
     $                     + (1.-r)*(1.-s)*yl(1) )
2         continue
1     continue
      return
      end
```

Die Routine COEFF_ITTM

Nachdem das Anfangsgitter nun vorliegt, werden durch die Unterroutine die Tangenten in jedem Gitterpunkt mittels zentraler Differenzen berechnet, die dann die lokalen Metriken g_{ij} bestimmen.

```
      subroutine coeff_ittm(x,y,a11,a12,a22,rhsx,rhsy)
      real*4 x(81,81), y(81,81), p(81,81), q(81,81)
      real*4 a11(81,81),a12(81,81),a22(81,81)
      common /consts/imth,idmn,m,n,dx,dy,tdx,tdy,dxx,dxy,dyy
      common /tngcom/xxi,yxi,xet,yet
      common /metrics/g11,g12,g22,rg,g
      do 2 j = 2, n
        do 1 i = 2, m
        xxi = ( x(i+1,j)-x(i-1,j) )/tdx
        xet = ( x(i,j+1)-x(i,j-1) )/tdy
        yxi = ( y(i+1,j)-y(i-1,j) )/tdx
        yet = ( y(i,j+1)-y(i,j-1) )/tdy
        g11 = xxi*xxi + yxi*yxi
        g12 = xxi*xet + yxi*yet
        g22 = xet*xet
        a11(i,j) = g22
        a12(i,j) = -2.*g12
        a22(i,j) = g11
1       continue
2     continue
      return
      end
```

Die Routine SOR_9PT_XY

Durch Einsetzen der Metrikkoeffizienten werden die Winslow-Gleichungen linear. Die folgende Routine löst nun iterativ dieses lineare Gleichungssystem mit Hilfe des SOR-Verfahrens.

```
      subroutine sor_9pt_xy(x,y,a11,a12,a22)
c     Gelst werden die Gleichungen der folgenden Form:
c     a11*x11 + a12*x12 + a22*x22 = 0
c     a11*y11 + a12*y12 + a22*y22 = 0
      real*4 x(81,81), y(81,81)
      real*4 a11(81,81), a12(81,81), a22(81,81)
      real*4 rhsx(81,81), rhsy(81,81)
      common /consts/imth,idmn,m,n,dx,dy,tdx,tdy,dxx,dxy,dyy
      common /sor/ncntmax,xerr,omg
      xerr = 0.
      ncnt = 0
1     ncnt = ncnt+1
      do 2 j = 2, n
         do 3 i = 2, m
```

```
          cf = 2.*( a11(i,j)/dxx + a22(i,j)/dyy )
          x12 = ( x(i+1,j+1) - x(i+1,j-1) - x(i-1,j+1) + x(i-1,j-1) )/
     $            dxy
          y12 = ( y(i+1,j+1) - y(i+1,j-1) - y(i-1,j+1) + y(i-1,j-1) )/
     $            dxy
          x11 = ( x(i+1,j) + x(i-1,j) )/dxx
          y11 = ( y(i+1,j) + y(i-1,j) )/dxx
          x22 = ( x(i,j+1) + x(i,j-1) )/dyy
          y22 = ( y(i,j+1) + y(i,j-1) )/dyy
          rhs1 = a11(i,j)*x11 + a12(i,j)*x12 + a22(i,j)*x22
          rhs2 = a11(i,j)*y11 + a12(i,j)*y12 + a22(i,j)*y22
           den = cf*cf
           if (den.eq.0.) stop
           xtmp = cf*rhs1/den
           ytmp = cf*rhs2/den
           xtmp = x(i,j) + omg*( xtmp - x(i,j) )
           ytmp = y(i,j) + omg*( ytmp - y(i,j) )
           xerr = max( xerr, abs( xtmp-x(i,j) ) )
            x(i,j) = xtmp
           y(i,j) = ytmp
3       continue
2    continue
     if (ncnt.lt.ncntmax) go to 1
     return
     end
```

Anhang B

Die Implementierung der Dvinsky-Methode

Das vorliegende C-Programm GITTER löst die sich wegen angenommener Nullkrümmung verkürzten Euler-Lagrange Gleichungen (4.4) durch Anwenden der NAG-Routinen d03eef und d03edf. Mit Interpolation durch die Routinen e01saf und e01sbf findet man dann die gesuchte Umkehrabbildung vom logischen in den physikalischen Raum. Die Ergebnisse werden mittels *Mathematica* wieder visualisiert.

```
/* Numerische Erzeugung eines Gitters auf dem Einheitsquadrat mit Hilfe
 der Euler-Lagrange Gleichungen.
*/
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<stdlib.h>
#include<string.h>

#define NGX 30 /* Anzahl der Gitterpunkte */
#define NGY 30
#define LDA 4*(NGX+1)*(NGY+1)/3+1
#define M NGX*NGY
/*
#define F  (y - 3.0*(x-0.5)*(x-0.5))
#define Fx (6.0*x-3.0)
#define Fy (1.0)
*/
#define F  ((y-x)*(y - 3.0*(x-0.5)*(x-0.5)))
#define Fx (2.0*y-6.0*x+9.0*x*x-6.0*x*y+0.75)
#define Fy (2.0*y+2.0*x-3.0*x*x-0.75)
/*
#define F  ((y-0.5)*(y - 3.0*(x-0.5)*(x-0.5)))
#define Fx (-1.5*(2.0*y-1.0)*(2.0*x-1.0))
#define Fy (2.0*y+3.0*x-3.0*x*x-1.25)
*/
/*
#define F  ((x-0.5)*(x-0.5)+(y-0.5)*(y-0.5)-0.25*0.25)
#define Fx (2.0*x-1.0)
#define Fy (2.0*y-1.0)
*/
/*
#define F exp(-20.0*((x-0.5)*(x-0.5)+(y-0.5)*(y-0.5)))
#define Fx (-40.0*F*(x-0.5))
#define Fy (-40.0*F*(y-0.5))
*/
#include"gebiet0n.c"
double g, g11, g12, g21, g22;
double A,B;
```

```
main(argc,argv)
int argc; char **argv;
{
  /* Parameter f"ur NAG-Routinen d03eef und d03edf */
  int d03eef_(), d03edf_(), pdef(), ubndy(), vbndy();
  int ngx=NGX, ngy=NGY, lda=LDA, ifail, maxit=1000, iout=0, numit;
  double xmin=0.0, xmax=1.0, ymin=0.0, ymax=1.0, a[7][LDA], rhs[LDA];
  static double ub[NGX*NGY]={1.0}, acc=1e-3, us[LDA], u[LDA], v[LDA];
  char scheme='c';
  /* Parameter f"ur NAG-Routinen e01saf und e01sbf */
  int e01saf_(), e01sbf_();
  int m=M, i,j,k;
  double fu[M], fv[M], triang[7*M], grads[2][M], uu[M], vv[M], x, y, wert;
  A = atof(argv[1]);
  B = atof(argv[2]);
  /* u-Komponente */
  ifail = -1;
  d03eef_(&xmin,&xmax,&ymin,&ymax,pdef,ubndy,&ngx,&ngy,&lda,a,rhs,
          &scheme,&ifail);
  ifail = -1;
  d03edf_(&ngx,&ngy,&lda,a,rhs,ub,&maxit,&acc,us,u,&iout,&numit,&ifail);
  /* v-Komponente */
  ifail = -1;
  d03eef_(&xmin,&xmax,&ymin,&ymax,pdef,vbndy,&ngx,&ngy,&lda,a,rhs,
          &scheme,&ifail);
  ifail = -1;
  d03edf_(&ngx,&ngy,&lda,a,rhs,ub,&maxit,&acc,us,v,&iout,&numit,&ifail);

  /* Berechnung der inversen Abbildung durch Interpolation */
  for (i=0;i<NGX;i++)
    for (j=0;j<NGY;j++) {
      k = i+NGX*j;
      fu[k] = 1.0*i/(NGX-1.0);
      fv[k] = 1.0*j/(NGY-1.0);
    }
  ifail = -1;
  e01saf_(&m,u,v,fu,triang,grads,&ifail);
  for (i=0;i<NGX;i++)
    for (j=0;j<NGY;j++) {
      k = i+NGX*j;
      x = fu[k];
      y = fv[k];
      ifail = -1;
      e01sbf_(&m,u,v,fu,triang,grads,&x,&y,&wert,&ifail);
      uu[k] = wert;
    }
  ifail = -1;
  e01saf_(&m,u,v,fv,triang,grads,&ifail);
  for (i=0;i<NGX;i++)
    for (j=0;j<NGY;j++) {
      k = i+NGX*j;
      x = fu[k];
      y = fv[k];
      ifail = -1;
      e01sbf_(&m,u,v,fv,triang,grads,&x,&y,&wert,&ifail);
      vv[k] = wert;
    }
  Ausgabe(uu,vv);
}
/* Definition der Parameter der DGL */
int pdef(x,y,alpha,beta,gamma,delta,epslon,phi,psi)
double *x, *y, *alpha, *beta, *gamma, *delta, *epslon, *phi, *psi;
{
  double x1, y1, h=0.01;
  double pg11, pg21, pg12, pg22, mg11, mg21, mg12, mg22, pg, mg;
  double cg_1, cg_2, cg11_1, cg21_1, cg12_2, cg22_2;
```

```
  /* Zentrale Differenz in x-Richtung */
  x1 = *x + h; y1 = *y;
  compute_g(x1,y1);
  pg11 = g11; pg21 = g21; pg = g;
  x1 = *x - h; y1 = *y;
  compute_g(x1,y1);
  mg11 = g11; mg21 = g21; mg = g;
  cg_1 = 0.5*(pg-mg)/h;
  cg11_1 = 0.5*(pg11-mg11)/h;
  cg21_1 = 0.5*(pg21-mg21)/h;
  /* Zentrale Differenz in y-Richtung */
  x1 = *x; y1 = *y + h;
  compute_g(x1,y1);
  pg22 = g22; pg12 = g12; pg = g;
  x1 = *x; y1 = *y - h;
  compute_g(x1,y1);
  mg22 = g22; mg12 = g12; mg = g;
  cg_2 = 0.5*(pg-mg)/h;
  cg12_2 = 0.5*(pg12-mg12)/h;
  cg22_2 = 0.5*(pg22-mg22)/h;
  /* Berechnung der Funktionswerte selber */
  x1 = *x; y1 = *y;
  compute_g(x1,y1);
  /* Nun knnen die Parameter der DGL bestimmt werden */
  *alpha = g11; *gamma = g22; *beta = g12+g21;
  *delta =  0.5*(g11*cg_1+g12*cg_2)/g + cg11_1 + cg12_2;
  *epslon = 0.5*(g22*cg_2+g21*cg_1)/g + cg21_1 + cg22_2;
  *phi = *psi = 0.0;
}
compute_g(x,y)
double x, y;
{
  double gradnorm, f;
  double G, G11, G12, G21, G22;
  gradnorm = Fx*Fx+Fy*Fy;
  f = A*exp(-B*F*F);
  g11 = 1.0+f*Fx*Fx/gradnorm;
  g22 = 1.0+f*Fy*Fy/gradnorm;
  g12 = g21 = f*Fx*Fy/gradnorm;
  if ((x==0.0) || (x==1.0) || (y==0.0) || (y==1.0)) g12 = g21 = 0.0;
  g = g11*g22-g12*g21;
  /* Die inverse Metrik */
  G11 = g22/g; G22 = g11/g; G12 = -g12/g; G21 = -g21/g; G = 1/g;
  g11 = G11; g12 = G12; g21 = G21; g22 = G22; g = G;
}

/* Ausgabe der numerischen Daten */
Out(u,v)
double u[NGX*NGY], v[NGX*NGY];
{
  register i,j;
  printf("Dvinsky-Gitter (Hhenlinienplot)\n%d\n",NGX);
  for (j=i=0;j<NGX*NGY;j++) {
    printf("%8.3f",u[j]);
    if (i++==NGX-1) { printf("\n"); i=0; }
  }
  for (j=i=0;j<NGX*NGY;j++) {
    printf("%8.3f",v[j]);
    if (i++==NGX-1) { printf("\n"); i=0; }
  }
}
/* Ausgabe der Gitter-Daten */
Ausgabe(u,v)
```

```
double u[NGX*NGY], v[NGX*NGY];
{
  register i,j,k;
  printf("Dvinsky-Gitter\n");
  for (i=0;i<NGX-1;i++)
    for (j=0;j<NGY-1;j++) {
      k = j+NGX*i;
      printf("%8.3f%8.3f",u[k],v[k]);
      printf("%8.3f%8.3f",u[k+1],v[k+1]);
      printf("%8.3f%8.3f",u[k+1+NGY],v[k+1+NGY]);
      printf("%8.3f%8.3f",u[k+NGY],v[k+NGY]);
      printf("%8.3f%8.3f",u[k],v[k]);
      printf("\n");
    }
}
/* Ausgabe von f */
Outf()
{
  register i,j;
  double x,y;
  printf("Ausgabe von f\n%d\n",NGX);
  for (i=0;i<NGX;i++) {
    x = 1.0*i/(NGX-1.0);
    for (j=0;j<NGY;j++) {
      y = 1.0*j/(NGX-1.0);
      printf("%16.8f",exp(-100.0*F*F));
    }
    printf("\n");
  }
}
```

Herrn Prof. Dr. Cryer danke ich für die Themenstellung sowie die Betreuung. Desweiteren gilt mein Dank Dr. Rolf Bronstering für wertvolle Diskussionen und meinem Bruder Laurenz für die mühevolle Arbeit des Korrekturlesens.

Literaturverzeichnis

[1] Knupp, P., Steinberg, S. *Fundamentals of Grid Generation.* CRC-Press, New Mexico, 1993.

[2] Winslow, A.M. *Equipotential Zoning of two-dimensional Meshes.* Lawrence Radiation Laboratory, California, 1963.

[3] Winslow, A.M. *Numerical Solution of the Quasilinear Poisson Equation in a Nonuniform Triangle Mesh.* Journal of Computational Physics 2, 1967, 149-172.

[4] Dvinsky, A.S. *Adaptive Grid Generation from Harmonic Maps on Riemannian Manifolds.* Journal of Computational Physics 95, 1991, 450-476.

[5] do Carmo, M.P. *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen.* Vieweg Verlag, 1993.

[6] Gray, A. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces.* CRC-Press, 1993.

[7] Klingenberg, W. *Eine Vorlesung über Differentialgeometrie.* Springer Verlag, 1973.

[8] Schöne, W. *Differentialgeometrie.* Teubner Verlagsgesellschaft, 1975.

[9] Cryer, C.W. *Vorlesung zur Numerik partieller Differentialgleichungen.* Institut für Numerische und instrumentelle Mathematik Münster, 1992.

[10] Bußmann, A. *Adaptive Gittererzeugung mittels harmonischer Abbildungen.* Diplomarbeit am Institut für Numerische und instrumentelle Mathematik Münster, 1995.

[11] Streeter, Daniel D. *Gross morphology and fiber geometry of the heart.* Handbook of Physiology, Section 2, American Physiological Society, 1979.

[12] Jost, J. *Harmonic Maps between Surfaces.* Lecture Notes in Mathematics 1062, Springer Verlag, 1984.

[13] Hildebrandt, S. *Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds.* Lecture Notes in Mathematics 1161, Springer Verlag, 1985.

[14] Sengupta, S., Häuser, J., Eiseman, P.R., Thompson, J.F. *Numerical Grid Generation in Computational Fluid Mechanics.* Pineridge Press, 1988.

[15] Thompson, J.F., Warsi, Z.U.A., Mastin, C. *Numerical Grid Generation, Foundations and Applications.* Elsevier Science Publishing, 1985.

[16] Courant, R. *Beweis des Satzes, daß von allen homogenen Membranen gegebenen Umfanges und gegebener Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton besitzt.* Mathematische Zeitschrift 1, Springer Verlag Berlin, 1918.

[17] FORTRAN-Unterprogrammbibliothek (NAG-Library, Mark 15)

[18] Fischer, W., Lieb, I. *Funktionentheorie.* Vieweg Verlag, 1988.

[19] Eckelt, P. *Vorlesung zur Relativitätstheorie.* Institut für theoretische Physik, Münster, 1993.