Hinreichende Optimalitätsbedingungen und Sensitivitätsanalyse bei optimalen Steuerproblemen mit Steuer- und Zustandsbeschränkungen

Diplomarbeit

am Institut für

Numerische und Instrumentelle Mathematik

der Westfälischen

Wilhelms-Universität Münster

Prof. Dr. Helmut Maurer

Dirk Augustin
Rektoratsweg 59
48159 Münster

30. April 1996

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In dieser Diplomarbeit werden Probleme aus dem Bereich der *Optimalen Steuerprozesse* behandelt. Hierbei handelt es sich i. a. um dynamische Systeme, die durch ein Differentialgleichungssystem in einer meist vektorwertigen Zustandsvariablen dargestellt werden. Ziel ist es, diese Systeme in Abhängigkeit eines Zielfunktionals optimal zu steuern. Dies geschieht durch die Einführung einer Steuerungsvariable, die direkten Einfluß auf das dynamische System hat, indem sie explizit auf der rechten Seite des Differentialgleichungssystems auftritt.

In Kapitel 1 werden die Grundlagen der Theorie der optimalen Steuerprozesse vorgestellt. Diese beinhalten ein notwendiges Optimalitätskriterium, das sogenannte *Pontryaginsche Minimumprinzip*. Nach Anwendung des Minimumprinzips kann in der Regel ein Mehrpunktrandwertproblem aufgestellt werden, das dann mit einem Mehrfachschießverfahren gelöst wird. Das Minimumprinzip stellt den Ausgangspunkt für die sogenannten *indirekten Verfahren* dar. Sie stehen im Gegensatz zu den *direkten Verfahren*, wo die Lösung des Steuerprozesses ohne Umweg über ein Randwertproblem gesucht wird.
Desweiteren werden im 1. Kapitel Beschränkungen untersucht, die sowohl der gesuchten optimalen Trajektorie als auch der optimalen Steuerung auferlegt werden können. Diese Beschränkungen führen zu einer Modifikation des Minimumprinzips.
Kapitel 2 behandelt zum einen hinreichende Optimalitätsbedingungen. Diese Bedingungen fordern eine beschränkte Lösung einer Matrix-Riccati-DGL, die ebenfalls mit einem Mehrfachschießverfahren erhalten werden kann. Zum anderen wird eine Sensitivitätsanalyse 1. Ordnung vorgestellt. Es wird hierbei versucht, für einen parameterabhängigen optimalen Steuerprozeß, der für einen festen Parameter gelöst worden ist, eine Näherungslösung bzgl. eines leicht veränderten Parameters zu erhalten.
Ein erstes Anwendungsbeispiel wird in Kapitel 3 vorgestellt. Es handelt sich dabei um eine gesteuerte Schwingungsgleichung, die in der Elektrotechnik eine wichtige Rolle spielt. An diesem Beispiel wird unter anderem demonstriert, daß die sogenannten *schwachen hinreichenden Bedingungen*, die Steuer- und Zustandsbeschränkungen berücksichtigen, erfüllt sein können, ohne daß die *starken hinreichenden Bedingungen* erfüllt sind.
In Kapitel 4 schließlich wird ein Beispiel für ein optimales Steuerungsproblem gegeben, in dem die Steuerung vektorwertig ist. Zudem werden hier gleichzeitig eine gemischte Steuer-/Zustandsbeschränkung und eine reine Zustandsbeschränkung behandelt. Dieses führt dazu, daß die Sensitivitätsanalyse recht kompliziert wird.

Kapitel 1

Einführung in die Steuerungstheorie

Die in diesem Kapitel vorgestellte Theorie der optimalen Steuerungen stammt im wesentlichen aus [21].

1.1 Grundlagen

Zur Formulierung eines optimalen Steuerprozesses werden folgende Bezeichnungen benötigt:

$x(t) \in \mathbb{R}^n$: Zustandsvektor eines Systems zur Zeit t,
$u(t) \in \mathbb{R}^m$: Steuervektor zur Zeit t,
t_0 : Anfangszeit, o.E. $t_0 = 0$,
T : Endzeit, fest vorgegeben oder frei, $T > t_0$.

Ein optimaler Steuerprozeß ist durch folgende Daten gegeben:

(1) Dynamik des Prozesses
Die Steuerung u beeinflußt den Zustand x gemäß der DGL

$$\dot{x} = f(t, x, u), \; 0 \leq t \leq T. \tag{1.1}$$

Hierbei sei $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig und bzgl. x und u stetig partiell differenzierbar. Die partiellen Ableitungen f_x ($n \times n$ Matrix) und f_u ($n \times m$ Matrix) seien stetig.

Definition 1 *Ein Funktionenpaar* (x, u) *mit*

$$\begin{aligned} &u : [0, T] \to \mathbb{R}^m \text{ stückw. st.,} \\ &x : [0, T] \to \mathbb{R}^n \text{ st. und stückw. } C^1 \end{aligned}$$

heißt Lösung *der DGL* (1.1) *in* $[0,T]$, *wenn gilt:*

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t))$$

für alle Stetigkeitsstellen $t \in [0,T]$ *von* $u(\cdot)$.

(2) Randbedingungen für den Zustand

In dieser Arbeit werden nur die sogenannten Standard-Randbedingungen betrachtet:

$$x(0) = x_0, \;\; \psi(x(T)) = 0. \tag{1.2}$$

Hierbei sei $x_0 \in I\!R^n$ fest und $\psi : I\!R^n \to I\!R^r$, $0 \le r \le n$, eine C^1-Funktion. Der Fall $r = 0$ bedeutet formal, daß keine Bedingungen für $x(T)$ gegeben sind, d.h. daß $x(T)$ frei ist.

(3) Steuerbereich

Sei $U \subset I\!R^m$ eine nichtleere, konvexe und abgeschlossene Menge. Der Steuervektor $u(t)$ genüge der Einschränkung

$$u(t) \in U \quad \text{für alle } t \in [0,T]. \tag{1.3}$$

Definition 2 *Ein Funktionenpaar* (x,u) *heißt* zulässig *zur Endzeit* T, *falls es die Bedingungen* (1.1) – (1.3) *erfüllt.*

(4) Zielfunktional (Kostenfunktional)

Ziel eines optimalen Steuerprozesses ist es, das folgende Zielfunktional zu minimieren:

$$F(x,u) := g(x(T)) + \int_0^T f_0(t, x(t), u(t))dt. \tag{1.4}$$

$g : I\!R^n \to I\!R$ sei stetig differenzierbar und $f_0 : [0,T] \times I\!R^n \times I\!R^m \to I\!R$ sei stetig und bzgl. x und u stetig partiell differenzierbar. Die partiellen Ableitungen $f_{0,x}, f_{0,u}$ seien stetig.

Insgesamt erhält man den folgenden optimalen Steuerprozeß:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & \\ & g\,(x(T)) + \int_0^T f_0(t, x(t), u(t))dt \\ \quad\text{unter} & \\ & \dot{x} = f(t,x,u), \;\; t \in [0,T], \\ & x(0) = x_0, \;\; \psi(x(T)) = 0, \\ & u(t) \in U \subset I\!R^m, \;\; t \in [0,T]. \end{array}} \tag{1.5}$$

Hierzu benötigt man noch folgende Fallunterscheidung:

(1) Feste Endzeit:
Ein zulässiges Paar (x^*, u^*) zur Endzeit T heißt *optimale Lösung* von (1.5), wenn für alle zulässigen Paare (x, u) zur Endzeit T gilt:

$$F(x^*, u^*) \leq F(x, u).$$

(2) Freie Endzeit:
Ein zulässiges Paar (x^*, u^*) zur Endzeit T^* heißt *optimale Lösung* von (1.5), wenn für alle zulässigen Paare (x, u) zu beliebigen Endzeiten T gilt:

$$F(x^*, u^*) \leq F(x, u).$$

Bei freier Endzeit ist T somit eine zusätzliche Optimierungsvariable.

Die Funktion $x^*(\cdot)$ wird als *optimale Trajektorie* und $u^*(\cdot)$ als *optimale Steuerung* bezeichnet.

Definition 3 *Ein optimaler Steuerprozeß, der nicht explizit von der Zeit t abhängt, d.h. von der Form*

$$\begin{array}{rl} \textit{Minimiere} & \\ & g\left(x(T)\right) + \int\limits_0^T f_0(x(t), u(t))dt \\ \textit{unter} & \\ & \dot{x} = f(x, u),\ t \in [0, T], \\ & x(0) = x_0,\ \psi(x(T)) = 0, \\ & u(t) \in U \subset I\!R^m,\ t \in [0, T] \end{array} \tag{1.6}$$

ist, wird autonomer Steuerprozeß *genannt.*

Im folgenden werden nur noch autonome Steuerprozesse betrachtet. Dieses bedeutet allerdings keine Einschränkung, da jeder Steuerprozeß der Form (1.5) in einen äquivalenten autonomen Steuerprozeß (1.6) umformuliert werden kann. Dieses wird in Abschnitt 1.5 auf Seite 13 demonstriert.

1.2 Das Pontryaginsche Minimumprinzip

Für die weitere Betrachtung benötigt man die folgende

Definition 4 *Die Funktion*

$$H(x,u,\lambda) := \lambda_0 f_0(x,u) + \lambda f(x,u) \tag{1.7}$$

wird Hamiltonfunktion *genannt.*

Mit der oben definierten Hamiltonfunktion läßt sich ein notwendiges Optimalitätskriterium erster Ordnung angeben, das sogenannte

Pontryaginsche Minimumprinzip

Sei (x^*, u^*) eine optimale Lösung des Steuerungsproblems (1.6). Dann gibt es ein $\lambda_0 \geq 0$, eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion $\lambda : [0,T] \to I\!R^n$ und einen Zeilenvektor $\nu \in I\!R^r$ mit $(\lambda_0, \lambda(t), \nu) \neq 0$ für $t \in [0,T]$, so daß an allen Stellen $t \in [0,T]$, wo $u^*(\cdot)$ stetig ist, die folgenden Aussagen gelten:

- **Adjungierte DGL:**
$$\dot{\lambda} = -H_x(x^*(t), u^*(t), \lambda(t)). \tag{1.8}$$
- **Minimumbedingung:**
$$H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) = \min_{u \in U} H(x^*(t), u, \lambda(t)). \tag{1.9}$$
- **Transversalitätsbedingung:**
$$\lambda(T) = (\lambda_0 g_x + \nu \psi_x)(x^*(T)). \tag{1.10}$$
- **Im Falle freier Endzeit zusätzlich:**
$$H(x^*(T), u^*(T), \lambda(T)) = 0. \tag{1.11}$$

Bew.: siehe z.B. [10].

Entlang einer optimalen Lösung $x^*(t), u^*(t), \lambda(t)$ werden die folgenden Bezeichnungen verwendet:

$$\begin{aligned} f(t) &= f(x^*(t), u^*(t)), \\ H(t) &= H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t)), \text{ etc.} \end{aligned}$$

Die adjungierten DGL lauten dann explizit

$$\dot{\lambda}(t) = -H_x(t) = -\lambda_0 f_{0x}(t) - \lambda f_x(t).$$

Im Falle $\lambda_0 > 0$ kann man $\lambda_0 = 1$ im Minimumprinzip setzen, denn die Aussagen bleiben bei einer Skalierung $\lambda \to \frac{\lambda}{\lambda_0}$ unverändert. Zum Nachweis von $\lambda_0 > 0$ benötigt man zusätzliche Regularitätsannahmen für die optimale Lösung (x^*, u^*).

1.3 Probleme mit regulärer Hamiltonfunktion

Für die weitere Betrachtung muß zwischen optimalen Steuerprozessen, in denen die Steuerung linear in die Hamiltonfunktion (1.7) eingeht und solchen in denen die Steuerung nichtlinear eingeht, unterschieden werden. Diese beiden Fälle werden unterschiedlich behandelt. Hier wird zunächst der zweite Fall betrachtet.

Für eine optimale Lösung $x(t), u(t)$ sei das Minimumprinzip mit $\lambda_0 = 1$ und der adjungierten Variablen $\lambda(t)$ erfüllt. Die Hamiltonfunktion ist demnach

$$H(x,u,\lambda) = f_0(x,u) + \lambda f(x,u).$$

Definition 5 *Die Hamiltonfunktion H heißt* regulär *(bzgl. einer optimalen Lösung $x(t)$), wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so daß für die Menge*

$$D_\epsilon := \{(t,x,\lambda) \,|\, t \in [0,T], ||x - x(t)|| < \epsilon, ||\lambda - \lambda(t)|| < \epsilon\} \tag{1.12}$$

gilt: die Funktion $H(x,\cdot,\lambda)$ hat eine eindeutig bestimmte Minimalstelle

$$u^*(x,\lambda) = arg \min_{u \in U} H(x,u,\lambda) \qquad \forall (t,x,\lambda) \in D_\epsilon. \tag{1.13}$$

Im Falle einer regulären Hamiltonfunktion ist dann die optimale Steuerung der eindeutig bestimmte Wert

$$u(t) = u^*(x(t), \lambda(t)). \tag{1.14}$$

Bei Problemen mit linear auftretender Steuerung ist H im allgemeinen nicht regulär.

1.3.1 Erster Fall: $U = I\!R^m$

Entlang einer Lösung $x(t), u(t), \lambda(t)$ erhält man aus der Minimumbedingung:

$$H_u(t) = 0, \tag{1.15}$$

$$H_{uu}(t) \geq 0 \text{ positiv semidefinit.} \tag{1.16}$$

Die letzte Bedingung wird auch *Legendre-Clebsch-Bedingung* genannt.

Definition 6 *Die Hamiltonfunktion H heißt C^k-*regulär*, wenn H regulär ist und die Funktion*

$$u^*(x,\lambda) = arg \min_{u \in I\!R^m} H(x,u,\lambda)$$

aus (1.13) *eine C^k-Funktion ist auf der Menge D_ϵ aus* (1.12).

Setzt man die *strenge Legendre-Clebsch-Bedingung*

$$H_{uu}(t) > 0 \tag{1.17}$$

voraus, so kann $u = u^*(x, \lambda)$ berechnet werden aus

$$\begin{aligned} H_u(x, u, \lambda) &= 0, \\ H_{uu}(x, u, \lambda) &> 0. \end{aligned}$$

Die C^k-Regularität hat dann die numerische Konsequenz, daß die Variable u in den DGL eliminiert werden kann gemäß

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u^*(x, \lambda)) =: h_1(x, \lambda), \\ \dot{\lambda} &= -H_x(x, u^*(x, \lambda), \lambda) =: h_2(x, \lambda)^T. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Man erhält somit unter Hinzunahme von (1.2) und (1.10) ein Randwertproblem (RWP), bei dem die rechten Seiten, $h_1(x, \lambda)$ und $h_2(x, \lambda)$, C^k-Funktionen sind. Die optimalen Funktionen $x(t), u(t)$ und $\lambda(t)$ sind folglich ebenfalls C^k-Funktionen.
Das RWP (1.18), sowie die später hinzukommenden Mehrpunktrandwertprobleme (MPRWP), kann mit dem Mehrfachschießverfahren gelöst werden. In dieser Arbeit wird dazu ausschließlich die Fortran-Routine BNDSCO ([26], [27]) verwendet.

1.3.2 Zweiter Fall: $U \subset I\!R^m$ kompakt

O.E. sei $m = 1$ und $U = [a, b] \subset I\!R$ mit $a < b$.

Die optimale Steuerung $u(t)$ setzt sich dann zusammen aus *inneren Teilstücken* $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ mit

$$a < u(t) < b, \quad t_1 \le t \le t_2,$$

und *Randstücken* $[t_1, t_2]$ mit

$$u(t) = a \text{ bzw. } u(t) = b, \quad t_1 \le t \le t_2.$$

Definition 7 *Ein Zeitpunkt* $t_1 \in]0, T[$ *heißt* Eintrittspunkt *eines Randstückes* $[t_1, t_2]$, *wenn es ein* $\epsilon > 0$ *gibt mit*

$$u(t) > a \text{ bzw. } u(t) < b, \quad t_1 - \epsilon \le t < t_1.$$

Entsprechend wird ein Austrittspunkt $t_2 \in]0, T[$ *definiert.*

Die Hamiltonfunktion H sei C^k-regulär. Auf inneren Teilstücken besteht dann die Beziehung

$$u(t) = u^*(x(t), \lambda(t)) = \arg \min_{u \in U} H(x(t), u, \lambda(t)),$$

wobei $u^*(x,\lambda)$ wie in 1.3.1 aus $H_u(x,u^*,\lambda)=0$ und $H_{uu}>0$ berechnet werden kann.

Auf Randstücken hingegen muß wegen

$$u(t) = \arg \min_{u\in[a,b]} H(x(t),u,\lambda(t))$$

gelten:

$$\begin{aligned} u(t) = a \quad &\Rightarrow \quad H_u(t) \geq 0, && (1.19)\\ u(t) = b \quad &\Rightarrow \quad H_u(t) \leq 0. && (1.20) \end{aligned}$$

<u>Lemma:</u>
Die optimale Steuerung $u(t)$ ist stetig in einem Eintritts- bzw. Austrittspunkt.

Insgesamt erhält man ein stückweise definiertes MPRWP in x und λ, bei dem die Verbindungspunkte numerisch mitberechnet werden müssen. Die hierfür benötigten zusätzlichen Bedingungen liefert das obige Lemma.

1.4 Probleme mit linear auftretender Steuerung

Die Steuerung u trete linear in der Dynamik und im Zielfunktional auf, d.h. es liege folgendes Problem vor:

Minimiere

$$g\left(x(T)\right) + \int_0^T \left(a_0(x(t)) + b_0(x(t))\,u(t)\right) dt \tag{1.21}$$

unter

$$\begin{aligned} &\dot{x} = a(x) + b(x)u, \;\; t \in [0,T],\\ &x(0) = x_0, \;\; \psi(x(T)) = 0,\\ &u(t) \in U \subset I\!R^m, \;\; t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Der Steuerbereich U sei konvex und kompakt. Es gelte $\lambda_0 = 1$ im Minimumprinzip, d.h.:

$$H(x,u,\lambda) = a_0(x) + \lambda a(x) + \left(b_0(x) + \lambda b(x)\right) u\,. \tag{1.22}$$

Definition 8 *Die Funktion*

$$\sigma(x,\lambda) := H_u(x,u,\lambda) = b_0(x) + \lambda b(x) \tag{1.23}$$

wird Schaltfunktion *genannt.*

Zur Abkürzung sei definiert:

$$\sigma(t) := \sigma\left(x(t), \lambda(t)\right) = \left(\sigma_1(t), .., \sigma_m(t)\right).$$

Die Minimierung der Hamiltonfunktion ist dann äquivalent zu

$$\min_{u \in U} \sigma(t)u = \sigma(t)u(t) \tag{1.24}$$

für alle $t \in [0, T]$.

Sei nun $m = 1$ und $U = [a, b] \subset I\!R$ ein Intervall. Dann ergibt sich als Minimierungsproblem:

$$\min_{u \in [a,b]} \sigma(t)u = \sigma(t)u(t)\,, \tag{1.25}$$

und daher ist die optimale Steuerung gegeben durch

$$u(t) = \left\{ \begin{array}{ll} a & , \sigma(t) > 0 \\ & \\ b & , \sigma(t) < 0 \\ & \\ unbestimmt & , \sigma(t) = 0 \end{array} \right\}. \tag{1.26}$$

Definition 9 *Sei* $[t_1, t_2] \subset [0, T]$, $0 < t_1 < t_2 < T$.

1. $u(t)$ *heißt* bang-bang *in* $[t_1, t_2]$, *wenn* $\sigma(t)$ *in* $[t_1, t_2]$ *nur isolierte Nullstellen hat, d.h.* $u(t) \in \{a, b\}$. *Die Nullstellen von* $\sigma(t)$ *heißen* Schaltpunkte.

2. $u(t)$ *heißt* singulär *in* $[t_1, t_2]$, *falls* $\sigma(t) \equiv 0$ *in* $[t_1, t_2]$. *Die Zeitpunkte* t_1, t_2 *heißen* Verbindungspunkte, *falls* $u(t)$ *bang-bang in* $[t_1 - \epsilon, t_1], [t_2, t_2 + \epsilon]$ *für* $\epsilon > 0$ *geeignet.*

Auf den Teilstücken der Lösung, in denen die optimale Steuerung $u(t)$ singulär ist, erhält man $u(t)$ in den meisten Fällen, indem die Schaltfunktion $\sigma(t) \equiv 0$ solange nach der Zeit differenziert wird, bis $u(t)$ explizit in einer dieser Ableitungen auftritt, d.h. bis ein $\bar{k} < \infty$ gefunden ist mit

$$\exists\, A, B \,:\, \sigma^{(\bar{k})}(t) = A(x, \lambda) + B(x, \lambda)u \equiv 0. \tag{1.27}$$

Falls $B(x(t), \lambda(t)) \neq 0$ ist, so erhält man die singuläre Steuerung mittels

$$u(t) = -\frac{A(x(t), \lambda(t))}{B(x(t), \lambda(t))}. \tag{1.28}$$

Wieder bildet man ein abschnittweise definiertes MPRWP in x und λ, wobei diesmal die zusätzlich benötigten Bedingungen zur Berechnung der Verbindungspunkte aus den Nullstellen der Schaltfunktion hervorgehen.

1.5 Äquivalente Formulierungen von Steuerprozessen

Als erstes soll hier die Äquivalenz zwischen den nichtautonomen Steuerungsproblemen (1.5) und den autonomen Steuerungsproblemen (1.6) gezeigt werden:
Sei also ein Problem der Form (1.5) mit fester Endzeit T gegeben. (Ein Problem mit freier Endzeit werde vorher in ein Problem mit fester Endzeit transformiert (s.u.).) Mittels

$$\dot{x}_{n+1} = 1, \;\; x_{n+1}(0) = 0$$

erhält man eine neue Zustandsvariable mit $x_{n+1}(t) \equiv t$. Die folgenden Definitionen

$$\begin{aligned}
&\chi := (x_1, .., x_n, x_{n+1})^T \; \in I\!R^{n+1}, \\
&\Omega_0(\chi, u) := f_0(x_{n+1}, x, u), \\
&\Omega(\chi, u) := \begin{pmatrix} f(x_{n+1}, x, u) \\ \\ 1 \end{pmatrix}, \\
&\chi(0) = (x_0, 0)^T,
\end{aligned}$$

führen dann auf das äquivalente autonome Steuerungsproblem

Minimiere

$$g(x(T)) + \int_0^T \Omega_0\left(\chi(t), u(t)\right) dt$$

unter

$$\begin{aligned}
&\dot{\chi} = \Omega\left(\chi(t), u(t)\right), \;\; t \in [0, T], \\
&\chi(0) = (x_0, 0)^T, \;\; \psi\left(x(T)\right) = 0, \\
&u(t) \in U, \;\; t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Von den übrigen äquivalenten Formulierungen eines Steuerprozesses werden in dieser Arbeit drei verschiedene benötigt. Dieses sind im einzelnen:

A) Das Lagrange-Problem:

Minimiere

$$\int_0^T f_0\left(x(t), u(t)\right) dt \tag{1.29}$$

unter

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = f\left(x(t), u(t)\right), \;\; t \in [0, T], \\
&x(0) = x_0, \;\; \psi\left(x(T)\right) = 0, \\
&u(t) \in U, \;\; t \in [0, T].
\end{aligned}$$

B) Das Mayer-Problem mit fester Endzeit:

Minimiere

$$g\left(x(T)\right) \tag{1.30}$$

unter

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = f\left(x(t), u(t)\right), \;\; t \in [0, T], \\
&x(0) = x_0, \;\; \psi\left(x(T)\right) = 0, \\
&u(t) \in U, \;\; t \in [0, T].
\end{aligned}$$

C) Das zeitoptimale Problem:

Minimiere

$$T \tag{1.31}$$

unter

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = f\left(x(t), u(t)\right), \;\; t \in [0, T], \\
&x(0) = x_0, \;\; \psi\left(x(T)\right) = 0, \\
&u(t) \in U, \;\; t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Aus verschiedenen Gründen benötigt man noch Umformulierungen zwischen diesen drei Formen. Speziell sind dieses die Umformulierungen von **A)** nach **B)** sowie von **C)** nach **B)**. Diese werden im folgenden genauer erläutert.

1.5.1 Umformulierung eines Lagrange- zum Mayer-Problem

Diese Umformulierung wird im folgenden angewandt, um den Wert des Zielfunktionals einfacher bestimmen zu können, da das Zielfunktional nach der Umformulierung durch eine neu hinzugekommene Zustandsvariable beschrieben werden kann.

Das zum Langrange-Problem

Minimiere

$$\int_0^T f_0\left(x(t), u(t)\right) dt$$

unter

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = f\left(x(t), u(t)\right), \;\; t \in [0, T], \\
&x(0) = x_0, \;\; \psi\left(x(T)\right) = 0, \\
&u(t) \in U, \;\; t \in [0, T],
\end{aligned}$$

äquivalente Mayer-Problem lautet:

Minimiere
$$y(T)$$
unter
$$\begin{aligned}
&\dot{x} = f\left(x(t), u(t)\right), \quad t \in [0, T], \\
&\dot{y} = f_0\left(x(t), u(t)\right), \quad t \in [0, T], \\
&x(0) = x_0, \; y(0) = 0, \; \psi\left(x(T)\right) = 0, \\
&u(t) \in U, \quad t \in [0, T].
\end{aligned}$$

1.5.2 Umformulierung eines zeitoptimalen Problems in ein Problem mit fester Endzeit

Diese Umformulierung wird unternommen, da als Eingabe bei der Routine BNDSCO Probleme mit fester Endzeit benötigt werden.

Das zum zeitoptimalen Problem

Minimiere
$$T$$
unter
$$\begin{aligned}
&\dot{x} = f\left(x(t), u(t)\right), \quad t \in [0, T], \\
&x(0) = x_0, \; \psi\left(x(T)\right) = 0, \\
&u(t) \in U, \quad t \in [0, T],
\end{aligned}$$

äquivalente (Mayer-) Problem mit fester Endzeit lautet:

Minimiere
$$y(1)$$
unter
$$\begin{aligned}
&\dot{x} = f\left(x(t), u(t)\right) y, \quad t \in [0, 1], \\
&\dot{y} = 0, \quad t \in [0, 1], \\
&x(0) = x_0, \; \psi\left(x(1)\right) = 0, \\
&u(t) \in U, \quad t \in [0, 1].
\end{aligned}$$

1.6 Gemischte Steuer- und Zustandsbeschränkungen

In diesem Abschnitt werden nur solche Beschränkungen betrachtet, die einen von der Steuerung abhängigen Anteil beinhalten.
Dieses sind zum einen reine Steuerbeschränkungen, zum anderen Gemischte Steuer-/Zustandsbeschränkungen. Diese Beschränkungen sind von der Form

$$C(x(t), u(t)) \leq 0, \quad t \in [0, T], \tag{1.32}$$

wobei $C = \left(C^1, .., C^k\right) : I\!R^n \times I\!R^m \to I\!R^k$ eine C^2-Funktion ist. Beschränkungen der Art $u(t) \in U$ können in den meisten Fällen durch Beschränkungen der Form (1.32) beschrieben werden.

Insgesamt ergibt sich folgender optimaler Steuerprozeß:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & \\ & g\left(x(T)\right) + \displaystyle\int_0^T f_0(x(t), u(t))dt \\ \text{unter} & \\ & \dot{x} = f(x(t), u(t)),\ t \in [0, T], \\ & x(0) = x_0,\ \psi(x(T)) = 0, \\ & C(x(t), u(t)) \leq 0,\ t \in [0, T]. \end{array} \tag{1.33}$$

Definition 10
(1) Aktive Indizes: sei $t \in [0, T]$ fest:

$$J_a(t) = \left\{i \in \{1, .., k\} |\ C^i(x(t), u(t)) = 0\right\}. \tag{1.34}$$

(2) Randstück: für $C^i(x, u) \leq 0$:

$$C^i(x(t), u(t)) \equiv 0 \ \textit{für}\ t_1 \leq t \leq t_2. \tag{1.35}$$

(3) Erweiterte Hamiltonfunktion:

$$\tilde{H}(x, u, \lambda, \mu) = H(x, u, \lambda) + \mu C(x, u),\ \ \mu^T \in I\!R^k. \tag{1.36}$$

Um für optimale Steuerprobleme mit gemischten Beschränkungen ein Minimumprinzip angeben zu können, sei für die Beschränkung (1.32) die folgende Regularitätsbedingung vorausgesetzt.

Regularitätsbedingung:
Für alle $t \in [0,T]$ sind die Gradienten

$$C_u^i(x(t), u(t)), \; i \in J_a(t), \tag{1.37}$$

linear unabhängig.

Im Falle $m = 1$ ist dieses gleichbedeutend mit:

$$C_u \neq 0. \tag{1.38}$$

Mittels der erweiterten Hamiltonfunktion erhält man:

Erweitertes Minimumprinzip:

Sei (x^*, u^*) eine optimale Lösung des Steuerungsproblems (1.33) und sei die Regularitätsbedingung (1.37) erfüllt. Dann gibt es ein $\lambda_0 \geq 0$, $\nu \in I\!R^r$ und stückweise C^1-Funktionen $\lambda : [0,T] \to I\!R^n$, $\mu : [0,T] \to I\!R^k$, so daß für $t \in [0,T]$ gelten:

- **Adjungierte DGL:**

$$\dot{\lambda} = -\tilde{H}_x(t). \tag{1.39}$$

- **Minimumbedingung:**

$$\tilde{H}_u(t) = 0, \;\; 0 \leq t \leq T. \tag{1.40}$$

- **Transversalitätsbedingung:**

$$\lambda(T) = (\lambda_0 g_x + \nu^T \psi_x)(x^*(T)). \tag{1.41}$$

- **Vorzeichenbedingung:**

$$\mu(t) = (\mu^1(t), ..., \mu^k(t)) \geq 0\,, \tag{1.42}$$

$$\mu^i(t) C^i(x^*(t), u^*(t)) = 0, \; 0 \leq t \leq T, \; i = 1,..,k. \tag{1.43}$$

- **Im Falle freier Endzeit zusätzlich:**

$$\tilde{H}(T) = 0. \tag{1.44}$$

Setzt man die eindeutige Auflösbarkeit von (1.35) nach u voraus, so erhält man die Randsteuerung in Abhängigkeit von x, d.h.:

$$u = u(x). \tag{1.45}$$

Sei nun $m = 1$. Dann ist nach (1.38) $C_u \neq 0$ und man erhält μ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} & \tilde{H}_u(t) = H_u(t) + \mu(t)C_u(t) = 0 \\ \Rightarrow \qquad & \mu(t) = -\frac{H_u(t)}{C_u(t)}. \end{aligned} \tag{1.46}$$

<u>Bem.:</u>
Das Beispiel in Kapitel 4 demonstriert, wie der Multiplikator μ im Falle $m = 2$ bestimmt werden kann.

Wie schon in 1.3.2 und 1.4 erhält man Schaltpunkte, die die inneren Teilstücke der Lösung von den Randstücken abgrenzen. Für jeden auftretenden Schaltpunkt ($i = 1, .., l$) wird noch je eine Bedingung benötigt. Dieses sind die sogenannten "Junction conditions":

$$C\left(x^*(t), u^*(x^*(t), \lambda(t))\right)|_{t=t_i} = 0, \quad i = 1, .., l. \tag{1.47}$$

Somit kann wieder ein MPRWP aufgestellt werden, daß dann mit dem Mehrfachschießverfahren gelöst wird.

1.7 Reine Zustandsbeschränkungen

Hier werden nun reine Zustandsbeschränkungen

$$S(x) \leq 0 \tag{1.48}$$

behandelt, d.h. $S_u = 0$ wird vorausgesetzt. Die Funktion $S : I\!R^n \to I\!R$ sei hinreichend oft stetig differenzierbar.

Insgesamt ergibt sich folgender optimaler Steuerprozeß:

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & \\ & g\left(x(T)\right) + \int_0^T f_0(x(t), u(t))dt \\ \text{unter} \quad & \\ & \dot{x} = f(x(t), u(t)),\ t \in [0, T], \\ & x(0) = x_0,\ \psi(x(T)) = 0, \\ & u(t) \in I\!R^m,\ t \in [0, T], \\ & S(x(t)) \leq 0,\ t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Bei der Lösung wird wieder zwischen inneren Teilstücken und Randstücken unterschieden.

Auf einem *inneren Teilstück* $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ ist $S(x(t)) < 0$ im gesamten Intervall $[t_1, t_2]$, d.h. die Zustandsbeschränkung ist nicht aktiv und für die optimale Lösung gelten daher die notwendigen Bedingungen (1.8) – (1.11).

Auf einem *Randstück* $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ hingegen gilt $S(x(t)) \equiv 0$.

Definition 11 *Sei* $[t_1, t_2]$ *ein Randstück.*
Ein Punkt t_1 *mit* $S(x(t_1 - \epsilon)) < 0$, $\epsilon > 0$ *hinr. klein, wird* Eintrittspunkt *eines Randstücks genannt, ein Punkt* t_2 *mit* $S(x(t_2 + \epsilon)) < 0$, $\epsilon > 0$ *hinr. klein,* Austrittspunkt.
Außerdem kann es vorkommen, daß die Beschränkung nur in einem Punkt $t_1 \in [0, T]$ *aktiv wird, d.h. es gilt:*

$$S(x(t_1)) = 0, \;\; S(x(t_1 \pm \epsilon)) < 0, \;\; \epsilon > 0 \textit{ hinr. klein. } .$$

In diesem Fall wird t_1 *als* Kontaktpunkt *bezeichnet.*
Desweiteren wird die zu einem Randstück gehörende Steuerung auch Randsteuerung *genannt.*

Im folgenden wird nur der Fall $m = 1$ betrachtet. Die notwendigen Erweiterungen für eine vektorwertige Steuerfunktion sind in den meisten Fällen offensichtlich und werden am Beispiel in Kapitel 4 demonstriert.
Um die Randsteuerung zu erhalten, werden im Falle $m = 1$ zunächst folgende Funktionen bestimmt:

$$\begin{aligned} &S^0 := S, \\ &S^{i+1} := S^i_x f, \;\; i = 0, 1, ... \end{aligned}$$

Hierbei hat die Zustandsbeschränkung $S(x) \leq 0$ die *Ordnung* $\bar{p} \in I\!N_+$, wenn gilt:

$$\begin{aligned} &\left(S^i\right)_u = 0, \;\; i = 0, 1, .., \bar{p} - 1, \\ &(S^{\bar{p}})_u \neq 0. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Nach Konstruktion gilt dann entlang einer Trajektorie $x(t), u(t)$ mit $\dot{x} = f(x, u)$:

$$\begin{aligned} S^i\left(x(t)\right) &= \frac{d^i}{dt^i} S\left(x(t)\right), \;\; i = 0, .., \bar{p} - 1, \\ S^{\bar{p}}\left(x(t), u(t)\right) &= \frac{d^{\bar{p}}}{dt^{\bar{p}}} S\left(x(t)\right). \end{aligned}$$

Auf einem Randstück $[t_1, t_2]$ gelten daher die Beziehungen

$$\begin{aligned} &S^i\left(x(t)\right) = 0, \; i = 0, .., \bar{p} - 1, \;\; t \in [t_1, t_2], \\ &S^{\bar{p}}\left(x(t), u(t)\right) = 0, \;\; t \in [t_1, t_2], \end{aligned}$$

die wegen des Eindeutigkeitssatzes für Differentialgleichungen äquivalent sind zu

$$S^i\left(x(t_1)\right) = 0,\ i = 0,..,\bar{p}-1,$$
$$S^{\bar{p}}\left(x(t), u(t)\right) = 0,\ \ t \in [t_1, t_2].$$

Im folgenden benötigen wir die

<u>Voraussetzung:</u>

1. Die Gleichung $S^{\bar{p}}(x, u) = 0$ ist eindeutig auflösbar nach $u = u(x)$ mit einer $C^{\bar{p}+1}-$Funktion $u(x)$.

2. Auf jedem Randstück gilt für die Randsteuerung $u(t)$:

$$\left(S^{\bar{p}}\right)_u\left(x(t), u(t)\right) \neq 0,\ \ t \in [t_1, t_2]. \tag{1.51}$$

Aufgrund von Teil 2 folgt die Beziehung

$$u(t) = u(x(t)). \tag{1.52}$$

Daher genügt $x(t)$ auf $[t_1, t_2]$ der DGL

$$\dot{x} = f(x, u(x)). \tag{1.53}$$

Mit $u(x)$ ist dann auch $x(t)$ eine $C^{\bar{p}+1}-$Funktion; damit ist die Randsteuerung $u(t) = u(x(t))$ eine $C^{\bar{p}+1}-$Funktion.

Zur Formulierung notwendiger Optimalitätsbedingungen bildet man die *erweiterte Hamilton-Funktion*

$$\tilde{H}(x, u, \lambda, \mu) := H(x, u, \lambda) + \mu S(x), \tag{1.54}$$

wobei $\lambda \in I\!R^n$ und $\mu \in I\!R$ ist.

Mit dieser erweiterten Hamilton-Funktion läßt sich ein erweitertes Minimumprinzip angeben.

<u>Erweitertes Minimum-Prinzip:</u>

Sei (x^*, u^*) eine optimale Lösung des Steuerungsproblems (1.49). Die obigen Voraussetzungen 1 und 2 seien erfüllt und für jedes Randstück $[t_1, t_2]$ gelte

$$u(t) \in \operatorname{int} U \ \text{ für } \ t_1 < t < t_2. \tag{1.55}$$

Dann gibt es ein $\lambda_0 \geq 0$ und $\sigma \in I\!R^r$, stückweise C^1-Funktionen $\lambda : [0, T] \to I\!R^n$, $\mu : [0, T] \to I\!R$ und Multiplikatoren $\nu(t_i) \in I\!R$ in jedem Verbindungs- oder Kontaktpunkt t_i, so daß die folgenden Aussagen gelten:

- **Adjungierte DGL:**

$$\dot{\lambda} = -\tilde{H}_x(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), \mu(t)). \tag{1.56}$$

- **Minimumbedingung:**

$$u^*(t) = arg \min_{u \in U} \tilde{H}(x^*(t), u, \lambda(t), \mu(t)) \tag{1.57}$$

für alle Stetigkeitsstellen $t \in [0, T]$ von $u^*(t)$.

- **Transversalitätsbedingung:**

$$\lambda(T) = (\lambda_0 g_x + \sigma \psi_x)(x^*(T)). \tag{1.58}$$

- **Vorzeichenbedingung:**

$$\mu(t) \geq 0, \;\; \mu(t) S(x^*(t)) = 0, \;\; 0 \leq t \leq T. \tag{1.59}$$

- **In jedem Verbindungs- oder Kontaktpunkt t_i gilt die Sprungbedingung:**

$$\lambda(t_i^+) = \lambda(t_i^-) - \nu(t_i) S_x(x^*(t_i)), \;\; \nu(t_i) \geq 0. \tag{1.60}$$

- **Im Falle freier Endzeit gilt zusätzlich:**

$$\tilde{H}(T) = 0. \tag{1.61}$$

In [9] wird das Verhalten der optimalen Steuerung in Bezug zur Ordnung $\bar{p}$ der Zustandsbeschränkung genauer untersucht. Ein wichtiger Satz sei hier zitiert:

Satz 1: Sei H regulär und sei t_1 ein Eintritts-, Austritts- oder Kontaktpunkt.

(i) $\quad \bar{p} = 1 \;\Rightarrow\; u(t)$ st. in t_1, $\nu(t_1) = 0$, $S^1(x(t_1), u(t_1)) = 0$.

(ii) $\quad \bar{p} \geq 2 \;\Rightarrow\; u(t), \dot{u}(t), .., u^{(\bar{p}-2)}(t)$ st. in t_1.

(iii) $\quad \bar{p} \geq 3$, $\bar{p}$ ungerade, $u^{(\bar{p}-1)}(t)$ unstetig in t_1

$\Rightarrow$ Beschränkte Extremale kann die Begrenzung in t_1 nur berühren.

Der obige Satz liefert die fehlenden Bedingungen, um das MPRWP in x und λ lösen zu können.

Kapitel 2

Hinreichende Bedingungen und Sensitivitätsanalyse

2.1 Hinreichende Bedingungen bei Problemen ohne Beschränkungen

Gegeben sei folgender optimaler Steuerprozeß:

$$\begin{aligned}
&\text{Minimiere} && \\
& && g\,(x(T)) + \int_0^T f_0\,(x(t), u(t))\,dt \qquad (2.1)\\
&\text{unter} && \\
& && \dot{x} = f\,(x(t), u(t))\,, \;\; t \in [0, T],\\
& && x(0) = x_0,\;\; \psi\,(x(T)) = 0,\\
& && u(t) \in I\!R^m,\;\; t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Das Pontryaginsche Minimumprinzip kann nur Kandidaten für eine optimale Lösung liefern, da es ein notwendiges Kriterium ist. Somit werden noch hinreichende Optimalitätskriterien benötigt. Eines dieser hinreichenden Kriterien benötigt zusätzliche Konvexitätsannahmen. Mit der minimierten Hamiltonfunktion

$$H^0(x, \lambda) := \min_{u \in I\!R^m} H(x, u, \lambda)$$

gilt:

Hinreichende Optimalitätsbedingungen

Sei (x^*, u^*) ein zulässiges Paar für (2.1). Es existiere eine Funktion $\lambda : [0, T] \to I\!R^n$

und $\nu \in I\!R^r$, so daß die Bedingungen (1.8) – (1.11) des Pontryaginschen Minimumprinzips mit $\lambda_0 = 1$ erfüllt sind. Zusätzlich sei

$$\begin{aligned} &(a)\ \ \psi(x) \text{ affin-linear,} \\ &(b)\ \ g(x) \text{ konvex,} \\ &(c)\ \ H^0(x,\lambda) \text{ konvex in } x \text{ für jedes } \lambda(t). \end{aligned}$$

Dann ist (x^*, u^*) eine optimale Lösung.

Allerdings ist die Bedingung (c) in praktischen Beispielen nur selten erfüllt. Deshalb benötigt man ein Optimalitätskriterium ohne Konvexitätsannahmen. In dem folgenden hinreichenden Kriterium wird stattdessen nach einer beschränkten Lösung einer Riccati-DGL gesucht. Es wird auch *starke* hinreichende Bedingung 2. Ordnung genannt, im Gegensatz zur *schwachen* hinreichenden Bedingung 2. Ordnung, bei der bei Problemen mit Beschränkungen die Riccati-DGL entlang der auftretenden Randstücke modifiziert wird.

Satz 2: Sei (x^*, u^*) zulässig für (2.1) und existiere $\lambda : [0,T] \to I\!R^n, \nu \in I\!R^r$, so daß gilt:

- Adjungierte DGL:
$$\dot{\lambda}(t) = -H_x(x^*(t), u^*(t), \lambda(t)). \tag{2.2}$$
- Transversalitätsbedingung:
$$\lambda(T) = (g_x + \nu\psi_x)(x^*(T)). \tag{2.3}$$
- Minimumbedingung:
$$H_u(t) = 0. \tag{2.4}$$
- Strenge Legendre-Clebsch-Bedingung:
$$H_{uu}(t) \geq cI_m \quad \text{für ein } c > 0, \ \text{ für alle } t \in [0,T]. \tag{2.5}$$
- Existenz einer beschränkten Lösung folgender Riccati-DGL entlang (x^*, u^*) :
$$\dot{Q} = -Qf_x - f_x^T Q - H_{xx} + (H_{xu} + Qf_u)(H_{uu})^{-1}(H_{ux} + f_u^T Q), \tag{2.6}$$
$$Q(T) \leq D_x^2(g + \nu^T\psi)(T) \quad \text{auf } \operatorname{kern}(D_x\psi(T)). \tag{2.7}$$

Dann ist (x^*, u^*) ein lokales Minimum.

Bew.: siehe z.B. [22].

Bem.:

- Die ersten drei Bedingungen entprechen gerade den notwendigen Bedingungen (1.8)–(1.10) aus dem Pontryaginschen Minimumprinzip.
- Die Matrix $Q(t)$ ist für $t \in [0, T]$ symmetrisch, so daß die Bedingung für $Q(T)$ sinnvoll ist.

2.2 Hinreichende Bedingungen bei Problemen mit Beschränkungen

Wenn zusätzlich gemischte Steuer-/Zustandsbeschränkungen oder reine Steuerbeschränkungen

$$C(x(t), u(t)) \leq 0 \tag{2.8}$$

im Steuerprozeß auftreten, kann man entlang der Randstücke, wo eine derartige Beschränkung aktiv ist, an Stelle von (2.6) in Satz 2 folgende lineare DGL betrachten (vgl. [22]):

$$\dot{Q} \;=\; -QA^0 - (A^0)^T Q + W^0, \tag{2.9}$$

wobei

$$\begin{aligned}
A^0(t) &= \left(\frac{d}{dx} f(x, u(x))\right)^0 && (2.10)\\
&= f_x^0 + f_u^0 u_x \\
&= f_x^0 - f_u^0 (C_u^0)^{-1} C_x^0\,, \\
W^0(t) &= -\left(\frac{d}{dx} \tilde{H}_x(x, u(x), \lambda, \mu(x, \lambda)\right)^0 && (2.11)\\
&= -\left(\tilde{H}_{xx}^0 + \tilde{H}_{xu}^0 u_x + (C_x^0)^T \mu_x\right) \\
&= -\tilde{H}_{xx}^0 + \tilde{H}_{xu}^0 (C_u^0)^{-1} C_x^0 \\
&\quad + (C_x^0)^T (C_u^0)^{-1} (\tilde{H}_{ux}^0 - \tilde{H}_{uu}^0 (C_u^0)^{-1} C_x^0)\,, \\
\tilde{H}^0 &= H(t) + \mu C(t)\,. && (2.12)
\end{aligned}$$

Der obere Index 0 deutet an, daß die Funktionen jeweils entlang der optimalen Lösung (x^*, u^*) auszuwerten sind.
Auf den übrigen Intervallen wird weiterhin die DGL (2.6) integriert, wobei zu beachten ist, daß $Q(t)$ in den Verbindungspunkten keine Sprünge hat. Zudem sind die notwendigen Bedingungen in Satz 2 durch die entsprechenden Bedingungen für Steuerprobleme mit Beschränkungen zu ersetzen.
Durch die obige Modifikation der Riccati-DGL erhält man die sogenannten *schwachen* hinreichenden Bedingungen 2. Ordnung. Eine Lösung der Riccati-DGL (2.6)

im ganzen Intervall $[0, T]$ ist ebenfalls hinreichend, aber wie das Beispiel in Kapitel 3 zeigt, sind die schwachen hinreichenden Bedingungen 2. Ordnung "leichter" zu erfüllen.

Bem.:
Da in der DGL (2.9) der Term C_u^{-1} auftritt, sind die schwachen hinreichenden Bedingungen in dieser Form nicht auf Steuerungsprobleme mit Zustandsbeschränkungen anwendbar. In [14] und [16] werden für den Fall einer Zustandsbeschränkung 1. Ordnung schwache hinreichende Bedingungen vorgestellt. Bei Anwendung der starken hinreichenden Bedingungen auf Steuerungsprobleme mit Zustandsbeschränkungen ist darauf zu achten, daß bei Ordnungen $\bar{p} \geq 2$ die Matrix Q Sprünge in den Schaltpunkten gemäß

$$Q(t_i^+) = Q(t_i^-) - \mu_i S_{xx}(t_i), \quad \mu_i \geq 0,$$

haben kann, siehe z.B. [6], [19] und [35].

Spezialfall (reine Steuerbeschränkung) :

Im Falle einer reinen Steuerbeschränkung fallen in obiger DGL (2.9) wegen $C_x^0 = 0$ einige Terme weg und man erhält:

$$\dot{Q} = -Q f_x^0 - (f_x^0)^T Q - \tilde{H}_{xx}^0. \tag{2.13}$$

2.3 Sensitivitätsanalyse bei Problemen ohne Beschränkungen

Für einen Störparameter $p \in P$, wobei P ein Banachraum sei, werde die folgende Familie von Problemen betrachtet:

Minimiere

$$J(x, u, p) = g(x(T), p) + \int_0^T f_0\,(x(t), u(t), p)\, dt \tag{2.14}$$

unter

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f\,(x(t), u(t), p)\,, \quad t \in [0, T], \\ &x(0) = \varphi(p), \quad \psi\,(x(T), p) = 0, \\ &u(t) \in I\!R^m \quad t \in [0, T]\,. \end{aligned}$$

Das Problem zu einem festen Parameter $p = p_0$ wird als *Nominalproblem*, die zugehörige Lösung $x_0(t) := x(t, p_0)$, $u_0(t) := u(t, p_0)$ als *Nominallösung* bezeichnet.

Wenn gewisse Voraussetzungen (siehe z.B. den Satz (5.1) in [23], der den beschränkten Fall mit einschließt und deshalb in Abschnitt 2.4 dieser Arbeit wiedergegeben wird) erfüllt sind, läßt sich die Lösung bzgl. p_0 in eine Familie von Lösungen $x(t,p)$, $\lambda(t,p)$ und $u(t,p)$ in einer Umgebung P von p_0 einbetten. Diese Funktionen sind C^1-Funktionen bzgl. beider Argumente (t,p). Deshalb existieren die Variationen $\frac{\partial x}{\partial p}(t,p)$, $\frac{\partial \lambda}{\partial p}(t,p), etc.$. Die Variationen sind zudem stetig bzgl. beider Parameter (t,p).
Zu einem Parameter $p = p_1 \neq p_0$ sollen nun, ausgehend von der Lösung bzgl. p_0, Näherungslösungen von den optimalen Funktionen $x(t,p_1)$, $u(t,p_1)$ berechnet werden.

Mittels Taylorentwicklung erster Ordnung lassen sich $x(t,p_1)$, $\lambda(t,p_1)$ und $u(t,p_1)$ näherungsweise durch

$$\begin{aligned} x(t,p_1) &\approx x(t,p_0) + (p_1 - p_0)\frac{\partial x}{\partial p}(t,p_0), \\ \lambda(t,p_1) &\approx \lambda(t,p_0) + (p_1 - p_0)\frac{\partial \lambda}{\partial p}(t,p_0), \\ u(t,p_1) &\approx u(t,p_0) + (p_1 - p_0)\frac{\partial u}{\partial p}(t,p_0) \end{aligned}$$

berechnen.

Die zur Berechnung von

$$\frac{\partial x}{\partial p}(t,p_0),\ \frac{\partial \lambda}{\partial p}(t,p_0) \tag{2.15}$$

zusätzlich benötigten Differentialgleichungen erhält man durch Differentiation nach p des zu p_0 gegebenen Randwertproblems.

Durch Einführung der Größen

$$y(t,p) := \frac{\partial x}{\partial p}(t,p),\ \eta(t,p) := \frac{\partial \lambda}{\partial p}(t,p), \tag{2.16}$$

$$v(t,p) := \frac{\partial u}{\partial p}(t,p),\ g(x,\lambda,p) := -H_x^T(x,u,\lambda,p) \tag{2.17}$$

ergibt sich das erweiterte Randwertproblem

$$\dot{x} = f(x,u,p),\ \dot{\lambda} = -H_x^T\left(x,u,\lambda,p\right), \tag{2.18}$$

$$\dot{y} = f_x y + f_u v + f_p,\ \dot{\eta} = g_x y + g_u v + g_\lambda \eta + g_p, \tag{2.19}$$

$$x(0) = \varphi(p),\ \psi\left(x(T),p\right) = 0, \tag{2.20}$$

$$y(0) = \varphi_p(p),\ \psi_x(T)y(T) + \psi_p(T) = 0, \tag{2.21}$$

$$\lambda(T) = (\lambda_0 g_x + \nu\psi_x)(x(T),p), \tag{2.22}$$

$$\eta(T) = (\lambda_0 g + \nu\psi)_{xx}(T)y(T) + \psi_x(T)\nu_p + (g+\nu\psi)_{xp}(T), \tag{2.23}$$

wobei die Steuerung u und die zugehörige Variation v aus

$$H_u = 0, \tag{2.24}$$
$$H_{ux} y + H_{uu} v + f_u^T \eta + H_{up} = 0 \tag{2.25}$$

bestimmt werden.
Nach der Lösung dieses RWP's für den festen Parameter $p = p_0$ sind alle zur Berechnung der Näherungslösung bzgl. eines nahe bei p_0 liegenden Parameters benötigten Daten bekannt.

Bem.:
Im 1. Fall von 2.4, der mit dem obigen unbeschränkten Fall übereinstimmt, werden u und v sowie die DGL's zu x und λ ausführlich bestimmt.

2.4 Sensitivitätsanalyse bei Problemen mit Beschränkungen

Die nun folgende Abhandlung zur Sensitivitätsanalyse bei Steuerungsproblemen mit Beschränkungen ist ausführlich in [29] dargestellt. Eine Zusammenfassung davon findet sich in [30],[31]. In Erweiterung zu [29] werden in dieser Arbeit auch Parameter in den Beschränkungen berücksichtigt. In [23] werden zwar Parameter in den Beschränkungen mitbehandelt, aber es fehlt dort die numerische Behandlung der Fälle 3 und 4, in denen sich die nominale Lösung auf einem Randstück, die gestörte Lösung hingegen auf einem freien Teilstück befindet, bzw. umgekehrt. [15] weitet die Ergebnisse aus [23] auf vektorwertige Steuerfunktionen aus.

Hier wird für einen Störparameter $p \in P$, wobei P ein Banachraum sei, die folgende Familie von Problemen betrachtet:

Minimiere

$$J(x,u,p) = g(x(T),p) + \int_0^T f_0\,(x(t),u(t),p)\,dt \tag{2.26}$$

unter

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = f\,(x(t),u(t),p)\,, \quad t \in [0,T] \\
&x(0) = \varphi(p), \;\; \psi\,(x(T),p) = 0 \\
&C(x(t),u(t),p) \le 0
\end{aligned}$$

Es wird hierbei die allgemeine Einschränkung übernommen, daß die Beschränkung explizit von der Steuerung u abhängt, d.h. es gelte:

$$C_u(x(t),u(t),p) \neq 0\,. \tag{2.27}$$

Dieses Problem sei für einen festen Parameter $p = p_0 \in P$ gelöst. Zu einem Parameter $p = p_1 \neq p_0$ sollen nun Näherungslösungen von $x(t, p_1)$, $u(t, p_1)$ berechnet werden. Dieses ist nur dann möglich, wenn die Abfolge der Rand- bzw. freien Teilstücke bzgl. p_0 und p_1 übereinstimmen. Zudem wird gefordert, daß die Anzahl der Randstücke und freien Teilstücke und somit auch die Anzahl der Schaltpunkte endlich ist. O.B.d.A. liege nur ein Randstück $[t_{1_0}, t_{2_0}]$ bzgl. p_0 vor. Die Frage nach der Existenz und Optimalität von Nachbarlösungen klärt der Satz (5.1) aus [23], der hier zitiert sei:

"Solution differentiability"

Sei (x_0, u_0) ein zulässiges Paar für das Steuerungsproblem (2.26) mit $p = p_0$ und sei $\mathcal{T}^f := [0, t_{1_0}] \cup [t_{2_0}, T]$, $\mathcal{T}^c := [t_{1_0}, t_{2_0}]$. Sei (x_0, λ_0) eine Lösung des zugehörigen RWP's bzgl. p_0, so daß die folgenden Bedingungen gelten:

$$\mathcal{T}^f : \ \text{(2.5), Def. 6 mit } k = 1.$$

$$\mathcal{T}^c : \ \text{(1.38), } C(x, u, p) = 0 \text{ eind. auflösbar nach } u = u(x, p).$$

$$\frac{d}{dt} \, C(x_0(t), u_0(t), p_0)\big|_{t_{i_0}} \neq 0, \quad i = 1, \, 2, \tag{2.28}$$

$$\text{rank } \psi_x(x_0(T), p) = r, \tag{2.29}$$

$$\mu(t, p_0) > 0, \quad t_{1_0} < t < t_{2_0}, \tag{2.30}$$

$$\text{(2.6), (2.9) hat beschränkte Lösung mit (2.7),} \tag{2.31}$$

$$\text{'shooting matrix' } M(T) \text{ aus [23] ist regulär.} \tag{2.32}$$

Dann existiert eine Umgebung $V \subset P$ von $p = p_0$ und C^1-Funktionen

$$x, \lambda : [0, T] \times V \to I\!R^n, \ \nu : V \to I\!R^r, \ t_i : V \to I\!R \ \ (i = 1, 2)$$

und eine Funktion

$$u : [0, T] \times V \to I\!R,$$

welche für $t \neq t_i(p) \ \ (i = 1, 2)$ eine C^1-Funktion ist, so daß gilt:

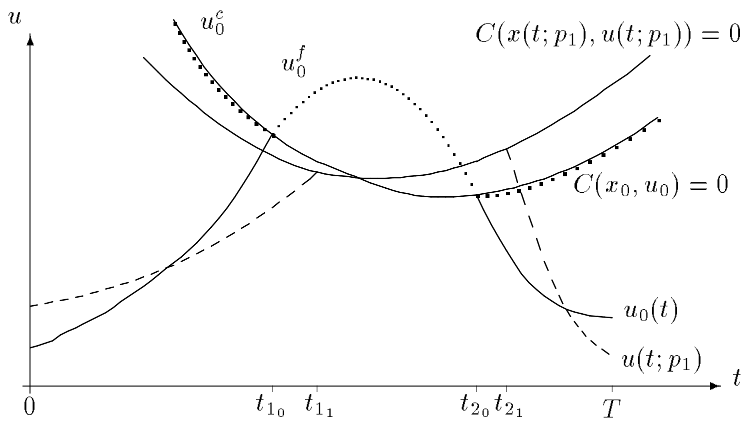
- $x(t, p_0) = x_0(t)$, $\lambda(t, p_0) = \lambda_0(t), u(t, p_0) = u_0(t)$ für $t \in [0, T]$, $\nu(p_0) = \nu_0$ und $t_i(p_0) = t_{i_0} \ \ (i = 1, 2)$,

- $x(\cdot, p)$, $\lambda(\cdot, p)$, $u(\cdot, p)$ und $\nu(p)$ erfüllen die hinreichenden Bedingungen 2. Ordnung für jedes $p \in V$ und daher ist $(x(\cdot, p), \, u(\cdot, p))$ ein lokales Minimum für (2.26).

Seien die Schaltpunkte bzgl. p_1 mit t_{1_1}, t_{2_1} bezeichnet, wobei zusätzlich gelten soll:

$$0 < t_{1_0} < t_{1_1} < t_{2_0} < t_{2_1} < T.$$

Da die Störungen, wie oben bereits angedeutet, die Schaltpunkte beeinflussen, müß man, wie die folgende Skizze demonstriert, vier Fälle unterscheiden. Dazu sei vorausgesetzt, daß die Hamiltonfunktion regulär ist. Ferner sei der Steuerbereich offen und unbeschränkt. Dann ist u stetig und x und λ sind folglich stetig differenzierbar.



Es sei schon vorab erwähnt, daß alle hier auftretenden Funktionen, die einen oberen Index c bzw. f haben, sich gemäß ihrer Definition immer auf den Nominalparameter p_0 beziehen. Da es sich bei ihnen um reine Fortsetzungslösungen (s.u.) handelt, sollten wie in Abschnitt 2.3 die zugehörigen Variationen existieren und stetig sein.

Zunächst werden die beiden einfacheren Fälle behandelt, wo sowohl entlang der ungestörten, als auch der gestörten Extremalen die gleiche, d.h. freie oder beschränkte Steuerung aktiv ist.

1.Fall: $C(x(t,p_1), u(t,p_1), p_1) < 0,\ C(x_0(t), u_0(t), p_0) < 0.$
Dieses ist zum Beispiel im Intervall $[0, t_{1_0}]$ der Fall (vgl. obige Skizze). Man befindet sich hier bzgl. p_0 und p_1 auf einem freien Teilstück. Aus $H_u\left(x, u(x,\lambda,p), \lambda, p\right) = 0$ kann die Funktion $u(x,\lambda,p)$ bestimmt werden, für die man mittels Differentiation von $H_u = 0$ die folgenden partiellen Ableitungen erhält:

$$u_x = -\left(H_{uu}\right)^{-1} H_{ux},\ u_\lambda = -\left(H_{uu}\right)^{-1} f_u^T,\ u_p = -\left(H_{uu}\right)^{-1} H_{up}. \tag{2.33}$$

Insgesamt ergibt sich dann für die Variation der optimalen Steuerung

$$v(t) := \frac{\partial u}{\partial p}(t, p_0) \tag{2.34}$$

die Gleichung

$$\begin{aligned} v(t) &= u_x y + u_\lambda \eta + u_p \\ &= -H_{uu}^{-1}\left(H_{ux} y + f_u^T \eta + H_{up}\right), \end{aligned} \tag{2.35}$$

wobei alle Funktionen auf der rechten Seite entlang (x_0, u_0, p_0) auszuwerten sind. Die Differentialgleichungen für y und η ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= f_x y + f_u v + f_p = (f_x + f_u u_x) y + f_u u_\lambda \eta + f_u u_p + f_p && (2.36)\\
&= \frac{df}{dx} y + \frac{df}{d\lambda}\eta + \frac{df}{dp},\\
\dot{\eta} &= -H_{xx} y - H_{xu} v - f_x^T \eta - H_{xp} && (2.37)\\
&= (-H_{xx} - H_{xu} u_x)\, y + \left(-H_{xu} u_\lambda - f_x^T\right) \eta + (-H_{xu} u_p - H_{xp})\\
&= \frac{dg}{dx} y + \frac{dg}{d\lambda}\eta + \frac{dg}{dp}\,,\\
&\quad \text{wobei } \; g(x, \lambda, p) := -H_x^T(x, u, \lambda, \mu, p)\,.
\end{aligned}$$

Auf unbeschränkten Extremalbögen entspricht dies dem Ergebnis für Probleme ohne Steuerungsbeschränkungen.

<u>2.Fall:</u> $C(x(t, p_1), u(t, p_1), p_1) = 0, \; C(x_0(t), u_0(t), p_0) = 0.$
Dieses ist in der Skizze im Intervall $[t_{1_1}, t_{2_0}]$ der Fall. Unter der Voraussetzung, daß die Gleichung $C(x(t, p), u(t, p), p) = 0$ eindeutig nach $u = u(x, p)$ auflösbar und $C_u(x(t, p), u(t, p), p) \neq 0$ ist, erhält man durch Differentiation von $C(x, u(x, p), p) = 0$ die partiellen Ableitungen

$$u_x = -C_u^{-1} C_x, \; u_p = -C_u^{-1} C_p\,, \tag{2.38}$$

und somit für die Variation der optimalen Steuerung

$$v(t) := \frac{\partial u}{\partial p}(t, p_0) \tag{2.39}$$

die Gleichung

$$\begin{aligned}
v(t) &= u_x y + u_p && (2.40)\\
&= -C_u^{-1} (C_x y + C_p)\,,
\end{aligned}$$

wobei die Funktionen auf der rechten Seite entlang (x_0, u_0, p_0) auszuwerten sind. Wegen $\tilde{H}_u = H_u + \mu C_u = 0$ erhält man für den Multiplikator μ :

$$\mu(x, \lambda, p) = -\frac{H_u\,(x, u(x, p), \lambda, p)}{C_u\,(x, u(x, p), p)}\,. \tag{2.41}$$

Die partiellen Ableitungen ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
\mu_x &= C_u^{-1} \left(H_{uu} C_u^{-1} C_x - H_{ux}\right), \; \mu_\lambda = -C_u^{-1} f_u^T\,, && (2.42)\\
\mu_p &= C_u^{-1} \left(H_{uu} C_u^{-1} C_p - H_{up}\right)\,. && (2.43)
\end{aligned}$$

Hiermit läßt sich nun die Variation des Multiplikators

$$\vartheta(t) := \frac{\partial \mu}{\partial p}(t, p_0) \tag{2.44}$$

bestimmen zu

$$\begin{aligned} \vartheta(t) &= \mu_x y + \mu_\lambda \eta + \mu_p \qquad (2.45) \\ &= C_u^{-1}\left(\left(H_{uu}C_u^{-1}C_x - H_{ux}\right)y - f_u^T\eta + \left(H_{uu}C_u^{-1}C_p - H_{up}\right)\right) . \end{aligned}$$

Für y und η bekommt man hiermit die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f_x y + f_u v + f_p = (f_x + f_u u_x)y + f_u u_p + f_p \qquad (2.46) \\ &= \frac{df}{dp}y + \frac{df}{dp}, \\ \dot{\eta} &= -H_{xx}y - H_{xu}v - f_x^T\eta - C_x^T\vartheta - H_{xp} \qquad (2.47) \\ &= \left(-H_{xx} + H_{xu}C_u^{-1}C_x + C_xC_u^{-1}\left(H_{ux} - H_{uu}C_u^{-1}C_x\right)\right)y \\ &\quad - \left(f_x^T - C_x^TC_u^{-1}f_u^T\right)\eta - H_{xu}C_u^{-1}C_p + C_x^TC_u^{-1}\left(H_{uu}C_u^{-1} - H_{up}\right) \\ &= \frac{dg}{dx}y + \frac{dg}{d\lambda}\eta + \frac{dg}{dp}. \end{aligned}$$

Die Lücken zwischen ungestörten und gestörten Schaltpunkten werden nun durch die beiden nächsten Fälle abgedeckt.

<u>3. Fall:</u> $C(x(t;p_1), u(t;p_1), p_1) < 0, \quad C(x_0(t), u_0(t), p_0) = 0.$
In der Skizze ist dieses im Intervall $[t_{1_0}, t_{1_1}]$ der Fall. Die Steuerung $u(t;p_1)$ wird durch $H_u = 0$, $H_{uu} > 0$ festgelegt:

$$\begin{aligned} u(t;p_1) &= u(x(t;p_1), \lambda(t;p_1)) \\ &\approx u^f(x_0^f, \lambda_0^f) + (p_1 - p_0)\left(u_x^f(x_0^f, \lambda_0^f)y^f + u_\lambda^f(x_0^f, \lambda_0^f)\eta^f\right), \qquad (2.48) \\ \frac{\partial u^f}{\partial p}(t) &:= u_x^f y^f + u_\lambda^f \eta^f. \qquad (2.49) \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet x_0^f, λ_0^f, $u^f(x_0^f, \lambda_0^f)$ die extrapolierte Trajektorie, die man erhält, wenn man statt der nominellen Randsteuerung u_0 mit der freien Steuerung u^f gemäß (1.15), (1.17) die Lösung des Differentialgleichungssystems (1.18) von t_{1_0} aus nach rechts fortsetzt. u^f ist dabei zu unterscheiden von der mitgerechneten konkurrierenden "freien" Steuerung $u_0^f := u^f(x_0, \lambda_0)$ (siehe obige Skizze sowie die nach Behandlung des 4.Falles folgende Erläuterung). Für die Variationen mit dem oberen Index f gilt dann z.B.

$$x(t;p_1) \approx x_0^f(t) + (p_1 - p_0)y^f(t) \text{ mit } y^f(t_{1_0}) = y(t_{1_0}), \tag{2.50}$$

$$u(t;p_1) \approx u^f(x_0^f(t), \lambda_0^f(t)) + (p_1 - p_0)\frac{\partial u^f}{\partial p}(t) \tag{2.51}$$

$$\text{mit } \frac{\partial u^f}{\partial p}(t_{1_0}) = \frac{\partial u}{\partial p}(t_{1_0}). \tag{2.52}$$

Für den entsprechenden Lagrangeparameter μ^f folgt wegen $\mu^f = 0$:

$$0 = \mu(t;p_1) \approx \mu^f(t;p_0) + (p_1 - p_0)\frac{\partial \mu^f}{\partial p}(t), \tag{2.53}$$

$$\frac{\partial \mu^f}{\partial p}(t) = 0. \tag{2.54}$$

Das gleiche Ergebnis erhält man auch, wenn man

$$H_u(x(t;p), u(t;p), \lambda(t;p), \mu(t;p), p) = 0$$

um $x_0^f, u^f, \lambda_0^f, \mu^f$ entwickelt.

<u>4.Fall:</u> $C(x(t;p_1), u(t;p_1), p_1) = 0,\ C(x_0(t), u_0(t), p_0) < 0.$
Dieses trifft im Intervall $[t_{2_0}, t_{2_1}]$ zu (vgl. Skizze). Die Beschränkung legt die Steuerung fest:

$$u(t;p_1) = u(x(t;p_1)) \approx u^c(x_0^c) + (p_1 - p_0)u_x^c(x_0^c)y^c, \tag{2.55}$$

$$\frac{\partial u^c}{\partial p}(t) = u_x^c(x_0^c)y^c = -C_u^{-1}(x_0^c, u^c)C_x(x_0^c, u^c)y^c. \tag{2.56}$$

Hier bezeichnet nun $x_0^c, u^c(x_0^c)$ die extrapolierte Trajektorie, die man durch Fortsetzung der Lösung x_0, λ_0 des Differentialgleichungssystems (1.18) mit der Randsteuerung u^c gemäß (1.45) über t_{2_0} hinaus erhält. Auch hier muß man zwischen der extrapolierten Steuerung u^c und der nichtaktiven konkurrierenden Randsteuerung $u_0^c := u^c(x_0)$ unterscheiden (siehe Skizze sowie die nach Behandlung dieses Falles folgende Erläuterung).
Analog erhält man für den Lagrangeparameter

$$\begin{aligned}
\mu(t;p_1) &= \mu(x(t;p_1), u(t;p_1), \lambda(t;p_1)) \\
&\approx \mu^c(x_0^c, u^c, \lambda_0^c) + (p_1 - p_0)\frac{\partial \mu^c}{\partial p}(t;p_0), \qquad (2.57)\\
\frac{\partial \mu^c}{\partial p}(t;p_0) &= \mu_x^c y^c + \mu_u^c \frac{\partial u^c}{\partial p} + \mu_\lambda^c \eta^c, \qquad (2.58)
\end{aligned}$$

wobei $\mu^c(x_0^c, u^c, \lambda_0^c)$ durch (1.46) bestimmt ist.
Alternativ kann man

$$C(x(t;p), u(t;p), p) = 0$$

um $x_0^c, u^c, \lambda_0^c, \mu^c$ linearisieren.

In den Fällen 3 und 4 ist also darauf zu achten, daß nur um Trajektorien gleicher Art (frei oder beschränkt) linearisiert wird, damit ein homogenes Differentialgleichungssystem erhalten wird, was für die schnelle numerische Berechnung notwendig ist. Eine Erweiterung auf mehrere Steuervariablen ist in den meisten praktischen Fällen offensichtlich.

Erläuterung

Anhand eines Beispiels wird hier erläutert, welche Funktion mit der "mitgerechneten konkurrierenden 'freien' Steuerung u_0^f " bzw. mit der "nichtaktiven konkurrierenden Randsteuerung u_0^c " gemeint ist:

Angenommen es liegt ein optimales Steuerungsproblem vor, in dem die optimale Lösung einen einzigen Schaltpunkt t_1 sowie ein freies Teilstück $[0, t_1]$ und ein Randstück $[t_1, T]$ hat. Die optimale Steuerung sei auf dem freien Teilstück gegeben durch $u_0 = 4\lambda_1 - \lambda_2$. Dann ist die "mitgerechnete konkurrierende 'freie' Steuerung" nichts anderes als die Funktion $4\lambda_1(t) - \lambda_2(t)$ für $t \in [t_1, T]$. Genau andersherum verhält es sich bei der "nichtaktiven konkurrierenden Randsteuerung u_0^c ". Sei die optimale Randsteuerung gegeben durch $u_0 = 3x_2$. Dann ist die "nichtaktive konkurrierende Randsteuerung" gerade die Funktion $3x_2(t)$ für $t \in [0, t_1]$.

Schaltpunktverschiebungen

Die Schaltpunktverschiebungen sollen ebenfalls in 1. Näherung approximiert werden. Dazu betrachten wir die Schaltfunktion

$$W(x(t), \lambda(t), p) := C(x(t), u(x(t), \lambda(t)), p). \tag{2.59}$$

W ist bezüglich t stetig differenzierbar. In einem Schaltpunkt t_{s_0} des ungestörten Problems gilt:

$$W|_{t=t_{s_0}} = 0. \tag{2.60}$$

Man beachte, daß in (2.59) sowohl rechts wie links vom Schaltpunkt die freie Steuerung u_0^f eingesetzt wird. Durch Linearisierung von

$$W(x(t_s(p); p), \lambda(t_s(p); p), p) = 0 \quad \text{für alle } p \in V \tag{2.61}$$

um $p = p_0$ erhält man mit (2.60), sofern $\dot{W}|_{t=t_{s_0}} \neq 0$, die Schaltpunktkorrektur

$$\frac{dt}{dp}(t_{s_0}) = -\dot{W}^{-1} \left(W_x,\ W_\lambda,\ W_p\right) \left.\begin{pmatrix} y \\ \eta \\ 1 \end{pmatrix}\right|_{t=t_{s_0}}. \tag{2.62}$$

Anwendung in der Praxis

Um die oben erzielten Ergebnisse effektiv für eine Echtzeitberechnung anwenden zu können, muß eine bestimmte Reihenfolge eingehalten werden. Diese sei hier kurz skizziert:

a) Man berechne zu $p = p_0$ die *gewöhnlichen Variationen* im gesamten Intervall $[0, T]$. Dieses geschieht analog zum unbeschränkten Fall durch Differentiation der DGL's zu x und λ nach dem Störparameter p. Hiermit liegen dann die für die Fälle 1 und 2 benötigten Daten vor.

b) Mit den in a) erhaltenen Variationen sind die Variationen der Schaltpunkte zu bestimmen.

c) Aus den Variationen der Schaltpunkte bestimme man, in Abhängigkeit der maximal zu erwartenden Störungen von p_0, die maximal zu erwartenden Verschiebungen der Schaltpunkte.

d) Aufgrund der Ergebnisse in c) hat man die Möglichkeit, für die Fälle 3 und 4 sinnvolle Intervalle zu wählen, in denen die DGL zu x, λ, y und η über den jeweiligen Schaltpunkt hinaus mit der vor dem Schaltpunkt gültigen Steuerung fortgesetzt werden. Die neu hinzugekommen Fortsetzungslösungen werden mit oberem Index c bezeichnet, falls sie mit einer Randsteuerung erzielt wurden, bzw. mit einem oberen Index f, falls in sie die freie Steuerung einging.

Nach Ausführung von a) – d) sind alle Initialisierungsdaten für eine Echtzeitberechnung bekannt. Die Näherungslösung zur Steuerung zu einem veränderten Parameter $p_1 \neq p_0$ wird dann wie folgt bestimmt (vgl. obige Skizze):

$$
\begin{aligned}
[0, t_{1_0}]: &\qquad u(t, p_1) \approx u_0(t) + (p_1 - p_0)\frac{\partial u_0}{\partial p}(t),\\
[t_{1_0}, t_{1_1}]: &\qquad u(t, p_1) \approx u^f(x_0^f, \lambda_0^f) + (p_1 - p_0)\frac{\partial u^f}{\partial p}(x_0^f, \lambda_0^f),\\
[t_{1_1}, t_{2_0}]: &\qquad u(t, p_1) \approx u_0(t) + (p_1 - p_0)\frac{\partial u_0}{\partial p}(t),\\
[t_{2_0}, t_{2_1}]: &\qquad u(t, p_1) \approx u^c(x_0^c) + (p_1 - p_0)\frac{\partial u^c}{\partial p}(x_0^c),\\
[t_{2_1}, T]: &\qquad u(t, p_1) \approx u_0(t) + (p_1 - p_0)\frac{\partial u_0}{\partial p}(t).
\end{aligned}
$$

Bem.:
In [29] wird zusätzlich noch die Sensitivitätsanalyse bei Steuerungsproblemen mit

reinen Zustandsbeschränkungen behandelt. Dort können zusätzliche Sprünge in der Variation η auch dann auftreten, wenn die Adjungierten keine Sprünge haben. Desweiteren ist zu beachten, daß i. a. auch die Ableitung der Schaltfunktion, d. h. S^1 im Schaltpunkt verschwindet und deshalb beispielsweise im Fall $\bar{p} = 1$ in der Formel (2.62) die Funktion

$$W(x, \lambda) := S^1(x, u) \tag{2.63}$$

eingesetzt wird. Ein ausführliches Beispiel hierzu findet sich in Kapitel 4.

2.5 Modifizierte Sensitivitätsanalyse

Zunächst sei hier der Einfachheit halber vorausgesetzt, daß für den Störparameter gilt: $p \in P \subset I\!R$. Zudem sei vorausgesetzt, daß keine Beschränkungen vorliegen.
Betrachten wir noch einmal den ersten Term einer Taylorentwicklung, der zur gewöhnlichen Sensitivitätsanalyse führt:

$$x(t, p) \approx x(t, p_0) + (p - p_0)\frac{\partial x}{\partial p}(t, p_0).$$

Da hierbei nur die Ableitung der Funktion $x(t)$ in p_0 eingeht, erhält man, wenn größere Parameterabweichungen vorliegen, nur bei Funktionen $x(t, p)$ die nahezu linear vom Parameter p abhängen sehr gute Näherungslösungen.
Um im allgemeinen bessere Näherungslösungen zu erhalten, sollte für jedes diskrete t, für das man mit einem Mehrfachschießverfahren einen Wert $x(t, p_0)$ erhalten hat, der ungefähre Verlauf der Ableitung $\frac{\partial x}{\partial p}(p) := \frac{\partial x}{\partial p}(t, p)$ zwischen p und p_0 bekannt sein.
Dieses motiviert folgenden Ansatz:
Man ersetzt in obiger Näherungsformel den nur von p_0 abhängigen Wert

$$k(p_0) = \frac{\partial x}{\partial p}(p_0) \tag{2.64}$$

durch einen von p, p_0 und $\frac{p+p_0}{2}$ abhängigen Wert:

$$\tilde{k}\left(p, p_0, \frac{p + p_0}{2}\right). \tag{2.65}$$

Man erhält ihn auf folgende Art und Weise:

1. Zur Initialisierung des Verfahrens werden Zahlenwerte $p_1 < p_0 < p_2$ benötigt, die zwei Bedingungen erfüllen:
a) Die Lösungen des Optimalen Steuerproblems bzgl. p_1 und p_2, sowie zu den Werten zwischen p_1 und p_2, müssen die gleiche Schaltstruktur wie die Lösung zu p_0 aufweisen.
b) p_1 und p_2 sollten so gewählt werden, daß die zu erwartenden Abweichungen von

p_0 innerhalb des Intervalls $[p_1, p_2]$ liegen. Hierbei ist zu beachten, daß das Intervall $[p_1, p_2]$ nicht unverhältnismäßig groß ist, um möglichst gute Näherungswerte zu erhalten.

2. Das Polynom 2.Grades durch die Punkte

$$\frac{\partial x}{\partial p}(p_1), \frac{\partial x}{\partial p}(p_0), \frac{\partial x}{\partial p}(p_2) \tag{2.66}$$

wird für jedes diskrete t mittels der Interpolationsformel von Lagrange bestimmt:

$$l(p) = \sum_{i=0}^{2} \frac{\partial x}{\partial p}(p_i) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{2} \frac{p - p_k}{p_i - p_k} . \tag{2.67}$$

3. Zu p und $\frac{p+p_0}{2}$ werden die Polynomwerte

$$l(p),\ l\left(\frac{p+p_0}{2}\right) \tag{2.68}$$

bestimmt, die als Näherungswerte für

$$\frac{\partial x}{\partial p}(p), \frac{\partial x}{\partial p}\left(\frac{p+p_0}{2}\right) \tag{2.69}$$

verwendet werden.

4. Mittels einer Formel, die an die Keplersche Faßregel angelehnt ist, wird nun

$$\tilde{k}\left(p, p_0, \frac{p+p_0}{2}\right)$$

aus $\frac{\partial x}{\partial p}(p_0)$, $l(p)$ und $l\left(\frac{p+p_0}{2}\right)$ bestimmt, d.h.:

$$\tilde{k}\left(p, p_0, \frac{p+p_0}{2}\right) = \left(\frac{1}{6}\frac{\partial x}{\partial p}(p_0) + \frac{2}{3}\, l\left(\frac{p+p_0}{2}\right) + \frac{1}{6}\, l(p)\right) . \tag{2.70}$$

Es ist zu beachten, daß die Schritte 1 und 2 nur einmal ausgeführt werden, wenn z.B. für eine ganze Schar von Parametern $p \in [p_1, p_2]$ Näherungslösungen zu berechnen sind.

Die Näherungen zu $\lambda(t, p)$ und $u(t, p)$ werden völlig analog bestimmt.

Das ganze Verfahren wird durch folgende Integralregel, die auch *Keplersche Faßregel* genannt wird, motiviert:

Ist die Funktion $f : I\!R \to I\!R$ ein Polynom höchstens dritten Grades, so gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\frac{1}{6}f(a) + \frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6}f(b)\right)(b-a)\,. \tag{2.71}$$

Bem.: Die oben vorgestellte *modifizierte Sensitivitätsanalyse* läßt sich auch auf Steuerungsprobleme mit Beschränkungen ausweiten. Dazu hat man die Funktionen in Abschnitt 2.4 für die drei Parameter p_1, p_0 und p_2 zu berechnen und danach die Verfahren in 2.4 und 2.5 zu kombinieren. Zudem lassen sich Näherungen zu den auftretenden Schaltpunkten in gleicher Weise wie die Näherungen zu den Funktionen im unbeschrännkten Fall bestimmen. Auf die detallierte Darstellung wird hier wegen der großen Komplexität verzichtet.

Kapitel 3

Rayleigh-Problem

3.1 Problemformulierung

Das in diesem Kapitel behandelte Beispiel beruht auf einer Schwingungsgleichung.

Eine wichtige Klasse von Schwingungen stellen die sogenannten *selbsterregten Schwingungen* dar (siehe z.B. [3]). Sie finden u. a. Anwendung in der Elektrotechnik und der Akustik. Im allgemeinen haben sie folgende Form:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0, \;\; m > 0, \; k > 0. \tag{3.1}$$

Der Parameter β, der von der Zeit t abhängig sein kann, stellt den sogenannten Dämpfungskoeffizienten dar.
Für $\beta > 0$ klingt die Amplitude der Schwingung mit der Zeit ab, falls $\beta < 0$ ist, wird die Amplitude aufgeschaukelt.
Da die Amplituden der Schwingungen allerdings nicht unbegrenzt anwachsen können, muß man annehmen, daß von einem gewissen Zeitpunkt an der Dämpfungskoeffizient β das Vorzeichen ändert und positiv wird. Dieses kann zum Beispiel mit folgendem β erreicht werden:

$$\beta(t) = -A + B\dot{x}^2(t), \;\; A > 0, \; B > 0. \tag{3.2}$$

Mit diesem neuen β erhält man eine in der Elektrotechnik wichtige nichtlineare Schwingungsgleichung, die sogenannte

<u>RAYLEIGHsche Gleichung:</u>

$$m\ddot{x} + \left(-A + B\dot{x}^2\right)\dot{x} + kx = 0 \;\text{ mit }\; m, k, A, B > 0. \tag{3.3}$$

Hier gilt:

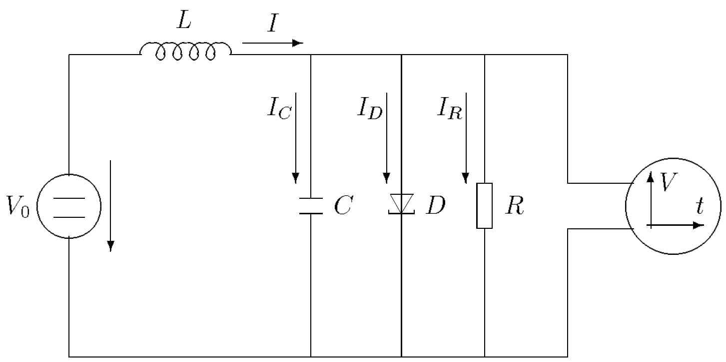
$$\dot{x} \text{ hinreichend klein} \Rightarrow \beta < 0,$$
$$\dot{x} \text{ hinreichend groß} \Rightarrow \beta > 0.$$

Dieses hat zur Folge, daß Schwingungen mit kleiner Amplitude aufgeschaukelt, mit großer Amplitude jedoch gedämpft werden und somit jede Schwingung in eine stationäre Schwingung einer bestimmten (von der Anfangsschwingung unabhängigen) Amplitude übergeht.

Die Rayleigh-Gleichung

$$\ddot{x} = -x + \dot{x}\left(1.4 - 0.14\dot{x}^2\right)$$

beschreibt einen elektrischen Schwingkreis, der durch folgende Schaltung realisiert werden kann:



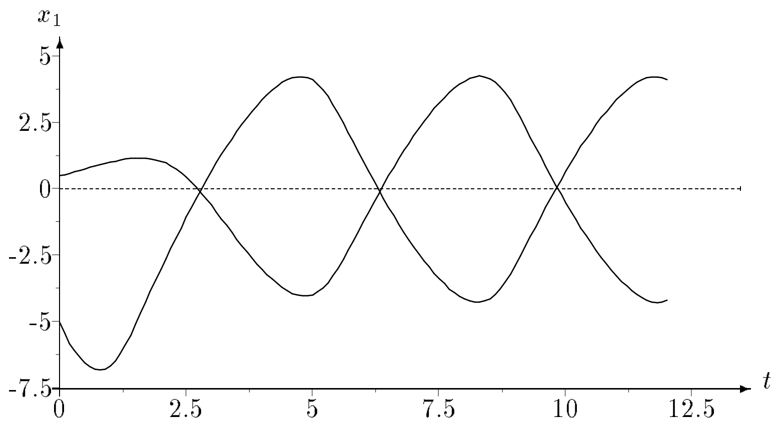
L bezeichnet hierbei die Induktivität, C die Kapazität, R den Widerstand, I die elektrische Stromstärke und D die Diode. In der obigen Differentialgleichung steht $x(t)$ für die elektrische Stromstärke I in Abhängigkeit von der Zeit t.

Setzt man $x_1(t) = x(t)$ und $x_2(t) = \dot{x}(t)$, so erhält man folgendes DGL-System:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2\,, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + 1.4x_2 - 0.14x_2^3\,. \end{aligned}$$

Für $(x_1(0), x_2(0)) \neq (0,0)$ erreichen x_1 und x_2 nach einer Einschwingphase einen vom Anfangswert unabhängigen Grenzzyklus.

Zur Veranschaulichung ist in der folgenden Zeichnung der Verlauf von $x_1(t)$ für $(x_1(0), x_2(0)) = (0.5, 0.5)$ und $(x_1(0), x_2(0)) = (-5, -5)$ mit $t \in [0, 12]$ dargestellt:



Nun soll die Rayleigh-Gleichung gesteuert werden. Hiefür betrachten wir das nachstehende Steuerungsproblem, das sogenannte

Rayleigh-Problem

$$\text{Min.} \quad \int_0^T \left(x_1^2 + u^2\right) dt \tag{3.4}$$

$$\text{unter} \quad \dot{x_1} = x_2, \tag{3.5}$$

$$\dot{x_2} = -x_1 + 1.4x_2 - 0.14x_2^3 + 4u, \tag{3.6}$$

$$x_1(0) = -5,\ x_2(0) = -5,\ x_1(T) = 0,\ x_2(T) = 0, \tag{3.7}$$

$$|u(t)| \le \alpha,\ 0 \le t \le T,\ T = 4.5\,. \tag{3.8}$$

$u(t)$ entsteht hierbei durch eine geeignete Transformation aus der Spannung $V_0(t)$, d.h. es wird im Prinzip die Spannung reguliert, um das Zielfunktional zu minimieren. Dieses Problem wurde mit einer verkürzten Endzeit ($T = 2.5$) und ohne Bedingungen an den Endzustand bereits in [7], [8] und [36] behandelt. Durch das Hinaufsetzen der Endzeit auf $T = 4.5$ erhält man ein zusätzliches Randstück.
Zur weiteren Untersuchung des Problems benötigt man zunächst die Hamiltonfunktion (1.7), mittels der dann die optimale Steuerung für den unbeschränkten Fall (d.h. ohne die Steuerbeschränkung (3.8)), sowie die Steuerung auf freien Teilstücken beim beschränkten Fall berechnet werden kann.

$$H(x, u, \lambda) = x_1^2 + u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 \left(-x_1 + 1.4x_2 - 0.14x_2^3 + 4u\right)$$

$$\Rightarrow H_u = 2u + 4\lambda_2,\ H_{uu} = 2 > 0.$$

$$H_u = 0 \Rightarrow\ u = -2\lambda_2,\ \text{ falls } |-2\lambda_2| \le \alpha. \tag{3.9}$$

3.2 Das unbeschränkte Rayleigh-Problem

Hier gilt:

$$u(t) = -2\lambda_2(t) \quad \forall\, 0 \le t \le 4.5\,. \tag{3.10}$$

Die strenge Legendre-Clebsch-Bedingung (1.17) ist trivialerweise erfüllt:

$$H_{uu}(t) \equiv 2 > 0. \tag{3.11}$$

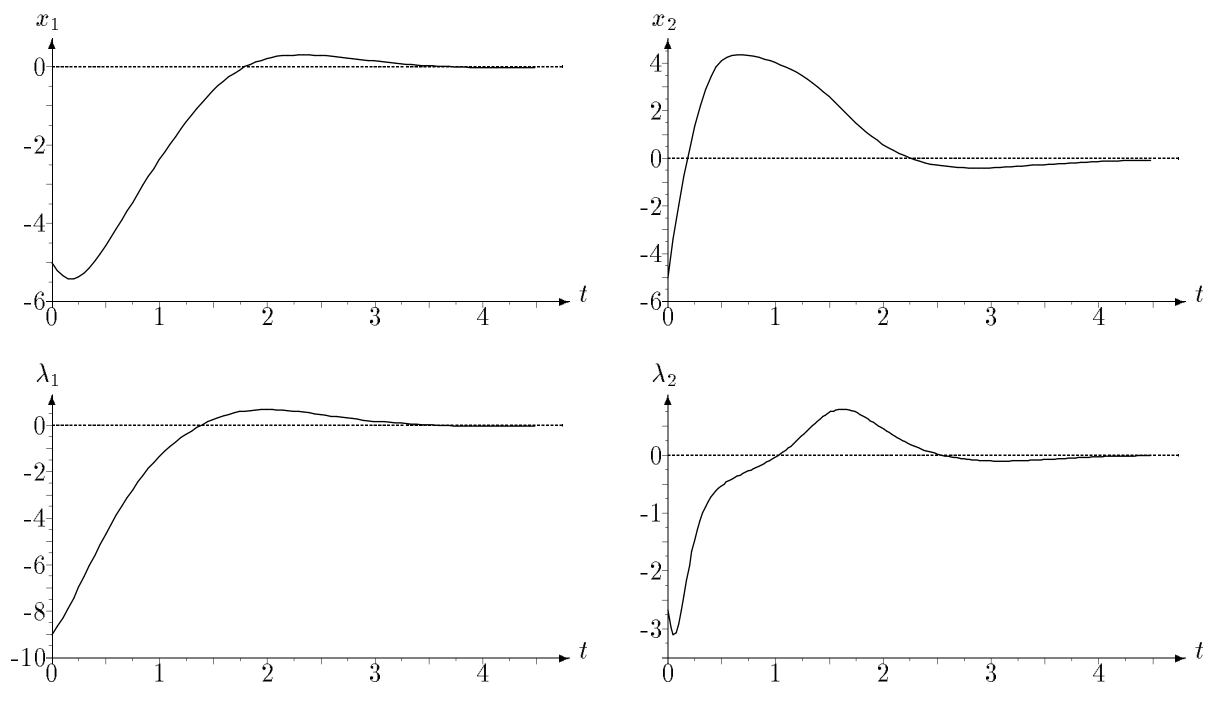
Man erhält somit folgendes RWP:

$$\dot{x_1} = x_2, \tag{3.12}$$
$$\dot{x_2} = -x_1 + 1.4x_2 - 0.14x_2^3 - 8\lambda_2, \tag{3.13}$$
$$\dot{\lambda_1} = -H_{x_1} = \lambda_2 - 2x_1, \tag{3.14}$$
$$\dot{\lambda_2} = -H_{x_2} = 0.42x_2^2\lambda_2 - 1.4\lambda_2 - \lambda_1, \tag{3.15}$$
$$x_1(0) = -5,\ x_2(0) = -5, \tag{3.16}$$
$$x_1(T) = 0,\ x_2(T) = 0. \tag{3.17}$$

Mittels BNDSCO [26],[27] ergibt sich folgende Lösung:

$$\lambda_1(0) = -9.00247067,\ \lambda_2(0) = -2.67303084,$$
$$\lambda_1(T) = -0.04456054,\ \lambda_2(T) = -0.00010636.$$

Die zugehörigen Funktionen sehen wie folgt aus:



3.3 Das steuerungsbeschränkte Rayleigh-Problem

Bei Hinzunahme der Steuerbeschränkung (3.8) mit $\alpha = 1$, d.h.

$$|u(t)| \leq 1 \tag{3.18}$$

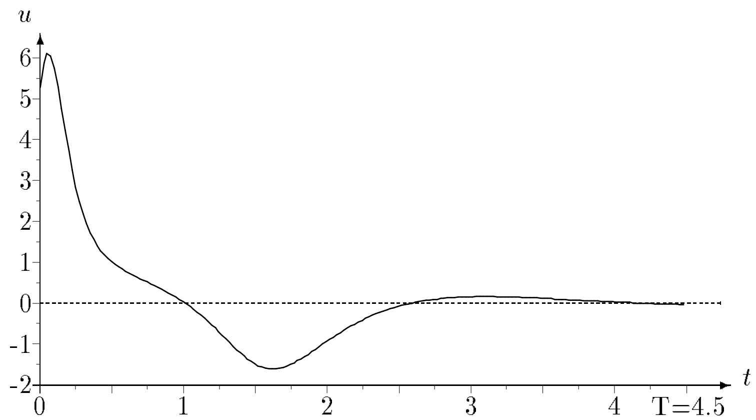
ist die erweiterte Hamiltonfunktion (1.36) gegeben durch

$$\tilde{H}(x, u, \lambda, \mu) = H(x, u, \lambda) + \mu_1(u - 1) + \mu_2(-u - 1). \tag{3.19}$$

Für die Multiplikatoren μ_1 und μ_2 gilt:

$$\begin{aligned} u(t) < 1 \quad &\Rightarrow \; \mu_1(t) = 0\,, \\ u(t) > -1 \quad &\Rightarrow \; \mu_2(t) = 0\,. \end{aligned}$$

Anhand des Verlaufs der Steuerung u der Lösung des unbeschränkten Problems (siehe folgende Grafik)



vermutet man, daß bei Hinzunahme von (3.18) folgende Schaltstruktur am sinnvollsten ist:

$$u(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & , 0 \leq t \leq t_1, \\ -2\lambda_2(t) & , t_1 \leq t \leq t_2, \\ -1 & , t_2 \leq t \leq t_3, \\ -2\lambda_2(t) & , t_3 \leq t \leq T. \end{array} \right\} \tag{3.20}$$

Da die Hamiltonfunktion ein eindeutig bestimmtes Minimum hat, ist die optimale

Steuerung $u(t)$ stetig in den auftretenden Schaltpunkten. Aus $u(t_i^-) = u(t_i^+)$, $i = 1,2,3$, erhält man deshalb die Schaltbedingungen ("Junction conditions", vgl. (1.47))

$$-2\lambda_2(t_1) = 1, \quad -2\lambda_2(t_i) = -1, \; i = 2,3.$$

Wegen $\dot{\lambda}_i = -\tilde{H}_{x_i} = -H_{x_i}$ stimmen die Differentialgleichungen für die Adjungierten mit denen im unbeschränkten Fall überein und es ergibt sich insgesamt das DGL-System

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= \left\{ \begin{array}{ll} -x_1 + 1.4x_2 - 0.14x_2^3 + 4, & t \in [0, t_1], \\[2ex] -x_1 + 1.4x_2 - 0.14x_2^3 - 8\lambda_2, & t \in [t_1, t_2] \cup [t_3, 4.5], \\[2ex] -x_1 + 1.4x_2 - 0.14x_2^3 - 4, & t \in [t_2, t_3], \end{array} \right\} \\
\dot{\lambda}_1 &= \lambda_2 - 2x_1, \\
\dot{\lambda}_2 &= 0.42x_2^2\lambda_2 - 1.4\lambda_2 - \lambda_1, \\
& x_1(0) = x_2(0) = -5, \; x_1(T) = 0, \; x_2(T) = 0, \\
& -2\lambda_2(t_1) = 1, \quad -2\lambda_2(t_i) = -1, \; i = 2,3.
\end{aligned}$$

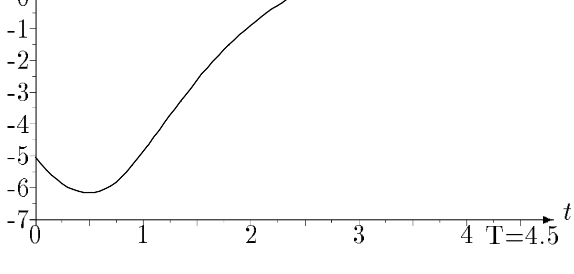
mit der Lösung:

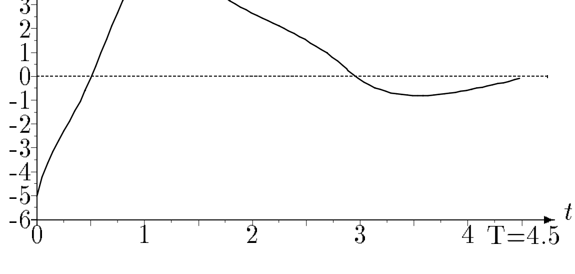
$$\begin{aligned}
& t_1 = 1.04198283, \; t_2 = 1.70663109, \; t_3 = 2.88494411, \\
& \lambda_1(0) = -12.70997710, \; \lambda_2(0) = -4.59631683, \\
& \lambda_1(T) = 0.05196024, \; \lambda_2(T) = -0.13990408.
\end{aligned}$$

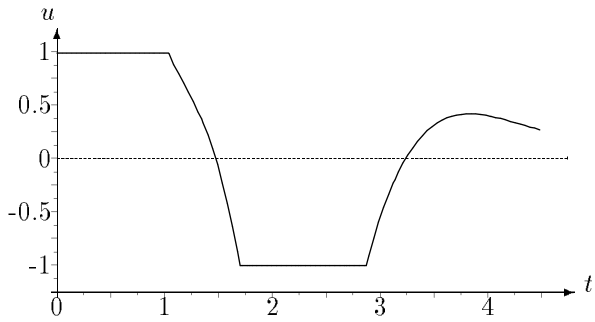
Bei der obigen Lösung sind auch die Bedingungen (2.28) und (2.30) erfüllt:

$$\begin{aligned}
\dot{C}(t_1^+) &= -2\dot{\lambda}_2(t_1^+) = -2.32300935 \neq 0, \\
\dot{C}(t_2^-) &= 2\dot{\lambda}_2(t_2^-) = 5.40133726 \neq 0, \\
\dot{C}(t_3^+) &= 2\dot{\lambda}_2(t_3^+) = -3.88649630 \neq 0, \\
\mu_1(t) &= -2 - 4\lambda_2(t) > 0, \; t \in [0, t_1[, \\
\mu_2(t) &= -2 + 4\lambda_2(t) > 0, \; t \in]t_2, t_3[.
\end{aligned}$$

Die gefundenen Trajektorien x_1, x_2 und u haben folgende Gestalt:







3.4 Hinreichende Optimalitätsbedingungen

Zur Erfüllung der "starken" hinreichenden Bedingung für die gefundenen Lösungen muß es zu folgender Riccati-DGL (2.6) eine beschränkte Lösung geben:

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= -Qf_x^0 - \left(f_x^0\right)^T Q - H_{xx}^0 \\ &\quad + \left(H_{xu}^0 + Qf_u^0\right)\left(H_{uu}^0\right)^{-1}\left(H_{ux}^0 + \left(f_u^0\right)^T Q\right),\end{aligned}$$

wobei f^0 und H^0 die Funktionen f und H, ausgewertet entlang der optimalen Trajektorien $x_0(t)$, $\lambda(t)$ und $u_0(t)$, darstellen.

3.4.1 Unbeschränkter Fall

Für das unbeschränkte Problem gilt speziell:

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= -Q\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1.4 - 0.42x_2^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1.4 - 0.42x_2^2 \end{pmatrix} Q \\ &\quad - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -0.84\lambda_2 x_2 \end{pmatrix} + Q\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}\frac{1}{2}(0\ 4)Q.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Mit

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_4 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= 2q_2 + 8q_2^2 - 2, && (3.22)\\
\dot{q}_2 &= -q_1 + (0.42x_2^2 - 1.4)q_2 + q_4 + 8q_2q_4, && (3.23)\\
\dot{q}_4 &= -2q_2 + (0.84x_2^2 - 2.8)q_4 + 8q_4^2 + 0.84\lambda_2 x_2. && (3.24)
\end{aligned}
$$

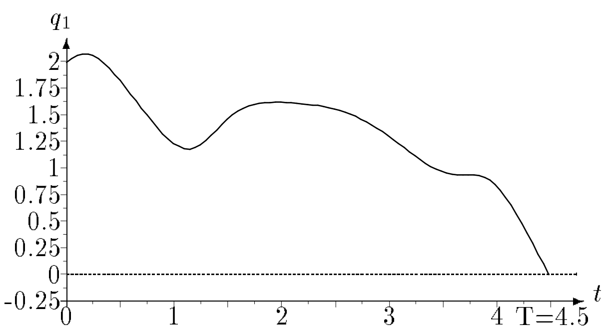
Da sowohl der Anfangs- als auch der Endwert von (x_1, x_2) fest ist, hat man keine Beschränkungen für $Q(0)$ und $Q(T)$. Wählt man zum Beispiel als Endwert für Q

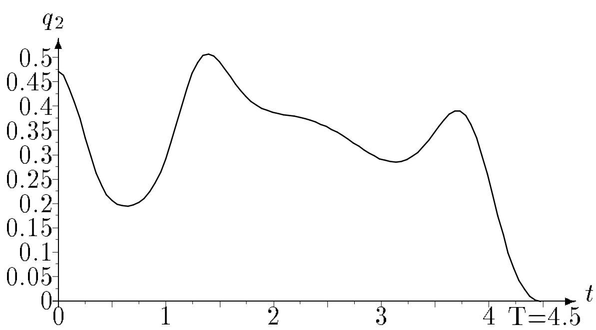
$$Q(T) = 0,$$

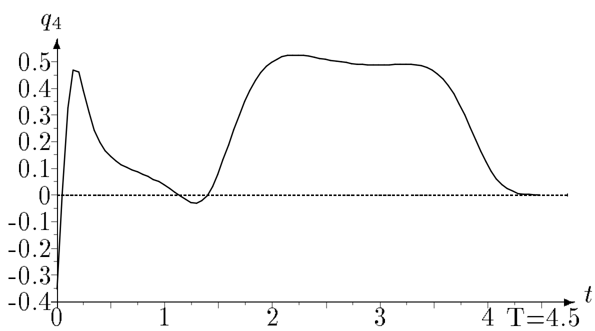
so erhält man eine beschränkte Lösung mit $|q_i(t)| \leq 2.5,\ i = 1, 2, 4$. Somit ist die gefundene Lösung lokal optimal.
Es ergibt sich für $Q(0)$:

$$
\begin{aligned}
q_1(0) &= 2.00632377\,,\\
q_2(0) &= 0.47051349\,,\\
q_4(0) &= -0.35166544\,.
\end{aligned}
$$

Es folgt die graphische Darstellung der Funktionen $q_1(t)$, $q_2(t)$ und $q_4(t)$:







3.4.2 Beschränkter Fall

Für das steuerungsbeschränkte Problem läßt sich mit BNDSCO keine beschränkte Lösung von Q finden, falls man für Q die gleichen Differentialgleichungen verwendet wie im unbeschränkten Fall.
Verändert man den Anfangswert $x(0)$ auf $(-2,-2)$ so bekommt man hingegen für $Q(T) = 0$ eine beschränkte Lösung. Verkleinert man den Anfangswert $x(0)$ nun schrittweise, so ist zu erkennen, daß in der Nähe von $x(0) = (a,a)$, $a = -2.61$, bei festem Endwert $Q(T) = 0$ sich der Absolutbetrag vom Anfangswert $Q(0)$ in allen Komponenten recht rasch vergrößert:

a	$q_1(0)$	$q_2(0)$	$q_3(0)$
-2.0	0.83	0.39	-0.31
-2.2	0.76	0.48	-0.73
-2.4	0.71	0.72	-1.65
-2.5	0.62	1.10	-3.07
-2.6	-0.42	5.23	-19.4
-2.61	-1.94	11.3	-43.6
-2.612	-2.85	15.0	-58.2
-2.6125	-3.19	16.3	-63.6

Auch für anders gewählte Endwerte für Q ließ sich entlang der optimalen Lösung (x,u) mit $x(0) = (-5,-5)$ keine beschränkte Lösung der Riccati-DGL finden. Allerdings bedeutet dieses Ergebnis nicht, daß die Optimalität der Lösung für den Anfangswert $x(0) = (-5,-5)$ nicht nachweisbar ist. Es reicht auch aus, die sogenannten "schwachen" hinreichenden Bedingungen nachzuprüfen, d.h. nur für $t_1 \le t \le t_2$ und $t_3 \le t \le T$ eine Lösung der Riccati-DGL (2.6) zu erhalten, die für die Randstücke $0 \le t \le t_1$ und $t_2 \le t \le t_3$ durch eine Lösung folgender linearer DGL (2.9) fortgesetzt wird:

$$\dot{Q} = -Qf_x^0 - \left(f_x^0\right)^T Q - H_{xx}^0 .$$

Für das Rayleigh-Problem heißt das:

Falls

$$\dot{q}_1 = \left\{ \begin{array}{ll} 2q_2 - 2, & t \in [0,t_1] \cup [t_2,t_3], \\ 2q_2 + 8q_2^2 - 2, & t \in [t_1,t_2] \cup [t_3,T], \end{array} \right\} \tag{3.25}$$

$$\dot{q}_2 = \left\{ \begin{array}{ll} -q_1 + (0.42x_2^2 - 1.4)q_2 + q_4, & t \in [0,t_1] \cup [t_2,t_3], \\ -q_1 + (0.42x_2^2 - 1.4)q_2 + q_4 + 8q_2q_4, & t \in [t_1,t_2] \cup [t_3,T], \end{array} \right\} \tag{3.26}$$

$$\dot{q}_4 = \left\{ \begin{array}{ll} -2q_2+(0.84x_2^2-2.8)q_4+0.84\lambda_2 x_2, & t \in [0,t_1] \cup [t_2,t_3], \\ & \\ -2q_2+(0.84x_2^2-2.8)q_4+8q_4^2+0.84\lambda_2 x_2, & t \in [t_1,t_2] \cup [t_3,T], \end{array} \right\} \tag{3.27}$$

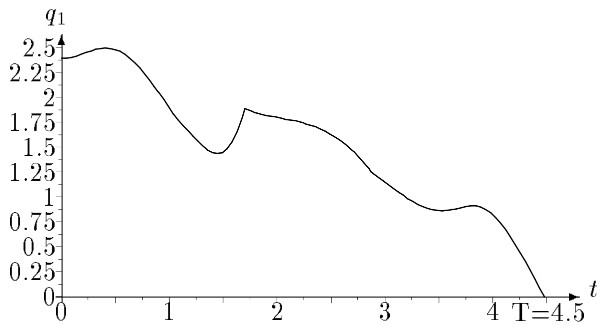
für einen beliebigen Endwert $Q(T)$ eine auf dem ganzen Intervall $[0,T]$ beschränkte Lösung hat, so ist eine Lösung (x,u), die zusätzlich die notwendigen Optimalitätsbedingungen erfüllt, lokal optimal.

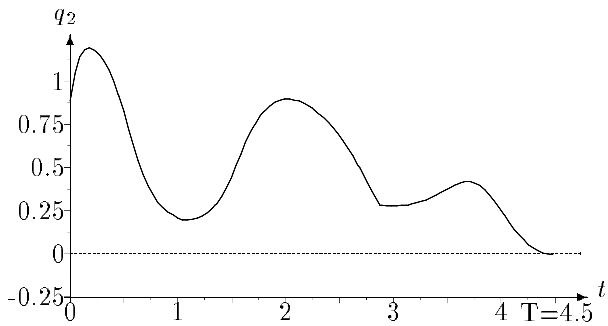
Dieses ist für $Q(T)=0$ erfüllt, so daß die vorliegende Lösung tatsächlich lokal optimal ist.

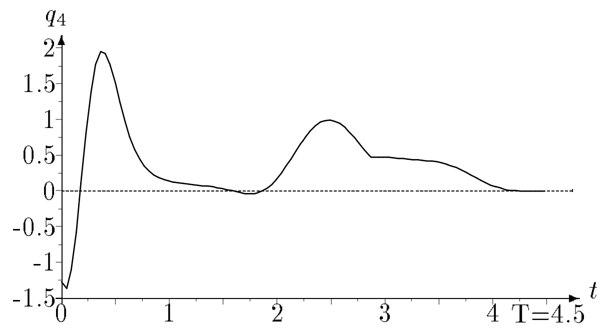
Man erhält für den Anfangswert von Q :

$$q_1(0) = 2.39858190, \;\; q_2(0) = 0.89023233, \;\; q_4(0) = -1.26620913\,.$$

Auch hier folgt die graphische Darstellung der Funktionen $q_1(t)$, $q_2(t)$ und $q_4(t)$:







3.5 Sensitivitätsanalyse

Für eine Untersuchung der Sensitivität eignet sich besonders der kubische Term x_2^3 auf der rechten Seite der DGL zu x_2.

Es wird deshalb das folgende parameterabhängige Steuerungsproblem (vgl. (2.26)) betrachtet:

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad & \int_0^T \left(x_1^2 + u^2\right) dt \\ \text{unter} \quad & \dot{x_1} = x_2, \\ & \dot{x_2} = -x_1 + 1.4x_2 - cx_2^3 + 4u, \\ & x_1(0) = x_2(0) = -5, \; x_1(T) = x_2(T) = 0, \\ & |u(t)| \leq 1, \; 0 \leq t \leq T, \; c \in [0.10, 0.18]. \end{aligned} \tag{3.28}$$

3.5.1 Unbeschränkter Fall

Für den unbeschränkten Fall erhält man mittels

$$y_1(t) := \frac{\partial x_1}{\partial c}(t, c_0), \; y_2(t) := \frac{\partial x_2}{\partial c}(t, c_0), \tag{3.29}$$

$$\eta_1(t) := \frac{\partial y_1}{\partial c}(t, c_0), \; \eta_2(t) := \frac{\partial y_2}{\partial c}(t, c_0) \tag{3.30}$$

zusätzlich zu (3.12) – (3.17) die folgenden DGL's und Randbedingungen:

$$\dot{y_1} = y_2, \tag{3.31}$$

$$\dot{y_2} = -y_1 + 1.4y_2 - 3cx_2^2y_2 - x_2^3 - 8\eta_2, \tag{3.32}$$

$$\dot{\eta_1} = \eta_2 - 2y_1, \tag{3.33}$$

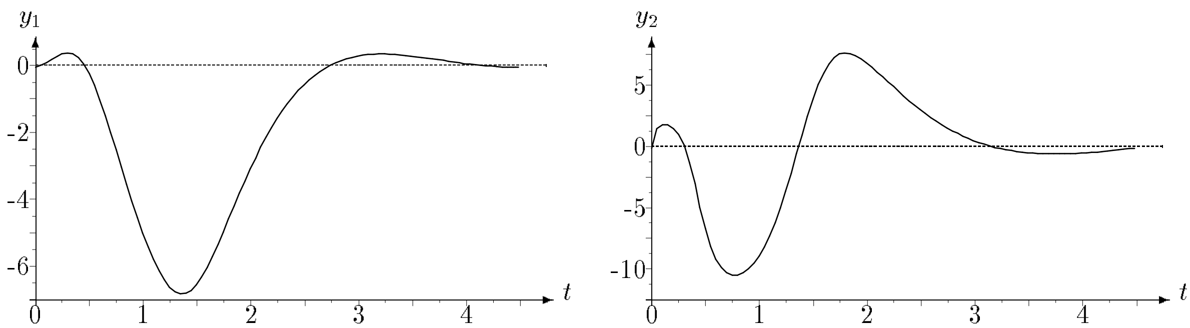
$$\dot{\eta_2} = 3x_2^2\lambda_2 + 3c\left(2x_2y_2\lambda_2 + x_2^2\eta_2\right) - 1.4\eta_2 - \eta_1, \tag{3.34}$$

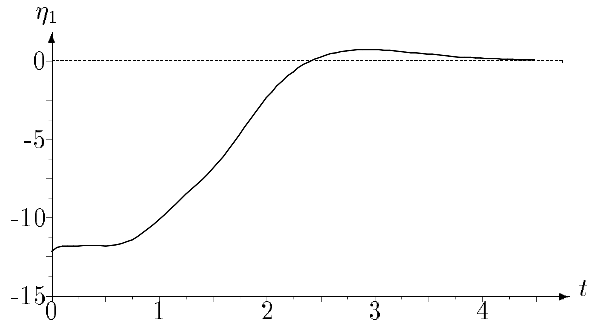
$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(T) = y_2(T) = 0. \tag{3.35}$$

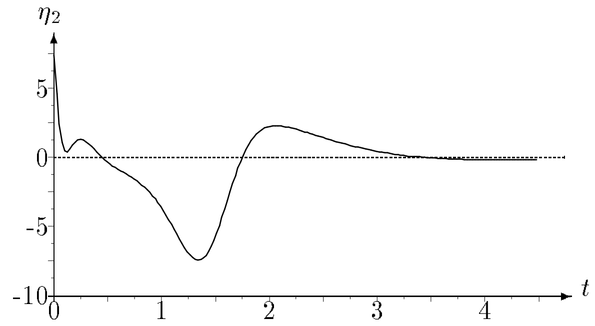
Fr η_1 und η_2 ergeben sich dann die Randwerte (bzgl. $c = c_0$):

$$\eta_1(0) = -12.09050326, \; \eta_2(0) = 7.41986735,$$
$$\eta_1(T) = 0.15682073, \; \eta_2(T) = -0.14166697.$$

Die folgenden Bilder zeigen die gefundenen Funktionen:







Mit diesen Funktionen lassen sich nun Näherungslösungen zu den optimalen Funktionen bzgl. eines gestörten Parameters $c \in [0.10, 0.18]$ berechnen (vgl. Taylorentwicklung in Abschnitt 2.3). Für $c = 0.16$ erhält man z.B.:

$$\begin{aligned}
\lambda_1(0; c) &\approx \lambda_1(0; c_0) + (c - c_0)\eta_1(0; c_0) = -9.24428074 \\
\lambda_2(0; c) &\approx \lambda_2(0; c_0) + (c - c_0)\eta_2(0; c_0) = -2.52463349 \\
\lambda_1(T; c) &\approx \lambda_1(T; c_0) + (c - c_0)\eta_1(T; c_0) = -0.04142413 \\
\lambda_2(T; c) &\approx \lambda_2(T; c_0) + (c - c_0)\eta_2(T; c_0) = -0.00293970
\end{aligned}$$

Die exakten Werte im Vergleich dazu:

$$\begin{aligned}
\lambda_1(0; c) = -9.23644890,\ \ \lambda_2(0; c) = -2.53101135 \\
\lambda_1(T; c) = -0.04136190,\ \ \lambda_2(T; c) = -0.00290348
\end{aligned}$$

3.5.2 Beschränkter Fall

Mit den Funktionen

$$y_1(t) := \frac{\partial x_1}{\partial c}(t, c_0),\ \ y_2(t) := \frac{\partial x_2}{\partial c}(t, c_0), \tag{3.36}$$

$$\eta_1(t) := \frac{\partial y_1}{\partial c}(t, c_0),\ \ \eta_2(t) := \frac{\partial y_2}{\partial c}(t, c_0) \tag{3.37}$$

erhält man zusätzlich zu (3.21) – (3.21) die folgenden DGL's und Randbedingungen

$$\dot{y_1} = y_2, \tag{3.38}$$

$$\dot{y_2} = \left\{ \begin{array}{ll} -y_1 + 1.4y_2 - 3cx_2^2y_2 - x_2^3, & t \in [0, t_1] \cup [t_2, t_3], \\ & \\ -y_1 + 1.4y_2 - 3cx_2^2y_2 - x_2^3 - 8\eta_2, & t \in [t_1, t_2] \cup [t_3, T], \end{array} \right\} \tag{3.39}$$

$$\dot{\eta_1} = \eta_2 - 2y_1, \tag{3.40}$$

$$\dot{\eta_2} = 3x_2^2\lambda_2 + 3c\left(2x_2y_2\lambda_2 + x_2^2\eta_2\right) - 1.4\eta_2 - \eta_1, \tag{3.41}$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(T) = y_2(T) = 0. \tag{3.42}$$

Für die Schaltfunktion $W(x,\lambda,c)$ aus (2.59) gilt:

$$
\begin{array}{rl}
\mathbf{t_1}: & u(t_1)-1=-2\lambda_2(t_1)-1=0 \\
\Rightarrow & W\left(x(t_1),\lambda(t_1),c\right)=-2\lambda_2(t_1)-1 \\
\Rightarrow & \dot{W}\left(x(t_1),\lambda(t_1),c\right)=-2\dot{\lambda_2}(t_1)=-2(3cx_2^2\lambda_2-1.4\lambda_2-\lambda_1)|_{t=t_1}, \\
 & W_x=(0,\,0),\;\; W_\lambda=(0,\,-2),\;\; W_c=0. \\
\mathbf{t_2},\mathbf{t_3}: & -u(t_i)-1=2\lambda_2(t_i)-1=0 \\
\Rightarrow & W\left(x(t_i),\lambda(t_i),c\right)=2\lambda_2(t_i)-1 \\
\Rightarrow & \dot{W}\left(x(t_1),\lambda(t_1),c\right)=2\dot{\lambda_2}(t_i)=2(3cx_2^2\lambda_2-1.4\lambda_2-\lambda_1)|_{t=t_i}, \\
 & W_x=(0,\,0),\;\; W_\lambda=(0,\,2),\;\; W_c=0.
\end{array}
$$

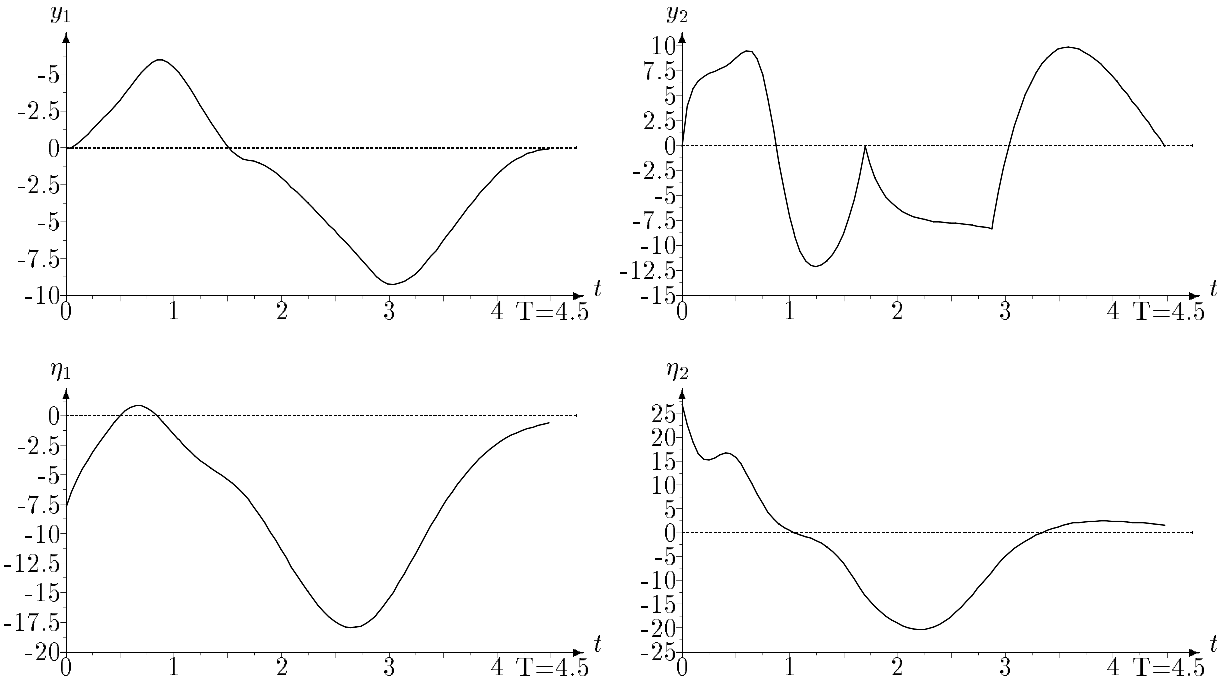
Damit erhält man gemäß (2.62) für die Variation der Schaltpunkte:

$$
\begin{aligned}
\frac{dt}{dc}(t_i) &= -\dot{W}^{-1}(W_x,\,W_\lambda,\,W_c)\begin{pmatrix} y \\ \eta \\ 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{t=t_i} \\
&= -\frac{\eta_2(t_i)}{3cx_2^2(t_i)\lambda_2(t_i)-1.4\lambda_2(t_i)-\lambda_1(t_i)},\;\; i=1,2,3. \qquad (3.43)
\end{aligned}
$$

Für die Parameter $c=0.10, 0.14, 0.18$ seien die Ergebnisse angegeben:

c	0.10	0.14	0.18
t_1	1.05751534	1.04198283	1.02828820
t_2	1.51590582	1.70663109	1.89065250
t_3	3.09400885	2.88494411	2.76092021
$\frac{dt}{dc}(t_1)$	-0.36998431	-0.38936098	-0.28377763
$\frac{dt}{dc}(t_2)$	4.54127554	4.81518854	4.32589322
$\frac{dt}{dc}(t_3)$	-6.44997287	-4.07372212	-2.25312333
$\lambda_1(0)$	-12.36609330	-12.70997710	-12.99122866
$\lambda_2(0)$	-6.08100306	-4.59631683	-3.71389321
$\lambda_1(4.5)$	0.12567073	0.05196024	0.04157884
$\lambda_2(4.5)$	-0.29329073	-0.13990408	-0.09252072
$\eta_1(0)$	-9.41523426	-7.73953349	-6.42509464
$\eta_2(0)$	50.25325198	27.59301812	17.65679125
$\eta_1(4,5)$	-3.70159935	-0.68941701	0.00367953
$\eta_2(4.5)$	6.65847112	1.98521500	0.64878400

Die zugehörigen Trajektorien $y_1(t; 0.14)$, $y_2(t; 0.14)$, $\eta_1(t; 0.14)$ und $\eta_2(t; 0.14)$:



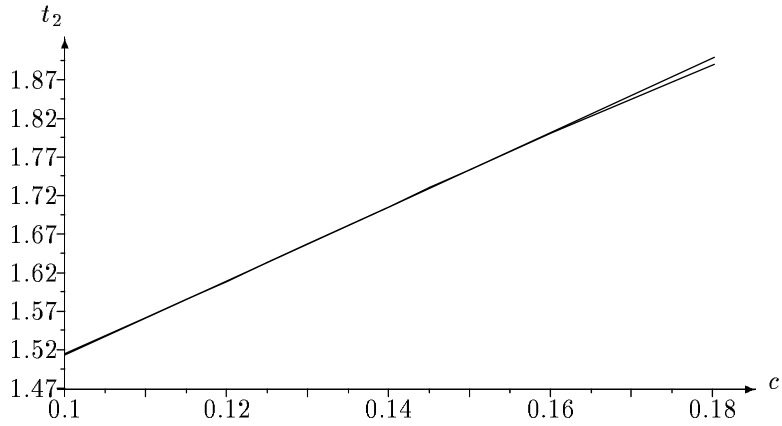
Mit den obigen Lösungen lassen sich die Näherungswerte zu $x(t, c)$, $\lambda(t, c)$ und $u(t, c)$ für $c \in [0.10, 0.18]$ auf denjenigen Teilstücken berechnen, die im Abschnitt 2.4 in den Fällen 1 und 2 betrachtet wurden.
Bei den ersten beiden Schaltpunkten t_1 und t_2 erhält man durch Anwendung der Näherungsformel

$$t_i(c) = t_i(c_0) + (c - c_0)\frac{dt}{dc}(t_i; c_0) \tag{3.44}$$

recht gute Näherungswerte:

$$\begin{aligned}
t_1(0.10) &= 1.0575 \text{ mit Näherung: } t_1(0.10) \approx 1.0576\,,\\
t_1(0.18) &= 1.0283 \text{ mit Näherung: } t_1(0.18) \approx 1.0264\,,\\
t_2(0.10) &= 1.5159 \text{ mit Näherung: } t_2(0.10) \approx 1.5140\,,\\
t_2(0.18) &= 1.8907 \text{ mit Näherung: } t_2(0.18) \approx 1.8992\,.
\end{aligned}$$

Das folgende Bild zeigt die exakten Schaltpunkte $t_2(c)$ im Vergleich zu den genäherten Werten von $t_2(c)$:



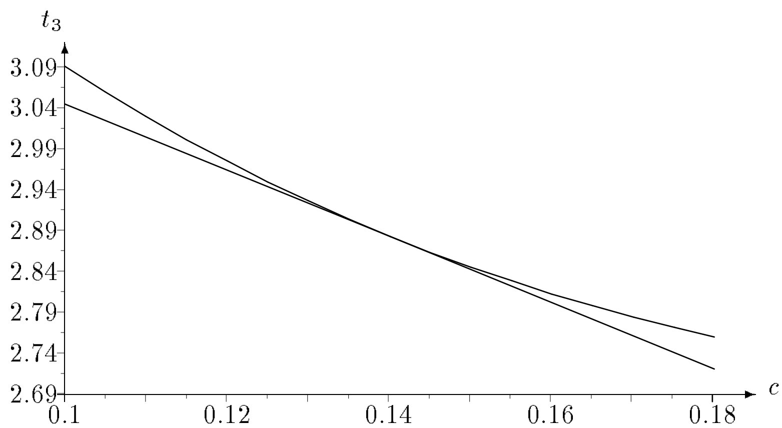
Für den Schaltpunkt t_3 weichen die Näherungswerte etwas stärker von den exakten Werten ab:

$$t_3(0.10) = 3.0940 \text{ mit Näherung: } t_3(0.10) \approx 3.0478\,,$$
$$t_3(0.18) = 2.7609 \text{ mit Näherung: } t_3(0.18) \approx 2.7220\,.$$

Bei einer kleineren Störung, z.B. bei $c = 0.145$, bekommt man hingegen erwartungsgemäß für alle drei Schaltpunkte sehr gute Näherungen:

$$t_1(0.145) = 1.040055 \text{ mit Näherung: } t_1(0.145) \approx 1.040036\,,$$
$$t_2(0.145) = 1.730623 \text{ mit Näherung: } t_2(0.145) \approx 1.730707\,,$$
$$t_3(0.145) = 2.865246 \text{ mit Näherung: } t_3(0.145) \approx 2.864576\,.$$

Man erhält somit für den 3. Schaltpunkt nur in unmittelbarer Nähe von $c_0 = 0.14$ gute Näherungswerte, wie folgendes Bild, das $t_3(c)$ im Vergleich zu den Näherungswerten 1. Ordnung darstellt, verdeutlicht:



Die Untersuchung der Teilbereiche, in denen sich die Lösung bzgl. $c_0 = 0.14$ auf einem Randstück und die Lösung bzgl. $c = 0.16$ auf einem freien Teilstück befindet (vgl. Fall 3 in 2.4), bzw. umgekehrt (vgl. Fall 4 in 2.4), wird am Ende dieses Abschnittes durchgeführt. Zunächst aber soll für $t = 2.25$, wo sich sowohl die Lösung zu $c_0 = 0.14$ als auch zu $c = 0.16$ jeweils auf ihrem 2. Randstück befindet, die Güte der Näherungslösungen untersucht werden.

Für $c = c_0 = 0.14$ und $t = 2.25$ hat man

$$x_1(2.25, c_0) = -0.22728802, \;\; x_2(2.25, c_0) = 2.24211122,$$
$$y_1(2.25, c_0) = -3.64789144, \;\; y_2(2.25, c_0) = -7.34781396\,.$$

Hiermit erhält man als Näherungswerte für $c = 0.16$:

$$\begin{aligned} x_1(2.25, c) &\approx x_1(2.25, c_0) + (c - c_0) y_1(2.25, c_0) \\ &= -0.3002458\,, \\ x_2(2.25, c) &\approx x_2(2.25, c_0) + (c - c_0) y_2(2.25, c_0) \\ &= 2.0951549\,. \end{aligned}$$

Diese liegen einigermaßen nahe bei den exakten Werten:

$$x_1(2.25, c) = -0.29032914, \;\; x_2(2.25, c) = 2.12297499\,. \tag{3.45}$$

Um bessere Näherungswerte zu bekommen, vertieft man die Sensitivitätsanalyse, indem man die Funktionen

$$z_1 \;:=\; \frac{\partial^2 x_1}{\partial c^2}, \;\; z_2 \;:=\; \frac{\partial^2 x_2}{\partial c^2}, \tag{3.46}$$
$$\xi_1 \;:=\; \frac{\partial^2 y_1}{\partial c^2}, \;\; \xi_2 \;:=\; \frac{\partial^2 y_2}{\partial c^2} \tag{3.47}$$

in das erweiterte RWP mit aufnimmt.

Man erhält die folgenden zusätzlichen DGL's und Randbedingungen:

$$\dot{z}_1 = z_2, \tag{3.48}$$
$$\dot{z}_2 = \left\{ \begin{array}{ll} -z_1 + 1.4 z_2 - 6 x_2^2 y_2 - 3c(2 x_2 y_2^2 + x_2^2 z_2), & t \in [0, t_1], [t_2, t_3], \\ -z_1 + 1.4 z_2 - 6 x_2^2 y_2 - 3c(2 x_2 y_2^2 + x_2^2 z_2) - 8 \xi_2, & t \in [t_1, t_2], [t_3, T], \end{array} \right\} \tag{3.49}$$
$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 - 2 z_1, \tag{3.50}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}_2 &= 3(2x_2y_2\lambda_2 + x_2^2\eta_2) + 3\left(2x_2y_2\lambda_2 + x_2^2\eta_2\right) \qquad (3.51)\\
&\quad +3c\left(2y_2^2\lambda_2 + 2x_2(z_2\lambda_2 + y_2\eta_2) + 2x_2y_2\eta_2 + x_2^2\xi_2\right)\\
&\quad -1.4\xi_2 - \xi_1\\
&= 6\left(2x_2y_2\lambda_2 + x_2^2\eta_2\right) + 3c\left(x_2^2\xi_2 + 2(y_2^2\lambda_2 + x_2z_2\lambda_2 + 2x_2y_2\eta_2)\right)\\
&\quad -1.4\xi_2 - \xi_1,\\
z_1(0) &= z_2(0) = z_1(T) = z_2(T) = 0. \qquad (3.52)
\end{aligned}
$$

Lösung zu $c = c_0 = 0.14$:

$$
\begin{aligned}
&\xi_1(0) = -50.95465264,\ \ \xi_2(0) = -412.45407081,\\
&\xi_1(T) = 1.98389531,\ \ \xi_2(T) = -7.49705742\,.
\end{aligned}
$$

Als Näherungslösungen für $c = 0.16$ ergeben sich nun:

$$
\begin{aligned}
x_1(2.25) &\approx x_1(2.25, c_0) + (c - c_0)y_1(2.25, c_0)\\
&\quad +\frac{1}{2}(c - c_0)^2 z_1(2.25, c_0)\\
&= -0.3002458 + \frac{1}{5000}(-39.73253846)\\
&= -0.3081923,\\
x_2(2.25) &\approx x_2(2.25, c_0) + (c - c_0)y_2(2.25, c_0)\\
&\quad +\frac{1}{2}(c - c_0)^2 z_2(2.25, c_0)\\
&= 2.0951549 + \frac{1}{5000}(36.06865309)\\
&= 2.1023686\,.
\end{aligned}
$$

Zum Vergleich noch einmal die exakten Werte:

$$
x_1(2.25) = -0.29032914,\ \ x_2(2.25) = 2.12297499\,.
$$

Somit hat die Hinzunahme des zweiten Taylorgliedes die Näherungen nicht wesentlich verbessert.

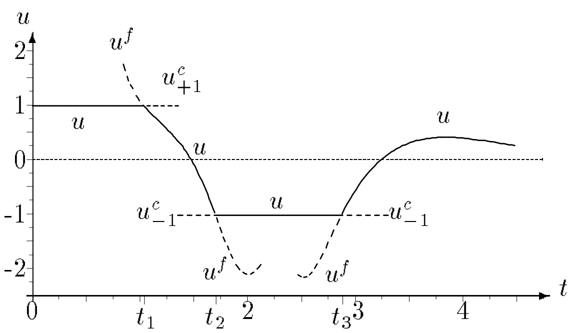
Zum Schluß dieses Abschnittes wird an der Steuerung $u(t)$ demonstriert, wie man auf den Teilstücken, in denen die Fälle 3 und 4 aus Abschnitt 2.4 Anwendung finden, eine Näherungslösung 1. Ordnung erhält. Sei hierfür wieder $c_0 = 0.14$ der nominelle Parameter und $c = 0.16$ der gestörte Parameter. Anhand der Werte $t_{i_0} := t_i(c_0)$ und $\frac{dt}{dc}(t_i; c_0)$ (oder direkter anhand $t_i(0.10)$, $t_i(0.18)$) in der Tabelle auf Seite 50 lassen sich die maximal zu erwartenden Schaltpunktverschiebungen, die für die Behandlung in 2.4 benötigt werden, ungefähr abschätzen. Um das Verfahren ein wenig gegenüber unerwartet großen Parameterabweichungen abzusichern, werden t_i^{min} und t_i^{max} etwas mehr Spielraum eingeräumt:

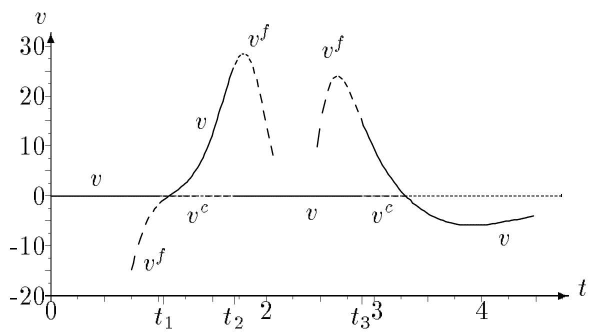
$$t_1^{min} := 1 \;<\; t_1(c_0) = 1.04198283 \;<\; t_1^{max} := 1.1\,, \tag{3.53}$$

$$t_2^{min} := 1.4 \;<\; t_2(c_0) = 1.70663109 \;<\; t_2^{max} := 2\,, \tag{3.54}$$

$$t_3^{min} := 2.6 \;<\; t_3(c_0) = 2.88494411 \;<\; t_3^{max} := 3.2\,. \tag{3.55}$$

Mit der Steuerung $u(t) = 1$ wird nun das DGL-System zu x, λ, y und η für das vergrößerte Intervall $[0, t_1^{max}]$ gelöst. Ebenso wird mit der freien Steuerung $u(t) = -2\lambda_2(t)$ das DGL-System für die vergrößerten Intervalle $[t_1^{min}, t_2^{max}]$ und $[t_3^{min}, T]$ gelöst. Letztendlich muß auch noch mit der Steuerung $u(t) = -1$ das DGL-System für das Intervall $[t_2^{min}, t_3^{max}]$ gelöst werden. Die folgenden beiden Bilder, in denen die Steuerung $u(t, c_0)$ bzw. ihre Variation $v(t, c_0) := \frac{\partial u}{\partial c}(t, c_0)$ als durchgezogene Kurven, ihre neu erhaltenen Fortsetzungen hingegen als gestrichelte Kurven dargestellt sind, verdeutlichen dieses noch einmal:





Mit den Daten, die in die beiden Bilder eingingen, kann man nun zu jedem Parameter $c \in [0.10, 0.18]$ die 1. Näherung der optimalen Steuerung $u(t, c)$ berechnen. Für $c = 0.16$ seien die nötigen Berechnungen hier angegeben:

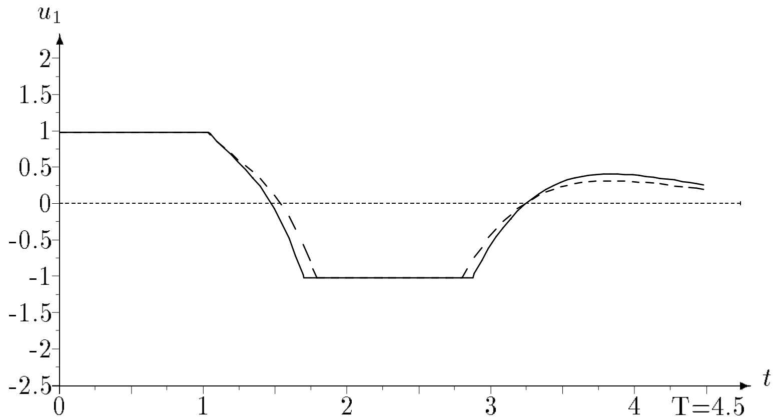
$$\begin{aligned}
t_1(0.16) \quad &\approx t_{1_0} + (0.16 - 0.14)\frac{dt}{dc}(t_1; 0.14) \\
&= 1.03419561 \\
&=: \tilde{t_1}\,, \\
t_2(0.16) \quad &\approx t_{2_0} + (0.16 - 0.14)\frac{dt}{dc}(t_2; 0.14) \\
&= 1.80293486 \\
&=: \tilde{t_2}\,, \\
t_3(0.16) \quad &\approx t_{3_0} + (0.16 - 0.14)\frac{dt}{dc}(t_3; 0.14) \\
&= 2.80346967
\end{aligned}$$

$$=: \tilde{t_3}\,.$$

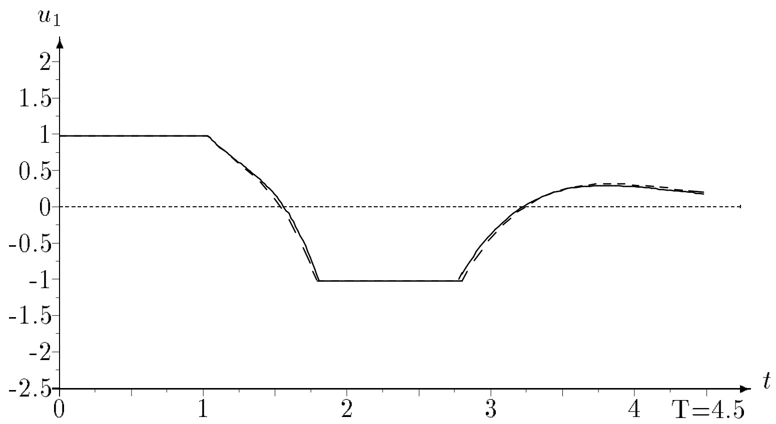
$$\Rightarrow \qquad 0 < \tilde{t_1} < t_{1_0} < t_{2_0} < \tilde{t_2} < \tilde{t_3} < t_{3_0} < T.$$

$$\begin{aligned}
[0, \tilde{t_1}]: &\quad u(t, 0.16) \approx u(t, c_0) + (0.16 - c_0)v(t, c_0),\\
[\tilde{t_1}, t_{1_0}]: &\quad u(t, 0.16) \approx u^f(t, c_0) + (0.16 - c_0)v^f(t, c_0),\\
[t_{1_0}, t_{2_0}]: &\quad u(t, 0.16) \approx u(t, c_0) + (0.16 - c_0)v(t, c_0),\\
[t_{2_0}, \tilde{t_2}]: &\quad u(t, 0.16) \approx u^f(t, c_0) + (0.16 - c_0)v^f(t, c_0),\\
[\tilde{t_2}, \tilde{t_3}]: &\quad u(t, 0.16) \approx u(t, c_0) + (0.16 - c_0)v(t, c_0),\\
[\tilde{t_3}, t_{3_0}]: &\quad u(t, 0.16) \approx u^f(t, c_0) + (0.16 - c_0)v^f(t, c_0),\\
[t_{3_0}, T]: &\quad u(t, 0.16) \approx u(t, c_0) + (0.16 - c_0)v(t, c_0).
\end{aligned}$$

Das folgende Bild zeigt die optimale Steuerung für $c_0 = 0.14$ (durchgezogene Kurve) im Vergleich zur optimalen Steuerung für $c = 0.16$ (gestrichelte Kurve).



Im Vergleich hierzu sind im nächsten Bild die, gemäß dem obigen Verfahren erhaltene, approximierte optimale Steuerung (durchgezogene Kurve), sowie die exakte optimale Steuerung (gestrichelte Kurve) zum Parameter $c = 0.16$ dargestellt.



3.6 Modifizierte Sensitivitätsanalyse

Es wird hier erneut das parameterabhängige optimale Steuerproblem (3.28) betrachtet. Als Ausgangslösungen für die Analyse werden die optimalen Lösungen zu drei verschiedenen Parametern benötigt. Hier seien dies die Lösungen zu folgenden Parametern (vgl. Abschnitt 2.5):

$$c_1 = 0.10, \;\; c_0 = 0.14, \;\; c_2 = 0.18 \;.$$

In Abschnitt 3.5.2 fiel auf, daß für den Schaltpunkt $t_3(c)$ mit der gewöhnlichen Sensitivitätsanalyse nur in unmittelbarer Nähe von $c_0 = 0.14$ gute Näherungswerte erzielt werden konnten. Dieser Schaltpunkt eignet sich deshalb besonders gut, um die Güte der modifizierten Sensitivitätsanalyse zu demonstrieren.
Man benötigt folgende Startwerte (vgl. (2.66)):

$$\begin{aligned} t_{3_0} = t_3(c_0) = 2.88494411, \;\; &\frac{dt}{dc}(t_3; c_1) = -6.44997287, \\ \frac{dt}{dc}(t_3; c_0) = -4.07372212, \;\; &\frac{dt}{dc}(t_3; c_2) = -2.25312333\,. \end{aligned}$$

Zunächst wird wie in (2.67) das Polynom 2. Grades durch $\frac{dt}{dc}(t_3; c_i)$, $i = 1, 0, 2$, bestimmt:

$$\begin{aligned} l(c) &= \sum_{i=0}^{2} \frac{dt}{dc}(t_3; c_i) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{2} \frac{c - c_k}{c_i - c_k} \\ &= (-4.07372212)\,(25(c-0.1))\,(-25(c-0.18)) \\ &\quad + (-6.44997287)\,(-25(c-0.14))\,(-12.5(c-0.18)) \\ &\quad + (-2.25312333)\,(25(c-0.14))\,(12.5(c-0.1)) \\ &= -173.6412375\,c^2 \; + 101.08016575\,c \; - 14.82157707\,. \end{aligned}$$

Sei nun z.B. für $c = 0.16$ der Näherungswert von $t_3(c)$ gesucht. Hierzu werden gemäß (2.68) die Polynomwerte $l(c)$ und $l\left(\frac{c+c_0}{2}\right)$ benötigt, mit denen dann der Wert $\tilde{k}\left(c, c_0, \frac{c+c_0}{2}\right)$ wie in (2.70) berechnet wird:

$$\begin{aligned} l(c) &= -3.09396623, \\ l\left(\tfrac{c+c_0}{2}\right) &= -3.56648005, \\ \\ \tilde{k}\left(c, c_0, \tfrac{c+c_0}{2}\right) &= \frac{1}{6}(-4.07372212) + \frac{2}{3}(-3.56648005) \\ &\quad + \frac{1}{6}(-3.09396623) \\ &= -3.57226809\,. \end{aligned}$$

Nun läßt sich der Näherungswert zu $t_3(0.16)$ berechnen:

$$\begin{aligned} t_3(0.16) &\approx t_{3_0} + (0.16 - 0.14)\,\tilde{k}(0.16, 0.14, 0.15) \\ &= 2.81349875\,. \end{aligned}$$

Im Vergleich dazu sei der exakte Wert und der Näherungswert mit der gewöhnlichen Sensitivitätsanalyse angegeben:

$$\begin{aligned} t_3(0.16) &= 2.81380372\,, \\ t_3(0.16) &\approx 2.80346967\,. \end{aligned}$$

Die Näherungslösung mittels der modifizierten Sensitivitätsanalyse ist im Gegensatz zur Näherungslösung mittels der gewöhnlichen Sensitivitätsanalyse sehr nahe beim exakten Wert. Allerdings ist der Aufwand zur Erzeugung der "off-line"-Daten dreimal so groß wie bei der gewöhnlichen Sensitivitätsanalyse.

In der folgenden Tabelle sind zu verschiedenen Parametern $c \in [0.10, 0.18]$ die exakte Lösung, sowie die genäherten Lösungen bzgl. (a) der modifizierten, (b) der gewöhnlichen Sensitivitätsanalyse gegenübergestellt:

c	$t_3(c)$	(a)	(b)
0.11	3.03273723	3.03232582	3.00715577
0.12	2.97763631	2.97737372	2.96641855
0.13	2.92844300	2.92836224	2.92568133
0.135	2.90599705	2.90597571	2.90531272
0.139	2.88904499	2.88904412	2.88901783
0.141	2.88089744	2.88089656	2.88087039
0.145	2.86524599	2.86522402	2.86457550
0.15	2.84685792	2.84677204	2.84420689
0.16	2.81380372	2.81349875	2.80346967
0.17	2.78532319	2.78477695	2.76273245

3.7 Das zeitoptimale Rayleigh-Problem

Nun soll der Anfangspunkt $x(0) = (-5, -5)$ zeitoptimal in den Nullpunkt überführt werden, d.h. es wird folgendes Problem behandelt:

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & T \\ \text{unter} & \dot{x}_1 = x_2, \\ & \dot{x}_2 = -x_1 + 1.4x_2 - 0.14x_2^3 + 4u, \\ & x_1(0) = x_2(0) = -5,\ x_1(T) = x_2(T) = 0, \\ & |u(t)| \le 1,\ 0 \le t \le T. \end{array}$$

Zur Behandlung mit BNDSCO wird dieses zeitoptimale Problem in ein Problem mit fester Endzeit transformiert (siehe auch 1.5.2):

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & x_3(1) \\ \text{unter} & \dot{x}_1 = x_2 x_3, \\ & \dot{x}_2 = (-x_1 + 1.4x_2 - 0.14x_2^3 + 4u)x_3, \\ & \dot{x}_3 = 0, \\ & x_1(0) = x_2(0) = -5,\ x_1(1) = x_2(1) = 0, \\ & |u(t)| \le 1,\ 0 \le t \le 1. \end{array}$$

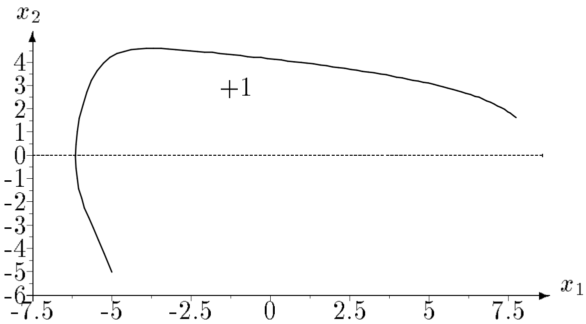
Für die optimale Lösung dieses Problems gilt:

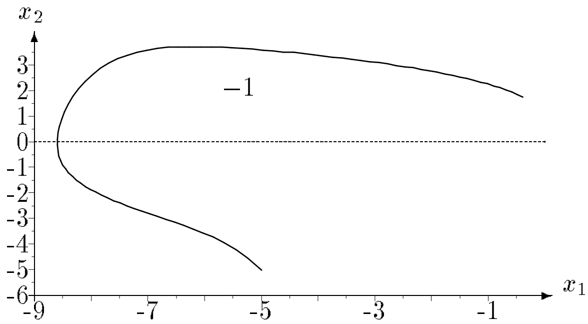
$$x_3 \equiv T^*, \quad T^* : \ \text{optimale Endzeit.}$$

Um für evtl. auftretende Schaltpunkte Schaltbedingugen zu erhalten, muß zunächst die Schaltfunktion (1.23) bestimmt werden:

$$\begin{aligned} &H(x,u,\lambda) = \lambda_1 x_2 x_3 + \lambda_2(-x_1 + 1.4x_2 - 0.14x_2^3 + 4u)x_3 \\ &\Rightarrow\ \sigma(x,\lambda) = H_u(x,u,\lambda) = 4\lambda_2 x_3. \end{aligned}$$

Wegen $x_3(t) = \text{const.} > 0$ bestimmt der Verlauf von $\lambda_2(t)$ die optimale Steuerung $u(t)$ gemäß (1.26). Die Nullstellen von $\lambda_2(t)$ ergeben die Schaltpunkte.
Die optimale Endzeit des zeitoptimalen Problems wird wegen des Ergebnisses aus Abschnitt 3.3 kleiner als 4.5 Zeiteinheiten sein. Anhand der Phasendiagramme erkennt man, daß mit einer durchweg konstanten Steuerung $+1$ bzw. -1 der Nullpunkt nicht innerhalb weniger als 4.5 Zeiteinheiten (bezogen auf das zeitoptimale Problem) erreicht werden kann:

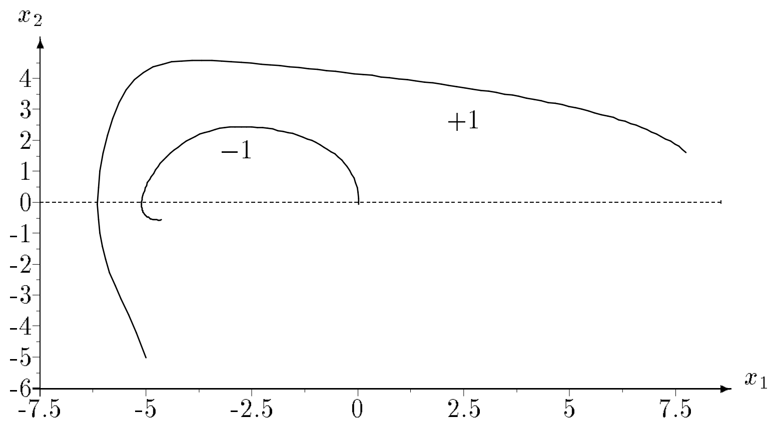




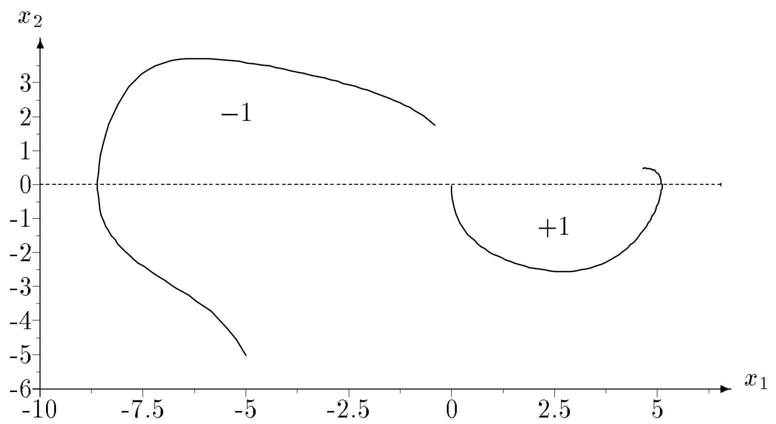
Auch mit einer Steuerung der Art

$$u(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & , 0 \le t \le t_1^-, \\ \\ -1 & , t_1 \le t \le T \end{array} \right\} \tag{3.56}$$

ist keine zeitoptimale Steuerung zu erreichen, da sich die Phasendiagramme die entstehen, wenn man für $t \in [0, 4.5]$ mit der Steuerung $+1$ von $(-5, -5)$ vorwärts bzw. mit der Steuerung -1 von $(0, 0)$ rückwärts integriert, nicht schneiden und somit die optimale Endzeit größer 4.5 sein müßte.



Dasselbe gilt für eine mögliche Steuerung der Art, daß zuerst mit -1 und dann mit $+1$ gesteuert wird.



Dieses führt uns auf den folgenden Ansatz, der auch durch die Ergebnisse in Abschnitt 3.3 motiviert wird:

$$u(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & , 0 \le t \le t_1^-, \\ \\ -1 & , t_1 \le t \le t_2, \\ \\ 1 & , t_2^+ \le t \le T. \end{array} \right\} \tag{3.57}$$

Man erhält somit folgendes RWP:

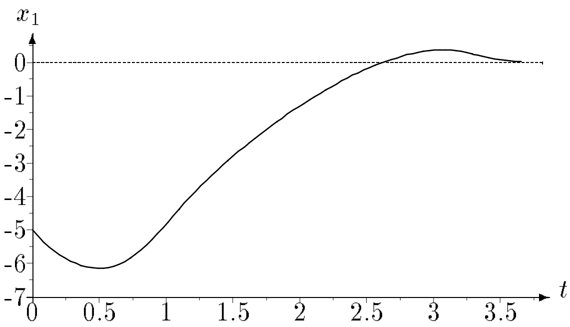
$$\dot{x_1} = x_2 x_3,$$
$$\dot{x_2} = \left\{ \begin{array}{lr} (-x_1 + 1.4x_2 - 0.14x_2^3 + 4)x_3, & t \in [0, t_1[\cup]t_2, 1], \\ \\ (-x_1 + 1.4x_2 - 0.14x_2^3 - 4)x_3, & t \in [t_1, t_2], \end{array} \right\},$$

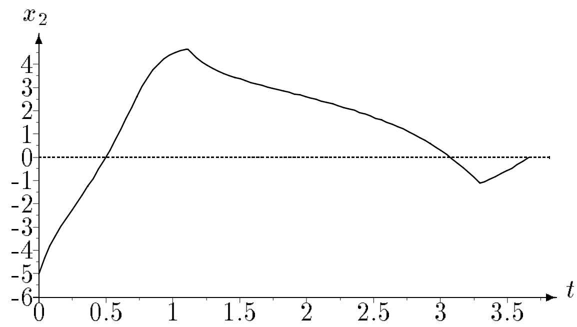
$$
\begin{aligned}
&\dot{x_3} = 0, \\
&\dot{\lambda_1} = \lambda_2 x_3, \\
&\dot{\lambda_2} = (0.42 x_2^2 \lambda_2 - 1.4\lambda_2 - \lambda_1) x_3, \\
&\dot{\lambda_3} = -(\lambda_1 x_2 + \lambda_2(-x_1 + 1.4 x_2 - 0.14 x_2^3 + 4u)), \\
&x_1(0) = x_2(0) = -5,\ x_1(1) = x_2(1) = 0, \\
&\lambda_3(0) = 0,\ \lambda_3(1) = 1, \\
&\lambda_2(t_i) = 0,\ i = 1, 2.
\end{aligned}
$$

Als Lösung ergibt sich (wobei die Zahlenwerte auf das zeitoptimale Ausgangsproblem zurückgerechnet wurden):

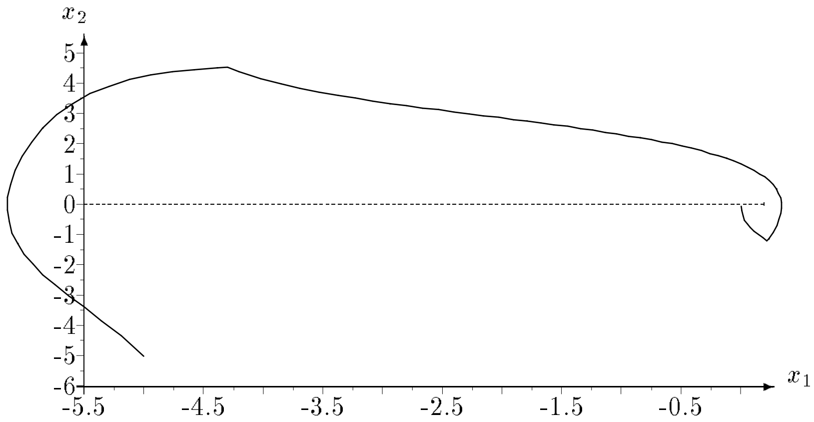
$$
\begin{aligned}
&t_1 = 1.12050658,\ t_2 = 3.31004698,\ T = 3.66817339, \\
&\lambda_1(0) = -0.12234128,\ \lambda_2(0) = -0.08265161, \\
&\lambda_1(T) = 0.84276186,\ \lambda_2(T) = -0.25000000\,.
\end{aligned}
$$

Die folgenden beiden Bilder zeigen die zugehörigen optimalen Trajektorien x_1 und x_2 :





Als Phasendiagramm:



Bem.:

Für zeitoptimale Steuerungsprobleme liegen bisher weder allgemeingültige hinreichende Bedingungen noch allgemeingültige Ansätze zur Sensitivitätsanalyse vor. Das obige Beispiel für ein zeitoptimales Steuerungsproblem wurde nur als kleine Zugabe angegeben, um diese Lücke in der Theorie aufzuzeigen und ein mögliches Beispiel zum Test zukünftiger Ansätze zur Verfügung zu stellen.

Kapitel 4

Problem mit zwei Beschränkungen

Das Problem, das in diesem Kapitel untersucht wird, wurde bereits in [15] und [22] behandelt. Hier wird dem Problem zusätzlich eine reine Zustandsbeschränkung auferlegt, so daß bei der anschließenden detaillierten Sensitivitätsanalyse Sprünge in der Variation zur Adjungierten λ_1 auftreten, während λ_1 selbst keine Sprünge aufweist (vgl. Bem. zu 2.4 auf Seite 34). Im Gegensatz zu [15] und [22] werden hier bei der Sensitivitätsanalyse auch die Übergangsbereiche, in denen sich die nominelle und die gestörte Lösung nicht beide auf einem Randstück bzw. beide auf einem freien Teilstück befinden, behandelt (vgl. Fall 3 und 4 in Abschnitt 2.4).

4.1 Problembeschreibung ohne Beschränkungen

Zunächst wird das Problem ohne Beschränkungen gelöst. In 4.2 und 4.3 wird dann jeweils eine Beschränkung zusätzlich aufgenommen.

Minimiere

$$J(x,u) = \int_0^1 \frac{1}{2}\left(u_1^2 + u_2^2 - 4x_1^2 - 4x_2^2\right) dt \tag{4.1}$$

unter

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1,\ \ \dot{x}_2 = u_2,$$
$$x_1(0) = x_1(1) = 1,\ \ x_2(0) = x_2(1) = 0.$$

Mittels der zugehörigen Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2}\left(u_1^2 + u_2^2 - 4x_1^2 - 4x_2^2\right) + \lambda_1(x_2 + u_1) + \lambda_2 u_2$$

erhält man

$$H_{u_1} = u_1 + \lambda_1,\ \ H_{u_2} = u_2 + \lambda_2,$$

$$H_{uu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pos. definit,}$$

und damit aus $H_{u_i} = 0, \;\; i = 1, 2$, die optimalen Steuerungen

$$u_1 = -\lambda_1, \;\; u_2 = -\lambda_2. \tag{4.2}$$

Die DGL für die Adjungierten

$$\dot{\lambda}_i = -H_{x_i}$$

komplettieren das zu lösende RWP

$$\dot{x}_1 = x_2 - \lambda_1, \qquad \dot{x}_2 = -\lambda_2, \tag{4.3}$$

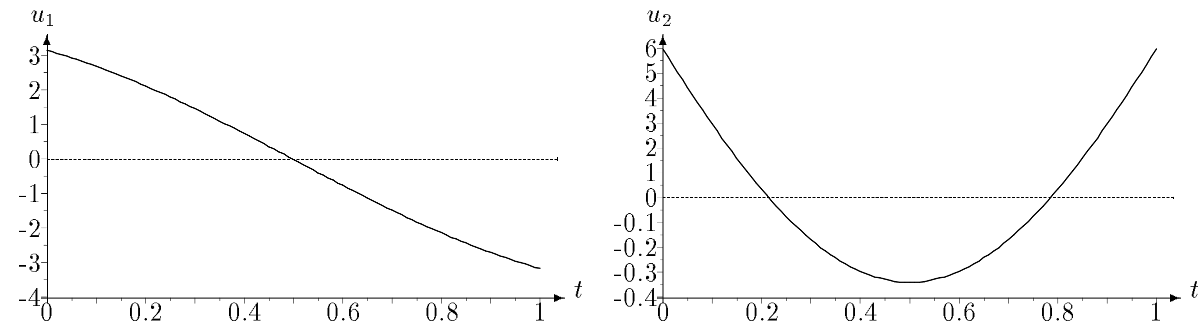
$$\dot{\lambda}_1 = 4x_1, \qquad \dot{\lambda}_2 = 4x_2 - \lambda_1, \tag{4.4}$$

$$x_1(0) = x_1(1) = 1, \qquad x_2(0) = x_2(1) = 0. \tag{4.5}$$

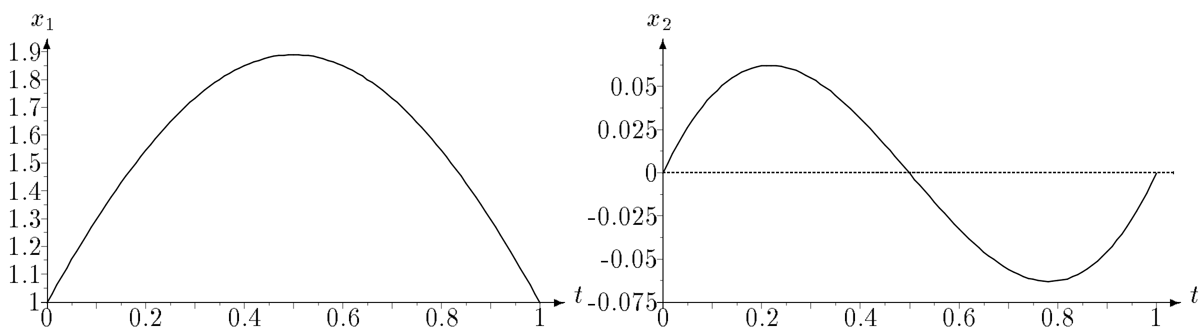
Die Lösung mittels BNDSCO lautet:

$$\lambda_1(0) = -\lambda_1(1) = -3.15185578\,,$$
$$\lambda_2(0) = \lambda_2(1) = -0.60815844\,.$$

Die folgenden beiden Bilder zeigen die optimalen Steuerungen $u_1(t)$ und $u_2(t)$:



Die zugehörigen Trajektorien sehen folgendermaßen aus:



4.2 Hinzunahme der ersten Beschränkung

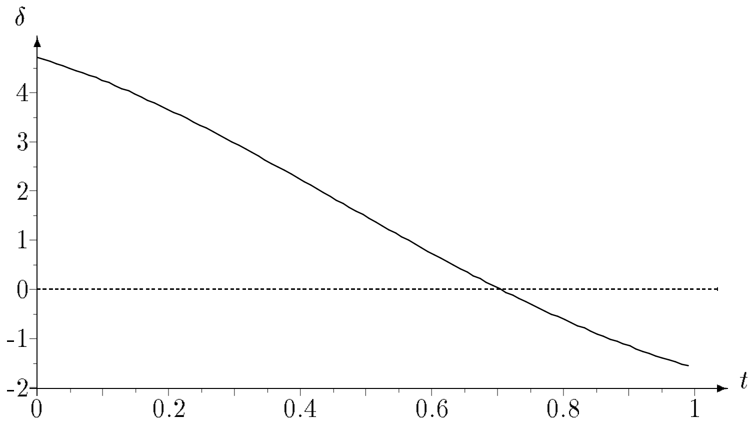
Nun soll eine gemischte Steuer-/Zustandsbeschränkung der Art

$$x_1 + u_1 + u_2 \leq p$$

aufgenommen werden.
Um für p einen sinnvollen Wert wählen zu können, muß zunächst für die optimale Lösung des unbeschränkten Problems die Funktion

$$\delta(t) = x_1(t) + u_1(t) + u_2(t) = x_1(t) - \lambda_1(t) - \lambda_2(t)$$

betrachtet werden.
Die folgende Grafik stellt die Funktion $\delta(t)$ dar:



Am Verlauf der Funktion δ kann man erkennen, daß man z.B. für $p = 1.6$ ein Randstück erhalten wird, genauer, daß für ein Teilintervall $[0, t_1] \subset [0, T]$ die Beschränkung aktiv sein wird. Mit dieser Beschränkung erhält man das folgende optimale Steuerproblem:

Minimiere

$$\int_0^1 \frac{1}{2} \left(u_1^2 + u_2^2 - 4x_1^2 - 4x_2^2 \right) dt \tag{4.6}$$

unter

$$\begin{aligned}
&\dot{x_1} = x_2 + u_1, \;\; \dot{x_2} = u_2, \\
&x_1(0) = x_1(1) = 1, \;\; x_2(0) = x_2(1) = 0, \\
&C^1(x, u, p) = x_1 + u_1 + u_2 - p \leq 0, \;\; p = p_0 = 1.6\,.
\end{aligned}$$

Für das freie Teilstück kann das RWP aus 4.1 übernommen werden. Für das Randstück $[0, t_1]$ werden jetzt die Funktionen u_1, u_2 und μ_1 ausgerechnet (wobei der obere Index 1 bei der erweiterten Hamiltonfunktion andeuten soll, daß nur die Beschränkung C^1 eingeht, im Gegensatz zur erweiterten Hamiltonfunktion in Abschnitt 4.3):

$$\begin{aligned}
\tilde{H}^1 &= \frac{1}{2}\left(u_1^2 + u_2^2 - 4x_1^2 - 4x_2^2\right) + \lambda_1(x_2 + u_1) \\
&\quad + \lambda_2 u_2 + \mu_1 (x_1 + u_1 + u_2 - p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \tilde{H}^1_{u_1} &= u_1 + \lambda_1 + \mu_1, \\
\tilde{H}^1_{u_2} &= u_2 + \lambda_2 + \mu_1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{H}^1_{u_i} = 0, \;\; i = 1, 2 \\
\Rightarrow \quad & u_1 = -\lambda_1 - \mu_1, \;\; u_2 = -\lambda_2 - \mu_1 \\
\Rightarrow \quad & 0 = C^1 = x_1 + u_1 + u_2 - p = x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 - 2\mu_1 - p \\
\Rightarrow \quad & \mu_1 = \frac{1}{2}(x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 - p) \\
\Rightarrow \quad & u_1 = \frac{1}{2}(p - x_1 - \lambda_1 + \lambda_2), \\
& u_2 = \frac{1}{2}(p - x_1 + \lambda_1 - \lambda_2).
\end{aligned}$$

Als Randwertproblem ergibt sich:

$$\dot{x_1} = \left\{ \begin{array}{ll} x_2 + \frac{1}{2}(p - x_1 - \lambda_1 + \lambda_2), & t \in [0, t_1], \\ & \\ x_2 - \lambda_1, & t \in [t_1, 1], \end{array} \right\} \tag{4.7}$$

$$\dot{x_2} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}(p - x_1 + \lambda_1 - \lambda_2), & t \in [0, t_1], \\ & \\ -\lambda_2, & t \in [t_1, 1], \end{array} \right\} \tag{4.8}$$

$$\dot{\lambda_1} = -\tilde{H}^1_{x_1} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}(7x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 + p), & t \in [0, t_1], \\ & \\ 4x_1, & t \in [t_1, 1], \end{array} \right\} \tag{4.9}$$

$$\dot{\lambda_2} = -\tilde{H}^1_{x_2} = 4x_2 - \lambda_1, \quad t \in [0, 1], \tag{4.10}$$

$$x_1(0) = 1, \;\; x_1(1) = 1, \;\; x_2(0) = 0, \;\; x_2(1) = 0, \tag{4.11}$$

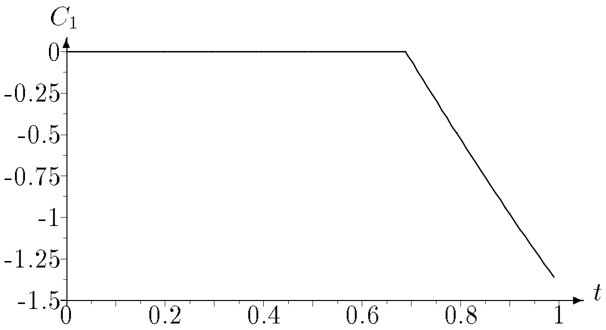
$$x_1(t_1) - \lambda_1(t_1) - \lambda_2(t_1) - p = 0. \tag{4.12}$$

Lösung zu $p = 1.6$:

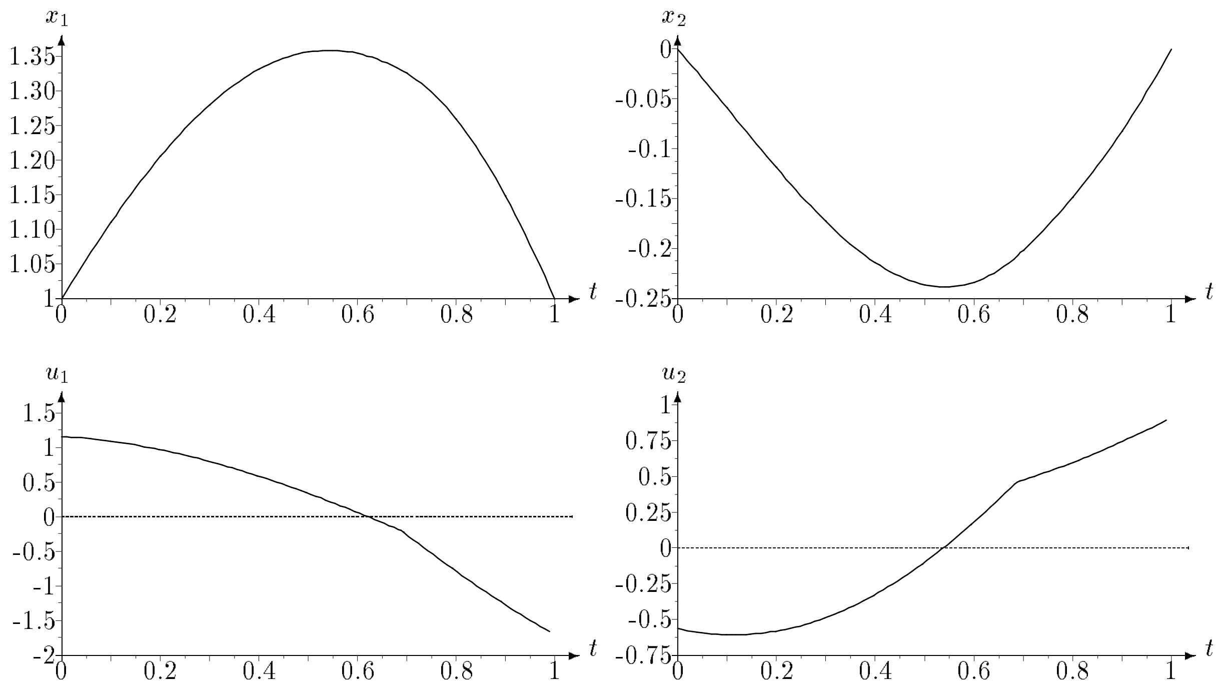
$$\lambda_1(0) = -2.73899572, \;\; \lambda_2(0) = -1.01752156,$$

$$\lambda_1(1) = 1.65750826, \;\; \lambda_2(1) = -0.89906251,$$
$$t_1 = 0.69445840\,.$$

Die Beschränkungsfunktion $C^1(t)$ verdeutlicht noch einmal die Schaltstruktur:



Die Funktionen x_1, x_2, u_1 und u_2 im einzelnen:



4.3 Hinzunahme der zweiten Beschränkung

Nun wird noch eine reine Zustandsbeschränkung zusätzlich aufgenommen:

$$S(x) = x_1 - \alpha \leq 0, \quad \alpha > 0\,. \tag{4.13}$$

Bestimmung der Randsteuerung bzgl. S :

$$\begin{aligned}
&S^1(x) = \dot{S}(x) = \dot{x_1} = x_2 + u_1 = 0 \\
&\Rightarrow u_1 = -x_2, \text{ falls } S \text{ aktiv.}
\end{aligned}$$

Die Zustandsbeschränkung hat somit die Ordnung $\bar{p} = 1$ (vgl. (1.50)), so daß wegen Satz 1 auf Seite 21 die Adjungierten λ_i, $i = 1, 2$, keine Sprünge in den Schaltpunkten machen.
Als Hamiltonfunktion erhält man:

$$\begin{aligned}
\tilde{H}^2 = \quad & \frac{1}{2}\left(u_1^2 + u_2^2 - 4x_1^2 - 4x_2^2\right) + \lambda_1(x_2 + u_1) \\
& + \lambda_2 u_2 + \mu_1\,(x_1 + u_1 + u_2 - p) + \mu_2(x_1 - \alpha).
\end{aligned}$$

Da das Maximum der Funktion $x_1(t)$ in 4.2 etwa 1.37 ist, kann man für $\alpha = 1.35$ ein Randstück erwarten. Da das Randstück relativ klein sein wird und der Schaltpunkt bei Anwendung der gemischten Beschränkung in 4.2 ungefähr bei 0.69 lag, versucht man folgenden Ansatz, bei dem sich das Randstück bzgl. S vollständig innerhalb des Randstückes bzgl. C^1 befindet:

$$\begin{aligned}
[t_1, t_2] : \qquad & \text{Randstück für } S, \\
[0, t_3] : \qquad & \text{Randstück für } C^1, \\
0 < t_1 < t_2 < t_3 < T.
\end{aligned}$$

In den Intervallen $[0, t_1]$, $[t_2, t_3]$ und $[t_3, 1]$ ist die Beschränkung S nicht aktiv, so daß für die ersten beiden Intervalle die DGL's des Randstückes $[0, t_1]$ aus 4.2 und für das dritte Intervall die DGL's des freien Teilstückes $[t_1, 1]$ aus 4.2 übernommen werden können. Für das Intervall $[t_1, t_2]$ müssen u_1, u_2, μ_1 und μ_2 neu bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
&S = x_1 - \alpha \equiv 0 \\
&\Rightarrow S^1 = x_2 + u_1 = 0 \;\; \Rightarrow u_1 = -x_2 \\
&\Rightarrow u_2 = x_2 - x_1 + p, \;\; \text{da } C^1 = x_1 + u_1 + u_2 - p = 0. \\
&0 = \tilde{H}^2_{u_1} = u_1 + \lambda_1 + \mu_1 = -x_2 + \lambda_1 + \mu_1 \\
&\Rightarrow \mu_1 = x_2 - \lambda_1. \\
&\tilde{H}_{u_2} = u_2 + \lambda_2 + \mu_1 = 0 \\
&\Rightarrow u_2 = -\lambda_2 - \mu_1 = x_2 - x_1 + p
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow -\lambda_2 - (x_2 - \lambda_1) = x_2 - x_1 + p \\
&\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 + 2x_2 - x_1 + p \\
&\Rightarrow \dot{\lambda}_1 = \dot{\lambda}_2 + 2\dot{x}_2 - \dot{x}_1 = 4x_2 - \lambda_1 + 2(x_2 - x_1 + p) \\
&\qquad = 6x_2 - \lambda_1 - 2x_1 + 2p = -\tilde{H}^2_{x_1} \\
&\qquad = 4x_1 - \mu_1 - \mu_2 \\
&\qquad = 4x_1 - x_2 + \lambda_1 - \mu_2 \\
&\Rightarrow \mu_2 = 6x_1 - 7x_2 + 2\lambda_1 - 2p.
\end{aligned}
$$

Die Schaltbedingungen ergeben sich aus der Stetigkeit der optimalen Steuerung in den Schaltpunkten (vgl. Satz 1), sowie den Beschränkungen C^1 und S. Insgesamt ergibt sich folgendes RWP:

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1, \tag{4.14}$$

$$\dot{x}_2 = u_2, \tag{4.15}$$

$$\dot{\lambda}_1 = 4x_1 - \mu_1 - \mu_2, \tag{4.16}$$

$$\dot{\lambda}_2 = 4x_2 - \lambda_1, \tag{4.17}$$

wobei

$$u_1 = \left\{ \begin{array}{lr} \frac{1}{2}\left(p - x_1 - \lambda_1 + \lambda_2\right), & t \in [0, t_1], [t_2, t_3], \\ -x_2, & t \in [t_1, t_2], \\ -\lambda_1, & t \in [t_3, 1], \end{array} \right\} \tag{4.18}$$

$$u_2 = \left\{ \begin{array}{lr} \frac{1}{2}\left(p - x_1 + \lambda_1 - \lambda_2\right), & t \in [0, t_1], [t_2, t_3], \\ x_2 - x_1 + p, & t \in [t_1, t_2], \\ -\lambda_2, & t \in [t_3, 1], \end{array} \right\} \tag{4.19}$$

$$\mu_1 = \left\{ \begin{array}{lr} \frac{1}{2}\left(x_1 - p - \lambda_1 - \lambda_2\right), & t \in [0, t_1], [t_2, t_3], \\ x_2 - \lambda_1, & t \in [t_1, t_2], \\ 0, & t \in [t_3, 1], \end{array} \right\} \tag{4.20}$$

$$\mu_2 = \left\{ \begin{array}{lr} 0, & t \in [0, t_1], [t_2, 1], \\ 6x_1 - 7x_2 + 2\lambda_1 - 2p, & t \in [t_1, t_2], \end{array} \right\} \tag{4.21}$$

$$x_1(0) = x_1(1) = 1,\ x_2(0) = x_2(1) = 0, \tag{4.22}$$

$$x_1(t_1) - \alpha = 0, \tag{4.23}$$

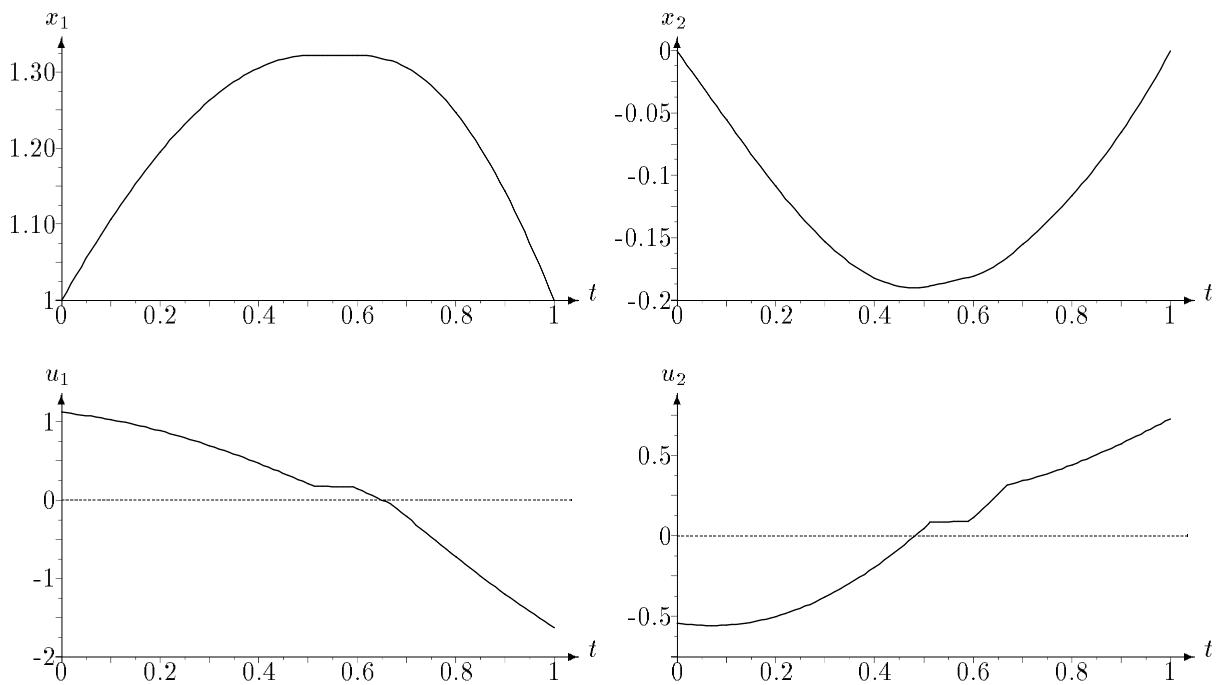
$$x_2(t_2) + \frac{1}{2}\left(p - x_1(t_2) - \lambda_1(t_2) + \lambda_2(t_2)\right) = 0, \tag{4.24}$$

$$x_1(t_3) - \lambda_1(t_3) - \lambda_2(t_3) - p = 0. \tag{4.25}$$

Bem.:
Man erhält mehr als obige drei Bedingungen in den Schaltpunkten; z.B. muß im Schaltpunkt t_2 die Bedingung $x_1(t_2) - \alpha = 0$ erfüllt sein, sowie im Schaltpunkt t_1 eine Stetigkeitbedingung für u_1, die analog zu derjenigen in t_2 ist. Diese Bedingungen werden allerdings bei der Berechnung mit BNDSCO automatisch erfüllt. Dasselbe gilt für die übrigen RWP's in 4.3.

Die Lösung zu $p = 1.6$, $\alpha = 1.325$ lautet:

$$\begin{aligned}
&t_1 = 0.51311012,\ t_2 = 0.59162674,\\
&t_3 = 0.66941809,\\
&\lambda_1(0) = -2.45265734,\ \lambda_2(0) = -0.77433927,\\
&\lambda_1(1) = 1.62178900,\ \lambda_2(1) = -0.73100902,\\
&\text{Zielfunktional: } -2.64021147\,.
\end{aligned}$$

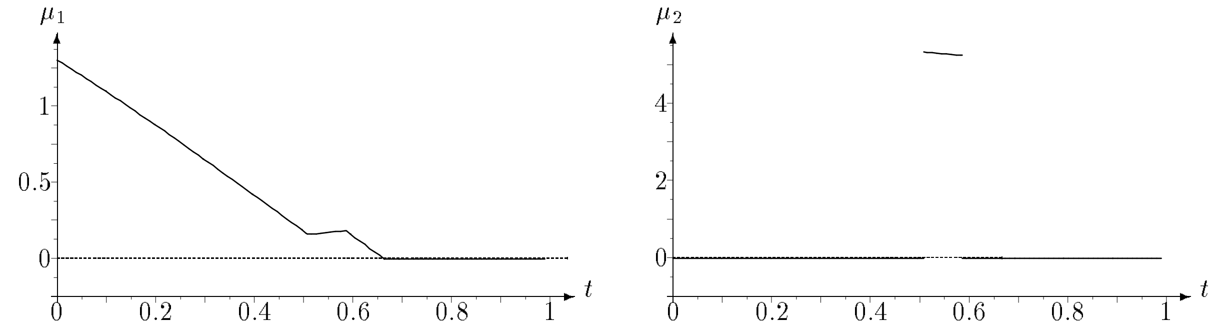


Daß die erhaltene Lösung zu $\alpha = 1.325$ auch die Bedingungen

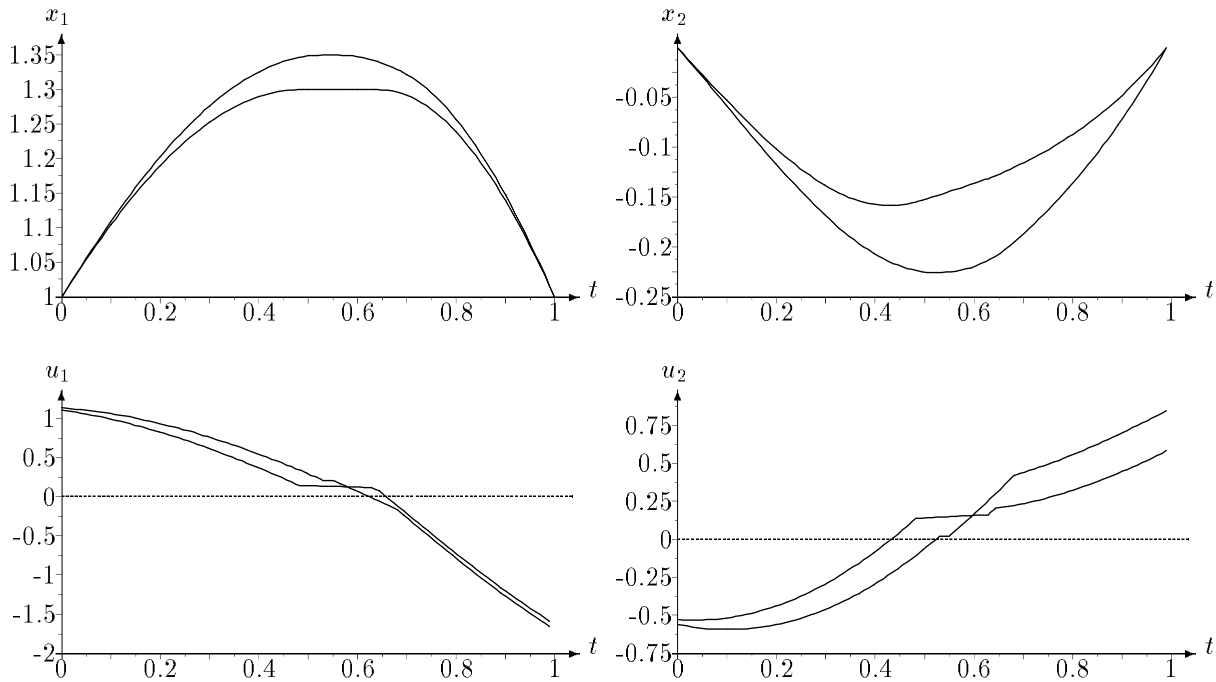
$$\mu_1(t) > 0, \;\; 0 \leq t < t_3, \tag{4.26}$$

$$\mu_2(t) > 0, \;\; t_1 < t < t_2, \tag{4.27}$$

erfüllt, zeigen die folgenden beiden Bilder:



Für $p = 1.6, \alpha \in [1.29426, 1.3585]$ bekommt man bzgl. obiger Schaltstruktur zumindest lokal optimale Lösungen.
Graphische Darstellung der Trajektorien zu $\alpha = 1.3, 1.35$:



In der Nähe von $\alpha = 1.3$ kommen sich dabei die Schaltpunkte t_2 und t_3 so nahe, daß andere Schaltstrukturen ausprobiert werden müssen.

Sei nun der Schaltpunkt zu C^1 zwischen den Schaltpunkten bzgl. S, d.h.:

$$\begin{aligned}
[t_1, t_3]: &\qquad \text{Randstück für } S,\\
[0, t_2]: &\qquad \text{Randstück für } C^1,\\
0 < t_1 < t_2 < t_3 < T. &
\end{aligned}$$

Für das Intervall $[t_2, t_3]$ erhält man dann:

$$\begin{aligned}
&\tilde{H}^2_{u_1} = u_1 + \lambda_1 = 0,\ \tilde{H}^2_{u_2} = u_2 + \lambda_2 = 0\\
&\Rightarrow u_1 = -\lambda_1,\ u_2 = -\lambda_2.\\
&S^1 = 0 \Rightarrow u_1 = -x_2 \Rightarrow x_2 = \lambda_1\\
&\Rightarrow 4x_1 - \mu_2 = \dot{\lambda_1} = \dot{x_2} = u_2 = -\lambda_2\\
&\Rightarrow \mu_2 = \lambda_2 + 4x_1.
\end{aligned}$$

Die noch fehlende Schaltbedingung ergibt sich aus der Stetigkeitsbedingung von u_1 in t_3:

$$-x_2(t_3) = -\lambda_1(t_3). \tag{4.28}$$

Insgesamt ergibt sich folgendes RWP:

$$\dot{x_1} = \left\{ \begin{array}{ll} x_2 + \frac{1}{2}(p - x_1 - \lambda_1 + \lambda_2), & t \in [0, t_1],\\ 0, & t \in [t_1, t_3],\\ x_2 - \lambda_1, & t \in [t_3, 1], \end{array} \right\} \tag{4.29}$$

$$\dot{x_2} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}(p - x_1 + \lambda_1 - \lambda_2), & t \in [0, t_1],\\ x_2 - x_1 + p, & t \in [t_1, t_2],\\ -\lambda_2, & t \in [t_2, 1], \end{array} \right\} \tag{4.30}$$

$$\dot{\lambda_1} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}(7x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 + p), & t \in [0, t_1],\\ -2x_1 + 6x_2 - \lambda_1 + 2p, & t \in [t_1, t_2],\\ -\lambda_2, & t \in [t_2, t_3],\\ 4x_1, & t \in [t_3, 1], \end{array} \right\} \tag{4.31}$$

$$\dot{\lambda_2} = 4x_2 - \lambda_1,\ t \in [0, 1], \tag{4.32}$$

$$x_1(0) = 1,\ x_1(1) = 1,\ x_2(0) = 0,\ x_2(1) = 0, \tag{4.33}$$

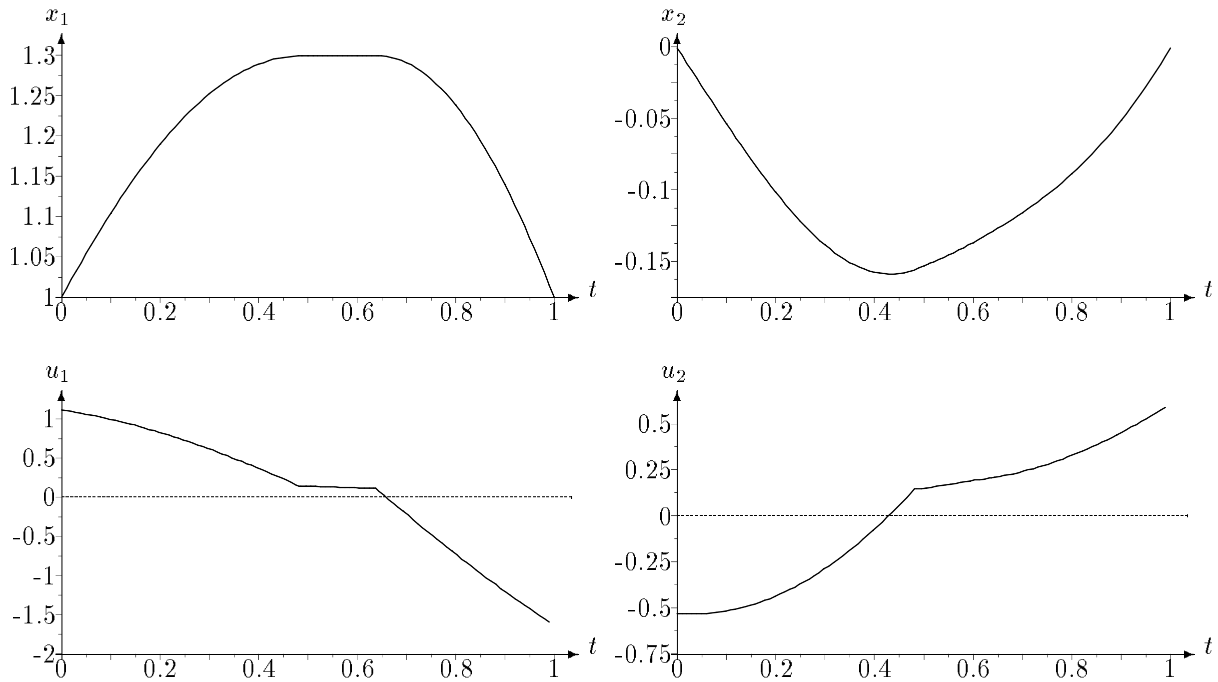
$$x_1(t_1) - \alpha = 0, \tag{4.34}$$
$$x_1(t_2) - \lambda_1(t_2) - \lambda_2(t_2) - p = 0, \tag{4.35}$$
$$x_2(t_3) - \lambda_1(t_3) = 0. \tag{4.36}$$

Die numerische Analyse bei festem $p = 1.6$ ergibt, daß diese Schaltstruktur für $\alpha \in [1.29426, 1.30164]$ ihre Gültigkeit besitzt.

Als Beispiel sei das Ergebnis zu $\alpha = 1.3$ angegeben:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(0) = -2.20985846,\ \ \lambda_2(0) = -0.55260695,\\
&\lambda_1(1) = \ 1.58384790,\ \ \lambda_2(1) = -0.58493278,\\
&t_1 = 0.48698907,\ \ t_2 = 0.51138179,\ \ t_3 = 0.64267940,\\
&\text{Zielfunktionalwert: } -2.62542913\,.
\end{aligned}$$

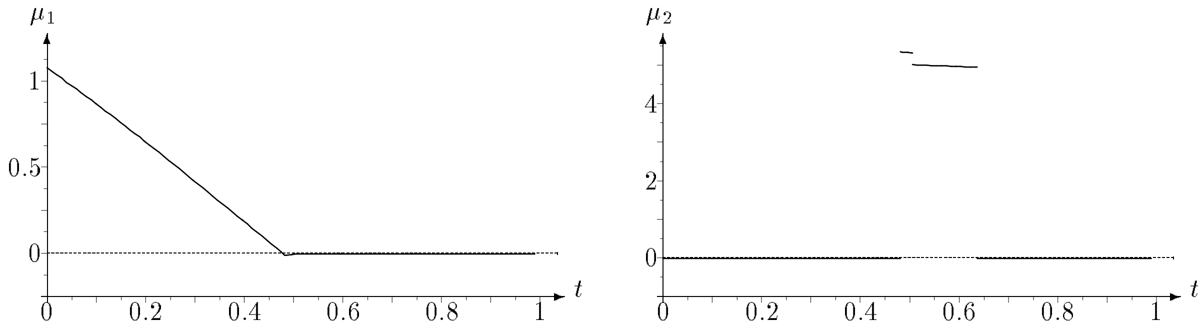
Die Funktionen im einzelnen:



Daß die erhaltene Lösung zu $\alpha = 1.3$ auch die Bedingungen

$$\mu_1(t) > 0,\ \ 0 \le t < t_2, \tag{4.37}$$
$$\mu_2(t) > 0,\ \ t_1 < t < t_3, \tag{4.38}$$

erfüllt, zeigen die folgenden beiden Bilder:



Für noch kleinere α, z.B. $\alpha = 1.15$, muß der Fall betrachtet werden, daß der Schaltpunkt bzgl. C^1 links beider Schaltpunkte bzgl S liegt, d.h.:

$$\begin{aligned} &[t_2, t_3]: && \text{Randstück für } S, \\ &[0, t_1]: && \text{Randstück für } C^1, \\ &0 < t_1 < t_2 < t_3 < T. \end{aligned}$$

Das zugehörige RWP läßt sich direkt aus den schon behandelten Fällen ableiten:

$$\dot{x_1} = \left\{ \begin{array}{lr} x_2 + \frac{1}{2}(1.6 - x_1 - \lambda_1 + \lambda_2), & t \in [0, t_1], \\ & \\ x_2 - \lambda_1, & t \in [t_1, t_2] \cup [t_3, 1], \\ & \\ 0, & t \in [t_2, t_3], \end{array} \right\} \tag{4.39}$$

$$\dot{x_2} = \left\{ \begin{array}{lr} \frac{1}{2}(1.6 - x_1 + \lambda_1 - \lambda_2), & t \in [0, t_1], \\ & \\ -\lambda_2, & t \in [t_1, 1], \end{array} \right\} \tag{4.40}$$

$$\dot{\lambda_1} = \left\{ \begin{array}{lr} \frac{1}{2}(7x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 + 1.6), & t \in [0, t_1], \\ & \\ 4x_1, & t \in [t_1, t_2] \cup [t_3, 1], \\ & \\ -\lambda_2, & t \in [t_2, t_3], \end{array} \right\} \tag{4.41}$$

$$\dot{\lambda_2} = 4x_2 - \lambda_1, \ t \in [0, 1], \tag{4.42}$$

$$x_1(0) = x_1(1) = 1, \ x_2(0) = x_2(1) = 0, \tag{4.43}$$

$$x_1(t_1) - \lambda_1(t_1) - \lambda_2(t_1) - 1.6 = 0, \tag{4.44}$$

$$x_1(t_2) - \alpha = 0, \ x_2(t_3) - \lambda_1(t_3) = 0. \tag{4.45}$$

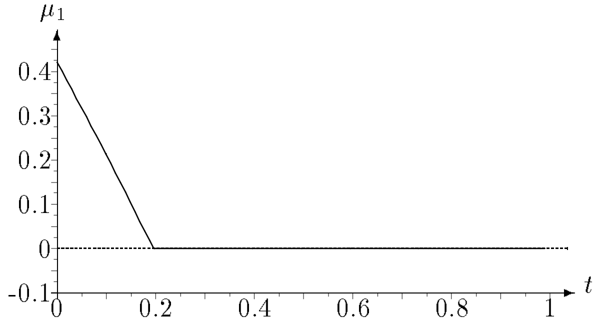
Die Lösung lautet ($p = 1.6$, $\alpha = 1.15$):

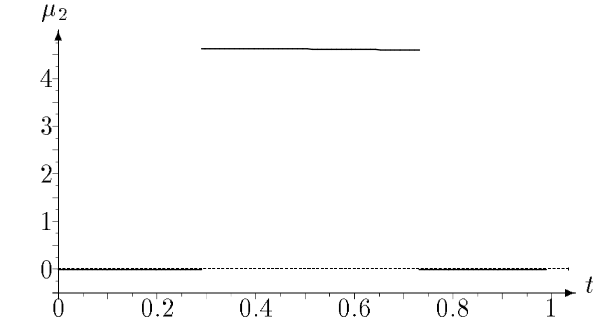
$$\begin{aligned} &t_1 = 0.19812945, \ t_2 = 0.29346813, \\ &t_3 = 0.73999671, \\ &\lambda_1(0) = -1.27117181, \ \lambda_2(0) = -0.16710109, \\ &\lambda_1(1) = 1.12061491, \ \lambda_2(1) = -0.19149949, \\ &\text{Zielfunktional: } -2.40754789\,. \end{aligned}$$

Daß die erhaltene Lösung zu $\alpha = 1.15$ auch die Bedingungen

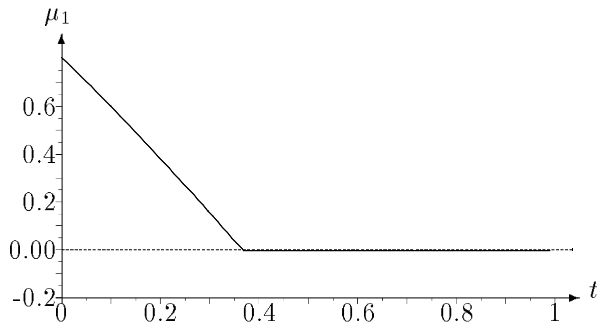
$$\mu_1(t) > 0, \;\; 0 \leq t < t_1, \tag{4.46}$$
$$\mu_2(t) > 0, \;\; t_2 < t < t_3, \tag{4.47}$$

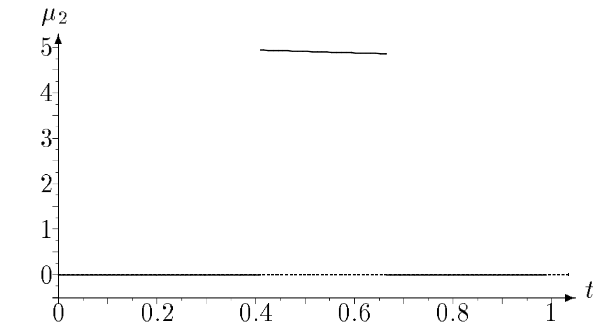
erfüllt, zeigen die folgenden beiden Bilder:





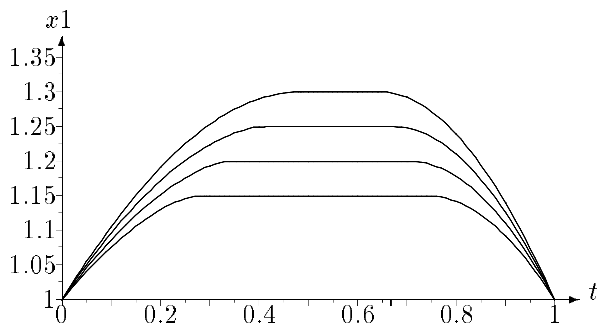
Dasselbe gilt für $\alpha = 1.25$:

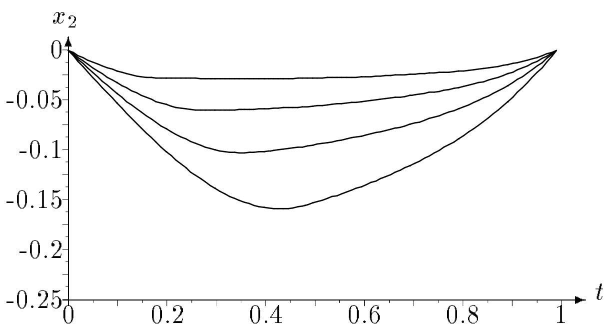


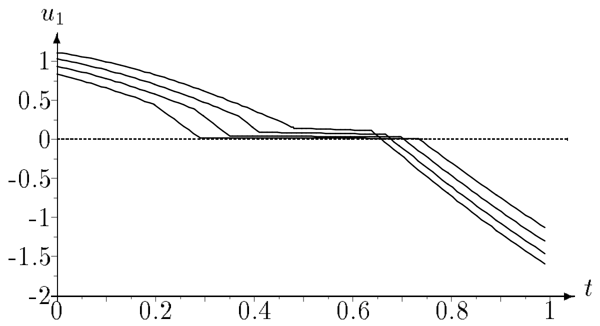


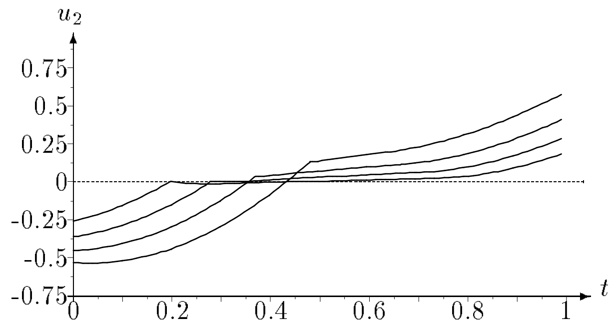
Für $\alpha \in [1.15, 1.30164]$ bleibt die obige Schaltstruktur bestehen.

Im folgenden sind für $\alpha = 1.15, 1.2, 1.25, 1.3$ die Trajektorien x_1, x_2, u_1 und u_2 dargestellt:









4.4 Schaltpunkte-Bifurkation

Nun stellt sich natürlich die Frage, welche der Schaltstrukturen für welche α optimal ist und in welcher Beziehung die einzelnen Lösungen zueinander stehen.
Hierfür rechnet man jeweils mittels einer zusätzlichen DGL das Zielfunktional aus. Es wird in der folgenden Tabelle in Abhängigkeit von α angegeben. Die Bezeichnungen $(1), (2)$ und (3) beziehen sich dabei auf Abschnitt 4.3. Z.B. bezieht sich (3) auf die dort als drittes betrachtete Schaltstruktur.

α	(3)	(2)	(1)
1.15	-2.40754789		
1.20	-2.50037823		
1.25	-2.57366725		
1.29426	-2.62071823	-2.62068678	-2.62068678
1.298	-2.62382771	-2.62382454	-2.62381371
1.30164	-2.62671036	-2.62671036	-2.62664722
1.33			-2.64213649
1.3585			-2.64707909

Im Übergangsbereich $\alpha \in [1.29426, 1.30164]$ ergibt somit die Schaltstruktur (3) die optimale Lösung. Für $\alpha = 1.30164$ bekommt man mittels Schaltstruktur (2) den gleichen optimalen Zielfunktionalswert wie mit Schaltstruktur (3), da die erhaltenen Schaltpunkte bzgl. (2) und (3) fast identisch sind. Dasselbe gilt für $\alpha = 1.29426$, wo man bzgl. der Schaltstrukturen (2) und (1) den gleichen Zielfunktionalswert erhält. Allerdings handelt es sich dabei nur um ein Nebenminima. Die Lösungen bzgl. der Schaltstruktur (1) sind für $\alpha \in]1.30164, 1.3585]$ optimal, da in diesem Intervall bzgl. (2) und (3) keine Lösungen mehr existieren.

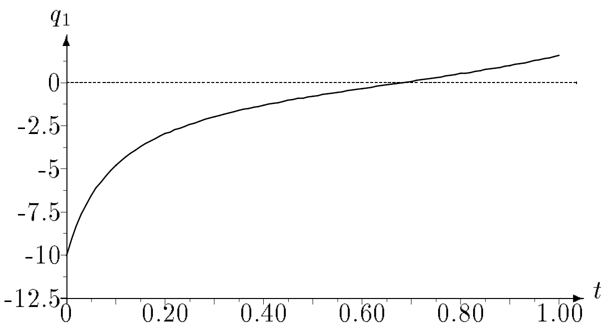
Man hat es hier also mit einer Lösungsverzweigung zu tun, die in ähnlicher Form aus dem sogenannten Knickstab-Problem bekannt ist (vgl. z.B. [20], [24],[25] und [32]).

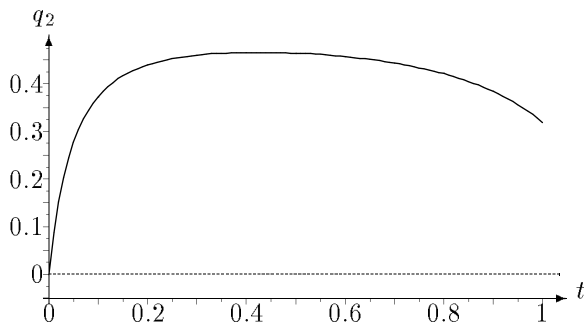
4.5 Hinreichende Bedingungen

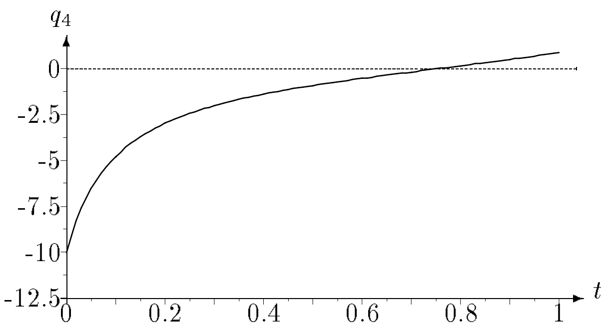
Die hinreichenden Bedingungen können hier für alle obigen Fälle (d. h. sowohl für den unbeschränkten, als auch für die beschränkten Fälle) gleichzeitig nachgeprüft werden, da die DGL's bzgl. Q bei den *strengen hinreichenden Bedingungen* (2.6) nicht von x, λ oder u abhängen:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= q_1^2 + q_2^2 + 4,\\ \dot{q}_2 &= q_1 q_2 + q_2 q_4 - q_1,\\ \dot{q}_4 &= q_2^2 + q_4^2 - 2q_2 + 4.\end{aligned}$$

Dieses System hat für den Anfangswert $Q(0) = -10I_2$ eine beschränkte Lösung mit $|Q(t)| \leq 10,\ 0 \leq t \leq T$.







4.6 Sensitivität nach α

Für das Ausgangsproblem mit

$$p = 1.6,\ \alpha_0 = 1.25$$

betrachten wir nun die Sensitiviät nach α. Hier liegt folgende Schaltstruktur vor:

$$\begin{aligned} [t_2, t_3]: &\qquad \text{Randstück für } S, \\ [0, t_1]: &\qquad \text{Randstück für } C^1, \\ 0 < t_1 < t_2 < t_3 < T. & \end{aligned}$$

Zusätzlich zu (4.39) – (4.45) erhält man die folgenden DGL's, Rand- und Schaltbedingungen :

$$\begin{aligned} &\dot{y}_1 = y_2 + \frac{\partial u_1}{\partial \alpha},\ \dot{y}_2 = \frac{\partial u_2}{\partial \alpha}, \\ &\dot{\eta}_1 = 4y_1 - \frac{\partial \mu_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial \mu_2}{\partial \alpha},\ \dot{\eta}_2 = 4y_2 - \eta_1, \\ &y_1(0) = y_1(1) = 0,\ y_2(0) = y_2(1) = 0, \\ &y_1(t_2) - 1 = 0,\ y_2(t_3) - \eta_1(t_3) = 0, \end{aligned}$$

wobei

$$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}(-y_1 - \eta_1 + \eta_2), & t \in [0, t_1], \\ -\eta_1, & t \in [t_1, t_2] \cup [t_3, 1], \\ -y_2, & t \in [t_2, t_3], \end{array} \right\} \tag{4.48}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \alpha} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}(-y_1 + \eta_1 - \eta_2), & t \in [0, t_1], \\ -\eta_2, & t \in [t_1, 1], \end{array} \right\} \tag{4.49}$$

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial \alpha} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}(y_1 - \eta_1 - \eta_2), & t \in [0, t_1], \\ 0, & t \in [t_1, 1], \end{array} \right\} \tag{4.50}$$

$$\frac{\partial \mu_2}{\partial \alpha} = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & t \in [0, t_2] \cup [t_3, 1], \\ 4y_1 + \eta_2, & t \in [t_2, t_3]. \end{array} \right\} \tag{4.51}$$

Für die Schaltfunktion $W(x, \lambda, \alpha)$ aus (2.59) gilt :

$$
\begin{array}{rl}
\mathbf{t_1}: & x_1(t_1) + u_1(t_1^+) + u_2(t_1^+) - p = x_1(t_1) - \lambda_1(t_1) - \lambda_2(t_1) - p = 0 \\
\Rightarrow & W|_{t=t_1} = (x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 - p)|_{t=t_1} \\
\Rightarrow & \dot{W}|_{t=t_1} = (\dot{x_1} - \dot{\lambda_1} - \dot{\lambda_2})|_{t=t_1} \\
 & = x_2(t_1) - 4\,(x_1(t_1) + x_2(t_1)) = -4.67547562, \\
 & W_x = (1,\, 0),\ W_\lambda = (-1,\, -1),\ W_\alpha = 0. \\
\mathbf{t_2},\, \mathbf{t_3}: & S(x(t_i)) = x_1(t_i) - \alpha = 0 \\
\Rightarrow & W|_{t=t_i} := S^1(x, u)|_{t=t_i} \qquad (\text{vgl. } (2.63)) \\
 & \quad = x_2(t_i) + u_1(t_i) = x_2(t_i) - \lambda_1(t_i) \\
\Rightarrow & \dot{W}|_{t=t_i} = \dot{x_2}(t_i) - \dot{\lambda_1}(t_i) = -\lambda_2(t_i) - 4x_1(t_i) \\
 & = \begin{cases} -4.94761441, & t = t_2^-, \\ \\ -4.87792464, & t = t_3^+, \end{cases} \\
 & W_x = (0,\, 1),\ W_\lambda = (-1,\, 0),\ W_\alpha = 0.
\end{array}
$$

Da $\dot{W}|_{t=t_i} \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, ist, ergibt sich mittels der Formel

$$
\frac{dt}{d\alpha}(t_i) = -\dot{W}^{-1}\,(W_x,\, W_\lambda,\, W_\alpha) \left.\begin{pmatrix} y \\ \eta \\ 1 \end{pmatrix}\right|_{t=t_1}
$$

aus (2.62) für die Sensitivität der Schaltpunkte:

$$
\begin{aligned}
\frac{dt}{d\alpha}(t_1) &= -\left.\frac{y_1 - \eta_1 - \eta_2}{x_2 - 4(x_1 + x_2)}\right|_{t=t_1}, \\
\frac{dt}{d\alpha}(t_2) &= -\left.\frac{y_2 - \eta_1(t_2^-)}{-\lambda_2 - 4x_1}\right|_{t=t_2}, \\
\frac{dt}{d\alpha}(t_3) &= -\left.\frac{y_2 - \eta_1(t_3^+)}{-\lambda_2 - 4x_1}\right|_{t=t_3}.
\end{aligned}
$$

Mit der hierfür erhaltenen Lösung

$$\lambda_1(0) = -1.86793233,\ \lambda_2(0) = -0.37190676,$$

$$\eta_1(0) = -6.29779001,\ \eta_2(0) = -2.80841401,$$

$$\lambda_1(1) = 1.45187439,\ \lambda_2(1) = -0.41834252,$$

$$\eta_1(1) = 2.86578274,\ \eta_2(1) = -2.82352962,$$
$$t_1 = 0.37291770, t_2 = 0.41497959, t_3 = 0.67181105,$$
$$\frac{dt}{d\alpha}(t_1) = 1.94213138,\ \frac{dt}{d\alpha}(t_2) = 1.27375718,\ \frac{dt}{d\alpha}(t_3) = -0.60071733$$

ergibt sich:

$$t_1(1.26) = 0.39272634,\ t_2(1.26) = 0.42789377,\ t_3(1.26) = 0.66585365$$

mit Näherung

$$t_1(1.25) + \frac{1}{100}\frac{dt}{d\alpha}(t_1, 1.25) = 0.39233901\,,$$
$$t_2(1.25) + \frac{1}{100}\frac{dt}{d\alpha}(t_2, 1.25) = 0.42771716\,,$$
$$t_3(1.25) + \frac{1}{100}\frac{dt}{d\alpha}(t_3, 1.25) = 0.66580388\,,$$

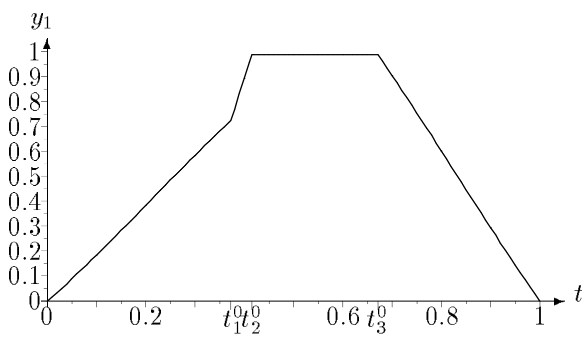
sowie

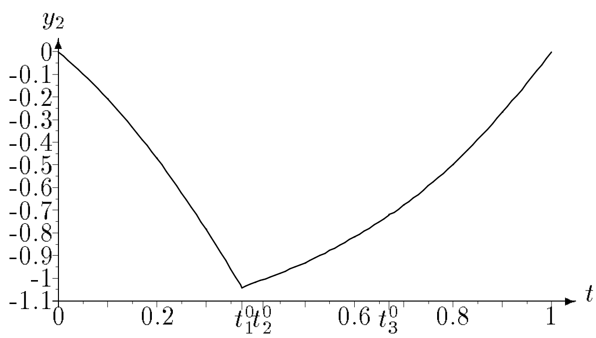
$$t_1(1.20) = 0.28232759,\ t_2(1.20) = 0.35380074,\ t_3(1.20) = 0.70350447$$

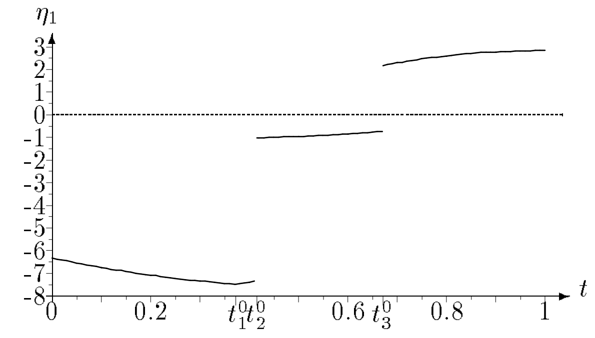
mit Näherung

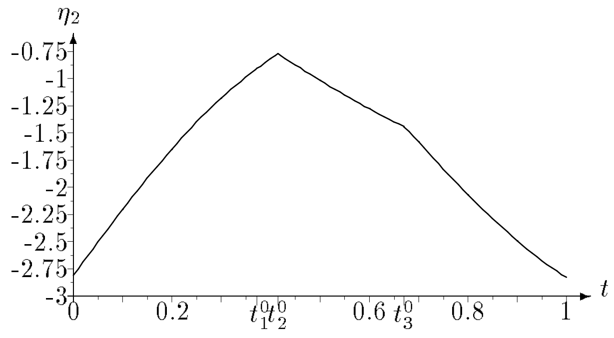
$$\tilde{t_1} := t_1(1.20) - \frac{5}{100}\frac{dt}{d\alpha}(t_1, 1.25) = 0.27581115\,, \tag{4.52}$$
$$\tilde{t_2} := t_2(1.20) - \frac{5}{100}\frac{dt}{d\alpha}(t_2, 1.25) = 0.35129174\,, \tag{4.53}$$
$$\tilde{t_3} := t_3(1.20) - \frac{5}{100}\frac{dt}{d\alpha}(t_3, 1.25) = 0.70184692\,. \tag{4.54}$$

Die Funktionen y_1, y_2, η_1 und η_2 zu $\alpha_0 = 1.25$ sind nachfolgend dargestellt:

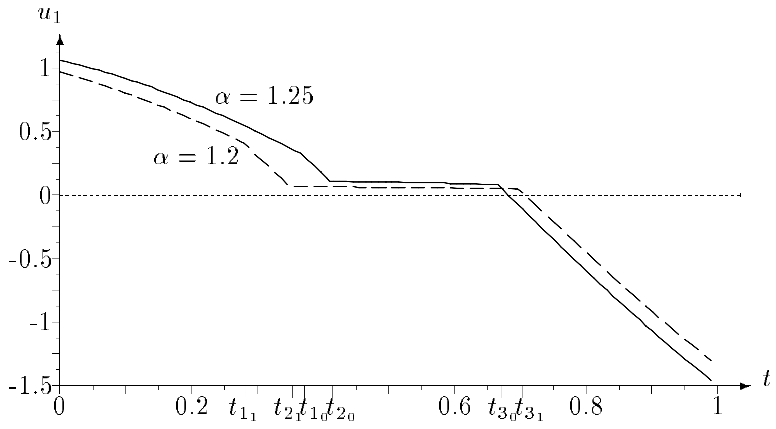




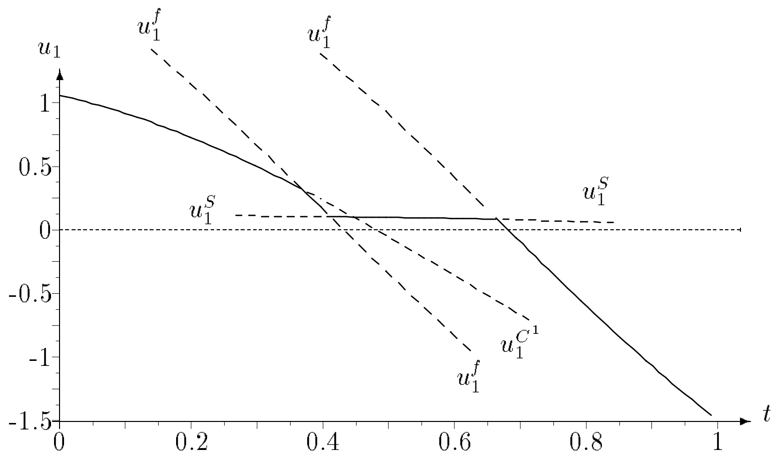


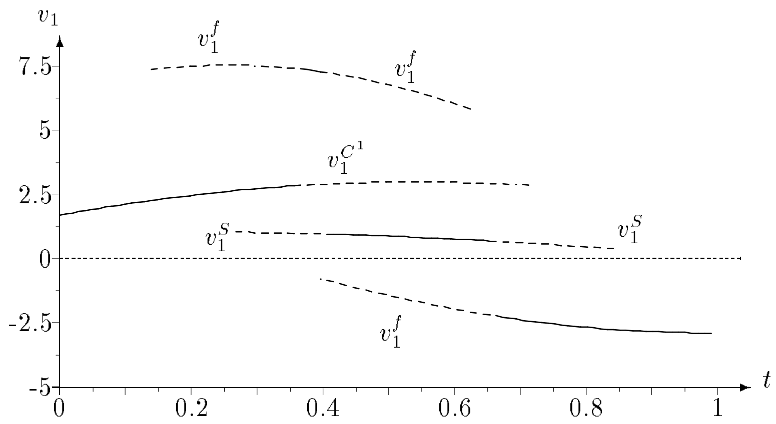


Für u_1 bezüglich $\alpha_0 = 1.25$ und $\alpha = 1.20$ ergibt sich:



Mit den Fortsetzungslösungen gemäß den Fällen 3 und 4 in Abschnitt 2.4 erhält man z.B. für die Steuerung $u_1(t, \alpha_0)$ und ihre Variation $v_1(t, \alpha_0) := \frac{\partial u_1}{\partial \alpha}(t, \alpha_0)$:





Mit den Daten die in die beiden obigen Bilder eingingen, kann man nun zu jedem Parameter $\alpha \in [1.15, 1.30]$ die 1. Näherung der optimalen Steuerung $u_1(t, \alpha)$ berechnen. Für $\alpha = 1.20$ seien die nötigen Berechnungen hier angegeben:

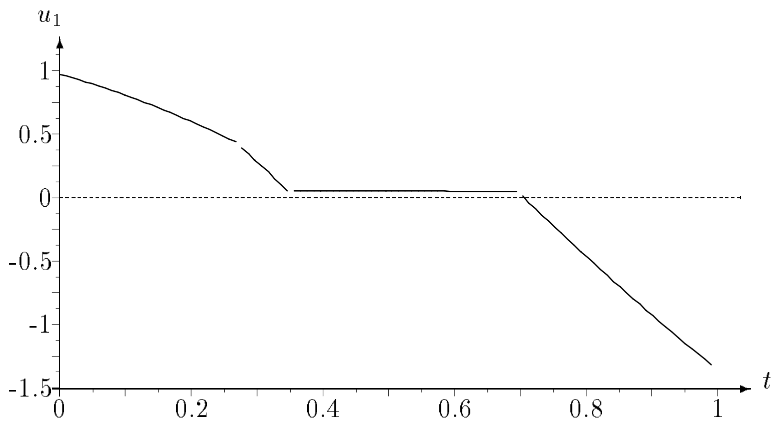
$$t_{1_0} = 0.37291770,\ t_{2_0} = 0.41497959,\ t_{3_0} = 0.67181105,$$

$$\begin{aligned} \tilde{t_1} &= 0.27581115 \quad \text{(siehe (4.52))},\\ \tilde{t_2} &= 0.35129174 \quad \text{(siehe (4.53))},\\ \tilde{t_3} &= 0.70184692 \quad \text{(siehe (4.54))} \end{aligned}$$

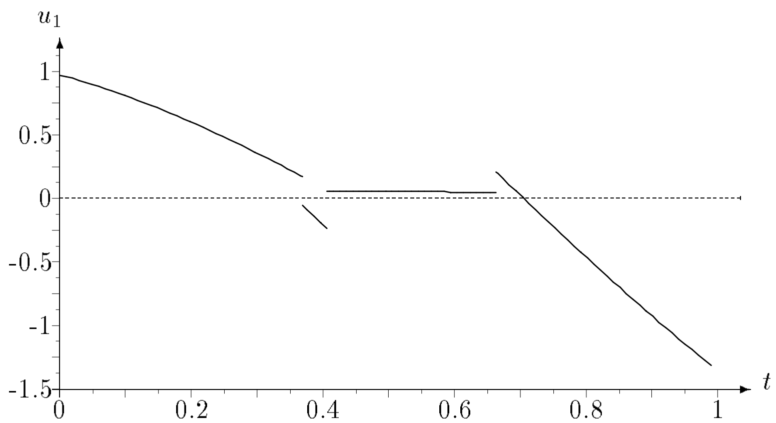
$$\Rightarrow \qquad 0 < \tilde{t_1} < \tilde{t_2} < t_{1_0} < t_{2_0} < t_{3_0} < \tilde{t_3} < T = 1.$$

$$\begin{aligned} [0, \tilde{t_1}]: &\quad u_1(t, 1.20) \approx u_1(t, \alpha_0) + (1.20 - \alpha_0) v_1(t, \alpha_0),\\ [\tilde{t_1}, \tilde{t_2}]: &\quad u_1(t, 1.20) \approx u_1^f(t, \alpha_0) + (1.20 - \alpha_0) v_1^f(t, \alpha_0),\\ [\tilde{t_2}, t_{2_0}]: &\quad u_1(t, 1.20) \approx u_1^S(t, \alpha_0) + (1.20 - \alpha_0) v_1^S(t, \alpha_0),\\ [t_{2_0}, t_{3_0}]: &\quad u_1(t, 1.20) \approx u_1(t, \alpha_0) + (1.20 - \alpha_0) v_1(t, \alpha_0),\\ [t_{3_0}, \tilde{t_3}]: &\quad u_1(t, 1.20) \approx u_1^S(t, \alpha_0) + (1.20 - \alpha_0) v_1^S(t, \alpha_0),\\ [\tilde{t_3}, T]: &\quad u_1(t, 1.20) \approx u_1(t, \alpha_0) + (1.20 - \alpha_0) v_1(t, \alpha_0). \end{aligned}$$

Das folgende Bild zeigt die so erhaltene Näherung von u_1 bzgl. $p = 1.6$, $\alpha = 1.20$:



Ohne die Modifikationen in der Nähe der Schaltpunkte würde man folgende "Näherung" erhalten:



Nachfolgend wird für das Ausgangsproblem mit

$$p = 1.6, \;\; \alpha_0 = 1.325$$

die Sensitiviät nach α betrachtet. Das zugehörige Randwertproblem,das gleichzeitig mit dem System (4.14) - (4.25) zu lösen ist, lautet:

$$\dot{y_1} = y_2 + \frac{\partial u_1}{\partial \alpha}, \;\; \dot{y_2} = \frac{\partial u_2}{\partial \alpha},$$

$$\dot{\eta_1} = 4y_1 - \frac{\partial \mu_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial \mu_2}{\partial \alpha}, \;\; \dot{\eta_2} = 4y_2 - \eta_1,$$

$$y_1(0) = y_1(1) = 0, \;\; y_2(0) = y_2(1) = 0,$$

$$y_1(t_1) - 1 = 0, \;\; y_2(t_2) + \frac{1}{2}(-y_1(t_2) - \eta_1(t_2) + \eta_2(t_2)) = 0$$

wobei

$$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(-y_1 - \eta_1 + \eta_2), & t \in [0,t_1],[t_2,t_3], \\ -y_2, & t \in [t_1,t_2], \\ -\eta_1, & t \in [t_3,1], \end{Bmatrix} \tag{4.55}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \alpha} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(-y_1 + \eta_1 - \eta_2), & t \in [0,t_1],[t_2,t_3], \\ y_2 - y_1, & t \in [t_1,t_2], \\ -\eta_2, & t \in [t_3,1], \end{Bmatrix} \tag{4.56}$$

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial \alpha} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(y_1 - \eta_1 - \eta_2), & t \in [0,t_1],[t_2,t_3], \\ y_2 - \eta_1, & t \in [t_1,t_2], \\ 0, & t \in [t_3,1], \end{Bmatrix} \tag{4.57}$$

$$\frac{\partial \mu_2}{\partial \alpha} = \begin{Bmatrix} 0, & t \in [0,t_1],[t_2,1], \\ 6y_1 - 7y_2 + 2\eta_1, & t \in [t_1,t_2]. \end{Bmatrix} \tag{4.58}$$

Für die Schaltfunktion $W(x,\lambda,\alpha)$ aus (2.59) gilt:

$\mathbf{t_1, t_2}$:

$$S(x(t_i)) = x_1(t_i) - \alpha = 0,$$

$$u_1(t_i) = \frac{1}{2}(p - x_1 - \lambda_1 + \lambda_2),\ u_2(t_i) = \frac{1}{2}(p - x_1 + \lambda_1 - \lambda_2)$$

$$\Rightarrow \quad W|_{t=t_i} := S^1(x,u)|_{t=t_i} = x_2(t_i) + u_1(t_i) \quad \text{(vgl. (2.63))}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{W}|_{t=t_i} = \dot{x}_2(t_i) + \dot{u}_1(t_i)$$

$$= \begin{Bmatrix} u_2(t_1^-) + \frac{1}{2}\left(-x_2 - u_1(t_1^-) - 4x_1 + \mu_1(t_1^-) + 4x_2 - \lambda_1\right)\Big|_{t=t_1}, \\ u_2(t_2^+) + \frac{1}{2}\left(-x_2 - u_1(t_2^+) - 4x_1 + \mu_1(t_2^+) + 4x_2 - \lambda_1\right)\Big|_{t=t_2}, \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{cases} -2.68313478, & t = t_1^-, \\ -2.64266821, & t = t_2^+, \end{cases}$$

$$W_x = \left(-\frac{1}{2}, 1\right),\ W_\lambda = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\ W_\alpha = 0.$$

$\mathbf{t_3}$:

$$x_1(t_3) + u_1(t_3) + u_2(t_3) - p = 0,\ u_1 = -\lambda_1,\ u_2 = -\lambda_2$$

$$\Rightarrow \quad W|_{t=t_3} = (x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 - p)|_{t=t_3}$$
$$\Rightarrow \quad \dot{W}|_{t=t_3} = x_2(t_3) - 4\,(x_1(t_3) + x_2(t_3)) = -4.77246909,$$
$$W_x = (1,\,0),\;\; W_\lambda = (-1,\,-1),\;\; W_\alpha = 0.$$

Da $\dot{W}|_{t=t_i} \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, gilt, ergibt sich mittels der Formel

$$\frac{dt}{d\alpha}(t_i) = -\dot{W}^{-1}\,(W_x,\, W_\lambda,\, W_\alpha)\left.\begin{pmatrix} y \\ \eta \\ 1 \end{pmatrix}\right|_{t=t_1}$$

aus (2.62) für die Sensitivität der Schaltpunkte:

$$\frac{dt}{d\alpha}(t_1) = -\left.\frac{y_2 + \frac{1}{2}(-y_1 - \eta_1(t_1^-) + \eta_2)}{u_2(t_1^-) + \frac{1}{2}(-x_2 - u_1(t_1^-) - 4x_1 + \mu_1(t_1^-) + 4x_2 - \lambda_1)}\right|_{t=t_1},$$
$$\frac{dt}{d\alpha}(t_2) = -\left.\frac{y_2 + \frac{1}{2}(-y_1 - \eta_1(t_2^+) + \eta_2)}{u_2(t_2^+) + \frac{1}{2}(-x_2 - u_1(t_2^+) - 4x_1 + \mu_1(t_2^+) + 4x_2 - \lambda_1)}\right|_{t=t_2},$$
$$\frac{dt}{d\alpha}(t_3) = -\left.\frac{y_1 - \eta_1 - \eta_2}{x_2 - 4(x_1 + x_2)}\right|_{t=t_3}.$$

Mit der Lösung

$$\lambda_1(0) = -2.45265734,\ \lambda_2(0) = -0.77433927,$$
$$\eta_1(0) = -8.96863413,\ \eta_2(0) = -7.76671176,$$
$$\lambda_1(1) = 1.62178900,\ \lambda_2(1) = -0.73100902,$$
$$\eta_1(1) = 1.32453588,\ \eta_2(1) = -5.30922323,$$
$$t_1 = 0.51311012, t_2 = 0.59162674, t_3 = 0.66941809,$$
$$\frac{dt}{d\alpha}(t_1) = 0.94585849,\ \frac{dt}{d\alpha}(t_2) = -1.59959557,\ \frac{dt}{d\alpha}(t_3) = 0.74748667$$

ergibt sich:

$$t_1(1.32) = 0.50832674,\ t_2(1.32) = 0.59974989,\ t_3(1.32) = 0.66567656$$

mit Näherung

$$t_1(1.325) - \frac{5}{1000}\frac{dt}{d\alpha}(t_1, 1.325) = 0.50838083,$$
$$t_2(1.325) - \frac{5}{1000}\frac{dt}{d\alpha}(t_2, 1.325) = 0.59962472,$$
$$t_3(1.325) - \frac{5}{1000}\frac{dt}{d\alpha}(t_3, 1.325) = 0.66568066,$$

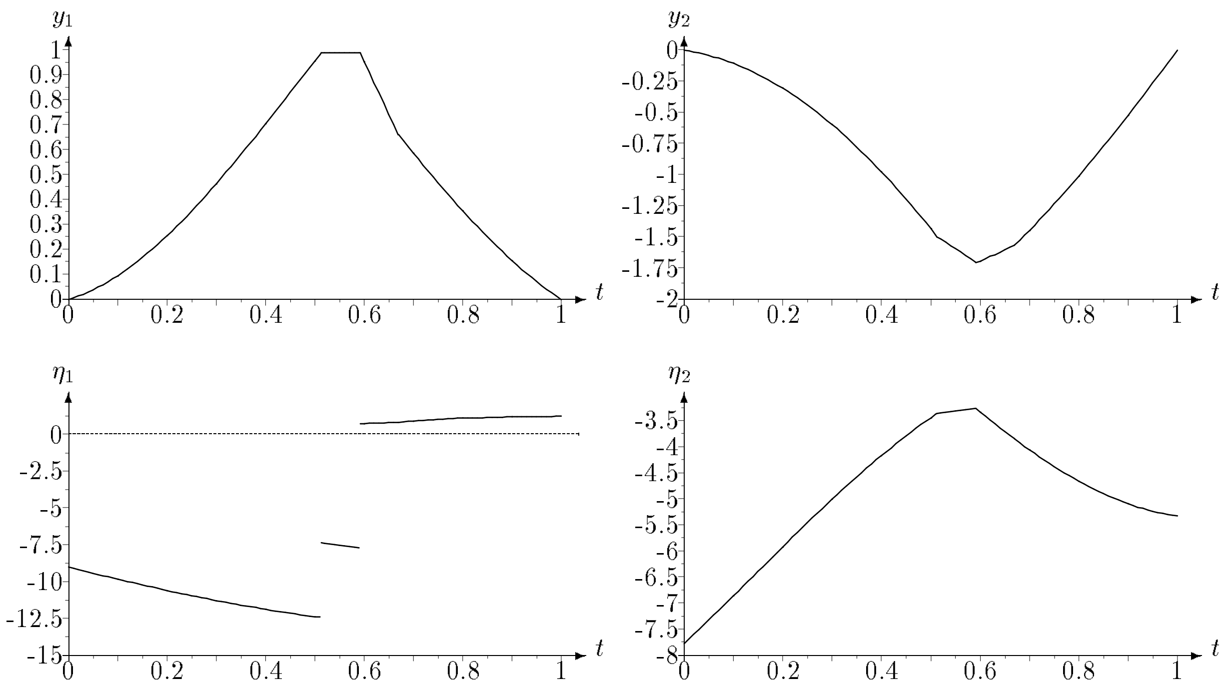
sowie

$$t_1(1.34) = 0.52684102,\ t_2(1.34) = 0.56866770,\ t_3(1.34) = 0.68060553$$

mit Näherung

$$\begin{aligned}
t_1(1.325) + \frac{15}{1000}\frac{dt}{d\alpha}(t_1, 1.325) &= 0.52729800, \\
t_2(1.325) + \frac{15}{1000}\frac{dt}{d\alpha}(t_2, 1.325) &= 0.56763281, \\
t_3(1.325) + \frac{15}{1000}\frac{dt}{d\alpha}(t_3, 1.325) &= 0.68063039\,.
\end{aligned}$$

Die zugehörigen Trajektorien y_1, y_2, η_1 und η_2 sind nachfolgend graphisch dargestellt:



4.7 Sensitivität nach p

Zum Problem mit

$$p_0 = 1.6,\ \ \alpha = 1.25$$

wird jetzt die Sensitiviät nach p betrachtet. Zusätzlich zu (4.39) – (4.45) benötigt man folgende DGL's und Rand- bzw. Schaltbedingungen:

$$\dot{y_1} = y_2 + \frac{\partial u_1}{\partial p},\ \dot{y_2} = \frac{\partial u_2}{\partial p},$$

$$\dot{\eta_1} = 4y_1 - \frac{\partial \mu_1}{\partial p} - \frac{\partial \mu_2}{\partial p},\ \dot{\eta_2} = 4y_2 - \eta_1,$$

$$y_1(0) = y_1(1) = 0,\ y_2(0) = y_2(1) = 0,$$

$$y_1(t_2) = 0,\ y_2(t_3) - \eta_1(t_3) = 0,$$

wobei

$$\frac{\partial u_1}{\partial p} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}\left(1 - y_1 - \eta_1 + \eta_2\right), & t \in [0, t_1], \\ -\eta_1, & t \in [t_1, t_2], [t_3, 1], \\ -y_2, & t \in [t_2, t_3], \end{array} \right\} \tag{4.59}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial p} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}\left(1 - y_1 + \eta_1 - \eta_2\right), & t \in [0, t_1], \\ -\eta_2, & t \in [t_1, 1], \end{array} \right\} \tag{4.60}$$

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial p} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}\left(y_1 - 1 - \eta_1 - \eta_2\right), & t \in [0, t_1], \\ 0, & t \in [t_1, 1], \end{array} \right\} \tag{4.61}$$

$$\frac{\partial \mu_2}{\partial p} = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & t \in [0, t_2], [t_3, 1], \\ 4y_1 + \eta_2, & t \in [t_2, t_3]. \end{array} \right\} \tag{4.62}$$

Für die Schaltfunktion $W(x, \lambda, p)$ aus (2.59) gilt:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{t_1}: & x_1(t_1) + u_1(t_1) + u_2(t_1) - p = x_1(t_1) - \lambda_1(t_1) - \lambda_2(t_1) - p = 0 \\ \Rightarrow & W|_{t=t_1} = (x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 - p)|_{t=t_1} \\ \Rightarrow & \dot{W}|_{t=t_1} = (\dot{x_1} - \dot{\lambda_1} - \dot{\lambda_2})|_{t=t_1} \\ & = x_2(t_1) - 4\left(x_1(t_1) + x_2(t_1)\right) = -4.67547562 \\ & W_x = (1,\, 0),\ W_\lambda = (-1,\, -1),\ W_p = -1. \\ \mathbf{t_2},\, \mathbf{t_3}: & S(x(t_i)) = x_1(t_i) - \alpha = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad & W|_{t=t_i} := S^1(x,u)|_{t=t_i} = x_2(t_i) + u_1(t_i) \qquad \text{(vgl. (2.63))} \\
& \quad = x_2(t_i) - \lambda_1(t_i) \\
\Rightarrow \qquad & \dot{W}|_{t=t_i} = \dot{x_2}(t_i) - \dot{\lambda_1}(t_i) = -\lambda_2(t_i) - 4x_1(t_i) \\
& = \begin{cases} -4.94761441, & t = t_2^-, \\ \\ -4.87792464, & t = t_3^+, \end{cases} \\
& W_x = (0,\,1),\ W_\lambda = (-1,\,0),\ W_p = 0.
\end{aligned}$$

Da $\dot{W}|_{t=t_i} \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, gilt, ergibt sich mittels der Formel

$$\frac{dt}{dp}(t_i) = -\dot{W}^{-1}\,(W_x,\,W_\lambda,\,W_p)\left.\begin{pmatrix} y \\ \eta \\ 1 \end{pmatrix}\right|_{t=t_1}$$

aus (2.62) für die Sensitivität der Schaltpunkte:

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{dp}(t_1) &= -\left.\frac{y_1 - \eta_1 - \eta_2 - 1}{x_2 - 4(x_1 + x_2)}\right|_{t=t_1}, \\
\frac{dt}{dp}(t_2) &= -\left.\frac{y_2 - \eta_1(t_2^-)}{-\lambda_2 - 4x_1}\right|_{t=t_2}, \\
\frac{dt}{dp}(t_3) &= -\left.\frac{y_2 - \eta_1(t_3^+)}{-\lambda_2 - 4x_1}\right|_{t=t_3}.
\end{aligned}$$

Mit der Lösung

$$\begin{aligned}
& \lambda_1(0) = -1.86793233,\ \lambda_2(0) = -0.37190676, \\
& \eta_1(0) = 1.19500464,\ \eta_2(0) = 0.68970927, \\
& \lambda_1(1) = 1.45187439,\ \lambda_2(1) = -0.41834252, \\
& \eta_1(1) = 0.11746216,\ \eta_2(1) = 0.70277898, \\
& t_1 = 0.37291770, t_2 = 0.41497959, t_3 = 0.67181105, \\
& \frac{dt}{dp}(t_1) = -0.66803562,\ \frac{dt}{dp}(t_2) = -0.29466214,\ \frac{dt}{dp}(t_3) = 0.02281150
\end{aligned}$$

ergibt sich:

$$t_1(1.61) = 0.36633999,\ t_2(1.61) = 0.41209210,\ t_3(1.61) = 0.67203425$$

mit Näherung

$$t_1(1.6) + \frac{1}{100}\frac{dt}{dp}(t_1, 1.6) = 0.36630983\,,$$

$$t_2(1.6) + \frac{1}{100}\frac{dt}{dp}(t_2, 1.6) = 0.41203297\,,$$
$$t_3(1.6) + \frac{1}{100}\frac{dt}{dp}(t_3, 1.6) = 0.67203917\,.$$

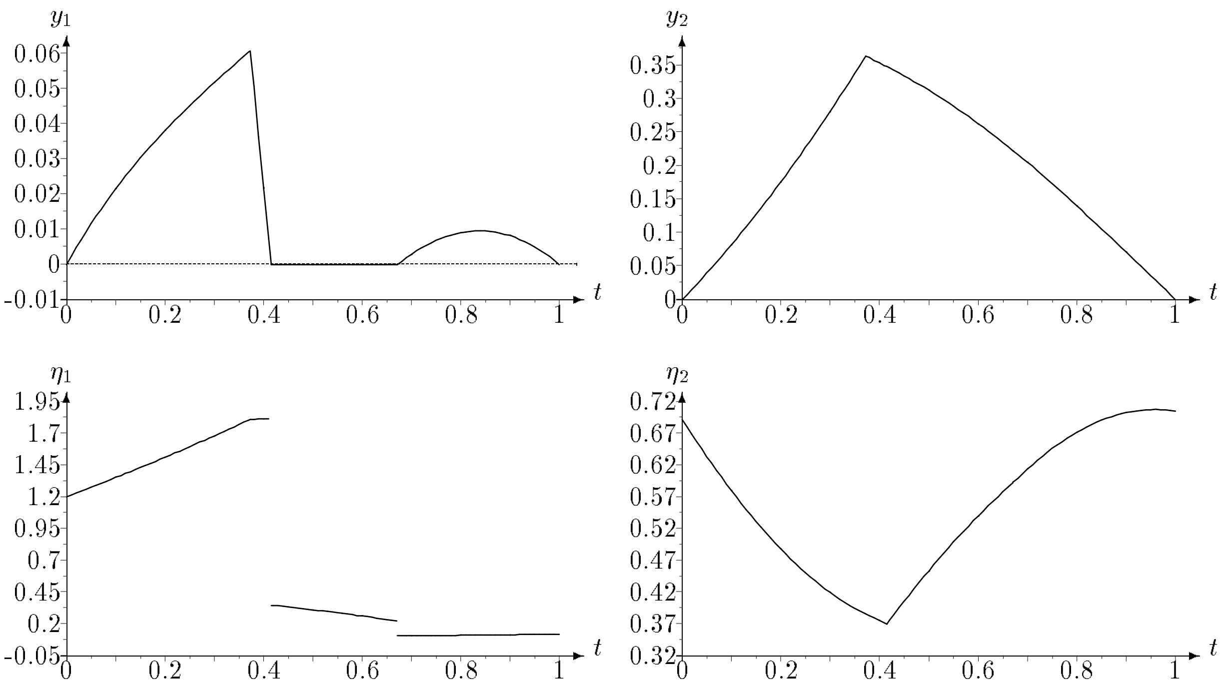
Desweiteren

$$t_1(1.55) = 0.40938490,\ t_2(1.55) = 0.43147063,\ t_3(1.55) = 0.67052402$$

mit Näherung

$$t_1(1.6) - \frac{5}{100}\frac{dt}{dp}(t_1, 1.6) = 0.40595704\,,$$
$$t_2(1.6) - \frac{5}{100}\frac{dt}{dp}(t_2, 1.6) = 0.42971270\,,$$
$$t_3(1.6) - \frac{5}{100}\frac{dt}{dp}(t_3, 1.6) = 0.67067048\,.$$

Die Funktionen im einzelnen:



Zum Schluß wird noch für das Problem mit

$$p_0 = 1.6,\ \alpha = 1.325$$

eine Sensitivitätsanalyse nach p durchgeführt:
In diesem Falle erhält man zusätzlich zu (4.14) – (4.25) :

$$\dot{y_1} = y_2 + \frac{\partial u_1}{\partial p},\ \dot{y_2} = \frac{\partial u_2}{\partial p},$$

$$\dot{\eta_1} = 4y_1 - \frac{\partial \mu_1}{\partial p} - \frac{\partial \mu_2}{\partial p},\ \dot{\eta_2} = 4y_2 - \eta_1,$$

$$y_1(0) = y_1(1) = 0,\ y_2(0) = y_2(1) = 0,$$

$$y_1(t_1) = 0,\ y_2(t_2) + \frac{1}{2}(1 - y_1(t_2) - \eta_1(t_2) + \eta_2(t_2)) = 0,$$

wobei

$$\frac{\partial u_1}{\partial p} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}(1 - y_1 - \eta_1 + \eta_2)\,, & t \in [0,t_1],[t_2,t_3], \\ -y_2, & t \in [t_1,t_2], \\ -\eta_1, & t \in [t_3,1], \end{array} \right\} \tag{4.63}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial p} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}(1 - y_1 + \eta_1 - \eta_2)\,, & t \in [0,t_1],[t_2,t_3], \\ y_2 - y_1 + 1, & t \in [t_1,t_2], \\ -\eta_2, & t \in [t_3,1], \end{array} \right\} \tag{4.64}$$

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial p} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}(y_1 - 1 - \eta_1 - \eta_2)\,, & t \in [0,t_1],[t_2,t_3], \\ y_2 - \eta_1, & t \in [t_1,t_2], \\ 0, & t \in [t_3,1], \end{array} \right\} \tag{4.65}$$

$$\frac{\partial \mu_2}{\partial p} = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & t \in [0,t_1],[t_2,1], \\ 6y_1 - 7y_2 + 2\eta_1 - 2, & t \in [t_1,t_2]. \end{array} \right\} \tag{4.66}$$

Für die Schaltfunktion $W(x, \lambda, p)$ aus (2.59) gilt:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{t_1}, \mathbf{t_2}: & & S\,(x(t_i)) = x_1(t_i) - \alpha = 0, \\ & & u_1(t_i) = \frac{1}{2}(p - x_1 - \lambda_1 + \lambda_2),\ u_2(t_i) = \frac{1}{2}(p - x_1 + \lambda_1 - \lambda_2) \\ & \Rightarrow & W|_{t=t_i} := S^1(x,u)|_{t=t_i} = x_2(t_i) + u_1(t_i) \\ & \Rightarrow & \dot{W}\,(x(t_i), \lambda(t_i), p) = \dot{x_2}(t_i) + \dot{u_1}(t_i) \end{array}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u_2(t_1^-) + \frac{1}{2}\left(-x_2 - u_1(t_1^-) - 4x_1 + \mu_1(t_1^-) + 4x_2 - \lambda_1\right)\Big|_{t=t_1}, \\ \\ u_2(t_2^+) + \frac{1}{2}\left(-x_2 - u_1(t_2^+) - 4x_1 + \mu_1(t_2^+) + 4x_2 - \lambda_1\right)\Big|_{t=t_2}, \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} -2.68313478, & t = t_1^-, \\ \\ -2.64266821, & t = t_2^+, \end{array} \right.$$

$$W_x = \left(-\frac{1}{2}, 1\right),\ W_\lambda = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\ W_p = \frac{1}{2}.$$

$\mathbf{t_3}$: $x_1(t_3) + u_1(t_3) + u_2(t_3) - p = 0,\ u_1 = -\lambda_1,\ u_2 = -\lambda_2$

$\Rightarrow$ $W|_{t=t_3} = (x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 - p)|_{t=t_3}$

$\Rightarrow$ $\dot{W}|_{t=t_3} = x_2(t_3) - 4\left(x_1(t_3) + x_2(t_3)\right) = -4.77246909,$

$W_x = (1, 0),\ W_\lambda = (-1, -1),\ W_p = -1.$

Da $\dot{W}|_{t=t_i} \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, ergibt sich mittels der Formel

$$\frac{dt}{d\alpha}(t_i) = -\dot{W}^{-1}\left(W_x,\, W_\lambda,\, W_p\right)\left(\begin{array}{c} y \\ \eta \\ 1 \end{array}\right)\Bigg|_{t=t_1}$$

aus (2.62) für die Sensitivität der Schaltpunkte:

$$\frac{dt}{dp}(t_1) = -\left.\frac{y_2 + \frac{1}{2}(1 - y_1 - \eta_1(t_1^-) + \eta_2)}{u_2(t_1^-) + \frac{1}{2}(-x_2 - u_1(t_1^-) - 4x_1 + \mu_1(t_1^-) + 4x_2 - \lambda_1)}\right|_{t=t_1},$$

$$\frac{dt}{dp}(t_2) = -\left.\frac{y_2 + \frac{1}{2}(1 - y_1 - \eta_1(t_2^+) + \eta_2)}{u_2(t_2^+) + \frac{1}{2}(-x_2 - u_1(t_2^+) - 4x_1 + \mu_1(t_2^+) + 4x_2 - \lambda_1)}\right|_{t=t_2},$$

$$\frac{dt}{dp}(t_3) = -\left.\frac{y_1 - \eta_1 - \eta_2 - 1}{x_2 - 4(x_1 + x_2)}\right|_{t=t_3}.$$

Mit der Lösung

$$\begin{array}{l} \lambda_1(0) = -2.45265734,\ \lambda_2(0) = -0.77433927, \\ \eta_1(0) = 3.05644996,\ \eta_2(0) = 3.57256506, \\ \lambda_1(1) = 1.62178900,\ \lambda_2(1) = -0.73100902, \\ \eta_1(1) = 0.83417977,\ \eta_2(1) = 2.18187066, \\ t_1 = 0.51311012, t_2 = 0.59162674, t_3 = 0.66941809, \\ \frac{dt}{dp}(t_1) = -0.19938749, \frac{dt}{dp}(t_2) = 0.69692965, \frac{dt}{dp}(t_3) = -0.74025794 \end{array}$$

ergibt sich:

$$t_1(1.61) = 0.51111781,\ t_2(1.61) = 0.59864096,\ t_3(1.61) = 0.66210518$$

mit Näherung

$$\begin{aligned} t_1(1.6) + \frac{1}{100}\frac{dt}{dp}(t_1, 1.6) &= 0.51111625\,, \\ t_2(1.6) + \frac{1}{100}\frac{dt}{dp}(t_2, 1.6) &= 0.59859604\,, \\ t_3(1.6) + \frac{1}{100}\frac{dt}{dp}(t_3, 1.6) &= 0.66201551\,. \end{aligned}$$

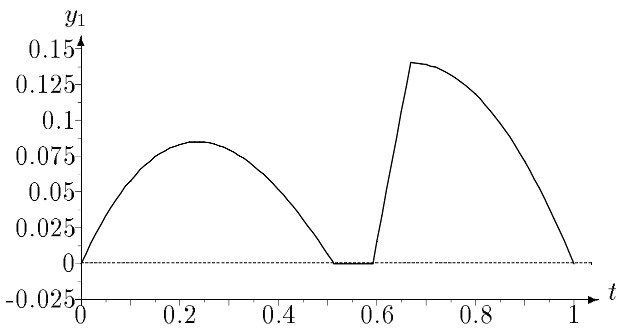
Desweiteren

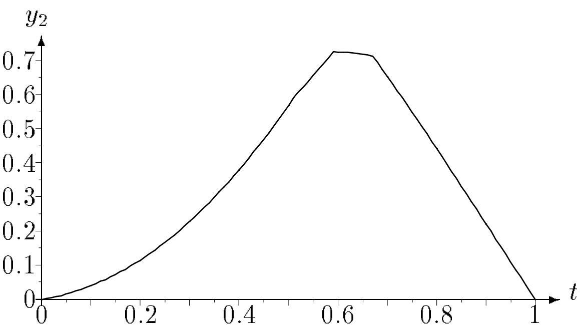
$$t_1(1.55) = 0.52328189,\ t_2(1.55) = 0.55769611,\ t_3(1.55) = 0.70905467$$

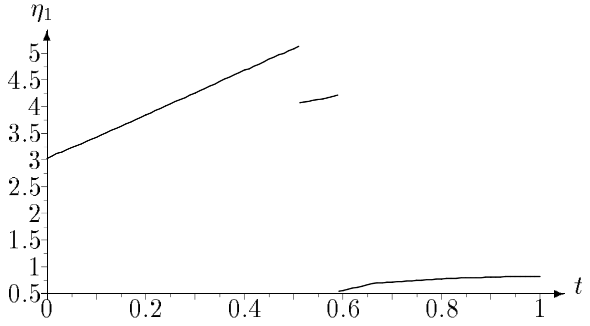
mit Näherung

$$\begin{aligned} t_1(1.6) - \frac{5}{100}\frac{dt}{dp}(t_1, 1.6) &= 0.52307949\,, \\ t_2(1.6) - \frac{5}{100}\frac{dt}{dp}(t_2, 1.6) &= 0.55678026\,, \\ t_3(1.6) - \frac{5}{100}\frac{dt}{dp}(t_3, 1.6) &= 0.70643099\,. \end{aligned}$$

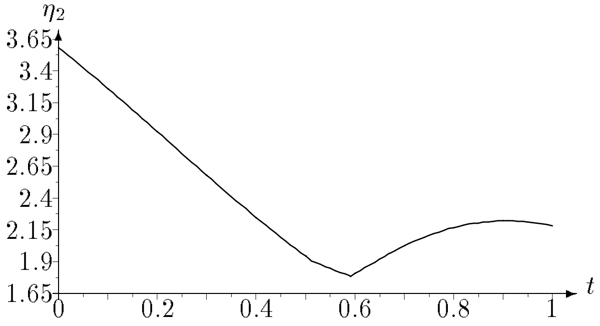
Die Funktionen im einzelnen:







η_1
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
t



η_2
3.65
3.4
3.15
2.9
2.65
2.4
2.15
1.9
1.65
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
t

Anhang A

Programme und Ausgaben

A.1 Beschreibung der Diskette und des Anhangs

Die Dateien auf der Diskette sind wie folgt geordnet:

*.for : Eingabedatei zur Berechnung der Funktionen unter Zuhilfenahme von BNDSCO

*.out : Ausgabedatei

*.dat : Erweiterte Ausgabedatei, die die Funktionen an mehr Stützstellen angibt, als *.out. Anhand dieser Daten wurden die Bilder erstellt.

Desweiteren sind die Dateien genauso geordnet wie in der Diplomarbeit, z.B:

k3_4_1.* : beziehen sich auf Abschnitt 3.4.1;

k4_3a.* : beziehen sich auf das erste RWP aus Abschnitt 4.3;

k4_3c.* : beziehen sich auf das dritte RWP aus Abschnitt 4.3.

Speziell:

k3_5_2a.* bis k3_5_2f.* beziehen sich auf die detaillierte Sensitivitätsanalyse in Abschnitt 3.5.2;

k4_6a1.* bis k4_6a6.* beziehen sich auf die detaillierte Sensitivitätsanalyse bzgl. des ersten RWP's in Abschnitt 4.6;

sen2.* : beziehen sich auf die Sensitivitätsanalyse 2.Ordnung in Abschnitt 3.5.2.

Anmerkung zur Datei bdsco3.for:

Die einzige Änderung, die ich an der Originaldatei bdsco.for vorgenommen habe:

bdsco3.for schreibt alle Ausgaben von BDSCO direkt in eine Ausgabedatei namens ergebnis.out.

Im Anhang ist nur ein Teil der Dateien wiedergegeben. Desweiteren wurden dort die Ausgabedateien *.out auf das Wesentliche gekürzt.

A.2 k3_2.for

```
     IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X(15),Y(15,15),XS(4),X1(15)
      INTEGER US(15,4)
      EXTERNAL F,R,RKF7
      COMMON /CI/J,L,LS,US

      NDISKRET=91
      ISCHALT=0
      N=5
      M=11
      MS=0
      TOL=1.0D-12
      MAXITER=300
      ITMAX=150
      KP=0
      KS=0

C AEQUIDISTANTE Mehrzielknoten---------------
      DO 100 I=1,M
        X(I)= 0.0D0 + 4.5D0/(M-1)*(I-1)
100   CONTINUE

C STARTSCHAETZUNG DER TRAJEKTORIEN : keine

C EXAKTE RANDWERTE-----------------------------
       Y(1,1)= -0.5D1
       Y(2,1)= -0.5D1
       Y(1,M)= 0.0D0
       Y(2,M)= 0.0D0
       Y(5,1)= 0.0D0

C STARTSCHAETZUNG DER SCHALTPUNKTE : keine Schaltpunkte

      CALL BDSCO(F,R,RKF7,X,XS,Y,N,M,MS,KS,TOL,ITMAX,KP)
      CALL DATEN(X,Y,XS,N,M,MS,NDISKRET,TOL,ISCHALT)
      STOP
      END
```

```
      SUBROUTINE F(X,Y,DY)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X,Y(9),DY(9)
      INTEGER US(15,4)
      COMMON /CI/J,L,LS,US

      U= -2.0D0 * Y(4)
      C=0.14D0

      DY(1)= Y(2)
      DY(2)= -Y(1)+1.4D0*Y(2)-C*Y(2)*Y(2)*Y(2)+4D0*U
      DY(3)= Y(4)-0.2D1*Y(1)
      DY(4)= 3D0*C*Y(2)*Y(2)*Y(4)-1.4D0*Y(4)-Y(3)
      DY(5)= Y(1)*Y(1)+U*U
      RETURN
      END

      SUBROUTINE R(YA,YB,ZZ,W,NYA,NSK)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 YA(5),YB(5),ZZ(5),W(5),ZO,RR
      INTEGER US(15,4),NYA(5),NSK(5),J,L,LS
      COMMON /CI/J,L,LS,US

C  ANFANGSBEDINGUNGEN
      W(1)=YA(1)+5.0D0
      W(2)=YA(2)+5.0D0
      W(3)=YA(5)

      NYA(1)=1
      NYA(2)=2
      NYA(5)=3

C ENDBEDINGUNGEN
      W(4)=YB(1)
      W(5)=YB(2)

C SCHALTBEDINGUNGEN : keine


      RETURN
      END
```

A.3 k3_2.out

```
    SOLUTION OBTAINED AFTER 21    ITERATION STEPS

    SOLUTION DATA
```

```
 0.00000000  -5.00000000  -5.00000000  -9.00247067  -2.67303084
              0.00000000
 0.45000000  -4.76953955   3.97272912  -5.11408916  -0.60932487
             19.49480915
 0.90000000  -2.78978538   4.32198795  -1.86207076  -0.13900390
             26.34477255
 1.35000000  -1.03923277   3.29813632  -0.10464386   0.51513364
             28.15351286
 1.80000000   0.02939440   1.40958093   0.60920536   0.69651245
             29.22797339
 2.25000000   0.33415284   0.12161107   0.59878786   0.19521352
             29.63895363
 2.70000000   0.27195105  -0.29038220   0.33518677  -0.04865197
             29.69823445
 3.15000000   0.13643223  -0.27240865   0.11501582  -0.09542579
             29.73017417
 3.60000000   0.04299827  -0.14018271   0.00124559  -0.06605392
             29.74641569
 4.05000000   0.00549334  -0.03637983  -0.03773093  -0.02706358
             29.75068649
 4.50000000   0.00000000   0.00000000  -0.04456054  -0.00010636
             29.75107515
```

A.4 k3_3.for

```
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X(15),Y(15,15),XS(4),X1(15)
      INTEGER US(15,4)
      EXTERNAL F,R,RKF7
      COMMON /CI/J,L,LS,US

      NDISKRET=91
      ISCHALT=1
      N=5
      M=11
      MS=3
      TOL=1.0D-12
      MAXITER=300
      ITMAX=150
      KP=0
      KS=1

C AEQUIDISTANTE Mehrzielknoten---------------
      DO 100 I=1,M
        X(I)= 0.0D0 + 4.5D0/(M-1)*(I-1)
100   CONTINUE

C STARTSCHAETZUNG DER TRAJEKTORIEN : keine
```

```
C EXAKTE RANDWERTE-----------------------------
       Y(1,1)= -0.5D1
       Y(2,1)= -0.5D1
       Y(1,M)= 0.0D0
       Y(2,M)= 0.0D0
       Y(5,1)= 0.0D0

C STARTSCHAETZUNG DER SCHALTPUNKTE
       XS(1) = 1.2D0
       XS(2) = 1.8D0
       XS(3) = 3.0D0

      CALL BDSCO(F,R,RKF7,X,XS,Y,N,M,MS,KS,TOL,ITMAX,KP)
      CALL DATEN(X,Y,XS,N,M,MS,NDISKRET,TOL,ISCHALT)
      STOP
      END

      SUBROUTINE F(X,Y,DY)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X,Y(9),DY(9)
      INTEGER US(15,4)
      COMMON /CI/J,L,LS,US
      IF (US(J,1).EQ.-1) THEN
         U= 1.0D0
      ENDIF
      IF ((US(J,1).EQ.1).AND.(US(J,2).EQ.-1)) THEN
         U= -2.0D0 * Y(4)
      ENDIF
      IF ((US(J,2).EQ.1).AND.(US(J,3).EQ.-1)) THEN
         U= -1.0D0
      ENDIF
      IF (US(J,3).EQ.1) THEN
         U= -2.0D0 * Y(4)
      ENDIF
      C=0.14D0
      DY(1)= Y(2)
      DY(2)= -Y(1)+1.4D0*Y(2)-C*Y(2)*Y(2)*Y(2)+4D0*U
      DY(3)= Y(4)-0.2D1*Y(1)
      DY(4)= 3D0*C*Y(2)*Y(2)*Y(4)-1.4D0*Y(4)-Y(3)
      DY(5)= Y(1)*Y(1)+U*U
      RETURN
      END

      SUBROUTINE R(YA,YB,ZZ,W,NYA,NSK)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 YA(5),YB(5),ZZ(5),W(8),Z0,RR
      INTEGER US(15,4),NYA(5),NSK(8),J,L,LS
      COMMON /CI/J,L,LS,US

C  ANFANGSBEDINGUNGEN
      W(1)=YA(1)+5.0D0
```

```
      W(2)=YA(2)+5.0D0
      W(3)=YA(5)

      NYA(1)=1
      NYA(2)=2
      NYA(5)=3

C ENDBEDINGUNGEN
      W(4)=YB(1)
      W(5)=YB(2)

C SCHALTBEDINGUNGEN
      W(6)= ZZ(4) + 0.5D0
      W(7)= ZZ(4) - 0.5D0
      W(8)= ZZ(4) - 0.5D0

      NSK(6)=1
      NSK(7)=2
      NSK(8)=3
      RETURN
      END
```

A.5 k3_3.out

```
    SOLUTION OBTAINED AFTER 22    ITERATION STEPS

    SOLUTION DATA

        0.00000000    -5.00000000    -5.00000000   -12.70997710    -4.59631683
                       0.00000000
        0.45000000    -6.12800200    -0.49600567   -10.49126101    -4.63823083
                      15.22431656
        0.90000000    -5.27484953     4.04199411    -6.13182479    -0.72383824
                      31.27052146
        1.04198283    -4.65858794     4.54787886    -4.80497712    -0.50000000
                      34.92783790
        1.35000000    -3.24896237     4.45533540    -2.47774975    -0.18964827
                      39.94294814
        1.70663109    -1.78581921     3.61095086    -0.66248574     0.50000000
                      42.29578967
        1.80000000    -1.46366706     3.30197592    -0.30099450     0.75385780
                      42.63571297
        2.25000000    -0.22728802     2.24211122     0.97814145     1.50246906
                      43.43565200
        2.70000000     0.53647890     1.07908873     1.37843378     0.89127114
                      43.92548861
        2.88494411     0.67659038     0.40793760     1.27819490     0.50000000
                      44.18111607
```

```
    3.15000000     0.66781040    -0.37886947     0.98666262     0.09563419
                   44.40424161
    3.60000000     0.38461728    -0.72337988     0.46719068    -0.18552562
                   44.56047705
    4.05000000     0.10665238    -0.45717557     0.16212896    -0.20252071
                   44.66569170
    4.50000000     0.00000000     0.00000000     0.05196024    -0.13990408
                   44.72093908

SWITCHING POINTS


    1.04198283     1.70663109     2.88494411
```

A.6 k3_4_1.for

```
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X(15),Y(15,15),XS(4),X1(15)
      INTEGER US(15,4)
      EXTERNAL F,R,RKF7
      COMMON /CI/J,L,LS,US

      NDISKRET=181
      ISCHALT=0
      N=7
      M=11
      MS=0
      TOL=1.0D-12
      MAXITER=300
      ITMAX=150
      KP=0
      KS=0

C AEQUIDISTANTE Mehrzielknoten---------------
      DO 100 I=1,M
        X(I)= 0.0D0 + 4.5D0/(M-1)*(I-1)
100   CONTINUE

C STARTSCHAETZUNG-------------------------------
      DO 101 I=1,M
        Y(1,I)= 0.1D0
        Y(2,I)= 0.1D0
101   CONTINUE

C EXAKTE RANDWETE-------------------------------
       Y(1,1)= -0.5D1
       Y(2,1)= -0.5D1
       Y(1,M)= 0.0D0
       Y(2,M)= 0.0D0
```

```
       Y(5,M)= 0.0D0
       Y(6,M)= 0.0D0
       Y(7,M)= 0.0D0

C STARTSCHAETZUNG DER SCHALTPUNKTE : keine Schaltpunkte

      CALL BDSCO(F,R,RKF7,X,XS,Y,N,M,MS,KS,TOL,ITMAX,KP)
      CALL DATEN(X,Y,XS,N,M,MS,NDISKRET,TOL,ISCHALT)
      STOP
      END

      SUBROUTINE F(X,Y,DY)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X,Y(9),DY(9)
      INTEGER US(15,4)
      COMMON /CI/J,L,LS,US

      U= -2.0D0*Y(4)

      DY(1)= Y(2)
      DY(2)= -Y(1)+1.4D0*Y(2)-0.14D0*Y(2)*Y(2)*Y(2)+4.0D0*U
      DY(3)= Y(4)-0.2D1*Y(1)
      DY(4)= 0.42D0*Y(2)*Y(2)*Y(4)-1.4D0*Y(4)-Y(3)
      DY(5)= 2.0D0*Y(6)+8.0D0*Y(6)*Y(6)-2.0D0
      DY(6)= -Y(5)+(0.42D0*Y(2)*Y(2)-1.4D0)*Y(6)+Y(7)+
     F      8.0D0*Y(6)*Y(7)
      DY(7)=-2D0*Y(6)+(0.84D0*Y(2)*Y(2)-2.8D0)*Y(7)+8D0*Y(7)*Y(7)+
     F      0.84D0*Y(4)*Y(2)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE R(YA,YB,ZZ,W,NYA,NSK)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 YA(7),YB(7),ZZ(7),W(7),Z0,RR
      INTEGER US(15,4),NYA(7),NSK(7),J,L,LS
      COMMON /CI/J,L,LS,US

C  ANFANGSBEDINGUNGEN
      W(1)=YA(1)+5.0D0
      W(2)=YA(2)+5.0D0

      NYA(1)=1
      NYA(2)=2

C ENDBEDINGUNGEN
      W(3)=YB(1)
      W(4)=YB(2)
      W(5)=YB(5)
      W(6)=YB(6)
      W(7)=YB(7)

C SCHALTBEDINGUNGEN : keine
```

```
      RETURN
      END
```

A.7 k3_4_1.out

```
    SOLUTION OBTAINED AFTER 28    ITERATION STEPS

    SOLUTION DATA

        0.00000000    -5.00000000    -5.00000000    -9.00247067    -2.67303084
                        2.00632377     0.47051349    -0.35166544
        0.45000000    -4.76953955     3.97272912    -5.11408916    -0.60932487
                        1.89253258     0.21857967     0.16473029
        0.90000000    -2.78978538     4.32198795    -1.86207076    -0.13900390
                        1.33263550     0.24182981     0.05946592
        1.35000000    -1.03923277     3.29813632    -0.10464386     0.51513364
                        1.31539021     0.50293745    -0.02245179
        1.80000000     0.02939440     1.40958093     0.60920536     0.69651245
                        1.61753020     0.40926325     0.39139581
        2.25000000     0.33415284     0.12161107     0.59878786     0.19521352
                        1.60971822     0.37646473     0.52036722
        2.70000000     0.27195105    -0.29038220     0.33518677    -0.04865197
                        1.49532655     0.33238806     0.49311014
        3.15000000     0.13643223    -0.27240865     0.11501582    -0.09542579
                        1.20029264     0.28542961     0.48679966
        3.60000000     0.04299827    -0.14018271     0.00124559    -0.06605392
                        0.95083298     0.37241140     0.43365225
        4.05000000     0.00549334    -0.03637983    -0.03773093    -0.02706358
                        0.79821109     0.21786712     0.08916854
        4.50000000     0.00000000     0.00000000    -0.04456054    -0.00010636
                        0.00000000     0.00000000     0.00000000
```

A.8 k3_4_2.for

```
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X(15),Y(15,15),XS(4),X1(15)
      INTEGER US(15,4)
      EXTERNAL F,R,RKF7
      COMMON /CI/J,L,LS,US

      NDISKRET=181
      ISCHALT=1
      N=7
      M=11
```

```
      MS=3
      TOL=1.0D-12
      MAXITER=300
      ITMAX=150
      KP=0
      KS=1

C AEQUIDISTANTE Mehrzielknoten---------------
      DO 100 I=1,M
        X(I)= 0.0D0 + 4.5D0/(M-1)*(I-1)
100   CONTINUE

C STARTSCHAETZUNG DER TRAJEKTORIEN : keine

C EXAKTE RANDWERTE----------------------------
       Y(1,1)= -0.5D1
       Y(2,1)= -0.5D1
       Y(1,M)= 0.0D0
       Y(2,M)= 0.0D0
       Y(5,M)= 0.0D0
       Y(6,M)= 0.0D0
       Y(7,M)= 0.0D0

C STARTSCHAETZUNG DER SCHALTPUNKTE
       XS(1) = 0.8D0
       XS(2) = 2.0D0
       XS(3) = 3.2D0

      CALL BDSCO(F,R,RKF7,X,XS,Y,N,M,MS,KS,TOL,ITMAX,KP)
      CALL DATEN(X,Y,XS,N,M,MS,NDISKRET,TOL,ISCHALT)
      STOP
      END

      SUBROUTINE F(X,Y,DY)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X,Y(9),DY(9)
      INTEGER US(15,4)
      COMMON /CI/J,L,LS,US

      IF (US(J,1).EQ.-1) THEN
         U= 1.0D0
         V1=8.0D0*Y(6)*Y(6)
         V2=8.0D0*Y(6)*Y(7)
         V3=8.0D0*Y(7)*Y(7)
      ENDIF
      IF ((US(J,1).EQ.1).AND.(US(J,2).EQ.-1)) THEN
         U= -2.0D0 * Y(4)
         V1=0.0D0
         V2=0.0D0
         V3=0.0D0
      ENDIF
      IF ((US(J,2).EQ.1).AND.(US(J,3).EQ.-1)) THEN
```

```
          U= -1.0D0
          V1= 8.0D0*Y(6)*Y(6)
          V2= 8.0D0*Y(6)*Y(7)
          V3= 8.0D0*Y(7)*Y(7)
       ENDIF
       IF (US(J,3).EQ.1) THEN
          U= -2.0D0 * Y(4)
          V1=0.0D0
          V2=0.0D0
          V3=0.0D0
       ENDIF
       C1=0.14D0
       C2=1.4D0
       DY(1)= Y(2)
       DY(2)= -Y(1)+C2*Y(2)-C1*Y(2)*Y(2)*Y(2)+4.0D0*U
       DY(3)= Y(4)-0.2D1*Y(1)
       DY(4)= 3.0D0*C1*Y(2)*Y(2)*Y(4)-C2*Y(4)-Y(3)
       DY(5)= 2.0D0*Y(6)+8.0D0*Y(6)*Y(6)-2.0D0-V1
       DY(6)= -Y(5)+(3.0D0*0.14D0*Y(2)*Y(2)-C2)*Y(6)+Y(7)+8.0D0*Y(6)*
      F      Y(7)-V2
       DY(7)=-2.0D0*Y(6)+(6.0D0*C1*Y(2)*Y(2)-2.0D0*C2)*Y(7)+8.0D0*Y(7)*
      F      Y(7)+6.0D0*C1*Y(4)*Y(2)-V3
       RETURN
       END

       SUBROUTINE R(YA,YB,ZZ,W,NYA,NSK)
       IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
       REAL*8 YA(7),YB(7),ZZ(7),W(10),Z0,RR
       INTEGER US(15,4),NYA(7),NSK(10),J,L,LS
       COMMON /CI/J,L,LS,US


C  ANFANGSBEDINGUNGEN
       W(1)=YA(1)+5D0
       W(2)=YA(2)+5D0

       NYA(1)=1
       NYA(2)=2

C ENDBEDINGUNGEN
       W(3)=YB(1)
       W(4)=YB(2)
       W(5)=YB(5)
       W(6)=YB(6)
       W(7)=YB(7)

C SCHALTBEDINGUNGEN
       W(8)= ZZ(4) + 0.5D0
       W(9)= ZZ(4) - 0.5D0
       W(10)= ZZ(4) - 0.5D0

       NSK(8)=1
```

```
      NSK(9)=2
      NSK(10)=3

      RETURN
      END
```

A.9 k3_4_2.out

```
SOLUTION OBTAINED AFTER 35    ITERATION STEPS

SOLUTION DATA

    0.00000000    -5.00000000    -5.00000000   -12.70997710    -4.59631683
                   2.39858190     0.89023233    -1.26620913
    0.45000000    -6.12800200    -0.49600567   -10.49126101    -4.63823083
                   2.49622895     0.93104800     1.79149590
    0.90000000    -5.27484953     4.04199411    -6.13182479    -0.72383824
                   2.06331447     0.24972947     0.20387699
    1.04198283    -4.65858794     4.54787886    -4.80497712    -0.50000000
                   1.84241651     0.20012036     0.13139311
    1.35000000    -3.24896237     4.45533540    -2.47774975    -0.18964827
                   1.48796868     0.28443510     0.07567526
    1.70663109    -1.78581921     3.61095086    -0.66248574     0.50000000
                   1.89402305     0.73978184    -0.02824091
    1.80000000    -1.46366706     3.30197592    -0.30099450     0.75385780
                   1.85395926     0.82568791    -0.02669427
    2.25000000    -0.22728802     2.24211122     0.97814145     1.50246906
                   1.74755086     0.85031094     0.72026973
    2.70000000     0.53647890     1.07908873     1.37843378     0.89127114
                   1.48127087     0.50210645     0.80472648
    2.88494411     0.67659038     0.40793760     1.27819490     0.50000000
                   1.25698215     0.28437338     0.47727233
    3.15000000     0.66781040    -0.37886947     0.98666262     0.09563419
                   1.04583737     0.28833995     0.46549560
    3.60000000     0.38461728    -0.72337988     0.46719068    -0.18552562
                   0.87029937     0.40678129     0.37847537
    4.05000000     0.10665238    -0.45717557     0.16212896    -0.20252071
                   0.79609585     0.22297993     0.06617255
    4.50000000     0.00000000     0.00000000     0.05196024    -0.13990408
                   0.00000000     0.00000000     0.00000000

SWITCHING POINTS


    1.04198283     1.70663109     2.88494411
```

A.10 k3_5_1.for

```
     IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X(15),Y(15,15),XS(4),X1(15)
      INTEGER US(15,4)
      EXTERNAL F,R,RKF7
      COMMON /CI/J,L,LS,US

      NDISKRET=182
      ISCHALT=0
      N=8
      M=11
      MS=0
      TOL=1.0D-12
      MAXITER=300
      ITMAX=500
      KP=0
      KS=0

C AEQUIDISTANTE Mehrzielknoten---------------
      DO 100 I=1,M
        X(I)= 0.0D0 + 4.5D0/(M-1)*(I-1)
100   CONTINUE

C STARTSCHAETZUNG DER TRAJEKTORIEN : keine

C EXAKTE RANDWERTE----------------------------
       Y(1,1)= -0.5D1
       Y(2,1)= -0.5D1
       Y(1,M)= 0.0D0
       Y(2,M)= 0.0D0
       Y(5,1)= 0.0D0
       Y(6,1)= 0.0D0
       Y(5,M)= 0.0D0
       Y(6,M)= 0.0D0

C STARTSCHAETZUNG DER SCHALTPUNKTE : keine Schaltpunkte

      CALL BDSCO(F,R,RKF7,X,XS,Y,N,M,MS,KS,TOL,ITMAX,KP)
      CALL DATEN(X,Y,XS,N,M,MS,NDISKRET,TOL,ISCHALT)
      STOP
      END

      SUBROUTINE F(X,Y,DY)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X,Y(9),DY(9)
      INTEGER US(15,4)
      COMMON /CI/J,L,LS,US

         U= -0.2D1 * Y(4)
         V= -0.8D1 * Y(8)
```

```
      DY(1)= Y(2)
      DY(2)= -Y(1)+1.4D0*Y(2)-0.14D0*Y(2)*Y(2)*Y(2)+4D0*U
      DY(3)= Y(4)-0.2D1*Y(1)
      DY(4)= 0.42D0*Y(2)*Y(2)*Y(4)-1.4D0*Y(4)-Y(3)
      DY(5)= Y(6)
      DY(6)= -Y(5)+1.4D0*Y(6)-0.42D0*Y(2)*Y(2)*Y(6)-Y(2)*Y(2)*Y(2)+V
      DY(7)= Y(8)-0.2D1*Y(5)
      DY(8)= 3D0*Y(2)*Y(2)*Y(4)+0.42D0*(2D0*Y(2)*Y(6)*Y(4)+
     F       Y(2)*Y(2)*Y(8))-1.4D0*Y(8)-Y(7)
      RETURN
      END


      SUBROUTINE R(YA,YB,ZZ,W,NYA,NSK)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 YA(8),YB(8),ZZ(8),W(8),Z0,RR
      INTEGER US(15,4),NYA(8),NSK(8),J,L,LS
      COMMON /CI/J,L,LS,US

C  ANFANGSBEDINGUNGEN
      W(1)=YA(1)+5.0D0
      W(2)=YA(2)+5.0D0
      W(3)=YA(5)
      W(4)=YA(6)

      NYA(1)=1
      NYA(2)=2
      NYA(5)=3
      NYA(6)=4

C ENDBEDINGUNGEN
      W(5)=YB(1)
      W(6)=YB(2)
      W(7)=YB(5)
      W(8)=YB(6)


C SCHALTBEDINGUNGEN : keine

      RETURN
      END
```

A.11 k3_5_1.out

```
    SOLUTION OBTAINED AFTER 23    ITERATION STEPS

    SOLUTION DATA
```

```
 0.00000000    -5.00000000    -5.00000000    -9.00247067    -2.67303084
                 0.00000000     0.00000000   -12.09050326     7.41986735

 0.45000000    -4.76953955     3.97272912    -5.11408916    -0.60932487
                 0.10974891    -4.83746409   -11.74116133     0.01439459

 0.90000000    -2.78978538     4.32198795    -1.86207076    -0.13900390
                -4.02454898    -9.93936038   -10.68522732    -2.56335570

 1.35000000    -1.03923277     3.29813632    -0.10464386     0.51513364
                -6.81049639    -0.50149458    -7.82384485    -7.38441686

 1.80000000     0.02939440     1.40958093     0.60920536     0.69651245
                -4.56687834     7.81058221    -4.14547606     0.73455312

 2.25000000     0.33415284     0.12161107     0.59878786     0.19521352
                -1.55148043     5.04169642    -0.59202005     2.07691765

 2.70000000     0.27195105    -0.29038220     0.33518677    -0.04865197
                -0.02958031     1.91845376     0.70647199     1.02129400

 3.15000000     0.13643223    -0.27240865     0.11501582    -0.09542579
                 0.38624714     0.16332649     0.76486334     0.28362562

 3.60000000     0.04299827    -0.14018271     0.00124559    -0.06605392
                 0.29332194    -0.42825080     0.47747389    -0.05677707

 4.05000000     0.00549334    -0.03637983    -0.03773093    -0.02706358
                 0.09542007    -0.37965108     0.25295267    -0.14523745

 4.50000000     0.00000000     0.00000000    -0.04456054    -0.00010636
                 0.00000000     0.00000000     0.15682073    -0.14166697
```

A.12 k3_5_2.for

```
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X(15),Y(15,15),XS(4),X1(15)
      INTEGER US(15,4)
      EXTERNAL F,R,RKF7
      COMMON /CI/J,L,LS,US

      NDISKRET=91
      ISCHALT=1
      N=8
      M=11
      MS=3
      TOL=1.0D-12
      MAXITER=300
```

```
      ITMAX=500
      KP=0
      KS=1
      EPS=1.E-8
      IFEIN=10
      IPLOT=0
      S=-0.025
      K=11


C AEQUIDISTANTE Mehrzielknoten---------------
      DO 100 I=1,M
        X(I)= 0.0D0 + 4.5D0/(M-1)*(I-1)
100   CONTINUE

C STARTSCHAETZUNG DER TRAJEKTORIEN : keine

C EXAKTE RANDWERTE-----------------------------
       Y(1,1)= -0.5D1
       Y(2,1)= -0.5D1
       Y(1,M)= 0.0D0
       Y(2,M)= 0.0D0
       Y(5,1)= 0.0D0
       Y(6,1)= 0.0D0
       Y(5,M)= 0.0D0
       Y(6,M)= 0.0D0

C STARTSCHAETZUNG DER SCHALTPUNKTE
       XS(1) = 0.8D0
       XS(2) = 2.0D0
       XS(3) = 3.2D0

      CALL BDSCO(F,R,RKF7,X,XS,Y,N,M,MS,KS,TOL,ITMAX,KP)
      CALL DATEN(X,Y,XS,N,M,MS,NDISKRET,TOL,ISCHALT)

      DWDT1=-2D0*(0.42D0*Y(2,4)*Y(2,4)*Y(4,4)-1.4D0*Y(4,4)-Y(3,4))
      DWDT2=2D0*(0.42D0*Y(2,6)*Y(2,6)*Y(4,6)-1.4D0*Y(4,6)-Y(3,6))
      DWDT3=2D0*(0.42D0*Y(2,10)*Y(2,10)*Y(4,10)-1.4D0*Y(4,10)-Y(3,10))
      DT1DC =  2D0*Y(8,4)/DWDT1
      DT2DC = - 2D0*Y(8,6)/DWDT2
      DT3DC = - 2D0*Y(8,10)/DWDT3
      WRITE(7,*)
      WRITE(7,*)
      WRITE(7,*) X(4),'  DWDT1:',DWDT1
      WRITE(7,*) X(6),'  DWDT2:',DWDT2
      WRITE(7,*) X(10),'  DWDT3:',DWDT3
      WRITE(7,*)
      WRITE(7,*) X(4),'  DT1DC:',DT1DC
      WRITE(7,*) X(6),'  DT2DC:',DT2DC
      WRITE(7,*) X(10),'  DT3DC:',DT3DC
      STOP
      END
```

```
      SUBROUTINE F(X,Y,DY)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X,Y(9),DY(9)
      INTEGER US(15,4)
      COMMON /CI/J,L,LS,US
      IF (US(J,1).EQ.-1) THEN
         U= 1.0D0
         V= 0.0D0
      ENDIF
      IF ((US(J,1).EQ.1).AND.(US(J,2).EQ.-1)) THEN
         U= -0.2D1 * Y(4)
         V= -0.8D1 * Y(8)
      ENDIF
      IF ((US(J,2).EQ.1).AND.(US(J,3).EQ.-1)) THEN
         U= -1.0D0
         V= 0.0D0
      ENDIF
      IF (US(J,3).EQ.1) THEN
         U= -0.2D1 * Y(4)
         V= -0.8D1 * Y(8)
      ENDIF
      DY(1)= Y(2)
      DY(2)= -Y(1)+1.4D0*Y(2)-0.14D0*Y(2)*Y(2)*Y(2)+4.0D0*U
      DY(3)= Y(4)-0.2D1*Y(1)
      DY(4)= 0.42D0*Y(2)*Y(2)*Y(4)-1.4D0*Y(4)-Y(3)
      DY(5)= Y(6)
      DY(6)= -Y(5)+1.4D0*Y(6)-0.42D0*Y(2)*Y(2)*Y(6)-Y(2)*Y(2)*Y(2)+V
      DY(7)= Y(8)-0.2D1*Y(5)
      DY(8)= 3.0D0*Y(2)*Y(2)*Y(4)+0.42D0*(2.0D0*Y(2)*Y(6)*Y(4)+
     F        Y(2)*Y(2)*Y(8))-1.4D0*Y(8)-Y(7)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE R(YA,YB,ZZ,W,NYA,NSK)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 YA(8),YB(8),ZZ(8),W(11),Z0,RR
      INTEGER US(15,4),NYA(8),NSK(11),J,L,LS
      COMMON /CI/J,L,LS,US

C  ANFANGSBEDINGUNGEN
      W(1)=YA(1)+5.0D0
      W(2)=YA(2)+5.0D0
      W(3)=YA(5)
      W(4)=YA(6)

      NYA(1)=1
      NYA(2)=2
      NYA(5)=3
      NYA(6)=4
```

```
C ENDBEDINGUNGEN
      W(5)=YB(1)
      W(6)=YB(2)
      W(7)=YB(5)
      W(8)=YB(6)

C SCHALTBEDINGUNGEN
      W(9)= ZZ(4) + 0.5D0
      W(10)= ZZ(4) - 0.5D0
      W(11)= ZZ(4) - 0.5D0
      NSK(9)=1
      NSK(10)=2
      NSK(11)=3

      RETURN
      END
```

A.13 k3_5_2.out

```
    SOLUTION OBTAINED AFTER 23    ITERATION STEPS

    SOLUTION DATA

        0.00000000    -5.00000000    -5.00000000   -12.70997710    -4.59631683
                       0.00000000     0.00000000    -7.73953349    27.59301812

        0.45000000    -6.12800200    -0.49600567   -10.49126101    -4.63823083
                       2.91868895     8.36972073    -0.64292101    17.23151750

        0.90000000    -5.27484953     4.04199411    -6.13182479    -0.72383824
                       6.06888762    -1.58367995    -0.57557786     2.27312294

        1.04198283    -4.65858794     4.54787886    -4.80497712    -0.50000000
                       5.28423984    -8.77707526    -2.03448534     0.45224460

        1.35000000    -3.24896237     4.45533540    -2.47774975    -0.18964827
                       1.79626118   -11.49743324    -4.51908004    -2.57895716

        1.70663109    -1.78581921     3.61095086    -0.66248574     0.50000000
                      -0.77575250     0.00216427    -7.24500924   -13.00422863

        1.80000000    -1.46366706     3.30197592    -0.30099450     0.75385780
                      -0.94006006    -3.19288200    -8.41168731   -15.25604577

        2.25000000    -0.22728802     2.24211122     0.97814145     1.50246906
                      -3.64789144    -7.34781396   -14.86506311   -20.20159273

        2.70000000     0.53647890     1.07908873     1.37843378     0.89127114
```

```
              -7.09847661    -7.91745793   -17.91524352   -12.90123626

  2.88494411   0.67659038     0.40793760     1.27819490     0.50000000
              -8.59243210    -8.27376476   -16.94009258    -7.91625298

  3.15000000   0.66781040    -0.37886947     0.98666262     0.09563419
              -9.02526819     3.70063966   -13.40156726    -2.15017291

  3.60000000   0.38461728    -0.72337988     0.46719068    -0.18552562
              -5.42629174     9.94613735    -6.49113901     2.20573450

  4.05000000   0.10665238    -0.45717557     0.16212896    -0.20252071
              -1.51773115     6.50689794    -2.25279057     2.83783177

  4.50000000   0.00000000     0.00000000     0.05196024    -0.13990408
               0.00000000     0.00000000    -0.68941701     1.98521500


SWITCHING POINTS


  1.04198283   1.70663109    2.88494411


 1.04198282737795922  DWDT1:     -2.32300935200021552
 1.70663109121032219  DWDT2:      5.40133725735927239
 2.88494410615208752  DWDT3:     -3.88649630326994888

 1.04198282737795922  DT1DC:     -0.38936098052010998
 1.70663109121032219  DT2DC:      4.81518854036525301
 2.88494410615208752  DT3DC:     -4.07372211751846525
```

A.14 sen2.for

```
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
       REAL*8 X(16),Y(16,16),XS(5),X1(16)
       INTEGER US(16,5)
       EXTERNAL F,R,RKF7
       COMMON /CI/J,L,LS,US

       NDISKRET=91
       ISCHALT=1
       N=12
       M=11
       MS=3
       TOL=1.0D-12
       MAXITER=300
       ITMAX=500
       KP=0
```

```
      KS=1

C AEQUIDISTANTE Mehrzielknoten---------------
      DO 100 I=1,M
        X(I)= 0.0D0 + 4.5D0/(M-1)*(I-1)
100   CONTINUE

C STARTSCHAETZUNG DER TRAJEKTORIEN : keine


C EXAKTE RANDWERTE----------------------------
       Y(1,1)= -0.5D1
       Y(2,1)= -0.5D1
       Y(1,M)= 0.0D0
       Y(2,M)= 0.0D0
       Y(5,1)= 0.0D0
       Y(6,1)= 0.0D0
       Y(5,M)= 0.0D0
       Y(6,M)= 0.0D0
       Y(9,1)= 0.0D0
       Y(10,1)= 0.0D0
       Y(9,M)= 0.0D0
       Y(10,M)= 0.0D0

C STARTSCHAETZUNG DER SCHALTPUNKTE
       XS(1) = 0.8D0
       XS(2) = 2.0D0
       XS(3) = 3.2D0

      CALL BDSCO(F,R,RKF7,X,XS,Y,N,M,MS,KS,TOL,ITMAX,KP)
      CALL DATEN(X,Y,XS,N,M,MS,NDISKRET,TOL,ISCHALT)
      STOP
      END

      SUBROUTINE F(X,Y,DY)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X,Y(13),DY(13)
      INTEGER US(16,5)
      COMMON /CI/J,L,LS,US

      IF (US(J,1).EQ.-1) THEN
         U= 0.1D1
         V= 0.0D0
         W= 0.0D0
      ENDIF
      IF ((US(J,1).EQ.1).AND.(US(J,2).EQ.-1)) THEN
         U= -0.2D1 * Y(4)
         V= -0.8D1 * Y(8)
         W= -0.8D1 * Y(12)
      ENDIF
      IF ((US(J,2).EQ.1).AND.(US(J,3).EQ.-1)) THEN
         U= -0.1D1
```

```
         V= 0.0D0
         W= 0.0D0
      ENDIF
      IF (US(J,3).EQ.1) THEN
         U= -0.2D1 * Y(4)
         V= -0.8D1 * Y(8)
         W= -0.8D1 * Y(12)
      ENDIF

      C=0.14D0

      DY(1)= Y(2)
      DY(2)= -Y(1)+1.4D0*Y(2)-C*Y(2)*Y(2)*Y(2)+4.0D0*U
      DY(3)= Y(4)-0.2D1*Y(1)
      DY(4)= 3.0D0*C*Y(2)*Y(2)*Y(4)-1.4D0*Y(4)-Y(3)
      DY(5)= Y(6)
      DY(6)= -Y(5)+1.4D0*Y(6)-3.0D0*C*Y(2)*Y(2)*Y(6)-Y(2)*Y(2)*Y(2)+V
      DY(7)= Y(8)-0.2D1*Y(5)
      DY(8)= 3.0D0*Y(2)*Y(2)*Y(4)+3.0D0*C*(2.0D0*Y(2)*Y(6)*Y(4)+
     F       Y(2)*Y(2)*Y(8))-1.4D0*Y(8)-Y(7)
      DY(9)= Y(10)
      DY(10)= -Y(9)+1.4D0*Y(10)-6.0D0*Y(2)*Y(2)*Y(6)-3.0D0*C*
     F        (2.0D0*Y(2)*Y(6)*Y(6)+Y(2)*Y(2)*Y(10))+W
      DY(11)= Y(12)-2.0D0*Y(9)
      DY(12)= 6.0D0*(2.0D0*Y(2)*Y(6)*Y(4)+Y(2)*Y(2)*Y(8))+3.0D0*C*
     F        (Y(2)*Y(2)*Y(12)+2.0D0*(Y(6)*Y(6)*Y(4)+Y(2)*(Y(10)*Y(4)+
     F        2.0D0*Y(6)*Y(8))))-1.4D0*Y(12)-Y(11)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE R(YA,YB,ZZ,W,NYA,NSK)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 YA(12),YB(12),ZZ(12),W(15),ZO,RR
      INTEGER US(16,5),NYA(12),NSK(15),J,L,LS
      COMMON /CI/J,L,LS,US

C  ANFANGSBEDINGUNGEN
      W(1)=YA(1)+5.0D0
      W(2)=YA(2)+5.0D0
      W(3)=YA(5)
      W(4)=YA(6)
      W(5)=YA(9)
      W(6)=YA(10)

      NYA(1)=1
      NYA(2)=2
      NYA(5)=3
      NYA(6)=4
      NYA(9)=5
      NYA(10)=6

C ENDBEDINGUNGEN
```

```
      W(7)=YB(1)
      W(8)=YB(2)
      W(9)=YB(5)
      W(10)=YB(6)
      W(11)=YB(9)
      W(12)=YB(10)

C SCHALTBEDINGUNGEN
      W(13)= ZZ(4) + 0.5D0
      W(14)= ZZ(4) - 0.5D0
      W(15)= ZZ(4) - 0.5D0

      NSK(13)=1
      NSK(14)=2
      NSK(15)=3

      RETURN
      END
```

A.15 sen2.out

```
    SOLUTION OBTAINED AFTER 24    ITERATION STEPS

    SOLUTION DATA

        0.00000000    -5.00000000    -5.00000000   -12.70997710    -4.59631683
                        0.00000000     0.00000000    -7.73953349    27.59301812
                        0.00000000     0.00000000   -50.95465264  -412.45407081

        0.45000000    -6.12800200    -0.49600567   -10.49126101    -4.63823083
                        2.91868895     8.36972073    -0.64292101    17.23151750
                      -17.22260264   -55.84569539  -188.10066811  -237.22403781

        0.90000000    -5.27484953     4.04199411    -6.13182479    -0.72383824
                        6.06888762    -1.58367995    -0.57557786     2.27312294
                      -55.48834867   -78.89100874  -228.28570694   -64.15816376

        1.04198283    -4.65858794     4.54787886    -4.80497712    -0.50000000
                        5.28423984    -8.77707526    -2.03448534     0.45224460
                      -59.35323309    24.93969696  -218.03775257   -29.44267384

        1.35000000    -3.24896237     4.45533540    -2.47774975    -0.18964827
                        1.79626118   -11.49743324    -4.51908004    -2.57895716
                      -30.24906168   109.27998796  -189.08678521    42.21734177

        1.70663109    -1.78581921     3.61095086    -0.66248574     0.50000000
                       -0.77575250     0.00216427    -7.24500924   -13.00422863
                      -24.63785427  -133.82358153  -125.89103285   200.35445417
```

```
1.80000000   -1.46366706    3.30197592   -0.30099450     0.75385780
             -0.94006006   -3.19288200   -8.41168731   -15.25604577
            -34.73500973  -83.90022265 -102.89443487   170.87570132

2.25000000   -0.22728802    2.24211122    0.97814145     1.50246906
             -3.64789144   -7.34781396  -14.86506311   -20.20159273
            -39.73253846   36.06865309  -22.44351506    38.36269408

2.70000000    0.53647890    1.07908873    1.37843378     0.89127114
             -7.09847661   -7.91745793  -17.91524352   -12.90123626
            -12.99704854   79.07114839   18.54581201    46.19675067

2.88494411    0.67659038    0.40793760    1.27819490     0.50000000
             -8.59243210   -8.27376476  -16.94009258    -7.91625298
              3.15722130   96.42669468   29.48854223    48.68484077

3.15000000    0.66781040   -0.37886947    0.98666262     0.09563419
             -9.02526819    3.70063966  -13.40156726    -2.15017291
             19.85392940   33.07214597   32.95698590    28.32891271

3.60000000    0.38461728   -0.72337988    0.46719068    -0.18552562
             -5.42629174    9.94613735   -6.49113901     2.20573450
             18.87801889  -26.32585185   20.57751494     4.28387105

4.05000000    0.10665238   -0.45717557    0.16212896    -0.20252071
             -1.51773115    6.50689794   -2.25279057     2.83783177
              5.76390391  -24.51509140    7.77064582    -9.18422643

4.50000000    0.00000000    0.00000000    0.05196024    -0.13990408
              0.00000000    0.00000000   -0.68941701     1.98521500
              0.00000000    0.00000000    1.98389531    -7.49705742


SWITCHING POINTS


1.04198283    1.70663109    2.88494411
```

A.16 k3_7.for

```
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
       REAL*8 X(15),Y(15,15),XS(4),X1(15)
       INTEGER US(15,4)
       EXTERNAL F,R,RKF7
       COMMON /CI/J,L,LS,US

       NDISKRET=91
       ISCHALT=1
```

```
      N=6
      M=11
      MS=2
      TOL=1.0D-12
      MAXITER=300
      ITMAX=150
      KP=0
      KS=1

C AEQUIDISTANTE Mehrzielknoten---------------
      DO 100 I=1,M
        X(I)= 0.0D0 + 1.0D0/(M-1)*(I-1)
100   CONTINUE

C STARTSCHAETZUNG DER TRAJEKTORIEN-------------
      DO 200 I=1,M
       Y(2,I)=3.0D0
       Y(3,I)=0.1D0
       Y(4,I)=0.1D0
       Y(5,I)=3.1D0
200   CONTINUE

C EXAKTE RANDWERTE-----------------------------
       Y(1,1)= -0.5D1
       Y(2,1)= -0.5D1
       Y(1,M)= 0.0D0
       Y(2,M)= 0.0D0
       Y(6,1)= 0.0D0
       Y(6,M)= 1.0D0

C STARTSCHAETZUNG DER SCHALTPUNKTE
       XS(1) = 0.3D0
       XS(2) = 0.8D0


      CALL BDSCO(F,R,RKF7,X,XS,Y,N,M,MS,KS,TOL,ITMAX,KP)
      CALL DATEN(X,Y,XS,N,M,MS,NDISKRET,TOL,ISCHALT)
      STOP
      END


      SUBROUTINE F(X,Y,DY)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X,Y(9),DY(9)
      INTEGER US(15,4)
      COMMON /CI/J,L,LS,US

      IF (US(J,1).EQ.-1) THEN
         U= 1.0D0
      ENDIF
      IF ((US(J,1).EQ.1).AND.(US(J,2).EQ.-1)) THEN
         U= -1.0D0
```

```
      ENDIF
      IF (US(J,2).EQ.1) THEN
         U= 1.0D0
      ENDIF

      DY(1)= Y(2)*Y(5)
      DY(2)= (-Y(1)+1.4D0*Y(2)-0.14D0*Y(2)*Y(2)*Y(2)+4D0*U)*Y(5)
      DY(3)= Y(4)*Y(5)
      DY(4)= (0.42D0*Y(2)*Y(2)*Y(4)-1.4D0*Y(4)-Y(3))*Y(5)
      DY(5)= 0.0D0
      DY(6)= -(Y(3)*Y(2)+Y(4)*(-Y(1)+1.4D0*Y(2)-0.14D0*Y(2)*Y(2)*
     F       Y(2)+4D0*U))
      RETURN
      END


      SUBROUTINE R(YA,YB,ZZ,W,NYA,NSK)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 YA(6),YB(6),ZZ(6),W(8),Z0,RR
      INTEGER US(15,4),NYA(6),NSK(8),J,L,LS
      COMMON /CI/J,L,LS,US

C  ANFANGSBEDINGUNGEN
      W(1)=YA(1)+5.0D0
      W(2)=YA(2)+5.0D0
      W(3)=YA(6)

      NYA(1)=1
      NYA(2)=2
      NYA(6)=3

C ENDBEDINGUNGEN
      W(4)=YB(1)
      W(5)=YB(2)
      W(6)= YB(6) - 1.0D0


C SCHALTBEDINGUNGEN
      W(7)= ZZ(4)
      W(8)= ZZ(4)

      NSK(7)=1
      NSK(8)=2

      RETURN
      END
```

A.17 k3_7.out

```
SOLUTION OBTAINED AFTER 20    ITERATION STEPS

SOLUTION DATA

    0.00000000    -5.00000000    -5.00000000    -0.12234128    -0.08265161
                   3.66817339     0.00000000
    0.10000000    -6.05516653    -1.24314634    -0.17483608    -0.14182033
                   3.66817339     0.10000000
    0.20000000    -5.84128054     2.61551964    -0.20647148    -0.04182288
                   3.66817339     0.20000000
    0.30000000    -4.39005180     4.62918426    -0.21517110    -0.00400196
                   3.66817339     0.30000000
    0.30546718    -4.29703352     4.64657574    -0.21521225     0.00000000
                   3.66817339     0.30546718
    0.40000000    -2.94161788     3.43708191    -0.19035074     0.17904819
                   3.66817339     0.40000000
    0.50000000    -1.79334917     2.85048763    -0.05656007     0.57509138
                   3.66817339     0.50000000
    0.60000000    -0.84761770     2.29520135     0.22779948     0.93320715
                   3.66817339     0.60000000
    0.70000000    -0.12570807     1.60610519     0.57472061     0.87183080
                   3.66817339     0.70000000
    0.80000000     0.29158189     0.59098088     0.81814279     0.42469568
                   3.66817339     0.80000000
    0.90000000     0.22728297    -1.07264939     0.89195798     0.00778261
                   3.66817339     0.90000000
    0.90236928     0.21775037    -1.12108659     0.89199176     0.00000000
                   3.66817339     0.90236928
    1.00000000     0.00000000     0.00000000     0.84276186    -0.25000000
                   3.66817339     1.00000000

SWITCHING POINTS


    0.30546718     0.90236928
```

A.18 k4_1.for

```
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
  REAL*8 X(15),Y(15,15),XS(4),X1(15)
  INTEGER US(15,4)
  EXTERNAL F,R,RKF7
  COMMON /CI/J,L,LS,US
  NDISKRET=101
  ISCHALT=0
  N=4
  M=11
  MS=0
```

```
      TOL=1.0D-12
      MAXITER=300
      ITMAX=500
      KP=0
      KS=0

C AEQUIDISTANTE Mehrzielknoten---------------
      DO 100 I=1,M
        X(I)= 0.0D0 + 1.0D0/(M-1)*(I-1)
100   CONTINUE

C STARTSCHAETZUNG DER TRAJEKTORIEN---------
       DO 200 I=1,M
        Y(1,I)=0.1D0
        Y(2,I)=0.1D0
        Y(3,I)=0.1D0
        Y(4,I)=0.1D0
200   CONTINUE

C EXAKTE RANDWERTE-----------------------------
       Y(1,1)= 1.0D0
       Y(2,1)= 0.0D0
       Y(1,M)= 1.0D0
       Y(2,M)= 0.0D0

C STARTSCHAETZUNG DER SCHALTPUNKTE : keine Schaltpunkte

      CALL BDSCO(F,R,RKF7,X,XS,Y,N,M,MS,KS,TOL,ITMAX,KP)
      CALL DATEN(X,Y,XS,N,M,MS,NDISKRET,TOL,ISCHALT)
      STOP
      END

      SUBROUTINE F(X,Y,DY)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X,Y(9),DY(9)
      INTEGER US(15,4)
      COMMON /CI/J,L,LS,US

         U1= -Y(3)
         U2= -Y(4)

      DY(1)= Y(2)+U1
      DY(2)= U2
      DY(3)= 4.0D0*Y(1)
      DY(4)= 4.0D0*Y(2)-Y(3)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE R(YA,YB,ZZ,W,NYA,NSK)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 YA(4),YB(4),ZZ(4),W(4),ZO,RR
      INTEGER US(15,4),NYA(4),NSK(4),J,L,LS
```

```
      COMMON /CI/J,L,LS,US

C  ANFANGSBEDINGUNGEN
      W(1)=YA(1)-1.0D0
      W(2)=YA(2)
      NYA(1)=1
      NYA(2)=2

C ENDBEDINGUNGEN
      W(3)=YB(1)-1.0D0
      W(4)=YB(2)

C SCHALTBEDINGUNGEN : keine

      RETURN
      END
```

A.19 k4_1.out

```
 SOLUTION OBTAINED AFTER  3    ITERATION STEPS

 SOLUTION DATA

     0.00000000     1.00000000     0.00000000    -3.15185578    -0.60815844

     0.10000000     1.29567012     0.04542098    -2.69133702    -0.30491607

     0.20000000     1.54275785     0.06229833    -2.12180774    -0.04100982

     0.30000000     1.72879928     0.05561719    -1.46528377     0.16323019

     0.40000000     1.84435490     0.03216525    -0.74818233     0.29227620

     0.50000000     1.88353982     0.00000000     0.00000000     0.33639635

     0.60000000     1.84435490    -0.03216525     0.74818233     0.29227620

     0.70000000     1.72879928    -0.05561719     1.46528377     0.16323019

     0.80000000     1.54275785    -0.06229833     2.12180774    -0.04100982

     0.90000000     1.29567012    -0.04542098     2.69133702    -0.30491607

     1.00000000     1.00000000     0.00000000     3.15185578    -0.60815844
```

A.20 k4_2.for

```
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X(15),Y(15,15),XS(4),X1(15)
      INTEGER US(15,4)
      EXTERNAL F,R,RKF7
      COMMON /CI/J,L,LS,US
      NDISKRET=101
      ISCHALT=1
      N=4
      M=11
      MS=1
      TOL=1.0D-12
      MAXITER=300
      ITMAX=500
      KP=0
      KS=1

C AEQUIDISTANTE Mehrzielknoten---------------
      DO 100 I=1,M
        X(I)= 0.0D0 + 1.0D0/(M-1)*(I-1)
100   CONTINUE

C STARTSCHAETZUNG DER TRAJEKTORIEN---------
       DO 200 I=1,M
        Y(1,I)=0.1D0
        Y(2,I)=0.1D0
        Y(3,I)=0.1D0
        Y(4,I)=0.1D0
200   CONTINUE

C EXAKTE RANDWERTE----------------------------
       Y(1,1)= 1.0D0
       Y(2,1)= 0.0D0
       Y(1,M)= 1.0D0
       Y(2,M)= 0.0D0

C STARTSCHAETZUNG DER SCHALTPUNKTE
       XS(1) = 0.35D0

      CALL BDSCO(F,R,RKF7,X,XS,Y,N,M,MS,KS,TOL,ITMAX,KP)
      CALL DATEN(X,Y,XS,N,M,MS,NDISKRET,TOL,ISCHALT)
      STOP
      END

      SUBROUTINE F(X,Y,DY)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X,Y(9),DY(9)
      INTEGER US(15,4)
      COMMON /CI/J,L,LS,US
```

```
      IF (US(J,1).EQ.1) THEN
         U1= -Y(3)
         U2= -Y(4)
         V1= 0.0D0
      ENDIF
      IF (US(J,1).EQ.-1) THEN
         U1= 0.5D0*(1.6D0-Y(1)-Y(3)+Y(4))
         U2= 0.5D0*(1.6D0-Y(1)+Y(3)-Y(4))
         V1= 0.5D0*(Y(1)-1.6D0-Y(3)-Y(4))
      ENDIF

      DY(1)= Y(2)+U1
      DY(2)= U2
      DY(3)= 4.0D0*Y(1)-V1
      DY(4)= 4.0D0*Y(2)-Y(3)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE R(YA,YB,ZZ,W,NYA,NSK)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 YA(4),YB(4),ZZ(4),W(5),Z0,RR
      INTEGER US(15,4),NYA(4),NSK(5),J,L,LS
      COMMON /CI/J,L,LS,US

C  ANFANGSBEDINGUNGEN
      W(1)=YA(1)-1.0D0
      W(2)=YA(2)
      NYA(1)=1
      NYA(2)=2

C ENDBEDINGUNGEN
      W(3)=YB(1)-1.0D0
      W(4)=YB(2)

C SCHALTBEDINGUNGEN
      W(5)= ZZ(1)-ZZ(3)-ZZ(4)-1.6D0
      NSK(5)=1

      RETURN
      END
```

A.21 k4_2.out

```
    SOLUTION OBTAINED AFTER 10    ITERATION STEPS

    SOLUTION DATA

        0.00000000     1.00000000     0.00000000    -2.73899572    -1.01752156
```

0.10000000	1.11020323	-0.05871983	-2.46412445	-0.76842844
0.20000000	1.20507590	-0.11838030	-2.12676875	-0.57388496
0.30000000	1.27990071	-0.17224594	-1.73303340	-0.43888791
0.40000000	1.33103906	-0.21356321	-1.29101385	-0.36501170
0.50000000	1.35612008	-0.23588166	-0.81029647	-0.35029076
0.60000000	1.35416456	-0.23335714	-0.30137523	-0.38928184
0.69445840	1.32788805	-0.20366451	0.19554003	-0.46765198
0.70000000	1.32560152	-0.20105736	0.22494946	-0.47330276
0.80000000	1.25940398	-0.14803993	0.74350355	-0.59216236
0.90000000	1.14892202	-0.08173997	1.22655899	-0.73747501
1.00000000	1.00000000	0.00000000	1.65750826	-0.89906251

SWITCHING POINTS

0.69445840

A.22 k4_3a.for

```
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X(15),Y(15,15),XS(4),X1(15)
      INTEGER US(15,4)
      EXTERNAL F,R,RKF7
      COMMON /CI/J,L,LS,US

      NDISKRET=101
      ISCHALT=1
      N=5
      M=11
      MS=3
      TOL=1.0D-12
      MAXITER=300
      ITMAX=500
      KP=0
      KS=1

C AEQUIDISTANTE Mehrzielknoten---------------
```

```
      DO 100 I=1,M
        X(I)= 0.0D0 + 1.0D0/(M-1)*(I-1)
100   CONTINUE

C STARTSCHAETZUNG DER TRAJEKTORIEN-------------

C Zuerst wurde das System ohne die zusaetzliche 5.DGL,
C in der das Zielfunktional berechnet wird, geloest.
C Die dort erhaltenen Funktionen dienen fuer das
C um eine DGL vergroesserte System als Startschaetzung:

      DO 200 I=1,M
        Y(1,I)=1.0D0+0.1D0*(I-1)
        Y(2,I)=-0.05D0
        Y(3,I)=-3.0D0+0.5D0*(I-1)
        Y(4,I)=-0.65D0+0.16D0*(I-1)
200   CONTINUE

        Y(1,5)=1.3D0
        Y(1,6)=1.4D0
        Y(1,7)=1.3D0
        Y(1,8)=1.3D0
        Y(1,9)=1.2D0
        Y(1,10)=1.1D0
        Y(1,11)=1.0D0
        Y(4,7)=0.1D0
        Y(4,8)=-0.01D0
        Y(4,9)=-0.19D0
        Y(4,10)=-0.43D0
        Y(4,11)=-0.69D0

C EXAKTE RANDWERTE-----------------------------
       Y(1,1)= 1.0D0
       Y(2,1)= 0.0D0
       Y(1,M)= 1.0D0
       Y(2,M)= 0.0D0
       Y(5,1)= 0.0D0

C STARTSCHAETZUNG DER SCHALTPUNKTE
       XS(1) = 0.46D0
       XS(2) = 0.6D0
       XS(3) = 0.65D0

      CALL BDSCO(F,R,RKF7,X,XS,Y,N,M,MS,KS,TOL,ITMAX,KP)
      CALL DATEN(X,Y,XS,N,M,MS,NDISKRET,TOL,ISCHALT)
      STOP
      END

      SUBROUTINE F(X,Y,DY)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X,Y(9),DY(9)
      INTEGER US(15,4)
```

```
      COMMON /CI/J,L,LS,US

      IF ((US(J,1).EQ.1).AND.(US(J,2).EQ.-1)) THEN
         U1= -Y(2)
         U2= Y(2)-Y(1)+1.6D0
         V1= Y(2)-Y(3)
         V2= 6.0D0*Y(1)-7.0D0*Y(2)+2.0D0*Y(3)-3.2D0
      ENDIF
      IF (US(J,1).EQ.-1) THEN
         U1= 0.5D0*(1.6D0-Y(1)-Y(3)+Y(4))
         U2= 0.5D0*(1.6D0-Y(1)+Y(3)-Y(4))
         V1= 0.5D0*(Y(1)-1.6D0-Y(3)-Y(4))
         V2= 0.0D0
      ENDIF
      IF ((US(J,2).EQ.1).AND.(US(J,3).EQ.-1)) THEN
         U1= 0.5D0*(1.6D0-Y(1)-Y(3)+Y(4))
         U2= 0.5D0*(1.6D0-Y(1)+Y(3)-Y(4))
         V1= 0.5D0*(Y(1)-1.6D0-Y(3)-Y(4))
         V2= 0.0D0
      ENDIF
      IF (US(J,3).EQ.1) THEN
         U1= -Y(3)
         U2= -Y(4)
         V1= 0.0D0
         V2= 0.0D0
      ENDIF

      DY(1)= Y(2)+U1
      DY(2)= U2
      DY(3)= 4.0D0*Y(1)-V1-V2
      DY(4)= 4.0D0*Y(2)-Y(3)
      DY(5)= 0.5D0*(U1*U1+U2*U2-4D0*(Y(1)*Y(1)+Y(2)*Y(2)))
      RETURN
      END

      SUBROUTINE R(YA,YB,ZZ,W,NYA,NSK)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 YA(5),YB(5),ZZ(5),W(8),Z0,RR
      INTEGER US(15,4),NYA(5),NSK(8),J,L,LS
      COMMON /CI/J,L,LS,US

C  ANFANGSBEDINGUNGEN
      W(1)=YA(1)-1.0D0
      W(2)=YA(2)
      W(3)=YA(5)
      NYA(1)=1
      NYA(2)=2
      NYA(5)=3

C ENDBEDINGUNGEN
      W(4)=YB(1)-1.0D0
      W(5)=YB(2)
```

```
C SCHALTBEDINGUNGEN
      W(6)= ZZ(1)-1.325D0
      W(7)= ZZ(2)+0.5D0*(1.6D0-ZZ(1)-ZZ(3)+ZZ(4))
      W(8)= ZZ(1)-ZZ(3)-ZZ(4)-1.6D0

      NSK(6)=1
      NSK(7)=2
      NSK(8)=3
      RETURN
      END
```

A.23 k4_3a.out

```
 SOLUTION OBTAINED AFTER  9    ITERATION STEPS

 SOLUTION DATA

     0.00000000     1.00000000     0.00000000    -2.45265734    -0.77433927
                     0.00000000
     0.10000000     1.10689424    -0.05510781    -2.15189928    -0.55456061
                    -0.14754096
     0.20000000     1.19644705    -0.10820148    -1.79040958    -0.38980489
                    -0.35311332
     0.30000000     1.26444189    -0.15257447    -1.37500686    -0.28367570
                    -0.61746438
     0.40000000     1.30780549    -0.18162962    -0.91427274    -0.23633126
                    -0.93240798
     0.50000000     1.32476924    -0.18919000    -0.41802269    -0.24444029
                    -1.27994990
     0.51311012     1.32500000    -0.18828939    -0.35087808    -0.24929930
                    -1.32660032
     0.59162674     1.32500000    -0.18120675    -0.36655542    -0.27914192
                    -1.60599458
     0.60000000     1.32490741    -0.18032499    -0.32364675    -0.28230712
                    -1.63577374
     0.66941809     1.31706459    -0.16526308     0.03770048    -0.32063589
                    -1.88063859
     0.70000000     1.30855200    -0.15511181     0.19834015    -0.34385043
                    -1.98575380
     0.80000000     1.24922339    -0.11601211     0.71147660    -0.44409851
                    -2.29947398
     0.90000000     1.14454510    -0.06522378     1.19166273    -0.57629307
                    -2.53006685
     1.00000000     1.00000000     0.00000000     1.62178900    -0.73100902
                    -2.64021147

 SWITCHING POINTS
```

```
    0.51311012     0.59162674     0.66941809
```

A.24 k4_3b.for

```
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X(15),Y(15,15),XS(4),X1(15)
      INTEGER US(15,4)
      EXTERNAL F,R,RKF7
      COMMON /CI/J,L,LS,US

      NDISKRET=101
      ISCHALT=1
      N=5
      M=11
      MS=3
      TOL=1.0D-12
      MAXITER=300
      ITMAX=500
      KP=0
      KS=1

C AEQUIDISTANTE Mehrzielknoten---------------
      DO 100 I=1,M
        X(I)= 0.0D0 + 1.0D0/(M-1)*(I-1)
100   CONTINUE

C STARTSCHAETZUNG DER TRAJEKTORIEN-------------

C Zuerst wurde das System ohne die zusaetzliche 5.DGL,
C in der das Zielfunktional berechnet wird, geloest.
C Die dort erhaltenen Funktionen dienen fuer das
C um eine DGL vergroesserte System als Startschaetzung:

      DO 200 I=1,M
        Y(1,I)=1.0D0+0.1D0*(I-1)
        Y(2,I)=-0.05D0
        Y(3,I)=-3.0D0+0.5D0*(I-1)
        Y(4,I)=-0.65D0+0.16D0*(I-1)
200   CONTINUE

        Y(1,5)=1.4D0
        Y(1,6)=1.5D0
        Y(1,7)=1.4D0
        Y(1,8)=1.3D0
        Y(1,9)=1.2D0
        Y(1,10)=1.1D0
        Y(1,11)=1.0D0
```

```
        Y(4,7)=0.1D0
        Y(4,8)=-0.01D0
        Y(4,9)=-0.19D0
        Y(4,10)=-0.43D0
        Y(4,11)=-0.69D0

C EXAKTE RANDWERTE-----------------------------
       Y(1,1)= 1.0D0
       Y(2,1)= 0.0D0
       Y(1,M)= 1.0D0
       Y(2,M)= 0.0D0
       Y(5,1)= 0.0D0
C STARTSCHAETZUNG DER SCHALTPUNKTE
       XS(1) = 0.41D0
       XS(2) = 0.59D0
       XS(3) = 0.65D0

      CALL BDSCO(F,R,RKF7,X,XS,Y,N,M,MS,KS,TOL,ITMAX,KP)
      CALL DATEN(X,Y,XS,N,M,MS,NDISKRET,TOL,ISCHALT)
      STOP
      END

      SUBROUTINE F(X,Y,DY)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X,Y(9),DY(9)
      INTEGER US(15,4)
      COMMON /CI/J,L,LS,US

      IF ((US(J,1).EQ.1).AND.(US(J,2).EQ.-1)) THEN
         U1= -Y(2)
         U2= Y(2)-Y(1)+1.6D0
         V1= Y(2)-Y(3)
         V2= 6.0D0*Y(1)-7.0D0*Y(2)+2.0D0*Y(3)-3.2D0
      ENDIF
      IF (US(J,1).EQ.-1) THEN
         U1= 0.5D0*(1.6D0-Y(1)-Y(3)+Y(4))
         U2= 0.5D0*(1.6D0-Y(1)+Y(3)-Y(4))
         V1= 0.5D0*(Y(1)-1.6D0-Y(3)-Y(4))
         V2= 0.0D0
      ENDIF
      IF ((US(J,2).EQ.1).AND.(US(J,3).EQ.-1)) THEN
         U1= -Y(2)
         U2= -Y(4)
         V1= 0.0D0
         V2= Y(4)+4.0D0*Y(1)
      ENDIF
      IF (US(J,3).EQ.1) THEN
         U1= -Y(3)
         U2= -Y(4)
         V1= 0.0D0
         V2= 0.0D0
      ENDIF
```

```
      DY(1)= Y(2)+U1
      DY(2)= U2
      DY(3)= 4.0D0*Y(1)-V1-V2
      DY(4)= 4.0D0*Y(2)-Y(3)
      DY(5)= 0.5D0*(U1*U1+U2*U2-4D0*(Y(1)*Y(1)+Y(2)*Y(2)))
      RETURN
      END

      SUBROUTINE R(YA,YB,ZZ,W,NYA,NSK)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 YA(5),YB(5),ZZ(5),W(8),Z0,RR
      INTEGER US(15,4),NYA(5),NSK(8),J,L,LS
      COMMON /CI/J,L,LS,US

C  ANFANGSBEDINGUNGEN
      W(1)=YA(1)-1.0D0
      W(2)=YA(2)
      W(3)=YA(5)
      NYA(1)=1
      NYA(2)=2
      NYA(5)=3

C ENDBEDINGUNGEN
      W(4)=YB(1)-1.0D0
      W(5)=YB(2)

C SCHALTBEDINGUNGEN
      W(6)= ZZ(1)-1.3D0
      W(7)= ZZ(1)-ZZ(3)-ZZ(4)-1.6D0
      W(8)= ZZ(2)-ZZ(3)

      NSK(6)=1
      NSK(7)=2
      NSK(8)=3
      RETURN
      END
```

A.25 k4_3b.out

```
    SOLUTION OBTAINED AFTER 13    ITERATION STEPS

    SOLUTION DATA

        0.00000000      1.00000000      0.00000000     -2.20985846     -0.55260695
                         0.00000000
        0.10000000      1.10478290     -0.05281428     -1.88622848     -0.35788361
                        -0.15075753
```

```
  0.20000000     1.19034125    -0.10106679    -1.50310815    -0.21899017
                -0.36099632
  0.30000000     1.25286797    -0.13803552    -1.06799653    -0.13834473
                -0.62853407
  0.40000000     1.28976314    -0.15722009    -0.58996939    -0.11487737
                -0.94169160
  0.48698907     1.30000000    -0.15477736    -0.14707479    -0.13752007
                -1.23477481
  0.50000000     1.30000000    -0.15287553    -0.14934838    -0.14359732
                -1.27907460
  0.51138179     1.30000000    -0.15119143    -0.15119143    -0.14880857
                -1.31781509
  0.60000000     1.30000000    -0.13627849    -0.13627849    -0.18709638
                -1.61884395
  0.64267940     1.30000000    -0.12792841    -0.12792841    -0.20401837
                -1.76340158
  0.70000000     1.29181546    -0.11546674     0.16951263    -0.23315419
                -1.95645547
  0.80000000     1.23904100    -0.08830694     0.67728726    -0.31670380
                -2.26708209
  0.90000000     1.14005699    -0.05090174     1.15457429    -0.43686989
                -2.50276415
  1.00000000     1.00000000     0.00000000     1.58384790    -0.58493278
                -2.62542913

SWITCHING POINTS


  0.48698907     0.51138179     0.64267940
```

A.26 k4_3c115.for

```
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X(15),Y(15,15),XS(4),X1(15)
      INTEGER US(15,4)
      EXTERNAL F,R,RKF7
      COMMON /CI/J,L,LS,US

      NDISKRET=101
      ISCHALT=1
      N=5
      M=11
      MS=3
      TOL=1.0D-12
      MAXITER=300
      ITMAX=500
      KP=0
      KS=1
```

```
C AEQUIDISTANTE Mehrzielknoten---------------
      DO 100 I=1,M
        X(I)= 0.0D0 + 1.0D0/(M-1)*(I-1)
100   CONTINUE

C STARTSCHAETZUNG DER TRAJEKTORIEN-------------

C Die Startschaetzung wurde aus k4_3c125.for uebernommen:

       Y(1,2)=1.096D0
       Y(1,3)=1.171D0
       Y(1,4)=1.224D0
       Y(1,5)=1.249D0
       Y(1,6)=1.25D0
       Y(1,7)=1.25D0
       Y(1,8)=1.248D0
       Y(1,9)=1.210D0
       Y(1,10)= 1.126D0
       Y(2,2)= -0.04307D0
       Y(2,3)= -0.07834D0
       Y(2,4)= -0.09942D0
       Y(2,5)= -0.1011D0
       Y(2,6)= -0.09482D0
       Y(2,7)= -0.08571D0
       Y(2,8)= -0.07401D0
       Y(2,9)= -0.05844D0
       Y(2,10)= -0.03501D0
       Y(3,1)= -1.868D0
       Y(3,2)= -1.52D0
       Y(3,3)= -1.116D0
       Y(3,4)= -0.665D0
       Y(3,5)= -0.175D0
       Y(3,6)= -0.0948D0
       Y(3,7)= -0.0857D0
       Y(3,8)= 0.06331D0
       Y(3,9)= 0.5566D0
       Y(3,10)= 1.025D0
       Y(3,11)= 1.452D0
       Y(4,1)= -0.3719D0
       Y(4,2)= -0.2108D0
       Y(4,3)= -0.1032D0
       Y(4,4)= -0.0499D0
       Y(4,5)= -0.0484D0
       Y(4,6)= -0.7732D0


C EXAKTE RANDWERTE-----------------------------
       Y(1,1)= 1.0D0
       Y(2,1)= 0.0D0
       Y(1,M)= 1.0D0
       Y(2,M)= 0.0D0
       Y(5,1)= 0.0D0
```

```
C STARTSCHAETZUNG DER SCHALTPUNKTE
       XS(1) = 0.4D0
       XS(2) = 0.5D0
       XS(3) = 0.65D0

      CALL BDSCO(F,R,RKF7,X,XS,Y,N,M,MS,KS,TOL,ITMAX,KP)
      CALL DATEN(X,Y,XS,N,M,MS,NDISKRET,TOL,ISCHALT)
      STOP
      END

      SUBROUTINE F(X,Y,DY)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X,Y(9),DY(9)
      INTEGER US(15,4)
      COMMON /CI/J,L,LS,US

      IF ((US(J,1).EQ.1).AND.(US(J,2).EQ.-1)) THEN
         U1= -Y(3)
         U2= -Y(4)
         V1= 0.0D0
         V2= 0.0D0
      ENDIF
      IF (US(J,1).EQ.-1) THEN
         U1= 0.5D0*(1.6D0-Y(1)-Y(3)+Y(4))
         U2= 0.5D0*(1.6D0-Y(1)+Y(3)-Y(4))
         V1= 0.5D0*(Y(1)-1.6D0-Y(3)-Y(4))
         V2= 0.0D0
      ENDIF
      IF ((US(J,2).EQ.1).AND.(US(J,3).EQ.-1)) THEN
         U1= -Y(2)
         U2= -Y(4)
         V1= 0.0D0
         V2= Y(4)+4.0D0*Y(1)
      ENDIF
      IF (US(J,3).EQ.1) THEN
         U1= -Y(3)
         U2= -Y(4)
         V1= 0.0D0
         V2= 0.0D0
      ENDIF

      DY(1)= Y(2)+U1
      DY(2)= U2
      DY(3)= 4.0D0*Y(1)-V1-V2
      DY(4)= 4.0D0*Y(2)-Y(3)
      DY(5)= 0.5D0*(U1*U1+U2*U2-4D0*(Y(1)*Y(1)+Y(2)*Y(2)))
      RETURN
      END

      SUBROUTINE R(YA,YB,ZZ,W,NYA,NSK)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
```

```
      REAL*8 YA(5),YB(5),ZZ(5),W(8),Z0,RR
      INTEGER US(15,4),NYA(5),NSK(8),J,L,LS
      COMMON /CI/J,L,LS,US

C  ANFANGSBEDINGUNGEN
      W(1)=YA(1)-1.0D0
      W(2)=YA(2)
      W(3)=YA(5)

      NYA(1)=1
      NYA(2)=2
      NYA(5)=3

C ENDBEDINGUNGEN
      W(4)=YB(1)-1.0D0
      W(5)=YB(2)

C SCHALTBEDINGUNGEN
      W(6)= ZZ(1)-ZZ(3)-ZZ(4)-1.6D0
      W(7)= ZZ(1)-1.15D0
      W(8)= ZZ(2)-ZZ(3)

      NSK(6)=1
      NSK(7)=2
      NSK(8)=3
      RETURN
      END
```

A.27 k4_3c115.out

```
 SOLUTION OBTAINED AFTER 17    ITERATION STEPS

 SOLUTION DATA

    0.00000000     1.00000000     0.00000000    -1.27117181    -0.16710109
                    0.00000000
    0.10000000     1.07552055    -0.02057617    -0.88710887    -0.06321970
                   -0.18454693
    0.19812945     1.12913295    -0.02803748    -0.46425172    -0.00661533
                   -0.40735948
    0.20000000     1.12994102    -0.02802571    -0.45580028    -0.00596457
                   -0.41193756
    0.29346813     1.15000000    -0.02835002    -0.02835002     0.00621706
                   -0.65297831
    0.30000000     1.15000000    -0.02838881    -0.02838881     0.00566114
                   -0.67026288
    0.40000000     1.15000000    -0.02852733    -0.02852733    -0.00289769
                   -0.93488457
```

```
0.50000000    1.15000000   -0.02781217   -0.02781217   -0.01136981
             -1.19950135
0.60000000    1.15000000   -0.02626472   -0.02626472   -0.01950168
             -1.46409934
0.70000000    1.15000000   -0.02393130   -0.02393130   -0.02704996
             -1.72866691
0.73999671    1.15000000   -0.02279285   -0.02279285   -0.02985430
             -1.83447477
0.80000000    1.14178758   -0.02071746    0.25256480   -0.04199380
             -1.99186311
0.90000000    1.09216456   -0.01412080    0.70082867   -0.09698019
             -2.23063527
1.00000000    1.00000000    0.00000000    1.12061491   -0.19149949
             -2.40754789

SWITCHING POINTS


0.19812945    0.29346813    0.73999671
```

A.28 k4_5.for

```
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X(15),Y(15,15),XS(4),X1(15)
      INTEGER US(15,4)
      EXTERNAL F,R,RKF7
      COMMON /CI/J,L,LS,US

      NDISKRET=101
      ISCHALT=0
      N=3
      M=11
      MS=0
      TOL=1.0D-12
      MAXITER=300
      ITMAX=500
      KP=0
      KS=0

C AEQUIDISTANTE Mehrzielknoten---------------
      DO 100 I=1,M
        X(I)= 0.0D0 + 1.0D0/(M-1)*(I-1)
100   CONTINUE

C STARTSCHAETZUNG DER TRAJEKTORIEN : keine


C EXAKTE RANDWERTE-----------------------------
       Y(1,1)= -1D1
```

```
       Y(2,1)= 0D0
       Y(3,1)= -1D1

C STARTSCHAETZUNG DER SCHALTPUNKTE

      CALL BDSCO(F,R,RKF7,X,XS,Y,N,M,MS,KS,TOL,ITMAX,KP)
      CALL DATEN(X,Y,XS,N,M,MS,NDISKRET,TOL,ISCHALT)
      STOP
      END

      SUBROUTINE F(X,Y,DY)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X,Y(9),DY(9)
      INTEGER US(15,4)
      COMMON /CI/J,L,LS,US
      DY(1)= Y(1)*Y(1)+Y(2)*Y(2)+4
      DY(2)= Y(1)*Y(2)+Y(2)*Y(3)-Y(1)
      DY(3)= Y(2)*Y(2)+Y(3)*Y(3)-2D0*Y(2)+4
      RETURN
      END

      SUBROUTINE R(YA,YB,ZZ,W,NYA,NSK)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 YA(3),YB(3),ZZ(3),W(3),Z0,RR
      INTEGER US(15,4),NYA(3),NSK(3),J,L,LS
      COMMON /CI/J,L,LS,US

C  ANFANGSBEDINGUNGEN
      W(1)=YA(1)+1D1
      W(2)=YA(2)+0D0
      W(3)=YA(3)+1D1

C ENDBEDINGUNGEN : keine

C SCHALTBEDINGUNGEN

      RETURN
      END
```

A.29 k4_5.out

```
    SOLUTION OBTAINED AFTER 13    ITERATION STEPS

    SOLUTION DATA

        0.00000000   -10.00000000     0.00000000   -10.00000000
        0.10000000    -4.75982793     0.37121712    -4.79328196
        0.20000000    -2.92481926     0.43717265    -3.00069610
```

0.30000000	-1.92695777	0.45741170	-2.04596830
0.40000000	-1.25448202	0.46318756	-1.41960871
0.50000000	-0.73367921	0.46166714	-0.95065287
0.60000000	-0.28540849	0.45450264	-0.56349790
0.70000000	0.13672239	0.44108048	-0.21700602
0.80000000	0.56913351	0.41882678	0.11656636
0.90000000	1.05193080	0.38201749	0.46156604
1.00000000	1.64585826	0.31800700	0.84684042

A.30 k4_6a.for

```
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X(15),Y(15,15),XS(4),X1(15)
      INTEGER US(15,4)
      EXTERNAL F,R,RKF7
      COMMON /CI/J,L,LS,US

      NDISKRET=101
      ISCHALT=1
      N=10
      M=11
      MS=3
      TOL=1.0D-12
      MAXITER=300
      ITMAX=500
      KP=0
      KS=1

C AEQUIDISTANTE Mehrzielknoten---------------
      DO 100 I=1,M
        X(I)= 0.0D0 + 1.0D0/(M-1)*(I-1)
100   CONTINUE

C STARTSCHAETZUNG DER TRAJEKTORIEN-------------

C  Die Ergebnisse aus k4_3c125.out dienen als
C  Startschaetzungen:

        Y(1,2)=1.096D0
        Y(1,3)=1.171D0
        Y(1,4)=1.224D0
        Y(1,5)=1.249D0
        Y(1,6)=1.25D0
        Y(1,7)=1.25D0
        Y(1,8)=1.248D0
        Y(1,9)=1.210D0
        Y(1,10)= 1.126D0
        Y(2,2)= -0.04307D0
        Y(2,3)= -0.07834D0
```

```
       Y(2,4)= -0.09942D0
       Y(2,5)= -0.1011D0
       Y(2,6)= -0.09482D0
       Y(2,7)= -0.08571D0
       Y(2,8)= -0.07401D0
       Y(2,9)= -0.05844D0
       Y(2,10)= -0.03501D0
       Y(3,1)= -1.868D0
       Y(3,2)= -1.52D0
       Y(3,3)= -1.116D0
       Y(3,4)= -0.665D0
       Y(3,5)= -0.175D0
       Y(3,6)= -0.0948D0
       Y(3,7)= -0.0857D0
       Y(3,8)= 0.06331D0
       Y(3,9)= 0.5566D0
       Y(3,10)= 1.025D0
       Y(3,11)= 1.452D0
       Y(4,1)= -0.3719D0
       Y(4,2)= -0.2108D0
       Y(4,3)= -0.1032D0
       Y(4,4)= -0.0499D0
       Y(4,5)= -0.0484D0
       Y(4,6)= -0.07732D0
       Y(4,7)= -0.1045D0
       Y(4,8)= -0.1304D0
       Y(4,9)= -0.1882D0
       Y(4,10)= -0.2866D0
       Y(4,11)= -0.4183D0

C EXAKTE RANDWERTE
       Y(1,1)= 1.0D0
       Y(2,1)= 0.0D0
       Y(1,M)= 1.0D0
       Y(2,M)= 0.0D0
       Y(5,1)= 0.0D0
       Y(5,M)= 0.0D0
       Y(6,1)= 0.0D0
       Y(6,M)= 0.0D0

C STARTSCHAETZUNG DER SCHALTPUNKTE
       XS(1) = 0.373D0
       XS(2) = 0.415D0
       XS(3) = 0.672D0

      CALL BDSCO(F,R,RKF7,X,XS,Y,N,M,MS,KS,TOL,ITMAX,KP)
      DWDA1 = Y(2,5)-4D0*(Y(1,5)+Y(2,5))
      DWDA2 = -Y(4,7)-4D0*Y(1,7)
      DWDA3 = -Y(4,10)-4D0*Y(1,10)
      DT1DA = -(Y(5,5)-Y(7,5)-Y(8,5))/DWDA1
      DT2DA = -(Y(6,7)-Y(7,7)-Y(9,7))/DWDA2
      DT3DA = -(Y(6,10)-Y(7,10))/DWDA3
```

```
WRITE(7,*)
WRITE(7,*)
WRITE(7,*) X(5),'  DWDA1:',DWDA1
WRITE(7,*) X(7),'  DWDA2:',DWDA2
WRITE(7,*) X(10),'  DWDA3:',DWDA3
WRITE(7,*)
WRITE(7,*) X(5),'  DT1DA:',DT1DA
WRITE(7,*) X(7),'  DT2DA:',DT2DA
WRITE(7,*) X(10),'  DT3DA:',DT3DA
CALL DATEN(X,Y,XS,N,M,MS,NDISKRET,TOL,ISCHALT)
STOP
END




SUBROUTINE F(X,Y,DY)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
REAL*8 X,Y(10),DY(10)
INTEGER US(15,4)
COMMON /CI/J,L,LS,US
IF ((US(J,1).EQ.1).AND.(US(J,2).EQ.-1)) THEN
   U1= -Y(3)
   U2= -Y(4)
   U3= -Y(7)
   U4= -Y(8)
   V1= 0.0D0
   V2= 0.0D0
   V3= 0.0D0
   V4= 0.0D0
ENDIF
IF (US(J,1).EQ.-1) THEN
   U1= 0.5D0*(1.6D0-Y(1)-Y(3)+Y(4))
   U2= 0.5D0*(1.6D0-Y(1)+Y(3)-Y(4))
   U3= 0.5D0*(-Y(5)-Y(7)+Y(8))
   U4= 0.5D0*(-Y(5)+Y(7)-Y(8))
   V1= 0.5D0*(Y(1)-1.6D0-Y(3)-Y(4))
   V2= 0.0D0
   V3= 0.5D0*(Y(5)-Y(7)-Y(8))
   V4= 0.0D0
ENDIF
IF ((US(J,2).EQ.1).AND.(US(J,3).EQ.-1)) THEN
   U1= -Y(2)
   U2= -Y(4)
   U3= -Y(6)
   U4= -Y(8)
   V1= 0.0D0
   V2= 4.0D0*Y(1)+Y(4)
   V3= 0.0D0
   V4= 4.0D0*Y(5)+Y(8)
ENDIF
IF (US(J,3).EQ.1) THEN
```

```
         U1= -Y(3)
         U2= -Y(4)
         U3= -Y(7)
         U4= -Y(8)
         V1= 0.0D0
         V2= 0.0D0
         V3= 0.0D0
         V4= 0.0D0
      ENDIF

      DY(1)= Y(2)+U1
      DY(2)= U2
      DY(3)= 4.0D0*Y(1)-V1-V2
      DY(4)= 4.0D0*Y(2)-Y(3)
      DY(5)= Y(6)+U3
      DY(6)= U4
      DY(7)= 4.0D0*Y(5)-V3-V4
      DY(8)= 4.0D0*Y(6)-Y(7)
C        DY(9),DY(10) fuer Spruenge in Y(7) (d.h. eta1)
      DY(9)= 0.0D0
      DY(10)= 0.0D0
      RETURN
      END

      SUBROUTINE R(YA,YB,ZZ,W,NYA,NSK)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 YA(10),YB(10),ZZ(10),W(13),Z0,RR
      INTEGER US(15,4),NYA(10),NSK(13),J,L,LS
      COMMON /CI/J,L,LS,US

C  ANFANGSBEDINGUNGEN
      W(1)=YA(1)-1.0D0
      W(2)=YA(2)
      W(3)=YA(5)
      W(4)=YA(6)

      NYA(1)=1
      NYA(2)=2
      NYA(5)=3
      NYA(6)=4

C ENDBEDINGUNGEN
      W(5)=YB(1)-1.0D0
      W(6)=YB(2)
      W(7)=YB(5)
      W(8)=YB(6)

C SCHALTBEDINGUNGEN
      W(9)= ZZ(1)-1.25D0
      W(10)= ZZ(1)-ZZ(3)-ZZ(4)-1.6D0
      W(11)= ZZ(2)-ZZ(3)
      W(12)= ZZ(5)-1.0D0
```

```
W(13)= ZZ(6)-ZZ(7)
NSK(9)=2
NSK(10)=1
NSK(11)=3
NSK(12)=2
NSK(13)=3
IF (LS.EQ.2) ZZ(7)=ZZ(7)-ZZ(9)
IF (LS.EQ.3) ZZ(7)=ZZ(7)-ZZ(10)
RETURN
END
```

A.31 k4_6a.out

```
SOLUTION OBTAINED AFTER  6    ITERATION STEPS

SOLUTION DATA

    0.00000000     1.00000000     0.00000000    -1.86793233    -0.37190676
                    0.00000000     0.00000000    -6.29779001    -2.80841401
                   -6.30205939    -2.93025387
    0.10000000     1.09592524    -0.04306660    -1.51989910    -0.21078789
                    0.18639609    -0.20529195    -6.71641697    -2.19610652
                   -6.30205939    -2.93025387
    0.20000000     1.17148238    -0.07834084    -1.11619900    -0.10319855
                    0.38789465    -0.46867558    -7.05642055    -1.63974838
                   -6.30205939    -2.93025387
    0.30000000     1.22356914    -0.09941780    -0.66465314    -0.04992252
                    0.59100794    -0.78297102    -7.31438238    -1.16930216
                   -6.30205939    -2.93025387
    0.37291770     1.24562281    -0.10233854    -0.31040581    -0.04397138
                    0.73240994    -1.03898085    -7.45207820    -0.89589980
                   -6.30205939    -2.93025387
    0.40000000     1.24944479    -0.10109548    -0.17522871    -0.04841440
                    0.90524992    -1.01592790    -7.36335894    -0.80652092
                   -6.30205939    -2.93025387
    0.41497959     1.25000000    -0.10034186    -0.10034186    -0.05238559
                    1.00000000    -1.00421645    -1.00421645    -0.75715946
                   -6.30205939    -2.93025387
    0.50000000     1.25000000    -0.09481808    -0.09481808    -0.07731953
                    1.00000000    -0.92920609    -0.92920609    -1.00417659
                   -6.30205939    -2.93025387
    0.60000000     1.25000000    -0.08570601    -0.08570601    -0.10446605
                    1.00000000    -0.81538648    -0.81538648    -1.26652166
                   -6.30205939    -2.93025387
    0.67181105     1.25000000    -0.07756142    -0.07756142    -0.12207536
                    1.00000000    -0.71837147     2.21188240    -1.43194614
                   -6.30205939    -2.93025387
    0.70000000     1.24806346    -0.07401098     0.06331052    -0.13042256
```

```
                  0.91644187    -0.67599325    2.31994476    -1.57449111
                 -6.30205939    -2.93025387
   0.80000000     1.21027260    -0.05843823    0.55657133    -0.18822547
                  0.60924182    -0.49399646    2.62549338    -2.05840070
                 -6.30205939    -2.93025387
   0.90000000     1.12614190    -0.03500898    1.02533990    -0.28661954
                  0.29822053    -0.26624171    2.80683062    -2.48452426
                 -6.30205939    -2.93025387
   1.00000000     1.00000000     0.00000000    1.45187439    -0.41834252
                  0.00000000     0.00000000    2.86578274    -2.82352962
                 -6.30205939    -2.93025387

 SWITCHING POINTS


   0.37291770     0.41497959     0.67181105


  0.37291769567520011  DWDA1:     -4.67547562215353185
  0.41497958758354481  DWDA2:     -4.94761441061544005
  0.67181105099115201  DWDA3:     -4.87792463784364916

  0.37291769567520011  DT1DA:      1.94213138303684940
  0.41497958758354481  DT2DA:      1.27375718147269512
  0.67181105099115201  DT3DA:     -0.60071733208852962
```

A.32 k4_6b.for

```
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X(15),Y(15,15),XS(4),X1(15)
      INTEGER US(15,4)
      EXTERNAL F,R,RKF7
      COMMON /CI/J,L,LS,US

      NDISKRET=101
      ISCHALT=1
      N=10
      M=11
      MS=3
      TOL=1.0D-12
      MAXITER=300
      ITMAX=500
      KP=0
      KS=1

C AEQUIDISTANTE Mehrzielknoten---------------
      DO 100 I=1,M
        X(I)= 0.0D0 + 1.0D0/(M-1)*(I-1)
100   CONTINUE
```

```
C STARTSCHAETZUNG DER TRAJEKTORIEN-------------
C  Von k4_6a.for uebernommen.

        Y(1,2)=1.096D0
        Y(1,3)=1.171D0
        Y(1,4)=1.224D0
        Y(1,5)=1.249D0
        Y(1,6)=1.25D0
        Y(1,7)=1.25D0
        Y(1,8)=1.248D0
        Y(1,9)=1.210D0
        Y(1,10)= 1.126D0
        Y(2,2)= -0.04307D0
        Y(2,3)= -0.07834D0
        Y(2,4)= -0.09942D0
        Y(2,5)= -0.1011D0
        Y(2,6)= -0.09482D0
        Y(2,7)= -0.08571D0
        Y(2,8)= -0.07401D0
        Y(2,9)= -0.05844D0
        Y(2,10)= -0.03501D0
        Y(3,1)= -1.868D0
        Y(3,2)= -1.52D0
        Y(3,3)= -1.116D0
        Y(3,4)= -0.665D0
        Y(3,5)= -0.175D0
        Y(3,6)= -0.0948D0
        Y(3,7)= -0.0857D0
        Y(3,8)= 0.06331D0
        Y(3,9)= 0.5566D0
        Y(3,10)= 1.025D0
        Y(3,11)= 1.452D0
        Y(4,1)= -0.3719D0
        Y(4,2)= -0.2108D0
        Y(4,3)= -0.1032D0
        Y(4,4)= -0.0499D0
        Y(4,5)= -0.0484D0
        Y(4,6)= -0.07732D0
        Y(4,7)= -0.1045D0
        Y(4,8)= -0.1304D0
        Y(4,9)= -0.1882D0
        Y(4,10)= -0.2866D0
        Y(4,11)= -0.4183D0

C EXAKTE RANDWERTE
       Y(1,1)= 1.0D0
       Y(2,1)= 0.0D0
       Y(1,M)= 1.0D0
       Y(2,M)= 0.0D0
       Y(5,1)= 0.0D0
       Y(5,M)= 0.0D0
```

```
      Y(6,1)= 0.0D0
      Y(6,M)= 0.0D0

C STARTSCHAETZUNG DER SCHALTPUNKTE
      XS(1) = 0.373D0
      XS(2) = 0.415D0
      XS(3) = 0.672D0

      CALL BDSCO(F,R,RKF7,X,XS,Y,N,M,MS,KS,TOL,ITMAX,KP)
      HILF11 = 0.5D0*(1.6D0-Y(1,7)+Y(3,7)-Y(4,7))
      HILF21 = 0.5D0*(1.6D0-Y(1,7)-Y(3,7)+Y(4,7))
      HILF31 = 0.5D0*(Y(1,7)-1.6D0-Y(3,7)-Y(4,7))
      HILF12 = 0.5D0*(1.6D0-Y(1,8)+Y(3,8)-Y(4,8))
      HILF22 = 0.5D0*(1.6D0-Y(1,8)-Y(3,8)+Y(4,8))
      HILF32 = 0.5D0*(Y(1,8)-1.6D0-Y(3,8)-Y(4,8))
      DWDA1 = HILF11+0.5D0*(-Y(2,7)-HILF21-4D0*Y(1,7)+HILF31+4D0*
     F        Y(2,7)-Y(3,7))
      DWDA2 = HILF12+0.5D0*(-Y(2,8)-HILF22-4D0*Y(1,8)+HILF32+4D0*
     F        Y(2,8)-Y(3,8))
      DWDA3 = Y(2,10)-4D0*(Y(1,10)+Y(2,10))
      DT3DA = -(Y(5,10)-Y(7,10)-Y(8,10))/DWDA3
      DT1DA = -(Y(6,7)+0.5D0*(-Y(5,7)-Y(7,7)-Y(9,7)+Y(8,7)))/DWDA1
      DT2DA = -(Y(6,8)+0.5D0*(-Y(5,8)-Y(7,8)+Y(8,8)))/DWDA2
      WRITE(7,*)
      WRITE(7,*)
      WRITE(7,*) X(7),'  DWDA1:',DWDA1
      WRITE(7,*) X(8),'  DWDA2:',DWDA2
      WRITE(7,*) X(10),'  DWDA3:',DWDA3
      WRITE(7,*)
      WRITE(7,*) X(7),'  DT1DA:',DT1DA
      WRITE(7,*) X(8),'  DT2DA:',DT2DA
      WRITE(7,*) X(10),'  DT3DA:',DT3DA
      CALL DATEN(X,Y,XS,N,M,MS,NDISKRET,TOL,ISCHALT)
      STOP
      END




      SUBROUTINE F(X,Y,DY)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X,Y(10),DY(10)
      INTEGER US(15,4)
      COMMON /CI/J,L,LS,US

      IF ((US(J,1).EQ.1).AND.(US(J,2).EQ.-1)) THEN
         U1= -Y(2)
         U2= Y(2)-Y(1)+1.6D0
         U3= -Y(6)
         U4= Y(6)-Y(5)
         V1= Y(2)-Y(3)
```

```fortran
         V2= 6D0*Y(1)-7D0*Y(2)+2D0*Y(3)-3.2D0
         V3= Y(6)-Y(7)
         V4= 6D0*Y(5)-7D0*Y(6)+2D0*Y(7)
      ENDIF
      IF (US(J,1).EQ.-1) THEN
         U1= 0.5D0*(1.6D0-Y(1)-Y(3)+Y(4))
         U2= 0.5D0*(1.6D0-Y(1)+Y(3)-Y(4))
         U3= 0.5D0*(-Y(5)-Y(7)+Y(8))
         U4= 0.5D0*(-Y(5)+Y(7)-Y(8))
         V1= 0.5D0*(Y(1)-1.6D0-Y(3)-Y(4))
         V2= 0.0D0
         V3= 0.5D0*(Y(5)-Y(7)-Y(8))
         V4= 0.0D0
      ENDIF
      IF ((US(J,2).EQ.1).AND.(US(J,3).EQ.-1)) THEN
         U1= 0.5D0*(1.6D0-Y(1)-Y(3)+Y(4))
         U2= 0.5D0*(1.6D0-Y(1)+Y(3)-Y(4))
         U3= 0.5D0*(-Y(5)-Y(7)+Y(8))
         U4= 0.5D0*(-Y(5)+Y(7)-Y(8))
         V1= 0.5D0*(Y(1)-1.6D0-Y(3)-Y(4))
         V2= 0.0D0
         V3= 0.5D0*(Y(5)-Y(7)-Y(8))
         V4= 0.0D0
      ENDIF
      IF (US(J,3).EQ.1) THEN
         U1= -Y(3)
         U2= -Y(4)
         U3= -Y(7)
         U4= -Y(8)
         V1= 0.0D0
         V2= 0.0D0
         V3= 0.0D0
         V4= 0.0D0
      ENDIF

      DY(1)= Y(2)+U1
      DY(2)= U2
      DY(3)= 4.0D0*Y(1)-V1-V2
      DY(4)= 4.0D0*Y(2)-Y(3)
      DY(5)= Y(6)+U3
      DY(6)= U4
      DY(7)= 4.0D0*Y(5)-V3-V4
      DY(8)= 4.0D0*Y(6)-Y(7)
C        DY(9),DY(10) fuer Spruenge von Y(7) in t1 bzw. t2
      DY(9)= 0.0D0
      DY(10)= 0.0D0
      RETURN
      END

      SUBROUTINE R(YA,YB,ZZ,W,NYA,NSK)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 YA(10),YB(10),ZZ(10),W(13),Z0,RR
```

```
      INTEGER US(15,4),NYA(10),NSK(13),J,L,LS
      COMMON /CI/J,L,LS,US

C  ANFANGSBEDINGUNGEN
      W(1)=YA(1)-1.0D0
      W(2)=YA(2)
      W(3)=YA(5)
      W(4)=YA(6)

      NYA(1)=1
      NYA(2)=2
      NYA(5)=3
      NYA(6)=4

C ENDBEDINGUNGEN
      W(5)=YB(1)-1.0D0
      W(6)=YB(2)
      W(7)=YB(5)
      W(8)=YB(6)

C SCHALTBEDINGUNGEN
      W(9)= ZZ(1)-1.325D0
      W(10)= ZZ(1)-ZZ(3)-ZZ(4)-1.6D0
      W(11)= ZZ(2)+0.5D0*(1.6D0-ZZ(1)-ZZ(3)+ZZ(4))
      W(12)= ZZ(5)-1.0D0
      W(13)= ZZ(6)+0.5D0*(-ZZ(5)-ZZ(7)+ZZ(8))
      NSK(9)=1
      NSK(10)=3
      NSK(11)=2
      NSK(12)=1
      NSK(13)=2
      IF (LS.EQ.1) ZZ(7)=ZZ(7)-ZZ(9)
      IF (LS.EQ.2) ZZ(7)=ZZ(7)-ZZ(10)
      RETURN
      END
```

A.33 k4_6b.out

```
    SOLUTION OBTAINED AFTER 12    ITERATION STEPS

    SOLUTION DATA

        0.00000000     1.00000000     0.00000000    -2.45265734    -0.77433927
                        0.00000000     0.00000000    -8.96863413    -7.76671176
                       -5.07573163    -8.45440070
        0.10000000     1.10689424    -0.05510781    -2.15189928    -0.55456061
                        0.09694330    -0.10571337    -9.78834408    -6.84661671
                       -5.07573163    -8.45440070
```

```
 0.20000000    1.19644705   -0.10820148   -1.79040958   -0.38980489
                0.25858791   -0.30438229  -10.55551727   -5.90778383
               -5.07573163   -8.45440070
 0.30000000    1.26444189   -0.15257447   -1.37500686   -0.28367570
                0.46939571   -0.59548664  -11.24706952   -4.99389044
               -5.07573163   -8.45440070
 0.40000000    1.30780549   -0.18162962   -0.91427274   -0.23633126
                0.71171750   -0.97447380  -11.84698307   -4.14955721
               -5.07573163   -8.45440070
 0.50000000    1.32476924   -0.18919000   -0.41802269   -0.24444029
                0.96665680   -1.43306397  -12.34726483   -3.41803168
               -5.07573163   -8.45440070
 0.51311012    1.32500000   -0.18828939   -0.35087808   -0.24929930
                1.00000000   -1.49851427   -7.32966482   -3.33263628
               -5.07573163   -8.45440070
 0.59162674    1.32500000   -0.18120675   -0.36655542   -0.27914192
                1.00000000   -1.70259625    0.80201718   -3.24719103
               -5.07573163   -8.45440070
 0.60000000    1.32490741   -0.18032499   -0.32364675   -0.28230712
                0.96456053   -1.68958388    0.82047329   -3.31079326
               -5.07573163   -8.45440070
 0.66941809    1.31706459   -0.16526308    0.03770048   -0.32063589
                0.66865862   -1.56347796    0.92557400   -3.82427242
               -5.07573163   -8.45440070
 0.70000000    1.30855200   -0.15511181    0.19834015   -0.34385043
                0.59315729   -1.44322865    1.00273805   -4.03774992
               -5.07573163   -8.45440070
 0.80000000    1.24922339   -0.11601211    0.71147660   -0.44409851
                0.35955260   -1.00802005    1.19246033   -4.64055031
               -5.07573163   -8.45440070
 0.90000000    1.14454510   -0.06522378    1.19166273   -0.57629307
                0.15772242   -0.52081305    1.29462999   -5.07278710
               -5.07573163   -8.45440070
 1.00000000    1.00000000    0.00000000    1.62178900   -0.73100902
                0.00000000    0.00000000    1.32453588   -5.30922323
               -5.07573163   -8.45440070

SWITCHING POINTS


 0.51311012    0.59162674    0.66941809


 0.51311011650118543  DWDA1:     -2.68313478236576541
 0.59162673677475075  DWDA2:     -2.64266820530581148
 0.66941808838166916  DWDA3:     -4.77246909320933188

 0.51311011650118543  DT1DA:      0.94585849015321965
 0.59162673677475075  DT2DA:     -1.59959556796984237
 0.66941808838166916  DT3DA:      0.74748667164717508
```

A.34 k4_7a.for

```
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X(15),Y(15,15),XS(4),X1(15)
      INTEGER US(15,4)
      EXTERNAL F,R,RKF7
      COMMON /CI/J,L,LS,US

      NDISKRET=101
      ISCHALT=1
      N=10
      M=11
      MS=3
      TOL=1.0D-12
      MAXITER=300
      ITMAX=500
      KP=0
      KS=1

C AEQUIDISTANTE Mehrzielknoten---------------
      DO 100 I=1,M
        X(I)= 0.0D0 + 1.0D0/(M-1)*(I-1)
100   CONTINUE

C STARTSCHAETZUNG DER TRAJEKTORIEN-------------
C Aus k4_6a.for uebernommen.

        Y(1,2)=1.096D0
        Y(1,3)=1.171D0
        Y(1,4)=1.224D0
        Y(1,5)=1.249D0
        Y(1,6)=1.25D0
        Y(1,7)=1.25D0
        Y(1,8)=1.248D0
        Y(1,9)=1.210D0
        Y(1,10)= 1.126D0
        Y(2,2)= -0.04307D0
        Y(2,3)= -0.07834D0
        Y(2,4)= -0.09942D0
        Y(2,5)= -0.1011D0
        Y(2,6)= -0.09482D0
        Y(2,7)= -0.08571D0
        Y(2,8)= -0.07401D0
        Y(2,9)= -0.05844D0
        Y(2,10)= -0.03501D0
        Y(3,1)= -1.868D0
        Y(3,2)= -1.52D0
        Y(3,3)= -1.116D0
        Y(3,4)= -0.665D0
        Y(3,5)= -0.175D0
        Y(3,6)= -0.0948D0
```

```
        Y(3,7)= -0.0857D0
        Y(3,8)= 0.06331D0
        Y(3,9)= 0.5566D0
        Y(3,10)= 1.025D0
        Y(3,11)= 1.452D0
        Y(4,1)= -0.3719D0
        Y(4,2)= -0.2108D0
        Y(4,3)= -0.1032D0
        Y(4,4)= -0.0499D0
        Y(4,5)= -0.0484D0
        Y(4,6)= -0.07732D0
        Y(4,7)= -0.1045D0
        Y(4,8)= -0.1304D0
        Y(4,9)= -0.1882D0
        Y(4,10)= -0.2866D0
        Y(4,11)= -0.4183D0

C EXAKTE RANDWERTE
       Y(1,1)= 1.0D0
       Y(2,1)= 0.0D0
       Y(1,M)= 1.0D0
       Y(2,M)= 0.0D0
       Y(5,1)= 0.0D0
       Y(5,M)= 0.0D0
       Y(6,1)= 0.0D0
       Y(6,M)= 0.0D0

C STARTSCHAETZUNG DER SCHALTPUNKTE
       XS(1) = 0.373D0
       XS(2) = 0.415D0
       XS(3) = 0.672D0


      CALL BDSCO(F,R,RKF7,X,XS,Y,N,M,MS,KS,TOL,ITMAX,KP)
      DWDP1 = Y(2,5)-4D0*(Y(1,5)+Y(2,5))
      DWDP2 = -Y(4,7)-4D0*Y(1,7)
      DWDP3 = -Y(4,10)-4D0*Y(1,10)
      DT1DP = -(Y(5,5)-Y(7,5)-Y(8,5)-1D0)/DWDP1
      DT2DP = -(Y(6,7)-Y(7,7)-Y(9,7))/DWDP2
      DT3DP = -(Y(6,10)-Y(7,10))/DWDP3
      WRITE(7,*)
      WRITE(7,*)
      WRITE(7,*) X(5),'  DWDP1:',DWDP1
      WRITE(7,*) X(7),'  DWDP2:',DWDP2
      WRITE(7,*) X(10),'  DWDP3:',DWDP3
      WRITE(7,*)
      WRITE(7,*) X(5),'  DT1DP:',DT1DP
      WRITE(7,*) X(7),'  DT2DP:',DT2DP
      WRITE(7,*) X(10),'  DT3DP:',DT3DP
      CALL DATEN(X,Y,XS,N,M,MS,NDISKRET,TOL,ISCHALT)
      STOP
      END
```

```
SUBROUTINE F(X,Y,DY)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
REAL*8 X,Y(10),DY(10)
INTEGER US(15,4)
COMMON /CI/J,L,LS,US
IF ((US(J,1).EQ.1).AND.(US(J,2).EQ.-1)) THEN
   U1= -Y(3)
   U2= -Y(4)
   U3= -Y(7)
   U4= -Y(8)
   V1= 0.0D0
   V2= 0.0D0
   V3= 0.0D0
   V4= 0.0D0
ENDIF
IF (US(J,1).EQ.-1) THEN
   U1= 0.5D0*(1.6D0-Y(1)-Y(3)+Y(4))
   U2= 0.5D0*(1.6D0-Y(1)+Y(3)-Y(4))
   U3= 0.5D0*(1.0D0-Y(5)-Y(7)+Y(8))
   U4= 0.5D0*(1.0D0-Y(5)+Y(7)-Y(8))
   V1= 0.5D0*(Y(1)-1.6D0-Y(3)-Y(4))
   V2= 0.0D0
   V3= 0.5D0*(Y(5)-1.0D0-Y(7)-Y(8))
   V4= 0.0D0
ENDIF
IF ((US(J,2).EQ.1).AND.(US(J,3).EQ.-1)) THEN
   U1= -Y(2)
   U2= -Y(4)
   U3= -Y(6)
   U4= -Y(8)
   V1= 0.0D0
   V2= 4.0D0*Y(1)+Y(4)
   V3= 0.0D0
   V4= 4.0D0*Y(5)+Y(8)
ENDIF
IF (US(J,3).EQ.1) THEN
   U1= -Y(3)
   U2= -Y(4)
   U3= -Y(7)
   U4= -Y(8)
   V1= 0.0D0
   V2= 0.0D0
   V3= 0.0D0
   V4= 0.0D0
ENDIF

DY(1)= Y(2)+U1
DY(2)= U2
```

```
      DY(3)= 4.0D0*Y(1)-V1-V2
      DY(4)= 4.0D0*Y(2)-Y(3)
      DY(5)= Y(6)+U3
      DY(6)= U4
      DY(7)= 4.0D0*Y(5)-V3-V4
      DY(8)= 4.0D0*Y(6)-Y(7)
C        DY(9),DY(10) fuer Spruenge von Y(7) in t2 bzw. t3
      DY(9)= 0.0D0
      DY(10)= 0.0D0
      RETURN
      END

      SUBROUTINE R(YA,YB,ZZ,W,NYA,NSK)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 YA(10),YB(10),ZZ(10),W(13),Z0,RR
      INTEGER US(15,4),NYA(10),NSK(13),J,L,LS
      COMMON /CI/J,L,LS,US

C  ANFANGSBEDINGUNGEN
      W(1)=YA(1)-1.0D0
      W(2)=YA(2)
      W(3)=YA(5)
      W(4)=YA(6)

      NYA(1)=1
      NYA(2)=2
      NYA(5)=3
      NYA(6)=4

C ENDBEDINGUNGEN
      W(5)=YB(1)-1.0D0
      W(6)=YB(2)
      W(7)=YB(5)
      W(8)=YB(6)

C SCHALTBEDINGUNGEN
      W(9)= ZZ(1)-1.25D0
      W(10)= ZZ(1)-ZZ(3)-ZZ(4)-1.6D0
      W(11)= ZZ(2)-ZZ(3)
      W(12)= ZZ(5)
      W(13)= ZZ(6)-ZZ(7)
      NSK(9)=2
      NSK(10)=1
      NSK(11)=3
      NSK(12)=2
      NSK(13)=3
      IF (LS.EQ.2) ZZ(7)=ZZ(7)-ZZ(9)
      IF (LS.EQ.3) ZZ(7)=ZZ(7)-ZZ(10)
      RETURN
      END
```

A.35 k4_7a.out

```
SOLUTION OBTAINED AFTER  6    ITERATION STEPS

SOLUTION DATA

    0.00000000     1.00000000     0.00000000    -1.86793233    -0.37190676
                    0.00000000     0.00000000     1.19500464     0.68970927
                    1.45787463     0.11127279
    0.10000000     1.09592524    -0.04306660    -1.51989910    -0.21078789
                    0.02159762     0.08123518     1.34403120     0.57868563
                    1.45787463     0.11127279
    0.20000000     1.17148238    -0.07834084    -1.11619900    -0.10319855
                    0.03820182     0.17428643     1.50229020     0.48716121
                    1.45787463     0.11127279
    0.30000000     1.22356914    -0.09941780    -0.66465314    -0.04992252
                    0.05178462     0.27874639     1.66990794     0.41886807
                    1.45787463     0.11127279
    0.37291770     1.24562281    -0.10233854    -0.31040581    -0.04397138
                    0.06091704     0.36173912     1.79858508     0.38571624
                    1.45787463     0.11127279
    0.40000000     1.24944479    -0.10109548    -0.17522871    -0.04841440
                    0.02179342     0.35142774     1.80306868     0.37556205
                    1.45787463     0.11127279
    0.41497959     1.25000000    -0.10034186    -0.10034186    -0.05238559
                    0.00000000     0.34584743     0.34584743     0.36943563
                    1.45787463     0.11127279
    0.50000000     1.25000000    -0.09481808    -0.09481808    -0.07731953
                    0.00000000     0.31080811     0.31080811     0.45333098
                    1.45787463     0.11127279
    0.60000000     1.25000000    -0.08570601    -0.08570601    -0.10446605
                    0.00000000     0.26105086     0.26105086     0.53932492
                    1.45787463     0.11127279
    0.67181105     1.25000000    -0.07756142    -0.07756142    -0.12207536
                    0.00000000     0.22040447     0.10913168     0.59125260
                    1.45787463     0.11127279
    0.70000000     1.24806346    -0.07401098     0.06331052    -0.13042256
                    0.00289733     0.20343968     0.10929956     0.61207565
                    1.45787463     0.11127279
    0.80000000     1.21027260    -0.05843823     0.55657133    -0.18822547
                    0.00903408     0.13913206     0.11190920     0.66974243
                    1.45787463     0.11127279
    0.90000000     1.12614190    -0.03500898     1.02533990    -0.28661954
                    0.00815809     0.07039395     0.11558934     0.70037197
                    1.45787463     0.11127279
    1.00000000     1.00000000     0.00000000     1.45187439    -0.41834252
                    0.00000000     0.00000000     0.11746216     0.70277898
                    1.45787463     0.11127279

SWITCHING POINTS
```

```
 0.37291770     0.41497959     0.67181105


0.37291769567520078  DWDP1:     -4.67547562215353274
0.41497958758354531  DWDP2:     -4.94761441061544094
0.67181105099115190  DWDP3:     -4.87792463784364916

0.37291769567520078  DT1DP:     -0.66803562386214965
0.41497958758354531  DT2DP:     -0.29466213516030587
0.67181105099115190  DT3DP:  2.28115014750254232E-02
```

A.36 k4_7b.for

```
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 X(15),Y(15,15),XS(4),X1(15)
      INTEGER US(15,4)
      EXTERNAL F,R,RKF7
      COMMON /CI/J,L,LS,US

      NDISKRET=101
      ISCHALT=1
      N=10
      M=11
      MS=3
      TOL=1.0D-12
      MAXITER=300
      ITMAX=500
      KP=0
      KS=1

C AEQUIDISTANTE Mehrzielknoten---------------
      DO 100 I=1,M
        X(I)= 0.0D0 + 1.0D0/(M-1)*(I-1)
100   CONTINUE

C STARTSCHAETZUNG DER TRAJEKTORIEN-------------
C   (Anhand der Ergebnisse aus k4_3a.out)

        Y(1,2)=1.107D0
        Y(1,3)=1.196D0
        Y(1,4)=1.264D0
        Y(1,5)=1.308D0
        Y(1,6)=1.325D0
        Y(1,7)=1.325D0
        Y(1,8)=1.309D0
        Y(1,9)=1.249D0
        Y(1,10)= 1.145D0
```

```
         Y(2,2)= -0.05511D0
         Y(2,3)= -0.10820D0
         Y(2,4)= -0.15257D0
         Y(2,5)= -0.18163D0
         Y(2,6)= -0.18919D0
         Y(2,7)= -0.18032D0
         Y(2,8)= -0.15511D0
         Y(2,9)= -0.11601D0
         Y(2,10)= -0.06522D0
         Y(3,1)= -2.453D0
         Y(3,2)= -2.152D0
         Y(3,3)= -1.790D0
         Y(3,4)= -1.375D0
         Y(3,5)= -0.914D0
         Y(3,6)= -0.418D0
         Y(3,7)= -0.324D0
         Y(3,8)= 0.198D0
         Y(3,9)= 0.711D0
         Y(3,10)= 1.192D0
         Y(3,11)= 1.622D0
         Y(4,1)= -0.774D0
         Y(4,2)= -0.555D0
         Y(4,3)= -0.390D0
         Y(4,4)= -0.284D0
         Y(4,5)= -0.236D0
         Y(4,6)= -0.244D0
         Y(4,7)= -0.282D0
         Y(4,8)= -0.344D0
         Y(4,9)= -0.444D0
         Y(4,10)= -0.576D0
         Y(4,11)= -0.731D0

C EXAKTE RANDWERTE
        Y(1,1)= 1.0D0
        Y(2,1)= 0.0D0
        Y(1,M)= 1.0D0
        Y(2,M)= 0.0D0
        Y(5,1)= 0.0D0
        Y(5,M)= 0.0D0
        Y(6,1)= 0.0D0
        Y(6,M)= 0.0D0

C STARTSCHAETZUNG DER SCHALTPUNKTE
        XS(1) = 0.513D0
        XS(2) = 0.592D0
        XS(3) = 0.669D0

      CALL BDSCO(F,R,RKF7,X,XS,Y,N,M,MS,KS,TOL,ITMAX,KP)
      HILF11 = 0.5D0*(1.6D0-Y(1,7)+Y(3,7)-Y(4,7))
      HILF21 = 0.5D0*(1.6D0-Y(1,7)-Y(3,7)+Y(4,7))
      HILF31 = 0.5D0*(Y(1,7)-1.6D0-Y(3,7)-Y(4,7))
      HILF12 = 0.5D0*(1.6D0-Y(1,8)+Y(3,8)-Y(4,8))
```

```
 HILF22 = 0.5D0*(1.6D0-Y(1,8)-Y(3,8)+Y(4,8))
 HILF32 = 0.5D0*(Y(1,8)-1.6D0-Y(3,8)-Y(4,8))
 DWDP1 = HILF11+0.5D0*(-Y(2,7)-HILF21-4D0*Y(1,7)+HILF31+4D0*
F        Y(2,7)-Y(3,7))
 DWDP2 = HILF12+0.5D0*(-Y(2,8)-HILF22-4D0*Y(1,8)+HILF32+4D0*
F        Y(2,8)-Y(3,8))
 DWDP3 = Y(2,10)-4D0*(Y(1,10)+Y(2,10))
 DT3DP = -(Y(5,10)-Y(7,10)-Y(8,10)-1D0)/DWDP3
 DT1DP = -(Y(6,7)+0.5D0*(1D0-Y(5,7)-Y(7,7)-Y(9,7)+Y(8,7)))/DWDP1
 DT2DP = -(Y(6,8)+0.5D0*(1D0-Y(5,8)-Y(7,8)+Y(8,8)))/DWDP2
 WRITE(7,*)
 WRITE(7,*)
 WRITE(7,*) X(7),'  DWDP1:',DWDP1
 WRITE(7,*) X(8),'  DWDP2:',DWDP2
 WRITE(7,*) X(10),'  DWDP3:',DWDP3
 WRITE(7,*)
 WRITE(7,*) X(7),'  DT1DP:',DT1DP
 WRITE(7,*) X(8),'  DT2DP:',DT2DP
 WRITE(7,*) X(10),'  DT3DP:',DT3DP
 CALL DATEN(X,Y,XS,N,M,MS,NDISKRET,TOL,ISCHALT)
 STOP
 END



 SUBROUTINE F(X,Y,DY)
 IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
 REAL*8 X,Y(10),DY(10)
 INTEGER US(15,4)
 COMMON /CI/J,L,LS,US

 IF ((US(J,1).EQ.1).AND.(US(J,2).EQ.-1)) THEN
    U1= -Y(2)
    U2= Y(2)-Y(1)+1.6D0
    U3= -Y(6)
    U4= Y(6)-Y(5)+1D0
    V1= Y(2)-Y(3)
    V2= 6D0*Y(1)-7D0*Y(2)+2D0*Y(3)-3.2D0
    V3= Y(6)-Y(7)
    V4= 6D0*Y(5)-7D0*Y(6)+2D0*Y(7)-2D0
 ENDIF
 IF (US(J,1).EQ.-1) THEN
    U1= 0.5D0*(1.6D0-Y(1)-Y(3)+Y(4))
    U2= 0.5D0*(1.6D0-Y(1)+Y(3)-Y(4))
    U3= 0.5D0*(1D0-Y(5)-Y(7)+Y(8))
    U4= 0.5D0*(1D0-Y(5)+Y(7)-Y(8))
    V1= 0.5D0*(Y(1)-1.6D0-Y(3)-Y(4))
    V2= 0.0D0
    V3= 0.5D0*(Y(5)-1D0-Y(7)-Y(8))
    V4= 0.0D0
 ENDIF
 IF ((US(J,2).EQ.1).AND.(US(J,3).EQ.-1)) THEN
```

```
         U1= 0.5D0*(1.6D0-Y(1)-Y(3)+Y(4))
         U2= 0.5D0*(1.6D0-Y(1)+Y(3)-Y(4))
         U3= 0.5D0*(1D0-Y(5)-Y(7)+Y(8))
         U4= 0.5D0*(1D0-Y(5)+Y(7)-Y(8))
         V1= 0.5D0*(Y(1)-1.6D0-Y(3)-Y(4))
         V2= 0.0D0
         V3= 0.5D0*(Y(5)-1D0-Y(7)-Y(8))
         V4= 0.0D0
      ENDIF
      IF (US(J,3).EQ.1) THEN
         U1= -Y(3)
         U2= -Y(4)
         U3= -Y(7)
         U4= -Y(8)
         V1= 0.0D0
         V2= 0.0D0
         V3= 0.0D0
         V4= 0.0D0
      ENDIF

      DY(1)= Y(2)+U1
      DY(2)= U2
      DY(3)= 4.0D0*Y(1)-V1-V2
      DY(4)= 4.0D0*Y(2)-Y(3)
      DY(5)= Y(6)+U3
      DY(6)= U4
      DY(7)= 4.0D0*Y(5)-V3-V4
      DY(8)= 4.0D0*Y(6)-Y(7)
C        DY(9),DY(10) fuer Spruenge von Y(7) in t1 bzw. t2
      DY(9)= 0.0D0
      DY(10)= 0.0D0
      RETURN
      END

      SUBROUTINE R(YA,YB,ZZ,W,NYA,NSK)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      REAL*8 YA(10),YB(10),ZZ(10),W(13),Z0,RR
      INTEGER US(15,4),NYA(10),NSK(13),J,L,LS
      COMMON /CI/J,L,LS,US

C  ANFANGSBEDINGUNGEN
      W(1)=YA(1)-1.0D0
      W(2)=YA(2)
      W(3)=YA(5)
      W(4)=YA(6)

      NYA(1)=1
      NYA(2)=2
      NYA(5)=3
      NYA(6)=4

C ENDBEDINGUNGEN
```

```
      W(5)=YB(1)-1.0D0
      W(6)=YB(2)
      W(7)=YB(5)
      W(8)=YB(6)

C SCHALTBEDINGUNGEN
      W(9)= ZZ(1)-1.325D0
      W(10)= ZZ(1)-ZZ(3)-ZZ(4)-1.6D0
      W(11)= ZZ(2)+0.5D0*(1.6D0-ZZ(1)-ZZ(3)+ZZ(4))
      W(12)= ZZ(5)
      W(13)= ZZ(6)+0.5D0*(1D0-ZZ(5)-ZZ(7)+ZZ(8))
      NSK(9)=1
      NSK(10)=3
      NSK(11)=2
      NSK(12)=1
      NSK(13)=2
      IF (LS.EQ.1) ZZ(7)=ZZ(7)-ZZ(9)
      IF (LS.EQ.2) ZZ(7)=ZZ(7)-ZZ(10)
      RETURN
      END
```

A.37 k4_7b.out

```
    SOLUTION OBTAINED AFTER  6    ITERATION STEPS

    SOLUTION DATA

        0.00000000     1.00000000     0.00000000    -2.45265734    -0.77433927
                        0.00000000     0.00000000     3.05644996     3.57256506
                        1.06996702     3.68350768
        0.10000000     1.10689424    -0.05510781    -2.15189928    -0.55456061
                        0.05832027     0.04021354     3.45102012     3.25434457
                        1.06996702     3.68350768
        0.20000000     1.19644705    -0.10820148    -1.79040958    -0.38980489
                        0.08364705     0.11498636     3.86396716     2.91853449
                        1.06996702     3.68350768
        0.30000000     1.26444189    -0.15257447    -1.37500686    -0.28367570
                        0.07993934     0.22707699     4.28448113     2.57827213
                        1.06996702     3.68350768
        0.40000000     1.30780549    -0.18162962    -0.91427274    -0.23633126
                        0.05233588     0.37781243     4.70355763     2.24850954
                        1.06996702     3.68350768
        0.50000000     1.32476924    -0.18919000    -0.41802269    -0.24444029
                        0.00692371     0.56706786     5.11454754     1.94522546
                        1.06996702     3.68350768
        0.51311012     1.32500000    -0.18828939    -0.35087808    -0.24929930
                        0.00000000     0.59467067     4.09762483     1.90828348
                        1.06996702     3.68350768
```

```
  0.59162674    1.32500000   -0.18120675   -0.36655542   -0.27914192
                 0.00000000    0.72492550    0.55465977    1.78831645
                 1.06996702    3.68350768
  0.60000000    1.32490741   -0.18032499   -0.32364675   -0.28230712
                 0.01539631    0.72390373    0.56895202    1.80787582
                 1.06996702    3.68350768
  0.66941809    1.31706459   -0.16526308    0.03770048   -0.32063589
                 0.14066828    0.71248991    0.71028049    1.96324596
                 1.06996702    3.68350768
  0.70000000    1.30855200   -0.15511181    0.19834015   -0.34385043
                 0.13954510    0.65148995    0.72744378    2.02470681
                 1.06996702    3.68350768
  0.80000000    1.24922339   -0.11601211    0.71147660   -0.44409851
                 0.11885291    0.44109577    0.78000097    2.16826157
                 1.06996702    3.68350768
  0.90000000    1.14454510   -0.06522378    1.19166273   -0.57629307
                 0.07188799    0.22087927    0.81901434    2.22072408
                 1.06996702    3.68350768
  1.00000000    1.00000000    0.00000000    1.62178900   -0.73100902
                 0.00000000    0.00000000    0.83417977    2.18187066
                 1.06996702    3.68350768

SWITCHING POINTS


  0.51311012    0.59162674    0.66941809


 0.51311011650118510  DWDP1:     -2.68313478236576497
 0.59162673677475119  DWDP2:     -2.64266820530581059
 0.66941808838166927  DWDP3:     -4.77246909320933366

 0.51311011650118510  DT1DP:     -0.19938749031673406
 0.59162673677475119  DT2DP:      0.69692965427468334
 0.66941808838166927  DT3DP:     -0.74025794477240137
```

Literaturverzeichnis

[1] D. J. Bell: Optimality conditions at junctions of singular and nonsingular controls, Journal of Optim. Theory and Appl. 78, No. 1, 1993, pp. 1–8.

[2] R. Bellman: Nonlinear systems with fast parametric oscillations, Journal of Math. Anal. and Appl., Vol. 97, 1983, pp. 572–589.

[3] N. N. Bogoljubow, Mitropolski: Asymptotische Methoden in der Theorie der nichtlinearen Schwingungen, Akademie-Verlag, Berlin, 1965.

[4] M. H. Breitner: Construction of the optimal feedback controller for constrained optimal control problems with unknown disturbances, International Series of Numerical Math. 115, 1994, pp. 147-162.

[5] A. L. Dontchev, W. W. Hager: Lipschitzian stability for state constrained nonlinear optimal control, submitted to publication.

[6] R. F. Hartl, S. P. Sethi, R. G. Vickson: A Survey of the Maximum Principles for Optimal Control Problems with State Constraints, SIAM Review, Vol. 37, No. 2, 1995, pp. 181–218.

[7] D. H. Jacobson: New Second-Order and First-Order Algorithms for Determining Optimal Control: A Differential Dynamic Programming Approach, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 2, No. 6, 1968, pp. 411–439.

[8] D. H. Jacobson, D. Q. Mayne: Differential Dynamic Programming, American Elsevier Publishing Company Inc., New York, 1970, pp. 35–38.

[9] D. H. Jacobson, M. M. Lele, J. L. Speyer: New necessary conditions of optimality for control problems with state-variable inequality constraints, J. Math. Anal. Appl., Vol. 35, 1971, pp. 255–284.

[10] H. W. Knobloch, F. Kappel: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Kapitel 6, Teubner-Verlag, Stuttgart, 1974.

[11] B. Kugelmann: Zeitminimale Berechnung von Rückkopplungssteuerungen für optimale Lenkprobleme mit Anwendung in der Raumfahrt, Dissertation, TU München, 1987.

[12] B. Kugelmann, H. J. Pesch: New general guidance method in constrained optimal control, Part 1: numerical method, J. of Optim. Theory and Appl. 67, No. 3, 1990, pp. 421–435.

[13] B. Kugelmann, H. J. Pesch: New general guidance method in constrained optimal control, Part 2: Application to space shuttle guidance, J. of Optim. Theory and Appl. 67, No. 3, 1990, pp. 437–446.

[14] K. Malanowski: Sufficient optimality conditions in optimal control, Polish Academy of Sciences, Systems Research Institute, Warszawa, Poland, 1994, WP-1-94.

[15] K. Malanowski, H. Maurer: Sensitivity Analysis for Parametric Control Problems with Control-State Constraints, Preprint 4/94-N, WWU Münster, 1994.

[16] K. Malanowski, H. Maurer: Sensitivity Analysis for State Constrained Optimal Control Problems, in preparation.

[17] H. Maurer, U. Heidemann: Optimale Steuerprozesse mit Zustandsbeschränkungen, Optimization and Optimal Control, Proc. Conf. Oberwolfach 1974, in Lecture Notes in Mathematics, 477, Springer-Verlag, Berlin, 1975, pp. 244–260.

[18] H. Maurer: Optimale Steuerprozesse mit Zustandsbeschränkungen, Habilitationsschrift, Math. Inst., Univ. Würzburg, Germany, 1976.

[19] H. Maurer: First and second order sufficient optimality conditions in mathematical programming and optimal control, Mathematical Programming Study, Vol. 14, 1981, pp. 163–177.

[20] H. Maurer, H. D. Mittelmann: The non-linear beam via optimal control with bounded state variables, Optimal Control Appl. Methods, Vol. 12, 1991, pp. 19–31.

[21] H. Maurer: Optimierung dynamischer Systeme, Vorlesung WS 1993/94 an der WWU Münster.

[22] H. Maurer, S. Pickenhain: Second-Order Sufficient Conditions for Control Problems with Mixed Control-State Constraints, Preprint 15/93-N, WWU Münster, 1993.

[23] H. Maurer, H. J. Pesch: Solution Differentiability for Parametric Nonlinear Control Problems with Control-State Constraints, Preprint 16/93-N, WWU Münster, 1993.

[24] E. Miersemann, H. D. Mittelmann: A free boundary problem and stability for the nonlinear beam, Math. Meth. in the Appl. Sci. 8, 1986, pp. 516–532.

[25] H. D. Mittelmann: Bifurcation problems for discrete variational inequalities, Math. Meth. in the Appl. Sci. 4, 1982, pp. 243–258.

[26] H. J. Oberle, W. Grimm, E.Berger: Benutzeranleitung für das Rechenprogramm BNDSCO zur Lösung beschränkter optimaler Steuerprobleme, DFVLR-Mitt. 85-05, 1985.

[27] H. J. Oberle, W. Grimm: BNDSCO - A Program for the Numerical Solution of Optimal Control Problems, Institute for Flight Systems Dynamics, DLR, Oberpfaffenhofen, Germany, Internal Report No. 515-89/22, 1989.

[28] H. J. Pesch: Numerische Berechnung optimaler Flugbahnkorrekturen in Echtzeit-Rechnung, TU München, 1978.

[29] H. J. Pesch: Echtzeitberechnung fastoptimaler Rückkopplungssteuerungen bei Steuerproblemen mit Beschränkungen, Schwerpunktprogramm der DFG "Anwendungsbezogene Optimierung und Steuerung", Report No. 8, TU München, 1987.

[30] H. J. Pesch: Real-Time Computation of Feedback Controls for Constrained Optimal Control Problems, Part 1: Neighbouring Extremals, Optimal Control Applications & Methods 10, 1989, pp. 129–145.

[31] H. J. Pesch: Real-Time Computation of Feedback Controls for Constrained Optimal Control Problems, Part 2: A Correction Method Based on Multiple Shooting, Optimal Control Applications & Methods 10, 1989, pp. 147–171.

[32] H. X. Phu: Zur Lösung des linearisierten Knickstab-Problems mit beschränkter Ausbiegung, Zeitschrift für Analysis u. ihre Anwendungen 6 (4), 1987, pp. 371–384.

[33] S. Pickenhain, K. Tammer: Sufficient conditions for local optimality in multidimensional control problems with state restrictions, Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen 10, 1991, pp. 397–405.

[34] S. Pickenhain: Sufficient conditions for weak local minima in multidimensional optimal control problems with mixed control-state constraints, Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen 11,1992, pp. 559–568.

[35] G. Sorger: Sufficient optimality conditions for nonconvex control problems with state constraints, J. of Optim. Theory and Appl. 62, No. 2, 1989, pp. 289–310.

[36] T. Tun, T. S. Dillon: Extensions of the Differential Dynamic Programming Method to include Systems with State Dependent Control Constraints and State Variable Inequality Constraints, Journal of Applied Science and Engineering A, 3, 1978, pp. 171–92.

[37] V. Zeidan: Extended jacobi sufficiency criterion for optimal control, SIAM J. Control and Optim. 22, No. 2, 1984, pp. 294–301.

[38] V. Zeidan: Sufficiency conditions with minimal regularity assumptions, Applied Mathematics and Optimization 20, 1989, pp. 19–31.

[39] V. Zeidan: Sufficiency criteria via focal points and via coupled points, SIAM Journal Control and Optim. 30, No. 1, 1992, pp. 82–98.

[40] V. Zeidan: The Riccati Equation for Optimal Control Problems with Mixed State-Control Constraints: Necessity and Sufficiency, SIAM J. Control and Optimization 32, 1994, pp. 1297–1321.

Am Schluß dieser Arbeit möchte ich Herrn Professor Helmut Maurer für die interessante Themenstellung und die hervoragende Betreuung danken.

Hiermit versichere ich, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt habe und neben Programmen von Herrn Christof Büskens zur Erstellung der Grafiken, sowie der Fortran-Routine BNDSCO keine anderen als die im Literaturverzeichnis angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Münster, den 30.4.1996