Matthias Vögeler

Ein Propagations–Rückpropagations–Algorithmus zur Lösung des inversen Streuproblems für die Maxwell–Gleichungen

2001

Angewandte Mathematik

Ein Propagations–Rückpropagations–Algorithmus zur Lösung des inversen Streuproblems für die Maxwell–Gleichungen

Inaugural–Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften im Fachbereich Mathematik und Informatik
der Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms–Universität Münster

vorgelegt von
Matthias Vögeler
aus Beelen

Münster, 2001

Dekan:	Prof. Dr. W. Lange
Erster Gutachter:	Prof. Dr. F. Natterer
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. C. Cryer
Tag der mündlichen Prüfungen:	
Tag der Promotion:	

Zusammenfassung

Diese Arbeit hat das nichtlineare inverse Streuproblem für die MAXWELL–Gleichungen im Bereich der Mikrowellen–Tomographie zum Thema.

Dazu stelle man sich ein in einem homogenen Medium eingebettetes Objekt vor, das von einer planaren zeitharmonischen elektromagnetischen Welle bestrahlt wird. Das inverse Problem besteht nun darin, aus Messungen des gestreuten elektrischen Feldes in einiger Entfernung vom Objekt den komplexwertigen Brechungsindex des Objektes zu rekonstruieren.

Das Lösen des Anfangswertproblems für die MAXWELL–Gleichungen führt zu einem nichtlinearen Operator vom Raum der „Brechungsindizes“ in den Raum der „Messdaten“. Wird die FRÉCHET–Ableitung dieses Operators benutzt und stehen Messungen des gestreuten elektrischen Feldes für verschiedene Einfallsrichtungen der planaren zeitharmonischen elektromagnetischen Welle zur Verfügung, dann kann das inverse Problem iterativ gelöst werden. Ein Iterationsschritt besteht dabei aus einer Propagation (Lösung des direkten Problems) und einer Rückpropagation (Lösung des „adjungierten“ linearisierten direkten Problems).

Der verwendete Algorithmus hat sich bereits auf dem Gebiet der Ultraschall–Tomographie etabliert. Hier wird zum ersten Mal seine Anwendbarkeit auf dem Gebiet der Mikrowellen–Tomographie untersucht. Unter anderem musste eine äquivalente Formulierung für die MAXWELL–Gleichungen gefunden werden, die bedingte Stabilität der Anfangswertaufgabe und die FRÉCHET–Differenzierbarkeit des erwähnten nichtlinearen Operators wurde gezeigt.

Numerische Simulationen belegen die analytischen Resultate für den Algorithmus und demonstrieren seine praktische Brauchbarkeit.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Zunächst wird eine Übersicht über den Aufbau der Arbeit gegeben:

1.1 Übersicht

Das erste Kapitel dient der Einführung in die Problemstellung und der Skizzierung des Verfahrens zum Lösen des inversen Streuproblems für die MAXWELL–Gleichungen. Dabei werden sowohl die geometrischen Rahmenbedingungen als auch wesentliche Begriffe und Bezeichnungen eingeführt.
Desweiteren wird ein Überblick zu anderen aktuellen Arbeiten auf dem Gebiet des inversen Streuproblems für die MAXWELL–Gleichungen gegeben.

Als wichtiger Zwischenschritt zur Lösung des inversen Streuproblems befasst sich das zweite Kapitel mit dem direkten Streuproblem. Zum einen wird eine geeignetere äquivalente Formulierung für die MAXWELL–Gleichungen hergeleitet. Zum anderen ist die bedingte Stabilität des Anfangswertproblems für die MAXWELL–Gleichungen von großem Interesse.

Im dritten Kapitel wird der Propagations–Rückpropagations–Algorithmus zur Lösung des inversen Streuproblems hergeleitet. Dabei ist die FRÉCHET–Ableitung eines nichtlinearen Operators und ihre Adjungierte von großer Bedeutung.

Im vierten und letzten Kapitel werden drei numerische Simulationen vorgestellt. Analytische Ergebnisse und die Brauchbarkeit des Propagations–Rückpropagations–Algorithmus werden gezeigt. Desweiteren wird untersucht, wie gut die MAXWELL–Gleichungen durch die skalare HELMHOLTZ–Gleichung approximiert werden können.

1.2 Praktische Relevanz

Auf dem Gebiet der bildgebenden Verfahren in der Medizin ist die Mikrowellen–Tomographie zunehmend Gegenstand intensiver Forschung. Sie hat gegenüber der Röntgen–, CT– und NMR–Tomographie entscheidende Vorteile, da sie ohne Verwendung ionisierender Strahlung oder invasiven Kontrastmitteln auskommt. Die Mikrowellen–Tomographie ist in der Lage, dielektrische Eigenschaften von biologischem Gewebe zu bestimmen. Dabei ist entscheidend, dass die dielektrischen Eigenschaften lebenden Gewebes von ihrem physiologischen Zustand abhängen. So ist bereits in [Semenov et al;1996] gezeigt worden, dass Unterschiede zwischen gesundem Herzgewebe und Infarkt gefährdetem Herzgewebe bzgl. ihrer dielektrischen Eigenschaften bestehen. Auch konnte nachgewiesen werden, dass von Krebs befallenes Brustgewebe im Bereich der Mikrowellen–Strahlung signifikante Änderungen der dielektrischen Leitfähigkeit gegenüber gesundem Gewebe zeigt [Hagnes et al;1998]. In [Joines et al;1980] und [Schepps,Foster;1980] wurde aufgeführt, dass es an Hand der Unterschiede dielektrischer Leitfähigkeit im Gewebe möglich ist verschiedene Tumorarten zu bestimmen.

1.3 Problembeschreibung

Diese Arbeit behandelt das nichtlineare inverse Streuproblem für die Maxwell–Gleichungen. Ziel ist die Rekonstruktion einer bestimmten physikalischen Eigenschaft eines Objektes aus noch näher zu definierenden Messdaten. Diese Eigenschaft wird mathematisch durch die komplexwertige Ortsfunktion $n(x)$ beschrieben. Das Objekt befindet sich in einer Kugel D mit dem Radius ρ, was mathematisch durch die Forderung $\operatorname{supp}(n(x)-1) \subset D$ ausgedrückt wird. Die Funktion $n(x)$ wird sich als Brechungsindex herausstellen. Üblicherweise wird durch $n = 1$ auf das Referenzmedium Vakuum verwiesen. Für alle anderen Brechungsindizes würde damit $\operatorname{Re} n > 1$ gelten. Es ist natürlich möglich für ein anderes Referenzmedium $n = 1$ zu fordern, was für andere Brechungsindizes $\operatorname{Re} n > 0$ bedeuten würde (Begrenzung durch die Lichtgeschwindigkeit).
Weiter befindet sich die Kugel D in einem Würfel Q_θ der Seitenlänge 2ρ. Die Seiten des Würfels werden mit Γ_θ, Γ_θ^- und Γ_θ^+, wie in Figur 1.1 illustriert, beschrieben. Dabei beschreibt der Einheitsvektor θ die Orientierung des Würfels. Die Seiten Γ_θ^- und Γ_θ^+ stehen senkrecht zum Vektor θ, wobei Γ_θ^+ von Γ_θ^- aus gesehen in Richtung θ liegt.

Für die Rekonstruktion des Objektes in D, also der Funktion $n(x)$, werden Messdaten benötigt. Dazu wird der Würfel Q_θ mit einem ebenen zeitharmonischen

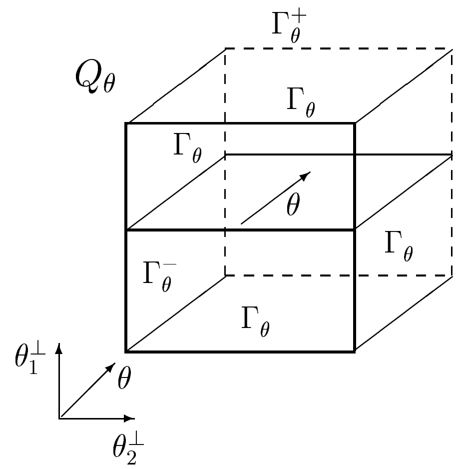

Abbildung 1.1: *Geometrie des Würfels Q_θ*

elektromagnetischen Feld „bestrahlt“. Gemessen wird das resultierende elektrische Feld an allen Seiten des Würfels. Formal lässt sich der Streuprozess wie folgt beschreiben.

1.3.1 Mathematische Formulierung des Streuproblems

Die Ausbreitung elektromagnetischer Felder in einem inhomogenen, isotropen und nicht perfekten Leiter[1] wird durch die MAXWELL–Gleichungen der folgenden Form beschrieben:

$$\operatorname{rot}\mathcal{E}(x,t) + \mu_0 \frac{\partial \mathcal{H}(x,t)}{\partial t} = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathcal{H}(x,t) - \varepsilon(x)\frac{\partial \mathcal{E}(x,t)}{\partial t} = \sigma(x)\mathcal{E}(x,t). \tag{1.1}$$

Dabei sind $\mathcal{E}(x,t)$, $\mathcal{H}(x,t)$ das elektrische und magnetische Feld am Ort $x \in \mathbb{R}^3$ zur Zeit $t \in \mathbb{R}$. Weiter ist die magnetische Permeabilität (Durchdringbarkeit) μ_0 eine positive Konstante. Das ist keine wesentliche Einschränkung, da für die meisten Materialien die magnetische Permeabilität nahezu gleich ist, [Born,Wolf;1999] Seite 3. Ausgeschlossen werden durch die Einschränkung an μ_0 zum Beispiel einige ferromagnetische Materialien. Die Funktion $\varepsilon(x)$ ist eine reelle Funktion des Ortes und wird elektrische Permeabilität genannt. Außerhalb der Kugel D soll sie gleich der Konstanten ε_0 sein. Die elektrische Permeabilität ist immer positiv. Als Kehrwert des elektrischen Widerstands wird die elektrische Leitfähigkeit durch die reelle positive Ortsfunktion $\sigma(x)$ beschrieben. Das zu rekonstruierende Objekt in der Kugel D wird also beschrieben durch seine Materialeigenschaften $\varepsilon(x)$ und $\sigma(x)$.

[1] Ein perfekter Leiter besitzt keinen elektrischen Widerstand. Damit wäre die elektrische Leitfähigkeit $\sigma = \infty$.

Nimmt man einen ladungsfreien Raum an, so werden die beiden vektorwertigen Gleichungen (1.1) komplettiert durch zwei skalare Beziehungen:

$$\operatorname{div}(\varepsilon(x)\mathcal{E}(x,t)) = 0, \qquad \operatorname{div}\mathcal{H}(x,t) = 0.$$

Ist das elektromagnetische Feld zeitharmonisch mit der Frequenz ω, lässt es sich als

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}E(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \qquad \mathcal{H}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}H(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},$$

schreiben. Die Ortsfunktionen $E(x)$ und $H(x)$ sind damit Lösung der zeitharmonischen MAXWELL–Gleichungen

$$\operatorname{rot}E(x) - \mathrm{i}kH(x) = 0, \qquad \operatorname{rot}H(x) + \mathrm{i}kn(x)E(x) = 0. \tag{1.2}$$

Dabei sind die Konstante k und die Funktion $n(x)$ definiert durch

$$k^2 := \varepsilon_0\mu_0\omega^2, \qquad n(x) := \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\varepsilon(x) + \mathrm{i}\frac{\sigma(x)}{\omega}\right). \tag{1.3}$$

Man nennt k die Wellenzahl und $n(x)$ den Brechungsindex, der die reellen Materialeigenschaften (elektrische Permeabilität und Leitfähigkeit) umkehrbar–eindeutig zusammenfasst.

Setzen wir voraus, dass für das magnetische Feld $H \in C^2(\mathbb{R}^3)$ gilt, liefert die Anwendung des div-Operators auf die zweite Gleichung von (1.2) wegen der dann gültigen Operator–Identität $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$ die skalare Gleichung

$$\operatorname{div}(n(x)E(x)) = 0. \tag{1.4}$$

Die Forderung $\operatorname{div}\operatorname{rot}H = 0$ ist nach [Born,Wolf;1999] Kapitel 1 übrigens gleichbedeutend mit der Forderung nach der Ladungserhaltung in der Umgebung jedes Punktes (Kontinuitätsgleichung).

Das Streuproblem lässt sich nun wie folgt formulieren: Seien die so genannten einfallenden Wellen E^i und H^i Lösung des homogenen Streuproblems, das heißt Lösung von

$$\operatorname{rot}E(x) - \mathrm{i}kH(x) = 0, \qquad \operatorname{rot}H(x) + \mathrm{i}kE(x) = 0, \tag{1.5}$$

dann ist eine Lösung $E(x)$, $H(x)$ von (1.2) gesucht, so dass

$$E(x) = E^i(x) + E^s(x), \qquad H(x) = H^i(x) + H^s(x) \tag{1.6}$$

gilt und die gestreuten Felder E^s, H^s die SILVER–MÜLLER Ausstrahlungsbedingung

$$\lim_{|x|\to\infty} H^s \times x - |x|E^s = 0 \tag{1.7}$$

gleichmäßig für alle Richtungen $x/|x|$ erfüllen. In [Colton,Kress;1992] wird das Streuproblem auf die gleiche Weise definiert.
Legen wir uns auf die Einfallsrichtung $\theta = (0,0,1)^t$ fest, so können die einfallenden ebenen Wellen als

$$E^i(x) = \begin{pmatrix} a_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_3+\delta_1} \\ a_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_3+\delta_2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad H^i(x) = \begin{pmatrix} -a_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_3+\delta_2} \\ a_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_3+\delta_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $a_1, a_2, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ gewählt werden.[2] Wegen $\operatorname{div} E^i = 0$ dürfen nur die ersten beiden Komponenten von E^i von Null verschieden sein. Man sagt, dass die ebene einfallende Welle elliptisch polarisiert ist. Im Allgemeinen beschreibt E^i als Funktion von x_3 eine Ellipse in der (x_1, x_2)–Ebene. Das kleinstmögliche Rechteck in der (x_1, x_2)–Ebene, das diese Ellipse enthält hat die Seitenlängen $2|a_1|$ und $2|a_2|$. Es werden noch drei Spezialfälle gesondert bezeichnet:

- Ist $\delta_2 - \delta_1 = m\pi$ mit $m \in \mathbb{Z}$, dann wird E^i als linear polarisiert bezeichnet. Die Ellipse entartet zu einer Geraden.

- Ist $a_1 = a_2$ und $\delta_2 - \delta_1 = \pi/2$, dann wird E^i als rechtszirkular bezeichnet.

- Ist $a_1 = a_2$ und $\delta_2 - \delta_1 = -\pi/2$, dann wird E^i als linkszirkular bezeichnet.

Weitere Details findet man in [Born,Wolf;1999] Abschnitt 1.4.2. Da sich eine allgemein elliptisch polarisierte Welle aus der Überlagerung von zwei linear polarisierten Wellen zusammensetzen lässt, werden wir die einfallende ebene Welle immer als linear polarisiert annehmen. Ihre Ausbreitungsrichtung sei so gewählt, dass sie mit der Ausrichtung des Würfels Q_θ übereinstimmt:

$$E^i(x) := E_0^i\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta\cdot x}, \quad E_0^i \in \mathbb{R}^3 \text{ und } \theta \perp E_0^i.$$

Wegen $\operatorname{div} E^i = 0$ ist die Orthogonalität von E_0^i und θ eine notwendige Bedingung.

Bemerkung

Es genügt entweder das gestreute elektrische Feld E^s oder das gestreute magnetische Feld H^s zu kennen. Denn durch (1.2) ist das jeweilige andere Feld sofort bestimmt.

[2] Legt man $E^i(x)$ fest, ist $H^i(x)$ nach (1.5) festgelegt.

1.3.2 Beschreibung des inversen Streuproblems

Während beim direkten Streuproblem bei bekannter Wellenzahl k und bekanntem Brechungsindex $n(x)$ das elektrische Feld $E(x)$ gesucht ist, ist bei dem inversen Streuproblem der Brechungsindex $n(x)$ unbekannt. Gegeben ist dafür neben der Wellenzahl k das elektrische Feld $E(x)$ auf der Oberfläche des Würfels Q_θ für endlich viele verschiedene Orientierungen $\theta \in S^2$. Für die konkrete Lösung des inversen Streuproblems für die MAXWELL–Gleichungen wird hier ein Propagations–Rückpropagations Algorithmus (PBP–Algorithmus) hergeleitet. Er wurde so schon für die HELMHOLTZ–Gleichung im Fall der Ultraschall–Tomographie implementiert, siehe [Natterer,Wübbeling;1995].

Der Algorithmus ist iterativ. Das heißt: Für P verschiedene Orientierungen $\theta = \theta_j \in S^2$, $j = 0, \dots, P-1$, ergeben sich P verschiedene Messanordnungen für das Objekt in dem Würfel $Q_j \supset D$. Werden nun Messdaten $G_j(x)$ auf ∂Q_j für das elektrische Feld E genommen, erhalten wir ein Randwertproblem für das Innere des Würfels Q_j. Nun greifen wir zu einem Trick. Mit den Messdaten $G_j(x)$ auf ∂Q_j ist nämlich auch das Außenraumproblem in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q_j}$ lösbar. Denn mit Hilfe von Satz 2.9 ist das elektrische Feld E in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q_j}$ berechenbar, so dass zusätzlich noch $\partial G_j(x)/\partial\theta_j$ auf Γ_j^- zu Verfügung steht. Mit den Daten $G_j(x)$ auf $\Gamma_j \cup \Gamma_j^-$ und $\partial G_j(x)/\partial\theta_j$ können wir ein Anfangswertproblem formulieren. Sei hier vorausgesetzt, dass wir dieses numerisch lösen können [3], dann erhalten wir bei gegebenem Brechungsindex eine nichtlineare Abbildung R_j aus der Menge der „Brechungsindizes" auf die Menge der „Messdaten" am Rand Γ_j^+. Gesucht ist also der Brechungsindex $n(x)$ in D, für den

$$R_j(n) = G_{j|\Gamma_j^+}, \qquad j = 0, \dots, P-1, \tag{1.8}$$

gilt. Dabei ist $G_{j|\Gamma_j^+}$ die Einschränkung von G_j auf dem Rand Γ_j^+. Wenn nun anstatt des exakten Brechungsindex n nur eine Näherung $\tilde{n}$ bekannt war, unterscheidet sich das gemessene elektrische Feld auf Γ_j^+ von $R_j(\tilde{n})$. Die Idee ist nun, diese Differenz zu benutzen, um die Näherung $\tilde{n}$ zu verbessern.

Obwohl die Normalableitung von G_j auf Γ_j^- aus den Messdaten G_j auf Q_j berechenbar ist, wird im weiteren Text aus Gründen der einfacheren Schreibweise dennoch von Messdaten $\partial G_j/\partial\theta_j$ auf Γ_j^- die Rede sein.

In Grundzügen wird der Algorithmus zur Lösung des inversen Streuproblems nun skizziert:

Weil keine explizite Inversionsformel von (1.8) existiert, wird diese Abbildung linearisiert:

$$R_j(n+d) = R_j(n) + A_j(n)d + \mathrm{O}(\|d\|^2).$$

[3] Die numerische Lösung des Anfangswertproblems ist Thema in Abschnitt 2.4.

Hierbei ist $A_j(n)$ die FRÉCHET–Ableitung von R_j. Ausgehend von einer Startnäherung n^0 werden iterativ bessere Näherungen $n^{r+1} = n^r + \omega d^r$, $r = 0, 1, \dots$ durch Lösen von

$$A_j(n^r)d^r = G_j^+ - R_j(n^r), \qquad j = r \bmod P$$

gebildet. Da dieses Gleichungssystem stark unterbestimmt ist, wird seine Minimum–Norm–Lösung bestimmt. Mit der adjungierten Abbildung $A_j(n)^*$ von $A_j(n)$ schreibt sich die Lösung als

$$d^r = A_j(n^r)^*(A_j(n^r)A_j(n^r)^*)^{-1}(G_j^+ - R_j(n^r)), \qquad j = r \bmod P.$$

Hierbei ist vorausgesetzt worden, dass $(A_j(n^r)A_j(n^r)^*)^{-1}$ existiert. Offensichtlich muss für jedes Update d^r das direkte Problem gelöst werden. Aus numerischer Sicht ist das keine leichte Aufgabe. Deshalb wird die Lösung des direkten Problems Gegenstand des nächsten Kapitels sein.

1.4 Literaturüberblick

Wie durch die Literaturangaben in Kapitel 2 deutlich werden wird, ist die mathematische Beschreibung des direkten Streuproblems für die MAXWELL–Gleichungen, intensiv in den Büchern [Colton,Kress;1983] und [Colton,Kress;1992] untersucht worden.
Die folgenden Abschnitte geben einen Überblick zur aktuellen Literatur zum Thema des inversen Streuproblems für die MAXWELL–Gleichungen.

1.4.1 Rekonstruktion der Form und Oberflächenimpedanz eines Objektes

Rainer Kress und William Rundell zeigen in [Kress,Rundell;2000] wie gleichzeitig die Form und Impedanz eines nicht durchdringbaren Objektes aus dem Fernfeld eines Satzes ebener einfallender akustischer oder elektromagnetischer Wellen u_i berechnet werden kann.
Die Autoren beschränken sich dabei weiter auf unendlich lange Objekte mit Zylindergeometrie und beschränktem Querschnitt $D \subset \mathbb{R}^2$, so dass die mathematische Beschreibung und numerische Implementierung für den $\mathbb{R}^2$ erfolgen kann. Weiter liegt in der Natur des Algorithmus, dass die Anzahl der zusammenhängenden Objekte a priori bekannt sein muss und die Objekte Sterngebiete sind.
Das hier vorliegende Außenraumproblem wird durch die HELMHOLTZ–Gleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}, \tag{1.9}$$

$k > 0$, mit der Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \mathrm{i}\lambda k u = 0 \quad \text{auf } \partial D \tag{1.10}$$

für die Impedanz beschrieben. Für den akustischen Fall sind diese Gleichungen sofort eingängig. Für die MAXWELL–Gleichungen kommen wir auf diese skalare Formulierung, wenn das magnetische Feld im so genannten TM–Mode (transvers magnetic) polarisiert wird. Damit ist $E = (0,0,u)^t$ und $E^i = (0,0,u^i)^t$, wenn $(0,0,1)^t$ die Achse des Zylinders darstellt. Gleichung (1.9) folgt sofort aus den MAXWELL–Gleichungen und Gleichung (1.10) aus der eigentlichen Randbedingung für die Impedanzbedingung elektromagnetischer Felder

$$\nu \times \operatorname{rot} E - \mathrm{i}\lambda(\nu \times E) \times \nu = 0$$

auf ∂D durch einfaches Nachrechnen.

Die Randbedingung (1.10) impliziert für $\lambda = 0$ die NEUMANN–Randbedingung $\partial u/\partial \nu = 0$ auf ∂D für einen perfekten Leiter und für $\lambda \to \infty$ die DIRICHLET–Randbedingung $u = 0$ auf ∂D.
Zusammen mit der SOMMERFELDschen Ausstrahlungsbedingung für das gestreute Feld $u^s = u - u^i$

$$\lim_{r\to\infty} r \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - \mathrm{i}k u^s \right) = 0, \qquad r = |x|, \tag{1.11}$$

gleichmäßig für alle Richtungen $x/|x|$, geben (1.9) und (1.10) Anlass zu einer nichtlinearen Abbildung F des Randes ∂D und der Impedanz λ in das Fernfeld. Für den elektromagnetischen Fall geht die SILVER–MÜLLER Ausstrahlungsbedingung (1.7) direkt in die SOMMERFELDsche Ausstrahlungsbedingung (1.11) über. Das zugehörige inverse Problem für den Operator F ist schlecht gestellt. Seine Lösung basiert auf einem regularisierten iterativen NEWTON–Verfahren, welches die Berechnung in zwei Schritte zerlegt: Zuerst wird das gestreute Feld u^s für eine Approximation von ∂D und λ durch das Lösen einer linearen Integralgleichung erster Ordnung auf ∂D berechnet, was ein sehr schlecht gestelltes Problem ist. Dann folgt die Invertierung einer nichtlinearen Gleichung durch Linearisierung. Der letzte Schritt führt iterativ auf ein einfaches „Update“ für ∂D und λ. Die Autoren bemerken dazu, dass ihre Aufteilung des Algorithmus in zwei Schritte im wesentlichen Vorteile für die numerische Implementierung beinhaltet.

Die Anwendbarkeit dieses Verfahrens wird durch die Qualität einer vorgestellten Beispielrechnung dargelegt. Die Autoren bemerken weiter, dass die Ergebnisse mit zunehmendem Wert für die Impedanz besser und mit zunehmender Spanne des Wertebereichs der Impedanz schlechter werden.

Weiter wird bemerkt, dass die geforderte Menge an Messdaten mit zunehmender Komplexität von ∂D steigen muss, um keine Abstriche bei der Qualität der Rekonstruktion machen zu müssen. Anders gesagt liefert eine konstante Menge an Messdaten schlechtere Ergebnisse, wenn ∂D aus einer größeren Anzahl von „Basisfunktionen" zusammengesetzt ist. Vorwissen über die Komplexität der zu rekonstruierenden Oberfläche ist somit von Vorteil.

Diese Arbeit von Kress und Rundell [Kress,Rundell;2000] ist in dem Kontext von [Kress;2000] zu sehen, in der das inverse Problem darin besteht, lokale Störungen in der Gestalt einer unendlich großen, ideal leitenden planaren Platte durch Messungen des Fernfelds nach Einfall ebener zeitharmonischer Felder E^i zu rekonstruieren.

1.4.2 Rekonstruktion der Form von allgemeineren Objekten

David Colton und Andreas Kirsch stellen in ihrer Arbeit [Colton,Kirsch;1996] einen Algorithmus vor, der die Rekonstruktion der Form von endlich vielen Objekten erlaubt, egal ob sie für das elektrische Feld durchlässig sind oder nicht. Dabei versteht man hier unter einem Objekt eine zusammenhängende Menge, die disjunkt mit den anderen Objekten ist. Außerdem befinden sich dabei alle Objekte in einem bekannten Raumvolumen. Die Daten, die in diesem Algorithmus einfließen, bestehen aus dem Fernfeld für *alle* Richtungen.

Die Autoren beschränken sich allerdings auch hier auf unendlich lange Objekte mit Zylindergeometrie, wobei die Symmetrieachse für alle Objekte dieselbe ist. Damit ist wieder eine skalare Beschreibung der MAXWELL–Gleichungen in $\mathbb{R}^2$ im TM–Mode wie im Abschnitt 1.4.1 möglich.

Das Gesamtfeld u erfüllt somit

$$\begin{aligned} \Delta u(x) + k^2 u(x) &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}, \\ u(x) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta\cdot x} + u^s(x) \end{aligned}$$

und u^s die SOMMERFELDsche Ausstrahlungsbedingung gleichmäßig für alle Richtungen $x/|x|$. Weiter ist die Wellenzahl $k > 0$ konstant und $\theta \in S^2$ die Richtung der einfallenden Welle.

Ein Objekt D muss hier durch eine der folgenden physikalischen Eigenschaften beschrieben werden können:

1. Es erfüllt die DIRICHLET–Randbedingung

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial D,$$

2. die NEUMANN–Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \partial D,$$

mit der äußeren Normalen ν,

3. die Impedanz-Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \lambda u = 0 \quad \text{auf } \partial D, \tag{1.12}$$

wobei $\lambda > 0$ ist, oder

4. für den Brechungsindex $n(x)$ (s. Gl. (1.3)) muss für mindestens ein $x \in D$ $\mathrm{Im}(n(x)) > 0$ gelten.

Wenn nun k^2 für die ersten drei Bedingungen weder ein DIRICHLET– noch ein NEUMANN–Eigenwert und für den vierten Fall kein DIRICHLET–Eigenwert ist, zeigen die Autoren die Existenz einer Funktion $g(\cdot, y_0) \in L_2(-\pi, \pi)$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{y_0 \in \partial D,\, y \to y_0} \|g(\cdot, y)\|_{L_2(-\pi,\pi)} = \infty.$$

Die Funktion g ist dabei Lösung der linearen Integralgleichung

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_\infty(\phi, \theta) g(\theta, y_0)\, \mathrm{d}\theta = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\rho\cos(\phi-\alpha)} \quad \text{für alle } \phi \in [-\pi, \pi], \tag{1.13}$$

wobei $y_0 = \rho(\cos\alpha, \sin\alpha)^t$.
Dieses Resultat legt folgenden einfachen Algorithmus nahe: Finde die Funktion g aus (1.13) in einem Raumbereich P, von dem a priori bekannt ist, dass er alle Objekte enthält. Suche dann die Punkte $y_0 \in P$ für die $\|g(\cdot, y_0)\|_{L_2(-\pi,\pi)}$ sein „Maximum“ annimmt. Die Menge dieser Punkte definiert dann die Ränder der gesuchten Objekte.

Hier wird sofort ein Schwachpunkt des Verfahrens deutlich: Das Kriterium (1.12) lässt sich numerisch schwer fassen. Man kann vom gesetzten Maximalwert (Abbruchkriterium) für $g(\cdot, y_0) \in L_2(-\pi, \pi)$ nicht auf die Güte der Näherung schließen.

1.4.3 Rekonstruktion von im Boden eingelassenen zylindrischen Objekten

In dem Artikel [Hiraoka et al;1996] wird die Brauchbarkeit elektromagnetischer Wellen zur Detektion von im Boden eingelassenen Objekten untersucht. Auch hier wird das Problem, wie in Abschnitt 1.4.1 dargelegt, auf zwei Dimensionen reduziert. Die Halbebene $y \leq 0$ entspricht dabei der Luft, die mit dem konstanten Brechungsindex n_0 modelliert wird. Im Boden ($y > 0$) eingelassen, ist nun ein Objekt Ω, das durch den komplexen Brechungsindex $n_s(x,y)$ ausgezeichnet ist, wobei der Boden selbst den konstanten Brechungsindex n_1 haben soll. Die Geometrie lässt sich also wie folgt durch den Brechungsindex $n(x,y)$ wiedergeben:

$$n(x,y) = \begin{cases} n_0 & \text{falls } y \leq 0, \\ n_s(x,y) & \text{falls } y \in \Omega, \\ n_1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bei bekanntem n_0, n_1 soll die Funktion $n_s(x,y)$ aus Messungen des gestreuten elektrischen Feldes $\widetilde{E}^s$ an der Oberfläche ($y < 0$) berechnet werden. Genauer hat man für P verschiedene diskrete Einfallswinkel $\theta_0 = \theta_1, \ldots, \theta_P$ der einfallenden elektrischen Welle $E^i(x,y)$ Q Messungen an den Stellen (x_q, y_0), $q = 1, \ldots, Q$, $y_0 < 0$.
In Abwesenheit des Streuers Ω bzw. $n_s = n_1$ schreibt sich das elektrische Feld als

$$E(\theta_0, x, y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(x\sin\theta_0 + y\cos\theta_0)} + R\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(x\sin\theta_0 + y\cos\theta_0)} & \text{falls } y \leq 0, \\ T\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x\sin\theta + y\cos\theta)} & \text{falls } y > 0. \end{cases}$$

Dabei sind k_0, $k = n_1 k_0$ die Wellenzahlen in Luft und Boden, θ_0, $\theta = \arcsin(n^{-1}\sin\theta_0)$ Einfalls- bzw. Brechungswinkel und die Konstanten R, T Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizient.
Im Allgemeinen gilt für das totale elektrische Feld

$$E^t(n_s, \theta_0, x, y) = E(\theta_0, x, y) + E^s(n_s, \theta_0, x, y),$$

wobei das gestreute Feld E^s die lineare Integralgleichung

$$E^s(n_s, \theta_0, x, y) = \int_\Omega k_0^2 [n_s^2(x', y') - n^2] E^t(n_s, \theta_0, x', y') G(x, y, x', y')\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \quad (1.14)$$

mit der zweidimensionalen GREENschen Funktion $G(x,y,x',y')$ erfüllt. G ist dabei die GREENsche Funktion für die Brechung an einer Halbebene.

Das inverse Problem kann nun durch Minimierung des Kostenfunktionals

$$J(n_s) = \sum_{p=1}^{P} \sum_{q=1}^{Q} |E^s(n_s, \theta_p, x_q, y_0) - \widetilde{E}^s(\theta_p, x_q, y_0)|^2$$

gelöst werden. Dazu verwenden die Autoren das Verfahren der konjugierten Gradienten, wobei der Gradient von $J(n_s)$ durch die FRÉCHET–Ableitung des Funktionals gegeben ist.
Numerische Ergebnisse für konstantes n_s demonstrieren die prinzipielle Umsetzbarkeit des Verfahrens.

Bei der Diskretisierung wurde allerdings nur ein (16×16)-Gitter verwendet. Für eine allgemeine $(n \times n)$-Diskretisierung werden alleine zum Lösen der Integralgleichung (1.14) mindestens $\mathrm{O}(n^4)$ Operationen benötigt, was den Algorithmus mit zunehmender feinerer Diskretisierung schnell unbrauchbar werden lässt. Würde Gleichung (1.14) zum Beispiel auf einem 32×32 Gitter gelöst, hätte sich die Rechenzeit wenigstens um das 16fache erhöht. Die Brauchbarkeit der in [Hiraoka et al;1996] vorgestellte Methode kann somit zumindest für Rechnungen im $\mathbb{R}^3$ in Frage gestellt werden.

1.4.4 Dreidimensionale Mikrowellen–Tomographie

Die Arbeit [Bulyshev et al;2000] gehört zu den wenigen Arbeiten, die Mikrowellen–Tomographie im dreidimensionalen Raum behandeln. In ihrem mathematischem Modell approximieren sie die Maxwell–Gleichungen durch die skalare Helmholtz–Gleichung

$$\Delta u_j^s + k^2 u_j^s = (k_0^2 - k^2) u_j^i.$$

Dabei ist u_j^i das einfallende Feld, welches vom j-ten Transmitter (Punktquelle) erzeugt worden ist. Befindet sich dieser an der Stelle $r_j \in \mathbb{R}^3$, so gilt

$$u_j^i(x) = \frac{1}{4\pi|x - r_j|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0|x-r_j|}.$$

Das gestreute elektrische Feld am l-ten Receiver wird durch

$$u_{j,l}^s = \int \frac{1}{4\pi|x - r_l|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0|x-r_l|} (k^2 - k_0^2)(u_j^s(x) + u_j^i(x))\,\mathrm{d}x$$

berechnet. Das inverse Problem kann nun als Variationsproblem formuliert werden:

$$J[k^2] = \left(\sum_{j,l} |u_{j,l}^{\text{theor}} - u_{j,l}^{\text{exper}}|^2 \right) => \min.$$

Hierbei ist bei aktiviertem Transmitter j der Term $u_{j,l}^{\text{theor}}$ die theoretische Voraussage für das Feld bei Receiver l und $u_{j,l}^{\text{exper}}$ das bei Receiver l gemessene Feld. Um das Funktional J zu minimieren, wählen die Autoren die Gradienten–Methode. Dazu ist es nötig die Ableitung J' in $\mathbb{R}^3$ berechnen zu können. Werden dafür die für den zweidimensionalen Fall bestehenden Algorithmen einfach portiert, ist das Verfahren für die Praxis wohl nicht mehr geeignet, weil zu zeitaufwendig. Die Autoren stellen nun einen effizienten Algorithmus für die Berechnung von J' in $\mathbb{R}^3$ vor.

Numerische Simulationen demonstrieren die Brauchbarkeit ihres Verfahrens. Sie verwenden zum Beispiel ein Herzmodell, das hier in Abschnitt 4.3 qualitativ als Vorlage für eine numerische Simulation diente.

1.4.5 Bemerkung

Würde sich auch diese Arbeit auf Objekte mit Zylindergeometrie beschränken, das heißt eine geometrische Formulierung wie in Abschnitt (1.4.1) heranziehen, oder die Kopplung der drei elektrischen Feldkomponenten $E = (E_1, E_2, E_3)^t$ vernachlässigen wie in [Bulyshev et al;2000], dann führten die Maxwell–Gleichungen direkt zur skalaren Helmholtz–Gleichung. Damit läge mathematisch der Fall der Ultraschall–Tomographie vor. Dies würde den in Abschnitt 1.3.2 skizzierten Algorithmus zur Lösung des inversen Streuproblems auf die Arbeiten von Frank Natterer und Frank Wübbeling zurückwerfen, siehe zum Beispiel [Natterer,Wübbeling;1995], [Natterer;1999].

Auch soll nochmal deutlich gesagt werden, dass es hier nicht nur um die Rekonstruktion der Geometrie von $\mathrm{supp}(n-1)$ geht, sondern um die Rekonstruktion der komplexwertigen Funktion n selbst.

Kapitel 2

Das direkte Problem

Ist das elektrische Feld Lösung des direkten Streuproblems, wie in Abschnitt 1.3.1 beschrieben, dann hängt seine Regularität von der des Brechungsindex ab. Um diese Abhängigkeit darstellen zu können, wird der Begriff der HÖLDER–Stetigkeit gebraucht.

Definition 2.1 *Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ offen. Man nennt eine Funktion f auf G gleichmäßig* HÖLDER*–stetig mit Exponenten $0 < \alpha \leq 1$, wenn eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

für alle $x, y \in G$ gilt. Für $\alpha = 1$ nennt man f LIPSCHITZ*–stetig. Die* HÖLDER*–Räume $C^{p,\alpha}(G)$ sind nun definiert als die Menge der beschränkten Funktionen aus $C^p(G)$, deren Ableitungen der Ordnung p gleichmäßig* HÖLDER*–stetig mit Exponent α sind.*

Existenz und Eindeutigkeit des direkten Streuproblems und die stetige Abhängigkeit der Lösung vom einfallenden Feld können als Satz formuliert werden:

Satz 2.2 *Sei $n \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ mit dem Exponenten $0 < \alpha < 1$ und $\operatorname{supp}(n-1)$ kompakt. Dann besitzt das Streuproblem (1.2), (1.5), (1.6) und (1.7) eine eindeutige Lösung $E, H \in C^1(\mathbb{R}^3)$, die stetig von dem einfallenden Feld E^i, H^i im Sinne der Maximumsnorm abhängt.*

Beweis: Siehe [Colton,Kress;1992] Theorem 9.4 und Theorem 9.5. □

Werden explizit Lösungen des direkten Streuproblems in $C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ gesucht, hat man:

Satz 2.3 *Sei der Brechungsindex n wie in Satz 2.2. Dann ist das Lösen des Streuproblems (1.2), (1.5), (1.6) und (1.7) mit Lösungen in* $C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ *äquivalent mit dem Lösen der Integralgleichung*

$$E(x) = E^i(x) - k^2 \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x,y)(1-n(y))E(y)\,\mathrm{d}y + \nabla \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla n(y)}{n(y)} \cdot E(y)\Phi(x,y)\,\mathrm{d}y \quad (2.1)$$

in $\mathbb{R}^3$*, wobei* $\Phi(x,y) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}/4\pi|x-y|$ *die Fundamentallösung der* HELMHOLTZ–*Gleichung ist.*

Beweis: Siehe [Colton,Kress;1992] Theorem 9.1 und 9.2. □

Wir werden das direkte Problem ausschließlich für das elektrische Feld angehen. Im Folgenden werden höhere Regularitätsvoraussetzungen an das elektrische Feld E gestellt. Wir wollen untersuchen, was die hinreichenden Bedingungen dafür sind.

2.1 Regularität des elektrischen Feldes E

Mit Blick auf die Integralgleichung (2.1) für E macht es Sinn, Aussagen über die Regularität des Volumenpotentials

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(y) \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{|x-y|}\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x-z) \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|z|}}{|z|}\,\mathrm{d}z \quad (2.2)$$

mit $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^3)$ zu treffen. Entscheidend ist nun der folgende Satz:

Satz 2.4 *Sei* $0 < \alpha < 1$*. Das Volumenpotential u aus Gleichung (2.2) existiert als uneigentliches Integral für alle* $x \in \mathbb{R}^3$ *und hat folgende Eigenschaften: Ist* $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^3)$*, dann ist* $u \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ *und es darf unter dem Integralzeichen differenziert werden. Ist weiter* $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^3) \cap C^{p,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ *für* $p \geq 0$*, dann ist* $u \in C^{p+2,\alpha}(\mathbb{R}^3)$*.*

Beweis: Die obigen Aussagen und die letzte für $p = 0$ sind [Gilbarg,Trudinger;1977] Kapitel 4 und [Colton,Kress;1992] Theorem 8.1 entnommen. Die Regularitätsaussage für $p \geq 1$ ist dann ein Korollar. □

Mit Hilfe des obigen Satzes sieht man ein: Ist $E \in C(\mathbb{R}^3)$ Lösung der Integralgleichung (2.1) mit $n \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$, so ist sogar $E \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$, denn $n-1$ hat einen kompakten Träger. Wird nun die Regularität von n erhöht, nämlich $n \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3)$, dann folgt wieder aus obigen Satz und der Integralgleichung (2.1), dass $E \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ gilt. Induktiv aus dem eben Gesagten und Satz 2.3 folgt:

Satz 2.5 *Ist $E \in C(\mathbb{R}^3)$ Lösung der Integralgleichung (2.1) und $n \in C^{p,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ mit $p \geq 1$, dann ist $E \in C^{p,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ und Lösung des Streuproblems (1.2), (1.5), (1.6) und (1.7).*

In der weiteren Darstellung wird die Annahme gemacht, dass für Lösungen der MAXWELL–Gleichungen $E \in C^2(\mathbb{R}^3)$ gilt. Beschränken wir uns auf den Teilraum $C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3) \subset C^2(\mathbb{R}^3)$, so ist es nach Satz 2.5 hinreichend, wenn für den Brechungsindex $n \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ gilt. Damit kann die Operatorgleichung $\operatorname{rot}\operatorname{rot} = -\Delta + \nabla \operatorname{div}$ auf E angewendet werden. Dies und die beiden Gleichungen in (1.2) ergeben eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für das elektrische Feld E:

$$\Delta E(x) - \nabla \operatorname{div} E(x) + k^2 n(x) E(x) = 0. \tag{2.3}$$

Für jedes $n \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ erhalten wir also eine Lösung $E \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ des direkten Streuproblems, die auch Gleichung (2.3) erfüllt. Andere Autoren (siehe zum Beispiel [Ammari,Bao;2001]) verzichten auf höhere Differenzierbarkeitseigenschaften und arbeiten mit der Differentialgleichung

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} E - k^2 n(x) E(x) = 0. \tag{2.4}$$

Eine Lösung von (2.3) zusammen mit der Definition

$$H(x) := \frac{1}{\mathrm{i}k} \operatorname{rot} E(x) \tag{2.5}$$

ist andererseits wieder Lösung der MAXWELL–Gleichungen (1.2). Denn (2.5) entspricht schon der ersten Gleichung aus (1.2) und durch Anwendung der Operatorgleichung $\operatorname{rot}\operatorname{rot} = -\Delta + \nabla \operatorname{div}$ auf (2.3) erhält man die Darstellung (2.4). Nach der Definition (2.5) ist dies aber nichts anderes als

$$\operatorname{rot} H + \mathrm{i}kE(x) = 0,$$

was die Gültigkeit der zweiten Gleichung aus (1.2) zeigt. Unter der Annahme $E \in C^2(\mathbb{R}^3)$ sind die Differentialgleichungen (2.3) und (1.2) also äquivalent.

2.2 Elliptizität

Die Differentialoperatoren $\operatorname{rot}\operatorname{rot}$ aus (2.4) und $\Delta - \nabla \operatorname{div}$ aus (2.3) sind nicht elliptisch. Um dies einzusehen werden einige Sprechweisen eingeführt:
Sei $P(\xi)$ ein Polynom mit konstanten Koeffizienten in den m Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_m$, dann verstehen wir unter der Bezeichnung $P(D)$ den Differentialoperator, den man erhält, wenn die ξ_j durch $\partial/\partial x_j$ ersetzt werden. Die Ordnung von P bezeichnen wir

mit $\operatorname{ord} P$. Das charakteristische Polynom $P^0(\xi)$ erhält man aus $P(\xi)$ durch Streichung aller Terme kleinerer Ordnung als $\operatorname{ord} P$. Das heißt, für ein konstantens Polynom ist $P^0(\xi) = P(\xi)$ und für ein nicht konstantes Polynom $\partial P^0(\xi)/\partial \xi_j = \partial P(\xi)/\partial \xi_j$ für alle j.

Sei weiter

$$\sum_{j=1}^{N} P_{i,j}(D) u_j = F_i, \qquad i = 1, \ldots, N \tag{2.6}$$

ein System von N partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten in N Unbekannten. In [Hörmander;1976] Kapitel 10 findet sich:

Definition 2.6 *Das System (2.6) heißt elliptisch im Sinne von Douglis und Nirenberg, wenn es ganze Zahlen $t_j, s_i \geq 0$, $i, j = 1, \ldots, N$, gibt, so dass* $\operatorname{ord} P_{i,j} \leq t_j - s_i$ *und*

$$\det(\tilde{P}^0_{i,j}(\xi)) \neq 0, \qquad \textit{falls } 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^m. \tag{2.7}$$

Dabei gelte mit dem charakteristischen Polynom $P^0_{i,j}(\xi)$ des Polynoms $P_{i,j}(\xi)$:

$$\tilde{P}^0_{i,j}(\xi) := \begin{cases} P^0_{i,j}(\xi) & \operatorname{ord} P^0_{i,j} = t_j - s_i, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Für $N = 1$ erhält man die übliche Definition für einen elliptischen Operator.

Es wird nun gezeigt, dass der Differentialoperator $\Delta - \nabla \operatorname{div}$ nicht elliptisch ist. Angewendet auf E lautet er ausführlich

$$\Delta E - \nabla \operatorname{div} E = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 E_1}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 E_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 E_3}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 E_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 E_2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 E_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 E_3}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 E_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 E_3}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 E_1}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 E_2}{\partial x_2 \partial x_3} \end{pmatrix}.$$

Seine zugehörigen Polynome $P_{i,j}(\xi)$, $i, j = 1, 2, 3$, haben in einer Matrix zusammengefasst die Gestalt

$$P := \begin{pmatrix} \xi_2^2 + \xi_3^2 & -\xi_1\xi_2 & -\xi_1\xi_3 \\ -\xi_1\xi_2 & \xi_1^2 + \xi_3^2 & -\xi_2\xi_3 \\ -\xi_1\xi_3 & -\xi_2\xi_3 & \xi_1^2 + \xi_2^2 \end{pmatrix}.$$

Mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $P = -A^2$. Da $\operatorname{ord} P_{i,j} = 2$, ist $t_j - s_i \geq 2$, $i, j = 1, 2, 3$. Wählen wir zunächst $t_j - s_i = 2$ für alle i, j, so ist die Bedingung aus Gleichung (2.7) nicht erfüllt, denn es gilt $\det A = 0$ und $\tilde{P}^0_{i,j} = P_{i,j}$. Für alle weiteren gültigen Konfigurationen von t_j, s_i wird mindestens immer eine Spalte von $(\tilde{P}^0_{i,j})_{i,j}$ zu Null, so dass auch dann Bedingung (2.7) nicht gilt.

Insgesamt ist somit gezeigt, dass der Differentialoperator $\Delta - \nabla \operatorname{div}$ nicht elliptisch ist. Das macht eine Stabilitätsanalyse für die numerische Lösung des Anfangswertproblems mit den Methoden aus Abschnitt 2.4.1 unmöglich. Wir wollen deshalb eine andere Differentialgleichung für E herleiten:

Umstellen von Gleichung (1.4) liefert

$$\operatorname{div} E(x) = -\frac{\nabla n(x)}{n(x)} \cdot E(x). \tag{2.8}$$

Die rechte Seite von (2.8) ist aus physikalischen Gründen immer wohldefiniert, denn wegen der Beschränkung für die Lichtgeschwindigkeit ist nach [Born,Wolf;1999] Seite 11 $\operatorname{Re} n(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.
Die Gleichungen (2.3) und (2.8) lassen sich nun kombinieren:

$$\Delta E(x) + \nabla \left(\frac{\nabla n(x)}{n(x)} \cdot E(x) \right) + k^2 n(x) E(x) = 0. \tag{2.9}$$

Der Differentialoperator obiger Gleichung ist von der Form

$$\Delta + \sum_{|\alpha| \leq 1} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}},$$

wobei $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ mit $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, 2, 3$. Er ist also eine gestörte Form des elliptischen Operators Δ und damit selbst elliptisch. Außerhalb von $\operatorname{supp}(n-1)$ reduziert sich die Differentialgleichung (2.9) sogar auf die Helmholtz–Gleichung.
Gleichung (2.9) ist die zentrale Gleichung für weitere Untersuchungen. Sie wurde in der Literatur über „Streuung elektromagnetischer Wellen“ schon früher verwendet, siehe zum Beispiel [Semenov et al;1999] oder [Born,Wolf;1999] Kapitel 13. Dort wird allerdings nicht darauf eingegangen, ob eine Lösung von (2.9) die Maxwell–Gleichungen (1.2) bzw. Gleichung (2.3) erfüllt, was keineswegs auf der Hand liegt. Denn für eine Lösung E der Gleichung (2.9) ist nicht einsichtig, dass auch $\operatorname{div}(nE) = 0$ gilt. Dies zu beweisen, ist Gegenstand des nächsten Abschnitts.
Außerdem wird eine Stabilitätsanalyse in Abschnitt 2.4.1 zeigen, dass Gleichung (2.9) für die numerische Lösung des Anfangswertproblems geeignet ist.

2.3 Äquivalente Formulierung der Maxwell–Gleichungen

Zunächst werden einige Lemmata zitiert:

Lemma 2.7 *Erfüllen Lösungen der homogenen* Maxwell–*Gleichungen (1.5) die* Silver–Müller *Ausstrahlungsbedingung (1.7), so erfüllen die kartesischen Komponenten von E die* Sommerfeld*sche Ausstrahlungsbedingung (1.11).*
Ist umgekehrt E Lösung der homogenen Helmholtz–*Gleichung und* $\operatorname{div} E = 0$, *dann erfüllen E und $H := \operatorname{rot} E/\mathrm{i}k$ die* Silver–Müller *Ausstrahlungsbedingung (1.7), wenn die kartesischen Komponenten von E die* Sommerfeld*sche Ausstrahlungsbedingung (1.11) erfüllen.*

Beweis: Siehe [Colton,Kress;1983] Korollar 4.3 und 4.7. □

Lemma 2.8 *Sei E Lösung der* Helmholtz–*Gleichung*

$$\Delta E + k^2 E = 0.$$

Dann ist äquivalent:

- *E erfüllt die Ausstrahlungsbedingung*
$$\operatorname{rot} E \times \frac{x}{|x|} + \frac{x}{|x|} \operatorname{div} E - \mathrm{i}kE = o(|x|^{-1}) \tag{2.10}$$
gleichmäßig für alle Richtungen $x/|x|$.

- *Die kartesischen Komponenten von E erfüllen die* Sommerfeld*sche Ausstrahlungsbedingung (1.11).*

Beweis: Siehe [Colton,Kress;1983] Korollar 4.14. □

Lemma 2.9 *Sei $E \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}) \cap C(\overline{\mathbb{R}^3 \setminus D})$ Lösung der* Helmholtz–*Gleichung*

$$\Delta E + k^2 E = 0,$$

wobei zusätzlich gefordert wird, dass die Funktionen $\operatorname{div} E, \operatorname{rot} E$ *stetig auf den Rand von $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ fortgesetzt werden können und E der Ausstrahlungsbedingung*

$$\operatorname{rot} E \times \frac{x}{|x|} + \frac{x}{|x|} \operatorname{div} E - \mathrm{i}kE = o(|x|^{-1})$$

gleichmäßig für alle Richtungen $x/|x|$ genügt. Dann ist

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} \int_{\partial D} \nu(y) \times E(y) \Phi(x,y)\, \mathrm{d}s(y) - \nabla \int_{\partial D} \nu(y) \cdot E(y) \Phi(x,y)\, \mathrm{d}s(y) \\ &- \int_{\partial D} [\operatorname{rot} E(y) \times \nu(y) + \nu(y) \operatorname{div} E(y)] \Phi(x,y)\, \mathrm{d}s(y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in D, \\ E(x) & \text{falls } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}. \end{cases} \end{aligned}$$

Dabei ist $\nu(y)$ *die äußere Normale von* D *an der Stelle* $y \in \partial D$ *und* $\Phi(x,y) = \exp(\mathrm{i}k|x-y|)/4\pi|x-y|$ *die Fundamentallösung der* HELMHOLTZ*–Gleichung.*

Beweis: Siehe [Colton,Kress;1983] Theorem 4.13. □

Bemerkung

Das Lemma 2.7 bezieht sich eigentlich nur auf Lösungen der homogenen MAXWELL–Gleichungen (1.5). Weil hier $\mathrm{supp}(n-1) \subset D$ als kompakte Menge vorausgesetzt ist, erfüllt eine Lösung E, H der allgemeinen MAXWELL–Gleichungen (1.2) im Außenraum $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ die homogene MAXWELL–Gleichung (1.5), so dass zum Beispiel durch Anwendung von Theorem 4.1 aus [Colton,Kress;1983] eine Lösung der homogenen MAXWELL–Gleichung in ganz $\mathbb{R}^3$ konstruiert werden kann, die im Außenraum $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ mit der Lösung der allgemeinen MAXWELL–Gleichung übereinstimmt. Somit gilt Lemma 2.7 hier auch für die allgemeine MAXWELL–Gleichung und wegen der höheren Regularitätsvoraussetzung $E \in C^2(\mathbb{R}^3)$ auch für die Differentialgleichung zweiter Ordnung (2.3).
Analoge Argumente gelten auch für Lemma 2.8.

Das folgende Lemma wird den Äquivalenzbeweis zwischen den MAXWELL–Gleichungen (1.2) und der Differentialgleichung zweiter Ordnung (2.9) für das elektrische Feld E auf einen Eindeutigkeitsbeweis für eine HELMHOLTZ–Gleichung zurückführen. Dabei wird allerdings eine höhere Glattheit für die Komponenten des elektrischen Feldes E und damit des Brechungsindex n verlangt, nämlich $E, n \in C^3(\mathbb{R}^3)$. Dass für $n \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ eine Lösung $E \in C^3(\mathbb{R}^3)$ der Differentialgleichung (2.9) existiert, ist schon gezeigt worden, denn wir könnten die Lösung der Integralgleichung (2.1) nehmen.

Lemma 2.10 *Sei* $E \in C^3(\mathbb{R}^3)$ *Lösung von*

$$\Delta E(x) + \nabla\left(\frac{\nabla n(x)}{n(x)} \cdot E(x)\right) + k^2 n(x) E(x) = 0 \tag{2.11}$$

und $n \in C^3(\mathbb{R}^3)$, *dann erfüllt*

$$u(x) := \frac{1}{n(x)} \operatorname{div}(n(x)E(x)) \tag{2.12}$$

die HELMHOLTZ*–Gleichung*

$$\Delta u + k^2 n u = 0.$$

Beweis: Der Beweis wird durch einfaches Nachrechnen geführt. Wegen $E \in C^3(\mathbb{R}^3)$ ist der div-Operator auf (2.9) anwendbar und kann mit dem Δ-Operator vertauscht werden:

$$\Delta \operatorname{div} E(x) + \Delta \left(\frac{\nabla n(x)}{n(x)} \cdot E(x) \right) + k^2 \operatorname{div}(n(x)E(x)) = 0.$$

Wegen $n \in C^3(\mathbb{R}^3)$ ist weiter

$$\Delta u(x) = \Delta \left(\operatorname{div} E(x) + \frac{\nabla n(x)}{n(x)} \cdot E(x) \right) = \Delta \operatorname{div} E(x) + \Delta \left(\frac{\nabla n(x)}{n(x)} \cdot E(x) \right).$$

Wendet man nun die Definition (2.12) für u auf den dritten Term in (2.11) an, folgt

$$\Delta u + k^2 n u = 0,$$

also die Behauptung. □

Ein notwendiges weiteres Resultat mit einem längeren Beweis wird hier ebenfalls in Form eines Lemmas wiedergegeben.

Lemma 2.11 *Sei E wie in Lemma 2.9, dann erfüllt* $\operatorname{div} E$ *die* SOMMERFELD*sche Ausstrahlungsbedingung, nämlich*

$$\frac{x}{|x|} \cdot \nabla \operatorname{div} E(x) - \mathrm{i}k \operatorname{div} E(x) = \mathrm{o}(|x|^{-1})$$

gleichmäßig für alle Richtungen $x/|x|$.

Beweis: Für $x \notin \overline{D}$ gilt Lemma 2.9:

$$\begin{aligned} E(x) = \operatorname{rot} \int_{\partial D} \nu(y) \times E(y) \Phi(x,y) \,\mathrm{d}s(y) - \nabla \int_{\partial D} \nu(y) \cdot E(y) \Phi(x,y) \,\mathrm{d}s(y) \\ - \int_{\partial D} [\operatorname{rot} E(y) \times \nu(y) + \nu(y) \operatorname{div} E(y)] \Phi(x,y) \,\mathrm{d}s(y). \end{aligned}$$

Man beachte, dass hier auf der rechten Seite beliebig oft unter dem Integral differenziert werden darf. Wird nun die Operatorgleichung $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$ und $\Delta_x \Phi = -k^2 \Phi$ benutzt, folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} E(x) = k^2 \int_{\partial D} \nu(y) \cdot E(y) \Phi(x,y) \,\mathrm{d}s(y) \\ - \int_{\partial D} [\operatorname{rot} E(y) \times \nu(y) + \nu(y) \operatorname{div} E(y)] \cdot \nabla_x \Phi(x,y) \,\mathrm{d}s(y). \end{aligned}$$

Nach Anwendung der Richtungsableitung $x/|x| \cdot \nabla$, schreibt sich obige Gleichung als

$$\begin{aligned} \frac{x}{|x|} \cdot \nabla \operatorname{div} E^s(x) = k^2 \int_{\partial D} \nu(y) \cdot E^s(y) \frac{x}{|x|} \cdot \nabla \Phi(x,y) \,\mathrm{d}s(y) \\ - \int_{\partial D} [\operatorname{rot} E^s(y) \times \nu(y) + \nu(y) \operatorname{div} E^s(y)] \cdot \left(\frac{x}{|x|} \cdot \nabla \right) \nabla_x \Phi(x,y) \,\mathrm{d}s(y). \end{aligned}$$

Um die SOMMERFELDsche Ausstrahlungsbedingung für $\operatorname{div} E$ zu überprüfen, subtrahiert man die beiden letzten Gleichungen voneinander und schätzt die Differenz für große $|x|$ ab. Für $x \notin \overline{D}$ folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{|x|} \cdot \nabla \operatorname{div} E(x) - \mathrm{i}k \operatorname{div} E(x) = \\
&\qquad k^2 \int_{\partial D} \nu(y) \cdot E(y) \left(\frac{x}{|x|} \cdot \nabla \Phi(x,y) - \mathrm{i}k\Phi(x,y) \right) \mathrm{d}s(y) \\
&- \int_{\partial D} [\operatorname{rot} E(y) \times \nu(y) + \nu(y) \operatorname{div} E(y)] \cdot \left[\left(\frac{x}{|x|} \cdot \nabla_x \right) \nabla_x \Phi(x,y) - \mathrm{i}k \nabla_x \Phi(x,y) \right] \mathrm{d}s(y).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Es genügt nun zu zeigen, dass der Betrag der Integranden für große $|x|$ von der Ordnung $\mathrm{O}(|x|^{-2})$ ist. Mit der Beziehung

$$\nabla_x \Phi(x,y) = \left(\mathrm{i}k \frac{x-y}{|x-y|} - \frac{x-y}{|x-y|^2} \right) \Phi(x,y) \tag{2.14}$$

gilt für folgenden Term aus dem ersten Integral

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{|x|} \cdot \nabla \Phi(x,y) - \mathrm{i}k\Phi(x,y) = \\
&\qquad \left(\mathrm{i}k \left[\frac{x \cdot (x-y)}{|x||x-y|} - 1 \right] - \frac{x \cdot (x-y)}{|x||x-y|^2} \right) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{4\pi|x-y|}.
\end{aligned}$$

Der Betrag des Terms in den [ ]-Klammern lässt sich durch $\mathrm{O}(|x|^{-1})$ abschätzen, denn sei o.B.d.A $y \in S^2$, dann ist

$$\begin{aligned}
0 \le 1 - \frac{x \cdot (x-y)}{|x||x-y|} &\le 1 - \frac{x \cdot (x - \frac{x}{|x|})}{|x||x - \frac{x}{|x|}|} \\
&= \frac{|x||x - \frac{x}{|x|}| - |x|^2 + |x|}{|x||x - \frac{x}{|x|}|} \\
&\le \frac{2|x|}{|x||x - \frac{x}{|x|}|} = \frac{2}{|x||1 - \frac{1}{|x|}|}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Also ist der Betrag des Integranden im ersten Integral in (2.13) von der Ordnung $\mathrm{O}(|x|^{-2})$. Wird diesmal Formel (2.14) auf den Term im zweiten Integral in (2.13) angewendet, folgt

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x}{|x|} \cdot \nabla_x \right) \nabla_x \Phi(x,y) - \mathrm{i}k \nabla_x \Phi(x,y) = \\
&\quad \left(\frac{x}{|x|} \cdot \nabla \right) \left[\mathrm{i}k \frac{x-y}{|x-y|} - \frac{x-y}{|x-y|^2} \right] \Phi(x,y) + \left[k^2 \frac{x-y}{|x-y|} - \mathrm{i}k \frac{x-y}{|x-y|^2} \right] \Phi(x,y).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Der erste Term auf der rechten Seite von (2.16) berechnet sich zu

$$\left[\mathrm{i}k\frac{x}{|x||x-y|} - \mathrm{i}k|x|\frac{x-y}{|x-y|^3} - \frac{x}{|x||x-y|^2} + 2|x|\frac{x-y}{|x-y|^4}\right]\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$
$$+\left(\mathrm{i}k\frac{x-y}{|x-y|} - \frac{x-y}{|x-y|^2}\right)\left(\mathrm{i}k\frac{x\cdot(x-y)}{|x||x-y|} - \frac{x\cdot(x-y)}{|x||x-y|^2}\right)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{4\pi|x-y|}.$$

Der Betrag des ersten Terms im obigen Ausdruck verhält sich für große $|x|$ wie $\mathrm{O}(|x|^{-2})$. Der zweite Term enthält allerdings den Ausdruck

$$-k^2\frac{x-y}{|x-y|}\frac{x\cdot(x-y)}{|x||x-y|}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{4\pi|x-y|}.$$

Sein Betrag ist für große $|x|$ jedoch nur von der Ordnung $\mathrm{O}(|x|^{-1})$. Jedoch zusammen mit dem zweiten Term auf der rechten Seite von (2.16), dessen Betrag sich ebenfalls wie $\mathrm{O}(|x|^{-1})$ verhält, bekommen wir den Ausdruck

$$k^2\frac{x-y}{|x-y|}\left(1-\frac{x\cdot(x-y)}{|x||x-y|}\right)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{4\pi|x-y|}.$$

Der Betrag dieses Ausdrucks (siehe (2.15)) sowie der Betrag aller verbleibenden Ausdrücke lässt sich durch $\mathrm{O}(|x|^{-2})$ abschätzen.
Insgesamt ist somit die SOMMERFELDsche Ausstrahlungsbedingung für $\operatorname{div} E$ erfüllt.
□

Durch die getroffenen Vorbereitungen lässt sich das zentrale Ergebnis dieses Abschnitts beweisen:

Satz 2.12 *Sei $E \in C^3(\mathbb{R}^3)$ Lösung von*

$$\Delta E(x) + \nabla\left(\frac{\nabla n(x)}{n(x)}\cdot E(x)\right) + k^2 n(x)E(x) = 0. \tag{2.17}$$

Ist weiter $n \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und erfüllt E^s die SOMMERFELD*sche Ausstrahlungsbedingung*

$$\frac{x}{|x|}\cdot\nabla E_j^s(x) - \mathrm{i}kE_j^s(x) = \mathrm{o}(|x|^{-1}), \qquad j=1,2,3, \tag{2.18}$$

gleichmäßig für alle Richtungen $x/|x|$, wobei wieder $E = E^i + E^s$ mit E^i Lösung von (1.5) ist, so sind E und $H := \operatorname{rot} E/\mathrm{i}k$ Lösung der MAXWELL*–Gleichungen (1.2). Außerdem erfüllen E^s und $H^s = H - \operatorname{rot} E^i/\mathrm{i}k$ die* SILVER–MÜLLER *Ausstrahlungsbedingung (1.7).*

Beweis: Nach Lemma 2.10 erfüllt $u := \operatorname{div}(nE)/n$ die HELMHOLTZ–Gleichung

$$\Delta u(x) + k^2 n(x)u(x) = 0. \tag{2.19}$$

Nach Voraussetzung erfüllt E^s die SOMMERFELDsche Ausstrahlungsbedingung, so dass nach Lemma 2.8 E^s die Ausstrahlungsbedingung

$$\operatorname{rot} E^s(x) \times \frac{x}{|x|} + \frac{x}{|x|} \operatorname{div} E^s(x) = \mathrm{o}(|x|^{-1})$$

gleichmäßig für alle Richtungen $x/|x|$ erfüllt. Deshalb erfüllt u die SOMMERFELDsche Ausstrahlungsbedingung nach Lemma 2.11, denn wegen $\operatorname{supp}(n-1) \subset D$ gilt außerhalb der Kugel D

$$u = \operatorname{div} E = \operatorname{div} E^s.$$

Folglich ist $u = 0$ die eindeutige Lösung der HELMHOLTZ–Gleichung (2.19). Mit der Definition für u ist also

$$\operatorname{div} E(x) = -\frac{\nabla n(x)}{n(x)}.$$

Die Lösung E von (2.17) erfüllt also

$$\Delta E(x) - \nabla \operatorname{div} E(x) + k^2 n(x) E(x) = 0.$$

Wegen $E \in C^3(\mathbb{R}^3)$ kann die Operatorgleichung $\operatorname{rot}\operatorname{rot} = -\Delta + \nabla \operatorname{div}$ angewendet werden. Es folgt

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} E(x) - k^2 n(x) E(x) = 0.$$

Schlussendlich definieren wir $H := \operatorname{rot} E/ik$. Damit ist gezeigt, dass E und H die MAXWELL–Gleichungen (1.2) erfüllen. Dass E^s und H^s zudem die SILVER–MÜLLER Ausstrahlungsbedingung erfüllen, zeigt Lemma 2.7, denn außerhalb von D gilt $\operatorname{div} E^s = 0$. □

2.4 Das Anfangswertproblem für das elektrische Feld in drei Dimensionen

Wesentlich für den PBP–Algorithmus ist das Lösen des Anfangswertproblems für das elektrische Feld, wie schon in Abschnitt 1.3.2 gezeigt wurde. Dies ist eine numerisch höchst unstabile Aufgabe. Für die skalare HELMHOLTZ–Gleichung in $\mathbb{R}^3$

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

liefert eine FOURIER–Transformation nach x_1, x_2

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} u(\xi_1, \xi_2, x_3) + (k^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2)\hat{u}(\xi_1, \xi_2, x_3) = 0.$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung, ihre allgemeine Lösung lautet

$$\hat{u}(\xi_1, \xi_2, x_3) = \sum_{j=1}^{2} c_j \, \mathrm{e}^{(-1)^j \mathrm{i}\sqrt{k^2-\xi_1^2-\xi_2^2}\, x_3} \, \hat{v}(\xi_1, \xi_2).$$

Die Unstabilität besteht nun darin, dass Fehler in v für $\xi_1^2 + \xi_2^2 > k^2$ exponentiell verstärkt werden.

Ziel des nächsten Abschnitts ist zu zeigen, dass die Unstabilität verschwindet, wenn die „hohen" Frequenzen von E vernachlässigt werden. So entsteht eine gefilterte Version von E, für die in Abschnitt 2.4.2 gezeigt wird, dass sie eine gute Näherung darstellt.

2.4.1 Stabilitätsanalyse

Sei das elektrische Feld $E = E^i + E^s$ Lösung von

$$\Delta E(x) + \nabla \left(\frac{\nabla n(x)}{n(x)} \cdot E(x) \right) + k^2 n(x) E(x) = 0.$$

E^i soll dabei die homogene Gleichung

$$\Delta E^i(x) + k^2 E^i(x) = 0$$

erfüllen und E^s die SOMMERFELDsche Ausstrahlungsbedingung (2.18). Das gestreute elektrische Feld E^s erfüllt dann

$$\begin{aligned} \Delta E^s(x) + \nabla \left(\frac{\nabla n(x)}{n(x)} \cdot E^s(x) \right) + k^2 n(x) E^s(x) &= R(x), \\ R(x) := -\nabla \left(\frac{\nabla n(x)}{n(x)} \cdot E^i(x) \right) - k^2 (n(x) - 1) E^i(x). & \end{aligned} \tag{2.20}$$

Für die weitere Darstellung erweist sich folgende Definition als sinnvoll:

$$S_{x_3} := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}. \tag{2.21}$$

Wir betrachten hier das Anfangswertproblem für E^s im Halbraum $x_3 > 0$. Auf der Ebene S_0 seien die Anfangswerte

$$E^s(x_1, x_2, 0) = G_1(x_1, x_2), \qquad \frac{\partial E^s(x_1, x_2, 0)}{\partial x_3} = G_2(x_1, x_2)$$

vorgegeben. Ziel ist zu zeigen, dass die Unstabilität verschwindet, wenn anstatt der Lösung E^s eine Näherung für E^s betrachtet wird: Wir definieren

$$\widehat{E}^s_\kappa(\xi_1, \xi_2, x_3) := \begin{cases} \widehat{E}^s(\xi_1, \xi_2, x_3) & \text{falls } |(\xi_1, \xi_2)| < \kappa, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.22}$$

mit einer noch festzulegenden Konstanten κ. Dabei ist $\widehat{E}^s$ die FOURIER–Transformierte von E^s in den Variablen x_1, x_2:

$$\widehat{E}^s(\xi_1, \xi_2, x_3) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} E^s(x_1, x_2, x_3)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x_1\xi_1 + x_2\xi_2)}\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$

Bemerkung 2.13 Die Bildung von $\widehat{E}^s(\xi_1, \xi_2, x_3)$ ist nicht im Raum der quadratintegrierbaren Funktionen $L_2(\mathbb{R}^2)$ möglich[1], da E^s die SOMMERFELDsche Ausstrahlungsbedingung erfüllt und damit automatisch

$$E^s(x) = \mathrm{O}(|x|^{-1})$$

gilt, [Colton,Kress;1992] Seite 71. Die Bildung der FOURIER–Transformation von E^s ist daher nur im distributiven Sinne zu verstehen. Das heißt $\widehat{E}^s$ ist ein bzgl. x_3 parametrisiertes lineares Funktional auf dem Raum $\mathcal{S}$ aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen $\phi(x_1, x_2)$, die nebst jeder Ableitung für $|x| \to \infty$ stärker als jede Potenz von $1/|x|$ gegen Null konvergieren. Siehe dazu §11 in [Walter;1994]. Es ist auch nicht klar, ob die Distribution $\widehat{E}^s$ eine reguläre Distribution ist, das heißt $\widehat{E}^s_\kappa(\xi_1, \xi_2, x_3)$ kann eventuell durch (2.22) nicht definiert werden. In diesem Fall könnte (2.22) ersetzt werden durch

$$\widehat{E}^s_\kappa(x_3) := \begin{cases} \widehat{E}^s(x_3) & \text{für alle offenen Mengen } G \subset \{(\xi_1, \xi_2) \,|\, |(\xi_1, \xi_2)| < \kappa\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Unabhängig davon ob $\widehat{E}^s_\kappa(\xi_1, \xi_2, x_3)$ eine reguläre oder irreguläre Distribution ist, ist $E_\kappa(x_1, x_2, x_3)$ in den Variablen x_1, x_2 eine ganze holomorphe Funktion. Denn $\widehat{E}^s_\kappa$ ist in den ersten beiden Variablen eine Distribution mit kompaktem Träger, Satz von PALEY–WIENER [Walter;1994].

Im Hinblick auf die oben erwähnten theoretischen Aspekte, werden im Vorgriff einige noch folgende Resultate genannt. Sei $x_3 \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $S_{x_3} \cap \mathrm{supp}(n-1) = \emptyset$, dann wird im Abschnitt 2.4.2 gezeigt:

- $\widehat{E}^s(\xi_1, \xi_2, x_3)$ bzw. $\widehat{E}^s_\kappa(\xi_1, \xi_2, x_3)$ ist eine reguläre Distribution.
- Für $\kappa < k$ gilt $\widehat{E}^s_\kappa$, $E^s_\kappa \in L_2(\mathbb{R}^2)$ bzgl. der ersten beiden Variablen.
- $|\widehat{E}^s(\xi_1, \xi_2, x_3)|$ fällt exponentiell in ξ_1, ξ_2 für $|(\xi_1, \xi_2)| > k$.

Doch zunächst wird die Stabilität des Anfangswertproblems untersucht. Dazu benötigen wir eine Erweiterung von Proposition 1 aus [Natterer;1999]:

[1]Elemente aus $L_2(\mathbb{R}^2)$ werden hier in einer laxen Sprechweise als Funktionen behandelt.

Lemma 2.14 *Sei $V \in C^2([0,\infty], H)$ eine Lösung von*

$$V''(t) + b(t)V'(t) + A(t)V(t) = R, \quad t > 0, \tag{2.23}$$

wobei $b(t)$ und $A(t) = A_1(t) + A_2(t)$ lineare beschränkte Operatoren auf dem HILBERT*raum H sind, die außerdem folgende Bedingungen erfüllen:*

$$A_1^* = A_1, \tag{2.24}$$

$$0 \le (V, A_1 V) \le \beta_1^2 (V,V), \tag{2.25}$$

$$(V, A_1' V) \le \gamma_1 (V,V), \tag{2.26}$$

$$\|A_2\| \le \beta_2, \tag{2.27}$$

$$\|b\| \le \beta. \tag{2.28}$$

Dabei sind β, β_1, β_2, γ_1 reelle Zahlen und $(\cdot\,,\cdot)$ das innere Produkt in H. Mit der Definition $\phi := (V',V') + (V, A_1 V)$ gilt dann die Abschätzung

$$\phi(t) \le \left(\phi(0) + 2t(\beta+\gamma_1)\|V(0)\| + \int_0^t \|R(\tau)\|^2 \,\mathrm{d}\tau\right) \mathrm{e}^{(1+\beta_2+2\beta+T^2(\beta_2+\gamma_1))} \tag{2.29}$$

für $0 < t \le T$.

Beweis: Linksmultiplikation von (2.23) mit V' führt zu

$$(V',V'') + (V',bV') + (V',AV) = (V',R). \tag{2.30}$$

Wegen (2.24) ist

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V',V') = \mathrm{Re}(V',V''),$$
$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V,A_1V) = \mathrm{Re}(V',A_1V) + \frac{1}{2}(V,A_1'V),$$

was zusammen mit dem Realteil von (2.30) die Darstellung

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V',V') + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V,A_1V) = \mathrm{Re}(V',R) - \mathrm{Re}(V',A_2V) - \mathrm{Re}(V',bV') + \frac{1}{2}(V,A_1'V)$$

erlaubt. Integration nach t liefert

$$\phi(t) = \phi(0) + 2\int_0^t \left[\mathrm{Re}(V',R) - \mathrm{Re}(V',A_2V) - \mathrm{Re}(V',bV') + \frac{1}{2}(V,A_1'V)\right] \mathrm{d}\tau.$$

Dies ergibt zusammen mit (2.26), (2.27), (2.28) und der CAUCHY–SCHWARZschen Ungleichung die Abschätzung

$$\phi(t) \le \phi(0) + \int_0^t [2\|V'\|\|R\| + 2\beta_2\|V'\|\|V\| + 2\beta\|V'\|^2 + \gamma_1\|V\|^2]\,\mathrm{d}\tau.$$

Wird nun die Ungleichung $ab \leq (a^2 + b^2)/2$ für die ersten beiden Terme unter dem Integral auf der rechten Seite obiger Gleichung benutzt, folgt

$$\phi(t) \leq \phi(0) + \int_0^t [\|V'\|^2 + \|R\|^2 + \beta_2\|V'\|^2 + \beta_2\|V\|^2 + 2\beta\|V'\|^2 + \gamma_1\|V\|^2] \,\mathrm{d}\tau.$$

Mit Hilfe der Abschätzung

$$\int_0^t \|V(\tau)\|^2 \,\mathrm{d}\tau \leq 2t\|V(0)\|^2 + t^2 \int_0^t \|V'(\tau)\|^2 \,\mathrm{d}\tau$$

des folgenden Lemmas 2.15 und $\|V'\|^2 \leq \phi(t)$ folgt weiter aus der letzten Abschätzung für $\phi(t)$

$$\begin{aligned}\phi(t) &\leq \phi(0) + 2t(\beta_2 + \gamma_1)\|V(0)\|^2 + \int_0^t \|R\|^2 \,\mathrm{d}\tau \\ &\quad + (1 + \beta_2 + 2\beta + T^2(\beta_2 + \gamma_1)) \int_0^t \|V'\|^2 \,\mathrm{d}\tau \\ &\leq c_1(t) + c_2 \int_0^t \phi(\tau) \,\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

für $0 < t \leq T$. Hierbei ist

$$c_1(t) := \phi(0) + 2t(\beta + \gamma_1)\|V(0)\|^2 + \int_0^t \|R\|^2 \,\mathrm{d}\tau$$

und

$$c_2 := 1 + \beta_2 + 2\beta + T^2(\beta_2 + \gamma_1).$$

Die Behauptung des Lemmas folgt nun aus GRONWALLs Ungleichung [Walter;1972] Seite 214. □

Nachzutragen ist noch das Lemma

Lemma 2.15 *Sei $V \in C^1([0,\infty], H)$, wobei H ein* HILBERT*raum ist. Dann gilt die Abschätzung*

$$\int_0^t \|V(\tau)\|^2 \,\mathrm{d}\tau \leq 2t\|V(0)\|^2 + t^2 \int_0^t \|^2 V'\| \,\mathrm{d}\tau.$$

Beweis: Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist

$$V(t) = V(0) + \int_0^t V'(\tau) \,\mathrm{d}\tau.$$

Dies führt zu der Abschätzung

$$\|V(t)\| \leq \|V(0)\| + \int_0^t \|V'(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau,$$

bzw. mit der Abschätzung $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$ zu

$$\begin{aligned}\|V(t)\|^2 &\le 2\|V(0)\|^2 + 2\left(\int_0^t \|V'(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau\right)^2\\ &\le 2\|V(0)\|^2 + 2t\int_0^t \|V'(\tau)\|^2\,\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt noch die CAUCHY–SCHWARZsche Ungleichung benutzt wurde. Integration beider Seiten nach t liefert

$$\int_0^t \|V(\tau)\|^2\,\mathrm{d}\tau \le 2t\|V(0)\|^2 + 2\int_0^t \tau \int_0^\tau \|V'(s)\|^2\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau.$$

Der letzte Term auf der rechten Seite lässt sich noch weiter abschätzen:

$$\begin{aligned}\int_0^t \tau \int_0^\tau \|V'(s)\|^2\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau &= \int_0^t \|V'(s)\|^2 \int_s^t \tau\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\\ &= \frac{1}{2}\int_0^t (t^2 - s^2)\|V'(s)\|^2\,\mathrm{d}s\\ &\le \frac{t^2}{2}\int_0^t \|V'(s)\|^2\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Damit hat man die Behauptung. □

Mit Hilfe von Lemma 2.14 lässt sich nun die Stabilität der Anfangswertaufgabe (2.20) beweisen. Der folgende Satz findet sich entsprechend für die HELMHOLTZ–Gleichung in zwei Raumdimensionen als Theorem 2 in [Natterer;1999].

Satz 2.16 *Sei E^s für $x_3 > 0$ Lösung der Differentialgleichung (2.20) unter Beachtung der* SOMMERFELD*schen Ausstrahlungsbedingung und der Randwerte*

$$E^s(x_1,x_2,0) = G_1(x_1,x_2), \qquad \frac{\partial E^s(x_1,x_2,0)}{\partial x_3} = G_2(x_1,x_2).$$

Weiter sei $n \in C^1(\mathbb{R}^3)$ und $n = n_1 + \frac{\mathrm{i}}{k}n_2$ eine Aufspaltung in Real- und Imaginärteil. Es gebe reelle Konstanten $\underline{M}_1$, $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, $\overline{M}_3$, $\overline{M}_4$, so dass

$$0 < \underline{M}_1 \le n_1 \le \overline{M}_1, \qquad \left|\frac{\partial n_1}{\partial x_3}\right| \le \overline{M}_1, \qquad |n_2| \le \overline{M}_2$$
$$\left|\frac{\nabla n}{n}\right| \le \overline{M}_3, \qquad \left|\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\nabla n}{n}\right| \le \overline{M}_4$$

gilt. Mit $\kappa \le k\sqrt{\underline{M}_1}$ sei außerdem $\widehat{E}^s_\kappa(x_3) \in L_2(\mathbb{R}^2)$ für alle x_3 mit $S_{x_3} \cap D \neq \emptyset$. Dann ist für $0 < x_3 \le \overline{X}_3$

$$\begin{aligned}\|E^{s\prime}_\kappa(x_3)\|^2 \le \mathrm{e}^{\alpha x_3}\Bigg[&(1 + 2x_3(\overline{M}_3 + k^2\overline{M}_1))\|G_{2,\kappa}\|^2 + k^2(1+\overline{M}_1)\|G_{1,\kappa}\|^2\\ &+ 2\left\|\nabla\left(\frac{\nabla n}{n}\cdot(E^s - E^s_\kappa)\right)\right\|^2 + 2k^4\|(n-1)(E^s - E^s_\kappa)\|^2\Bigg],\end{aligned}$$

wobei

$$\alpha = 1 + (1+\overline{X}_3^2)\sqrt{2k^2\overline{M}_2^2 + 2(\overline{M}_4^2 + 2\kappa^2\overline{M}_3^2)} + 2\overline{M}_4 + \overline{X}_3^2 k^2 \overline{M}_1.$$

Beweis: Die FOURIER–Transformation der Gleichung (2.20) bzgl. x_1 und x_2 schreibt sich als

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\widehat{E}^s(\xi_1,\xi_2,x_3) + (k^2-\xi_1^2-\xi_2^2)\widehat{E}^s(\xi_1,\xi_2,x_3) + \begin{pmatrix} \mathrm{i}\xi_1 \\ \mathrm{i}\xi_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \left(\frac{\nabla n}{n}\cdot E^s\right)^\wedge (\xi_1,\xi_2,x_3)$$
$$+ k^2((n-1)E^s)^\wedge(\xi_1,\xi_2,x_3)\,\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\eta_2 = \widehat{R}(\xi_1,\xi_2,x_3).$$

Wie am Anfang des Kapitels erläutert, ist der Ausdruck $\widehat{E}^s(\xi_1,\xi_2,x_3)$ nur im distributiven Sinne zu verstehen. Hingegen sind die FOURIER–Transformationen von $(n-1)E$ und R im klassischen Sinne möglich. Für $|(\xi_1,\xi_2)| \le \kappa$ schreibt sich obige Gleichung unter Verwendung der Definition (2.22) für E^s_κ als

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\widehat{E}^s_\kappa(\xi_1,\xi_2,x_3) + (k^2-\xi_1^2-\xi_2^2)\widehat{E}^s_\kappa(\xi_1,\xi_2,x_3) \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix} \mathrm{i}\xi_1 \\ \mathrm{i}\xi_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\nabla n}{n}\right)^\wedge (\xi_1-\eta_1,\xi_2-\eta_2,x_3)\cdot \widehat{E}^s_\kappa(\eta_1,\eta_2,x_3)\,\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\eta_2 \\
&\quad\quad + \frac{k^2}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}(n-1)^\wedge(\xi_1-\eta_1,\xi_2-\eta_2,x_3)\widehat{E}^s_\kappa(\eta_1,\eta_2,x_3)\,\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\eta_2 \\
&\quad\quad\quad = \hat{\varepsilon}(\xi_1,\xi_2,x_3) + \widehat{R}(\xi_1,\xi_2,x_3),
\end{aligned} \tag{2.31}$$

wobei

$$\hat{\varepsilon}(\xi_1,\xi_2,x_3) = -\begin{pmatrix} \mathrm{i}\xi_1 \\ \mathrm{i}\xi_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \left(\frac{\nabla n}{n}\cdot(E^s - E^s_\kappa)\right)^\wedge (\xi_1,\xi_2,x_3)$$
$$- k^2((n-1)(E^s-E^s_\kappa)^\wedge(\xi_1,\xi_2,x_3).$$

In den letzten beiden Formeln ist die FOURIER–Transformation ausschließlich im Raum $L_2(\mathbb{R}^2)$ ausgeführt worden. Das Lemma 2.19 im nächsten Abschnitt und die Voraussetzungen in diesem Satz garantieren nämlich $\widehat{E}^s_\kappa(x_3) \in L_2(\mathbb{R}^2)$ für alle x_3. Die inverse FOURIER–Transformation bzgl. ξ_1 und ξ_2 von $\hat{\varepsilon}$ ergibt

$$\varepsilon = -\nabla\left(\frac{\nabla n}{n}\cdot(E^s - E^s_\kappa)\right) - k^2(n-1)(E^s - E^s_\kappa).$$

Für festes ξ_1, ξ_2 kann für (2.31)

$$\widehat{E}^{s\,\prime\prime}_{\kappa}(x_3) + b(x_3)\widehat{E}^{s\,\prime}_{\kappa}(x_3) + A(x_3)\widehat{E}^{s}_{\kappa}(x_3) = \hat{\varepsilon}(x_3) + \widehat{R}(x_3)$$

geschrieben werden. Mit der Faltung $*$ bzgl. der ersten beiden Variablen ξ_1 und ξ_2 ist dabei

$$b(x_3)\widehat{E}^{s\,\prime}_{\kappa}(x_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{3} \left(\left(\frac{\nabla n}{n} \right)^{\wedge}_{j} * \frac{\partial}{\partial x_3} \widehat{E}^{s}_{\kappa,j} \right)(x_3)$$

und

$$\begin{aligned} A(x_3)\widehat{E}^{s}_{\kappa}(x_3) = {} & (k^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2)\widehat{E}^{s}_{\kappa}(\xi_1,\xi_2,x_3) + \frac{k^2}{2\pi}\left((n-1)^{\wedge} * \widehat{E}^{s}_{\kappa}\right)(x_3) \\ & + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\nabla n}{n} \right)^{\wedge}_{j} * \widehat{E}^{s}_{\kappa,j} \right)(x_3) \\ & + \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} \mathrm{i}\xi_1 \\ \mathrm{i}\xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} \left(\left(\frac{\nabla n}{n} \right)^{\wedge}_{j} * \widehat{E}^{s}_{\kappa,j} \right)(x_3). \end{aligned}$$

Um Lemma 2.14 anzuwenden, wird der HILBERTraum

$$H := \left\{ \widehat{E} = (\widehat{E}_1, \widehat{E}_2, \widehat{E}_3)^t \mid \widehat{E}_j = \widehat{E}_j(\xi_1,\xi_2,x_3),\ \widehat{E}_j(x_3) \in L_2(\mathbb{R}^2) \right\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$(\widehat{E},\widehat{F})_{|x_3} := \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{E} \cdot \overline{\widehat{F}} \,\mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2$$

benutzt. Die Variable x_3 übernimmt dabei die Rolle des Parameters t aus Lemma 2.14. Weiter benötigt man

$$A_1(x_3)\widehat{E}^{s}_{\kappa}(x_3) := (k^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2)\widehat{E}^{s}_{\kappa}(\xi_1,\xi_2,x_3) + \frac{k^2}{2\pi}((n_1-1)^{\wedge} * \widehat{E}^{s}_{\kappa})(x_3)$$

und

$$\begin{aligned} A_2(x_3)\widehat{E}^{s}_{\kappa}(x_3) := {} & \frac{\mathrm{i}k}{2\pi}((n_2 * \widehat{E}^{s}_{\kappa})(x_3) + \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\nabla n}{n} \right)^{\wedge}_{j} * \widehat{E}^{s}_{\kappa,j} \right)(x_3) \\ & + \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} \mathrm{i}\xi_1 \\ \mathrm{i}\xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} \left(\left(\frac{\nabla n}{n} \right)^{\wedge}_{j} * \widehat{E}^{s}_{\kappa,j} \right)(x_3). \end{aligned}$$

Wird die Isometrie der FOURIER–Transformation in L_2 benutzt, folgt

$$
\begin{aligned}
(A_1\widehat{E},\widehat{F})_{|x_3} &= ((k^2-\xi_1^2-\xi_2^2)\widehat{E},\widehat{F}) + \frac{k^2}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}((n_1-1)^\wedge * \widehat{E})\cdot\overline{\widehat{F}}\,\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2 \\
&= ((k^2-\xi_1^2-\xi_2^2)\widehat{E},\widehat{F}) + k^2\int_{\mathbb{R}^2}(n_1-1)E\cdot\overline{F}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,
\end{aligned}
$$

was

$$\beta_1^2 = k^2(1+\overline{M}_1), \qquad \gamma_1 = k^2\overline{M}_1$$

impliziert. Die Beschränktheit des Operators A_2 wird durch folgende Rechnung einsichtig:

$$
\begin{aligned}
\|A_2\|^2 &= \sup_{\|E\|=1}\|A_2\widehat{E}\|^2 \\
&= \sup_{\|E\|=1}\int_{\mathbb{R}^2}\left|\mathrm{i}k(n_2E)^\wedge + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\nabla n}{n}\right)\cdot E\right)^\wedge + \begin{pmatrix}\mathrm{i}\xi_1\\\mathrm{i}\xi_2\\0\end{pmatrix}\left(\frac{\nabla n}{n}\cdot E\right)^\wedge\right|^2\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2 \\
&\le \sup_{\|E\|=1} 2\int_{\mathbb{R}^2}\left[|\mathrm{i}kn_2E|^2 + \left|\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\nabla n}{n}\right)\cdot E\right|^2 + \kappa^2\left|\frac{\nabla n}{n}\cdot E\right|^2\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&\le 2k^2\overline{M}_2^2 + 2(\overline{M}_4^2+\kappa^2\overline{M}_3^2)\sup_{\|E\|=1}\int_{\mathbb{R}^2}|E|^2\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&= 2k^2\overline{M}_2^2 + 2(\overline{M}_4^2+\kappa^2\overline{M}_3^2).
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$\beta_2 = \sqrt{2k^2\overline{M}_2^2 + 2(\overline{M}_4^2+\kappa^2\overline{M}_3^2)}.$$

Es fehlt noch der Nachweis über die Beschränktheit des Operators b:

$$
\begin{aligned}
\|b\|^2 &= \sup_{\|E\|=1}\|b\widehat{E}\|^2 \\
&= \sup_{\|E\|=1}\int_{\mathbb{R}^2}\left|\left(\frac{\nabla n}{n}\cdot E\right)^\wedge\right|^2\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2 \\
&= \sup_{\|E\|=1}\int_{\mathbb{R}^2}\left|\frac{\nabla n}{n}\cdot E\right|^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&\le \overline{M}_3^2\sup_{\|E\|=1}\int_{\mathbb{R}^2}|E|^2\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&= \overline{M}_3^2.
\end{aligned}
$$

Also ist $\beta = \overline{M}_4$. Wird nun Lemma 2.14 angewendet, folgt

$$
\begin{aligned}
\|E_\kappa^{s\prime}(x_3)\|^2 &\le \phi(x_3) \\
&\le \mathrm{e}^{\alpha x_3} \Big[(1 + 2x_3(\overline{M}_3 + k^2\overline{M}_1))\|G_{2,\kappa}\|^2 + k^2(1+\overline{M}_1)\|G_{1,\kappa}\|^2 \\
&\quad + 2\left\|\nabla\left(\frac{\nabla n}{n}\cdot(E^s - E^s_\kappa)\right)\right\|^2 + 2k^4\|(n-1)(E^s - E^s_\kappa)\|^2 + 2\|R\|^2 \Big],
\end{aligned}
$$

also die Behauptung. □

Der eben gezeigte Satz zeigt die Beschränktheit von $\|E_\kappa^{s\prime}(x_3)\|$. Das Anfangswertproblem für E^s_κ ist also stabil lösbar wenn $\|(E^s - E^s_\kappa)(x_3)\|$ klein ist. Außerdem wäre die Eigenschaft $E^s \approx E^s_\kappa$ eine sinnvolle Forderung für den Vorwärtslöser. Dies alles ist Gegenstand des nächsten Abschnitts.

2.4.2 Die Helmholtz–Gleichung als Tiefpassfilter

Außerhalb der kompakten Menge $\operatorname{supp}(n-1) \subset D$ erfüllt das gestreute elektrische Feld die Helmholtz–Gleichung

$$\Delta E^s + k^2 E^s = 0.$$

Weil E^s die Silver–Müller Ausstrahlungsbedingung erfüllt, gilt nach Lemma 2.7, dass die kartesischen Komponenten von E^s der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung genügen. Mit Lemma 2.8 erlaubt Lemma 2.9 die Darstellung

$$E^s(x) = \int_{\partial D} \left[E(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial E(y)}{\partial \nu(y)}\Phi(x,y)\right] \mathrm{d}s(y) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}. \tag{2.32}$$

Hierbei ist

$$\Phi(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$

der Helmholtz–Kern. Zur Untersuchung des Frequenzverhaltens von $\widehat{E}^s(\xi_1,\xi_2,x_3)$ in einer Ebene $S_{x_3} := \{(x_1,x_2,x_3) \notin \overline{D} \,|\, x_3 = \text{const}\}$, genügt es wegen Gleichung (2.32) das Frequenzverhalten von $\Phi(x,y)$ bzw. von $\nabla_x \Phi(x,y)$ auf S zu untersuchen. Der Helmholtz–Kern $\Phi(x,y)$ ist für festes $y \in \mathbb{R}^3$ und festes $x_3 \in \mathbb{R}$ nicht in $L_1(\mathbb{R}^2)$ oder $L_2(\mathbb{R}^2)$. Die Fourier–Transformation für $\Phi(x,y)$ in x_1, x_2 ist deshalb im distributiven Sinne zu verstehen. Man siehe dazu zum Beispiel [Walter;1994] §11. In der folgenden Rechnung wird auf zwei Formeln aus [Oberhettinger;1973] zurückgegriffen. Es ist zu beachten, dass hier die eindimensionale Fourier–Transformation im Gegensatz zur Darstellung in [Oberhettinger;1973] mit dem Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}$ definiert wird:

$$\widehat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x.$$

In [Oberhettinger;1973] Tabelle 1 Zeile 95 findet sich die Formel

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\mathrm{e}^{-b\sqrt{a^2+x^2}}}{\sqrt{a^2+x^2}}, \\ \widehat{f}(\xi) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} K_0(a\sqrt{b^2+\xi^2}), \end{aligned}$$

wobei

$$K_0(x) = \int_0^\infty \cos(x \sinh t)\,\mathrm{d}t$$

die modifizierte Bessel–Funktion der Ordnung 0 ist, siehe [Abramowitz,Stegun;1965] Kapitel 9.6. Mit $a^2 = (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2$ und $b = -\mathrm{i}k$ ist

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}(\xi_1, x_2, x_3, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}4\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{|x-y|}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi_1 x_1}\ \mathrm{d}x_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}4\pi}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}y_1\xi_1} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\sqrt{x_1^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}}}{\sqrt{x_1^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi_1 x_1}\ \mathrm{d}x_1 \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}y_1\xi_1}\, K_0(\sqrt{\xi_1^2-k^2}\sqrt{(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}). \end{aligned}$$

Hierbei wurde im ersten Schritt die Integrationsvariable x_1 durch x_1+y_1 substituiert. Ähnlich wird eine weitere Formel aus [Oberhettinger;1973] Tabelle 1 Zeile 439

$$\begin{aligned} f(x) &= K_0(b\sqrt{a^2+x^2}), \\ \widehat{f}(\xi) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{b^2+\xi^2}}\, \mathrm{e}^{-a\sqrt{b^2+\xi^2}} \end{aligned}$$

benutzt, um

$$\widehat{\Phi}(\xi_1, \xi_2, x_3, y) = \frac{1}{8\pi^2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(y_1\xi_1+y_2\xi_2)}\, \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2-k^2}}\, \mathrm{e}^{-|x_3-y_3|\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2-k^2}} \tag{2.33}$$

zu erhalten.
Für $|(\xi_1,\xi_2)| > k$ fällt $|\widehat{\Phi}(\xi_1,\xi_2,x_3,y)|$ exponentiell in ξ_1, ξ_2 ab, wie der letzte Term auf der rechten Seite von (2.33) zeigt.
Bei der Untersuchung von $\nabla_x\Phi(x,y)$ benutzt man einfach, dass

$$(\nabla_x\Phi(x,y))^\wedge = \mathrm{i} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \widehat{\Phi}(\xi_1,\xi_2,x_3,y)$$

gilt.
Das Resultat dieses Abschnitts kann so formuliert werden:

Satz 2.17 *Sei das gestreute elektrische Feld E^s wie in Satz 2.17 Lösung des Streuproblems und x_3 fest gewählt, so dass die Ebene S_{x_3} den Träger D von $n-1$ nicht schneidet. Dann fällt die* FOURIER*–Transformierte $\widehat{E}^s(\xi_1, \xi_2, x_3)$ von $E^s(x_1, x_2, x_3)$ für $|(\xi_1, \xi_2)| > k$ exponentiell in ξ_1, ξ_2 ab.*

Bemerkung 2.18 Wie üblich wird hier dieselbe Bezeichnung für eine reguläre Distribution und ihre sie erzeugende Funktion gewählt. Die jeweilige Bedeutung wird dabei durch den Kontext festgelegt. So ist zum Beispiel im obigen Satz mit $\widehat{E}^s(\xi_1, \xi_2, x_3)$ die erzeugende Funktion der gleichnamigen regulären Distribution gemeint.

Der Satz zeigt, dass außerhalb des Streuers in D Frequenzen (ξ_1, ξ_2) mit $|(\xi_1, \xi_2)| > k$ für das gestreute elektrische Feld E^s eine vernachlässigbare Rolle spielen. Während in Satz 2.16 die Stabilität des Anfangswertproblems für κ etwas kleiner als k gezeigt worden ist, gilt $E^s \approx E^s_\kappa$, wenn κ etwas größer als k ist. Dieser Konflikt spielt in der Praxis keine Rolle. Für κ etwas kleiner als k zeigten die numerischen Simulationen sowohl Stabilität als auch Genauigkeit.
Innerhalb des Streuers in D hängen die niedrigen Frequenzen durchaus von den höheren ab. Diese Abhängigkeit wird zum Beispiel durch die Faltung $(n-1)^\wedge * \widehat{E}^s_\kappa$ in Gleichung (2.31) deutlich.

Aus der expliziten Darstellung (2.33) von $\widehat{\Phi}(\xi_1, \xi_2, x_3)$ lässt sich noch folgendes Lemma ableiten:

Lemma 2.19 *Seien E^s und x_3 wie im Satz 2.17. Dann ist für $\kappa < k$ die Funktion $\widehat{E}^s_\kappa$ quadratintegrierbar bzgl. ξ_1, ξ_2:*

$$\widehat{E}^s_\kappa(x_3) \in L_2(\mathbb{R}^2).$$

Zur Definition von $\widehat{E}^s_\kappa$ siehe (2.22).

Beweis: Zum Beweis ist lediglich zu sagen, dass $\widehat{E}^s_\kappa$ eine stückweise stetige Funktion mit kompaktem Träger ist, denn die Singularität $(\xi_1^2+\xi_2^2-k^2)^{-1/2}$ in der Darstellung für $\widehat{\Phi}(\xi_1, \xi_2, x_3)$ in Gleichung (2.33) wird nach Definition (2.22) für $\widehat{E}^s_\kappa$ abgeschnitten.
□

2.4.3 Zusammenfassung

Wie schon in der Einleitung gezeigt, ist das Lösen des direkten Problems Teil des Algorithmus für das Lösen des inversen Problems.
In diesem Kapitel ist deutlich geworden, wie das direkte Problem gelöst werden kann.
In Abschnitt 2.3 wurde gezeigt, dass die MAXWELL–Gleichungen äquivalent zu einer

gestörten Form des elliptischen Δ–Operators sind. Für das gestreute elektrische Feld E^s lautet die Differentialgleichung

$$
\begin{aligned}
\Delta E^s(x) + \nabla \left(\frac{\nabla n(x)}{n(x)} \cdot E^s(x) \right) + k^2 n(x) E^s(x) = R(x), \\
R(x) := -\nabla \left(\frac{\nabla n(x)}{n(x)} \cdot E^i(x) \right) - k^2 (n(x) - 1) E^i(x).
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung kann nun diskretisiert werden. Ihr Anfangswertproblem wird dann auf einem Gitter gelöst. Auf der Grundlage des Stabilitätsresultats aus Satz 2.16 wird jede neu berechnete Gitterebene mit Hilfe der Fast–Fourier–Transformation (FFT) gefiltert. Dass durch dieses Vorgehen keine zu großen Fehler zu erwarten sind, hat die Analyse des Frequenzverhaltens des gestreuten elektrischen Feldes E^s in Abschnitt 2.4.2 gezeigt.

Kapitel 3

Das inverse Problem

Zunächst soll das inverse Problem nochmal definiert werden:[1]
Für endlich viele verschiedene Richtungen $\theta_j \in S^2$, $j = 0, \dots, P-1$, seien folgende Informationen gegeben:

- Gegeben sei die einfallende Welle $E^i(x) = E_0^i \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta_j \cdot x}$ mit Einfallsrichtung θ_j, Amplitude $E_0^i \in \mathbb{R}^3$, $E_0^i \perp \theta_j$ und Wellenzahl k.
- Durch die Streuung der einfallenden Welle $E^i(x)$ gibt es Messdaten $E_{|\Gamma_{\theta_j}}$, $E_{|\Gamma^+_{\theta_j}}$ und $E_{|\Gamma^-_{\theta_j}}$ auf den Rändern des Würfels Q_{θ_j}. Durch Lösen des Außenraumproblems erhält man zusätzlich $\partial E_{|\Gamma^-_{\theta_j}} / \partial \theta_j$.
- Außerdem gelte $\operatorname{supp}(n-1) \subset D \subset Q_{\theta_j}$.

Gesucht ist nun der komplexwertige Brechungsindex $n(x)$ in der Kugel $D \subset Q_{\theta_j}$.

Das Lösen von

$$\Delta E + \nabla \left(\frac{\nabla n}{n} \cdot E \right) + k^2 n E = 0, \tag{3.1}$$

wobei

$$E(x) = E^s(x) + E_0^i \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta \cdot x} \qquad \theta, E_0^i \in S^2 \text{ mit } \theta \perp E_0^i \tag{3.2}$$

und E^s die SOMMERFELDsche Ausstrahlungsbedingung (2.18) gleichmäßig für alle Richtungen $x/|x|$ erfüllt, gibt Anlass zu einer nichtlinearen Abbildung

$$\tilde{R}_j(n) := E \qquad \text{in } Q_{\theta_j}.$$

Wegen der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung E ist die Abbildung $\tilde{R}_j$ wohldefiniert. In diesem Abschnitt wird ein Algorithmus (PBP–Algorithmus) zur Lösung des

[1] Die folgenden Bezeichnungen wurden in der Einleitung Abschnitt 1.3 und Abbildung 1.1 eingeführt.

inversen Problems entwickelt. Eine wesentliche Idee dabei ist, das direkte Problem zu linearisieren. Dies wird im folgenden Abschnitt geschehen.

3.1 Linearisierung

Der zentrale Begriff in diesem Abschnitt wird durch folgende Definition aus der nichtlinearen Funktionalanalysis bekannt gemacht (siehe [Werner;2000]):

Definition 3.1 *Seien X und Y normierte Räume, $U \subset X$ offen und $f : U \to Y$ eine Abbildung.*

1. *f heißt* FRÉCHET*–differenzierbar bei $x_0 \in U$, falls ein stetiger linearer Operator $T : X \to Y$ mit*
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} = Tv \quad \textit{für alle } v \in X$$
existiert, wobei die Konvergenz gleichmäßig bezüglich $v \in \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ zu sein hat. Wegen der Offenheit von U ist der Limes wohldefiniert.

2. *f heißt* FRÉCHET*–differenzierbar auf U, falls f für alle $x_0 \in U$* FRÉCHET*–differenzierbar ist.*

Die Definition für die im Folgenden auftretenden SOBOLEVräume findet man in [Werner;2000] Kapitel 5.

Eine heuristisch hergeleitete Linearisierung von $\tilde{R}_j$ ist einfach zu erhalten. Sei dazu $E = \tilde{R}_j(n)$ Lösung von (3.1) mit (3.2) und $\tilde{E} = \tilde{R}_j(n + d)$ Lösung von

$$\Delta \tilde{E} + \nabla \left(\frac{\nabla n + d}{n + d} \cdot \tilde{E} \right) + k^2 (n + d) \tilde{E} = 0,$$

wobei

$$\tilde{E}(x) = \tilde{E}^s(x) + E_0^i \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} k \theta \cdot x}$$

und $\tilde{E}^s$ die SOMMERFELDsche Ausstrahlungsbedingung (2.18) gleichmäßig für alle Richtungen $x/|x|$ erfüllt. Bilden wir nun die Differenz $V := \tilde{E} - E$, so erfüllt V die Differentialgleichung

$$\Delta V + \nabla \left(\frac{\nabla (n + d)}{n + d} \cdot \tilde{E} - \frac{\nabla n}{n} \cdot E \right) + k^2 n V + k^2 d (V + E) = 0.$$

Vernachlässigen wir die nichtlinearen Terme in der obigen Differentialgleichung, folgt

$$\Delta V + \nabla \left(\frac{\nabla n}{n} \cdot V \right) - \nabla \left(\frac{d \nabla n}{n} \cdot E \right) + \nabla \left(\frac{\nabla d}{n} \cdot E \right) + k^2 n V + k^2 d E = 0,$$

wobei wir die Taylorentwicklung

$$\frac{1}{n+d} = \frac{1}{n} - \frac{d}{n^2} + \mathrm{O}(\|d\|^2)$$

benutzt haben. Es ist natürlich, wenn wir annehmen, dass wir durch Lösen obiger Differentialgleichung unter Beachtung der SOMMERFELDschen Ausstrahlungsbedingung für V die FRÉCHET–Ableitung $\tilde{A}_j(n)$ von $\tilde{R}_j$ durch

$$\tilde{A}(n)d = V_{|\partial Q_{\theta_j}}$$

erhalten.

Um ein solideres mathematisches Fundament zu erhalten, wird hier auf ein Resultat aus der Arbeit von [Ammari,Bao;2001] zurückgegriffen:

Um die Differenzierbarkeitsanforderungen gering zu halten, beschreiben die Autoren das direkte Problem durch die MAXWELL–Gleichung

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} E - k^2 nE = 0 \tag{3.3}$$

mit der Separation (3.2) und der Ausstrahlungsbedingung

$$\operatorname{rot} E \times \frac{x}{|x|} - \mathrm{i}kE = \mathrm{o}(|x|^{-1}). \tag{3.4}$$

Der so entstandene Lösungsoperator in Q_{θ_j} wird im Folgenden mit $S(n)$ bezeichnet. Der Brechungsindex $n(x)$ entstammt dabei dem Raum X_{M_0}, der Abschluss des Raums

$$\{(f-1) \in C_0^2(Q_{\theta_j}) \mid \operatorname{supp}(f) \subset D,\ \|f\|_\infty^2 + \|\nabla f\|_\infty^2 \leq M_0^2\}$$

im SOBOLEVraum $H^1(Q_{\theta_j})$ mit der üblichen Norm $\|\cdot\|_{H^1}$ ist.

Sei $E = S(n)$, dann bezeichnen wir den Lösungsoperator in Q_{θ_j} von

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} V - k^2 nV - k^2 dE = 0, \tag{3.5}$$

$$\operatorname{rot} V \times \frac{x}{|x|} - \mathrm{i}kV = \mathrm{o}(|x|^{-1}) \tag{3.6}$$

mit $T(d)$. Im Folgenden gelte im Zusammenhang mit der HÖLDER–Stetigkeit für den Exponenten $0 < \alpha < 1$. Ähnlich zu Satz 2.3 hat man

Satz 3.2 *Sei $n, d \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ und sei der Träger von $n-1$ und d kompakt. Dann gilt für $T(d) \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ und der Lösung der Integralgleichung*

$$\begin{aligned}\tilde{V} = -k^2 \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x,y)(1-n(x))\tilde{V}(y)\,\mathrm{d}y + \nabla \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x,y)\frac{\nabla n(y)}{n(y)} \cdot \tilde{V}(y)\,\mathrm{d}y \\ - k^2 \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x,y) dE\,\mathrm{d}y - \nabla \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div}(dE)\Phi(x,y)\,\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{3.7}$$

$T(d) = \tilde{V}$. Hierbei ist wieder $\Phi(x,y)$ die Fundamentallösung der HELMHOLTZ–*Gleichung.*

Beweis: Siehe [Colton,Kress;1992] Theorem 9.1 und 9.2 und [Ammari,Bao;2001] Lemma 2.1. □

Wollen wir somit die Regularität von $T(d)$ untersuchen, können wir wieder Satz 2.4 anwenden. Es folgt analog zu Satz 2.5

Satz 3.3 *Ist $\tilde{V} \in C(\mathbb{R}^3)$ Lösung der Integralgleichung (3.7) und $n, d \in C^{p,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ mit $p \geq 1$, dann ist $\tilde{V} \in C^{p,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ und Lösung der Differentialgleichung (3.5) mit der Ausstrahlungsbedingung (3.6).*

Das folgende Resultat zeigt, unter welchen Bedingungen $T(d)$ die FRÉCHET–Ableitung von $S(n)$ ist.

Satz 3.4 *Sei $n, (d+1) \in X_{M_0}$. Dann gibt es eine Konstante K, die nur von M_0, Q_{θ_j} und k abhängt, so dass die folgende Abschätzung gilt:*

$$\|S(n+d) - S(n) - T(d)\|_{H^1(\mathrm{rot}, Q_{\theta_j})} \leq K\|d\|^2_{H_0^{3/2}(Q_{\theta_j})}.$$

Hierbei ist

$$H^1(\mathrm{rot}, Q_{\theta_j}) = \{f \in H^1(Q_{\theta_j}) \mid \mathrm{rot}\, f \in H^1(Q_{\theta_j})\}$$

mit der Norm

$$\|f\|^2_{H^1(\mathrm{rot}, Q_{\theta_j})} = \|f\|^2_{H^1(Q_{\theta_j})} + \|\mathrm{rot}\, f\|^2_{H^1(Q_{\theta_j})}.$$

Beweis: Siehe [Ammari,Bao;2001] Lemma 4.3. □

Mit der Standardnorm $\|\cdot\|_{H_0^2}$ wird der Raum $C_0^{3,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ zu einem normierten Raum, in dem die Abschätzung $\|\cdot\|_{H_0^{3/2}} \leq \|\cdot\|_{H_0^2}$ gilt. Das folgende Korollar ergibt sich daher aus dem bereits Gesagtem.

Korollar 3.5 *Ist sogar $n, (d+1) \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ und haben n–1 und d kompakten Träger in Q_{θ_j}, dann folgt*

$$\|S(n+d) - S(n) - T(d)\|_{H^1(Q_{\theta_j})} \leq K\|d\|^2_{H_0^2(Q_{\theta_j})}.$$

Wir wissen bereits, dass für $n \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ die Gleichheit $\tilde{R}(n) = S(n)$ gilt. In diesem Fall haben wir mit T und den Funktionenräumen wie oben die FRÉCHET–Ableitung von $\tilde{R}$ gegeben. Allerdings ist T kein elliptischer Operator. Es wäre daher von Vorteil wenn dieser mit der heuristisch hergeleiteten Linearisierung $\tilde{A}_j(n)$ übereinstimmt, weil ihm eine elliptische Differentialgleichung zu Grunde liegt. Unter welchen Bedingungen dies stimmt, zeigen die folgenden beiden Sätze.

Satz 3.6 *Seien $n, d \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ und sei der Träger von $n-1$ und d kompakt. Erfüllt V die Differentialgleichung*

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} V - k^2 nV - k^2 dE = 0, \tag{3.8}$$

so erfüllt V ebenfalls

$$\Delta V + \nabla\left(\frac{\nabla n}{n}\cdot V\right) - \nabla\left(\frac{d\nabla n}{n}\cdot E\right) + \nabla\left(\frac{\nabla d}{n}\cdot E\right) + k^2 nV + k^2 dE = 0 \tag{3.9}$$

Beweis: Wegen Satz 3.3 können wir $V \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ annehmen, so dass durch Anwendung des div–Operators auf (3.8) folgt

$$\operatorname{div}(nV) + \operatorname{div}(dE) = 0.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{div} V &= -\frac{\nabla n}{n}\cdot V - \frac{\operatorname{div}(dE)}{n} \\ &= -\frac{\nabla n}{n}\cdot V + \frac{d\nabla n}{n^2}\cdot E - \frac{\nabla d}{n}\cdot E \\ &= -\frac{\nabla n}{n}\cdot V - \left(\nabla\frac{d}{n}\right)\cdot E. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Dies zusammen mit der Operatoridentität $\operatorname{rot}\operatorname{rot} = -\Delta + \nabla \operatorname{div}$ liefert gerade (3.9).
□

Die Bedingungen für die Umkehrung zeigt der nächste Satz:

Satz 3.7 *Seien $n, d \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ und sei der Träger von $n-1$ und d kompakt. Erfüllt $V \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ die Differentialgleichung*

$$\Delta V + \nabla\left(\frac{\nabla n}{n}\cdot V\right) - \nabla\left(\frac{d\nabla n}{n}\cdot E\right) + \nabla\left(\frac{\nabla d}{n}\cdot E\right) + k^2 nV + k^2 dE = 0 \tag{3.11}$$

und die SOMMERFELD*sche Ausstrahlungsbedingung*

$$\frac{x}{|x|}\cdot \nabla V_j(x) - \mathrm{i}kV_j(x) = \mathrm{o}(|x|^{-1}), \qquad j = 1, 2, 3,$$

so erfüllt V ebenfalls

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} V - k^2 nV - k^2 dE = 0. \tag{3.12}$$

und die Ausstrahlungsbedingung (3.4).

Beweis: Sei zunächst V_1 Lösung von

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} V_1 - k^2 nV_1 - k^2 dE = 0$$

mit der Ausstrahlungsbedingung (3.4). Nach Satz 3.6 erfüllt V_1 auch die Differentialgleichung (3.11). Die Differenz $V_2 := V_1 - V$ erfüllt dann

$$\Delta V_2 + \nabla \left(\frac{\nabla n}{n} \cdot V_2 \right) + k^2 n V_2 = 0,$$

denn nach Voraussetzung erfüllt V ebenfalls (3.11). Wegen Lemma 2.8 erfüllen die kartesischen Komponenten von V_1 die SOMMERFELDsche Ausstrahlungsbedingung. Mit der Ausstrahlungsbedingung für V gilt dies somit auch für V_2. Nach dem Beweis von Satz 2.12 ist

$$0 = \operatorname{div}(nV_2) = \operatorname{div}(n(V_1 - V)).$$

Weil nach dem Beweis von Satz 3.6 $\operatorname{div}(nV_1) = -\operatorname{div}(nE)$ gilt, folgt damit

$$\operatorname{div}(nV) = \operatorname{div}(nV_1) = -\operatorname{div}(dE).$$

Die Rechnung (3.10) und die Operatoridentität $\operatorname{rot}\operatorname{rot} = -\Delta + \nabla \operatorname{div}$ zeigen, dass V die Differentialgleichung (3.12) erfüllt. Dass V zusätzlich die Ausstrahlungsbedingung (3.4) erfüllt, folgt aus $\operatorname{div} V = \operatorname{div} E = 0$ außerhalb von $\operatorname{supp}(n-1) \cup \operatorname{supp} d$ und Lemma 2.7. □

Wir haben somit das Resultat

Korollar 3.8 *Seien $n, d \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ und sei der Träger von $n-1$ und d kompakt. Dann existiert $R(n) \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^3)$, so dass mit einer Konstanten K*

$$\|\tilde{R}_j(n+d) - \tilde{R}_j(n) - \tilde{A}_j(n)d\|_{H^1(Q_{\theta_j})} \leq K\|d\|^2_{H^2_0(Q_{\theta_j})}$$

gilt.

Bemerkung

Die Differentialgleichung (3.11) hat die notwendige Form, um die Resultate der Stabilitätsanalyse in Abschnitt 2.4.1 anzuwenden. Geht man davon aus, dass der Brechungsindex höchstens innerhalb der Kugel D unbekannt ist, so ist $\operatorname{supp} d \subset D$ eine vernünftige Annahme. Außerhalb von D erfüllt V also die HELMHOLTZ–Gleichung. Somit sind auch die Resultate des Abschnitts 2.4.2 übertragbar und eine Filterung wie in Definition (2.22) auch hier sinnvoll.

3.2 Der PBP–Algorithmus

Der im Abschnitt 1.3.2 skizzierte Algorithmus zur Lösung des inversen Streuproblems wird hier in aller Ausführlichkeit dargestellt.

Gesucht ist die Lösung von

$$\Delta E + \nabla \left(\frac{\nabla n}{n} \cdot E \right) + k^2 n E = 0 \tag{3.13}$$

in Q_j. Im Hinblick auf die numerische Implementierung wird folgende Skalierung verwendet:

$$E(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta_j \cdot x}(E^s(x) + E_0^i). \tag{3.14}$$

Hierbei ist $E^i(x) = E_0^i \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta_j \cdot x}$ die einfallende Welle mit Einfallsrichtung θ_j und Schwingungsrichtung E_0^i und für die konstanten Vektoren $\theta, E_0^i \in \mathbb{R}^3$ muss wegen $\operatorname{div} E^i = 0$ zwingend $\theta_j \perp E_0^i$ gelten. Die einfallende Welle propagiert in dem Würfel Q_j von der Seite Γ_j^- nach Γ_j^+. Wenn weiter E^s die SOMMERFELDsche Ausstrahlungsbedingung (2.18) erfüllt, existiert nach Satz 2.2 für obiges Problem eine eindeutige Lösung, die stetig im Sinne der Maximumsnorm vom einfallenden Feld E^i abhängt. Aus der Differentialgleichung (3.13) für E und der Skalierung (3.14) folgt die partielle Differentialgleichung für E^s

$$\begin{aligned} \Delta E^s + 2\mathrm{i}k(\theta \cdot \nabla E_l^s)_{l=1,2,3} + \nabla \left(\frac{\nabla n}{n} \cdot (E^s + E_0^i) \right) \\ + \mathrm{i}k\theta \left(\frac{\nabla n}{n} \cdot (E^s + E_0^i) \right) + k^2(n-1)(E^s + E_0^i) = 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Durch die Vorgabe von Randdaten für E^s durch

$$E^s = G_j \qquad \text{auf } \Gamma_j^- \cup \Gamma_j, \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial E^s}{\partial \theta_j} = \frac{\partial G_j}{\partial \theta_j} \qquad \text{auf } \Gamma_j^-, \tag{3.17}$$

erhalten wir ein Anfangswertproblem. Es gibt Anlass zu einer nichtlinearen Abbildung $R_j : H_0^2(Q_j) \to L_2(\Gamma_j^+)$, $R_j(n) = E^s_{|\Gamma_j^+}$. Hierbei ist $H_0^2(Q_j)$ die Gesamtheit der regulären Distributionen $f \in D'(Q_j)$, deren Distributionsableitungen $D^\alpha f$ für den Multiindex α mit $|\alpha| \leq 2$ ebenfalls regulär sind und zum Raum $L_{2,0}(Q_j)$ gehören. Der Grund für die Wahl der Funktionenräume $H_0^2(Q_j)$ bzw. $L_2(\Gamma_j^+)$ wird im Folgenden klar.

Das inverse Problem besteht nun darin, den Brechungsindex $n(x)$ so zu bestimmen, dass

$$R_j(n) = G_{j\,|\Gamma_j^+} \tag{3.18}$$

für alle $j = 1, \ldots, P$ gilt. Ausgehend von einer Anfangsnäherung $n^0(x)$ vom wahren Brechungsindex $n(x)$ soll $d^r(x)$ so bestimmt werden, dass $n^{r+1} = n^r + \omega d^r$ eine bessere Näherung für $n(x)$ darstellt als $n^r(x)$, $r = 0, 1, \ldots$. Dazu wird Gleichung (3.18) linearisiert

$$R_j(n+d) = R_j(n) + A_j(n)d + \mathrm{O}(\|d\|^2),$$

wobei der Operator $A_j(n)$ die FRÉCHET–Ableitung des nichtlinearen Operators R_j ist. Zu lösen ist also

$$A_j(n^r)d^r = G_{j|\Gamma_j^+} - R_j(n^r) \qquad j = r \bmod P. \tag{3.19}$$

Dieses Gleichungssystem ist stark unterbestimmt. Ein vernünftiger Ansatz wäre, die Minimum–Norm–Lösung von (3.19) zu bestimmen. Dafür wird neben dem linearen Operator $A_j(n)$ noch sein adjungierter Operator $A_j(n)^*$ benötigt.

Der Operator $A_j(n) : H_0^2(Q_j) \to L_2(\Gamma_j^+)$

Der Operator $A_j(n)$ angewendet auf d berechnet sich durch Beschränkung der Lösung auf Γ_j^+ von

$$\begin{aligned}\Delta W + 2\mathrm{i}k(\theta\cdot\nabla W_l)_{l=1,2,3} + \nabla\left(\frac{\nabla n}{n}\cdot W\right) + \mathrm{i}k\theta\left(\frac{\nabla n}{n}\cdot W\right) + k^2(n-1)W \\ + \nabla\left(\nabla\frac{d}{n}\cdot(E^s+E_0^i)\right) + \mathrm{i}k\theta\left(\nabla\frac{d}{n}\cdot(E^s+E_0^i)\right) + k^2d(E^s+E_0^i) = 0\end{aligned}$$

in Q_j mit Randdaten $W = 0$ auf $\Gamma_j^- \cup \Gamma_j$ und $\partial W/\partial\theta_j = 0$ auf Γ_j^-, wobei E^s die Lösung von (3.15) mit den Randdaten (3.16) und (3.17) ist.

Obiges Ergebnis erhält man durch Verwendung von (3.11) und den Skalierungen

$$V(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta_j\cdot x}\,W(x)$$

bzw. (3.14) für E.

Der Operator $A_j(n)^* : L_2(\Gamma_j^+) \to H_0^2(Q_j)$

Zur Berechnung des adjungierten Operators $A_j(n)^*$ erfolgt die Skalierung am Ende der Rechnung. Sei Y Lösung von

$$\Delta Y - \frac{\nabla\bar{n}}{\bar{n}}\operatorname{div} Y + k^2\bar{n}Y = 0 \tag{3.20}$$

in Q_j mit Randdaten $Y = 0$ auf $\Gamma_j^+ \cup \Gamma_j$ und $\partial Y/\theta_j = -\partial \tilde{G}_j/\theta_j := -\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta_j\cdot x}\,\partial G_j/\partial\theta_j$ auf Γ^+. Dann ist mit der äußeren Normalen ν auf ∂Q_j

$$
\begin{aligned}
I &:= \int_{Q_j} \left\{ \left[\Delta V + \nabla\left(\frac{\nabla n}{n}\cdot V\right) + k^2 n V\right]\cdot \overline{Y} - V\cdot \overline{\left[\Delta Y - \frac{\nabla \bar{n}}{\bar{n}}\operatorname{div} Y + k^2 \bar{n} Y\right]}\right\} \mathrm{d}x \\
&= \int_{\partial Q_j} \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\cdot \overline{Y} - V\cdot \frac{\partial \overline{Y}}{\partial \nu}\right) \mathrm{d}s \qquad \text{(nach der zweiten \textsc{Green}schen Formel)} \\
&= -\int_{\Gamma_j^+} V\cdot \frac{\partial \overline{Y}}{\partial \theta_j}\,\mathrm{d}s \;=\; \int_{\Gamma_j^+} V\cdot \overline{\tilde{G}}_j\,\mathrm{d}s \\
&= (A(n)d, \tilde{G}_j)_{L_2(\Gamma_j^+)}.
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

Andererseits berechnet sich I durch Anwendung von (3.10), (3.11) und (3.20) als

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{Q_j} \left[-k^2 dE - \nabla\left(\frac{1}{n}\operatorname{div}(dE)\right)\right]\cdot \overline{Y}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{Q_j} \left(-k^2 dE\cdot \overline{Y} + \frac{1}{n}\operatorname{div}(dE)\operatorname{div}\overline{Y}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{Q_j} d\left(-k^2 E\cdot \overline{Y} - E\cdot \nabla\frac{\operatorname{div}\overline{Y}}{n}\right)\mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

wobei zweimal partiell integriert worden ist. Die dabei auftretenden Randterme verschwinden wegen $d \in H_0^2(Q_j)$. Für das innere Produkt zweier Funktionen $f, g \in H_0^2(Q_j)$ wird hier

$$(f,g)_{H_0^2(Q_j)} = \int_{Q_j} \Delta f\,\Delta \overline{g}\,\mathrm{d}x$$

gewählt. Damit ist

$$
\begin{aligned}
(A_j(n)d, \tilde{G}_j)_{L_2(\Gamma_j^+)} &= (d, A_j(n)^*\tilde{G}_j)_{H_0^2(Q_j)} \\
&= (\Delta d, \Delta A_j(n)^*\tilde{G}_j)_{L_2(Q_j)} \\
&= (d, \Delta^2 A_j(n)^*\tilde{G}_j)_{L_2(Q_j)}.
\end{aligned}
$$

Deshalb folgt mit (3.21) und (3.22)

$$\Delta^2 A_j(n)^*\tilde{G}_j = -k^2\overline{E}\cdot Y - \overline{E}\cdot \nabla\frac{\operatorname{div} Y}{\bar{n}}.$$

Mit den Skalierungen

$$Y(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta_j\cdot x}\,Z(x)$$

und (3.14) für E schreibt sich $\Delta^2 A_j(n)^*$ als

$$
\begin{aligned}
\Delta^2 A_j(n)^* G_j = {}& -k^2(\overline{E}^s + E_0^i)\cdot Z - \mathrm{i}k(\overline{E}^s\cdot\theta_j)\frac{\operatorname{div} Z}{\bar{n}} \\
& - (\overline{E}^s + E_0^i)\cdot\nabla\frac{\operatorname{div} Z}{\bar{n}},
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

wobei Z Lösung von

$$\Delta Z + 2\mathrm{i}k(\theta_j \cdot \nabla Z_l)_{l=1,2,3} - \frac{\nabla \bar{n}}{\bar{n}} \operatorname{div} Z - \mathrm{i}k\frac{\nabla \bar{n}}{\bar{n}}(\theta_j \cdot Z) + k^2(\bar{n}-1)Z = 0 \qquad (3.24)$$

mit Randdaten $Z = 0$ auf $\Gamma_j^+ \cup \Gamma_j$ und $\partial Z/\theta_j = -\partial G_j/\partial\theta_j$ auf Γ^+ ist.

Damit $A_j(n)^* G_j \in H_0^2(Q_j)$ gilt, werden zum Lösen von (3.23) Null–Randdaten auf ∂Q_j vorgegeben. Doch um diesen Rechenschritt zu vermeiden, hilft die Beobachtung, dass das Lösen von Gleichung (3.23) wie ein Tiefpassfilter wirkt. Denn wendet man Δ^2 auf die Fourier–Reihe einer in Q_j periodischen Funktion $f : Q_j \to \mathbb{C}$ an, so ist

$$\Delta^2 f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{k_1,k_2,k_3 \in \mathbb{N}} c_{k_1k_2k_3} \omega_0^4 (k_1^4 + k_2^4 + k_3^4)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0(k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3)}$$

mit $\omega_0 = \pi/\rho$ und

$$c_{k_1k_2k_3} = \frac{1}{(2\rho)^3} \int_{Q_j} f(x_1, x_2, x_3)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3)}\, \mathrm{d}x.$$

Oder anders gesagt, wirkt „Δ^{-2}“ als Tiefpassfilter. Bei der numerischen Implementierung wird auf dem aktualisierten Brechungsindex n^{r+1} der Tiefpassfilter

$$n_\kappa(x) = 1 + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{n}_\kappa(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot x}\, \mathrm{d}\xi$$

mit

$$\widehat{n}_\kappa(\xi) := \begin{cases} (n-1)^\wedge(\xi) & \text{falls } |\xi| \le \kappa, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

angewendet. Daher kann der Differentialoperator Δ^2 in (3.23) als diagonaler Operator vernachlässigt werden.

Die Moore–Penrose–Inverse

Um die Minimum–Norm–Lösung von (3.19) zu bestimmen, wird noch (in laxer Schreibweise) der Operator

$$C_j = (A_j(n^r) A_j(n^r)^*)^{-1}, \qquad j = r \bmod P,$$

benötigt. Da seine numerische Berechnung sehr zeitintensiv ist, ersetzen wir ihn durch seine Werte für großes k und kleines $|n|$, $|\nabla n|$, nämlich $C_j \sim 2/(\rho k^2) I$, wobei der Operator I die Identität darstellt. Das sieht man so ein:

Für die folgende Rechnung seien $E_l^s, E_{0,l}^i \neq 0$, $l = 1, 2, 3$. Dann vereinfacht sich die Differentialgleichung (3.15) für die l-te Komponente des gestreuten elektrischen Feldes zu

$$2\mathrm{i}k\theta \cdot \nabla E_l^s = k^2(1-n)E_{0,l}^i. \tag{3.25}$$

Dies ist eine einfache Form einer Transportgleichung für die l-te Komponente des gestreuten elektrischen Feldes. Der Einfachheit halber sei nun $\theta_j = (0,0,1)^t$ und $E_{0,l}^i = 1$. Für $x \in \Gamma_j^+$ (dann ist $x_3 = \rho$ fest) lautet Gleichung (3.25)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_3} E_j^s(x) = \frac{k}{2\mathrm{i}}(1-n).$$

Integration dieser Gleichung nach x_3 liefert

$$\begin{aligned} E_j^s(x) &= \frac{k}{2\mathrm{i}} \int_{-\rho}^{x_3} (1 - n(x_1, x_2, \tau))\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{k}{2\mathrm{i}}(P(1-n))(\theta_j, x). \end{aligned}$$

Dabei ist P die Röntgen–Transformation (Ray Transform), siehe zum Beispiel [Natterer,Wübbeling;2001] Abschnitt 2.2. Die Röntgen–Transformation ist linear in n. Deshalb schreibt sich der lineare Operator A_j als

$$A_j d = \frac{k}{2\mathrm{i}}(P(d))(\theta_j, x).$$

Der dazu adjungierte[2] Operator ist

$$A_j^* G_j(x_1, x_2, x_3) = -\frac{k}{2\mathrm{i}} G_j(x_1, x_2),$$

wobei G_j auf Γ_j^+ definiert ist. Damit ist

$$\begin{aligned} A_j(A_j^* G_j)(x) &= \frac{k}{2\mathrm{i}} \int_{-\rho}^{\rho} (A_j^* G_j)(x_1, x_2, \tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{k^2}{4} \int_{\mathbb{R}} G_j(x_1, x_2))\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\rho k^2}{2} G_j(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Asymptotisch ist also $C_j \sim 2/(\rho k^2)I$.

Der Algorithmus

Ausgehend von $r = 0$ und einer Anfangsnäherung $n^0(x)$ für den Brechungsindex $n(x)$ lässt sich der Algorithmus wie folgt beschreiben:

[2] Der Begriff „adjungiert“ bezieht sich hier nur auf die Ortsvariable x und nicht zusätzlich auf die Richtungsvariable θ_j wie sonst üblich.

1. Berechne

$$d^r = A_j(n^r)^* C_j \left(R_j(n^r) - G_{j|\Gamma_j^+} \right), \qquad j = r \bmod P.$$

2. Mache das Update

$$n^{r+1} = n^r + \omega d^r. \tag{3.26}$$

3. Wenn *Güte* der Näherung n^{r+1} noch zu schlecht, setze $r := r + 1$ und springe zu 1.

Punkt 1 bedarf noch einer genaueren Erläuterung: Zunächst wird das direkte Problem durch das Berechnen des Operators $R_j(n^r)$ gelöst (Propagation), siehe (3.15). Danach wird das Residuum durch $R_j(n^r) - G_{j|\Gamma_j^+}$ gebildet, das anschließend mittels C_j skaliert wird. Schlussendlich wendet man darauf den Operator $A_j(n^r)^*$ an, siehe (3.24) und (3.23), das ist die Rückpropagation[3]. Damit steht das Update d^r fest.
Der Parameter ω in (3.26) muss wegen der Approximation von C_j und $A_j(n)^*$ durch numerische Experimente bestimmt werden.
Der Algorithmus zur Lösung des inversen Problems unterscheidet sich bei der Verwendung von Messdaten in folgendem Punkt von Algorithmen zum Beispiel aus [Bulyshev et al;2000] oder [Colton,Kirsch;1996]. Dort werden *alle* Messdaten, die aus Streuexperimenten für verschiedene Richtungen θ erhalten worden sind, für *ein* Update verwendet. Ein Zuviel an Daten führt dort eher zu Problemen bei der Implementierung als bei der Verwendung des Algorithmus, der hier vorgestellt worden ist. Hier werden lediglich die Messdaten aus Streuexperimenten für jeweils *eine* Richtung für *ein* Update verwendet. Man beachte die Analogie zum Kaczmarz–Verfahren bei linearen Gleichungssystemen. Siehe auch [Meyn;1983].

Einzelheiten zur Diskretisierung und Filterung sind in Kapitel 4 aufgeführt.

[3] Damit erklärt sich auch die Namensgebung Propagation–Backpropagation Algorithmus (PBP–Algorithmus)

Kapitel 4

Numerische Simulationen

In diesem Kapitel wird die praktische Brauchbarkeit des PBP–Algorithmus an Hand von drei numerischen Simulationen belegt. Dafür sind Messdaten auf dem Rand ∂Q_θ nötig. Zu realen Messdaten aus Streuexperimenten mit elektromagnetischen Wellen bestand für diese Arbeit leider kein Zugang.
Für die erste numerische Simulation werden die Messdaten einer analytischen Lösung des Streuexperimentes entnommen, nämlich aus der Streuung einer homogenen ebenen Welle an einer Kugel mit konstantem komplexwertigen Brechungsindex. Diese Simulation soll zeigen, dass der PBP–Algorithmus grundsätzlich in der Lage ist mit Messdaten aus realen Streuexperimenten elektromagnetischer Wellen zu arbeiten. Weiterhin dient sie der Verifikation des hier verwendeten Vorwärtslösers.
Die numerischen Simulationen 2 und 3 werden demonstrieren, dass die Rekonstruktion in dem Gebiet D auch für viel komplexere Objekte als eine homogene Kugel möglich ist. In Simulation 2 wird das einfache Modell eines Herzens genommen. Die hier verwendete Geometrie dieses Modells findet sich so qualitativ auch in [Bulyshev et al;2000]. In Simulation 3 dient ein inhomogener Zylinder als Vorlage. Sein Brechungsindex weist in x_1–Richtung einen konstanten von Null verschiedenen Gradienten auf.

In einem weiteren Abschnitt wird der Frage nachgegangen inwieweit die Maxwell–Gleichungen durch die Helmholtz–Gleichung ersetzt werden können.

Zunächst wird allerdings die numerische Umsetzung des in 3.2 beschriebenen PBP–Algorithmus dargestellt.

4.1 Numerische Implementierung

Das zu rekonstruierende Objekt wird in der Kugel D mit dem Radius $\rho = 0.5\,\mathrm{m}$ vermutet. Die Kugel ist enthalten in dem Quader Q_θ, $\theta \in S^2$. Seine Seiten Γ_θ^- und Γ_θ^+ haben einen Abstand von $1\,\mathrm{m}$. Die anderen Seiten haben von ihnen gegenüber liegenden Seiten einen Abstand von $4\,\mathrm{m}$. Diese Unsymmetrie hat praktische Gründe, die weiter unten erläutert werden.
Der Würfel Q_θ wird durch ein äquidistantes Gitter der Dimension $128 \times 512 \times 512$ diskretisiert, was einer Gitterschrittweite von $h = 1/128\,\mathrm{m} \approx 7.8\,\mathrm{mm}$ entspricht.
Die Wellenzahl der einfallenden Welle wird auf $k = 100\,\mathrm{m}^{-1}$ festgelegt. Dies entspricht einer Frequenz von $\nu \approx 4,77\,\mathrm{GHz}$ bzw. einer Wellenlänge von $\lambda \approx 6.3\,\mathrm{cm}$.
Die Differentialoperatoren in der Differentialgleichung

$$\Delta E^s + 2\mathrm{i}k(\theta \cdot \nabla E_l^s)_{l=1,2,3} + \nabla\left(\frac{\nabla n}{n} \cdot (E^s + E_0^i)\right) + \mathrm{i}k\theta\left(\frac{\nabla n}{n} \cdot (E^s + E_0^i)\right) + k^2(n-1)(E^s + E_0^i) = 0.$$

aus (3.15) zur Lösung des Vorwärtsproblems werden durch Standarddifferenzenquotienten ersetzt. Man erhält so ein Differenzenverfahren, für welches das gestreute elektrische Feld in der Schicht $m+1$ von den Werten des Feldes in den Schichten m und $m-1$ abhängt. Genauer gesagt, ist $E_j^{s,m+1} = E_j^{s,m+1}(E^{s,m}, E^{s,m-1})$, $j = 1,2,3$. Die Anfangswerte für $E^{s,0}$ und $E^{s,1}$ werden den Randdaten für E^s

$$\begin{aligned} E^s &= G_\theta \qquad \text{auf } \Gamma_\theta^- \cup \Gamma_\theta, \\ \frac{\partial E^s}{\partial \theta} &= \frac{\partial G_\theta}{\partial \theta} \qquad \text{auf } \Gamma_\theta^-, \end{aligned}$$

entnommen, nämlich $E^{s,0} = G_\theta$ und $E^{s,1} = h\frac{\partial G_\theta}{\partial \theta} + G_\theta$. Die Schichten des Würfels Q_θ werden also sukzessive von Γ_θ^- nach Γ_θ^+ berechnet. Wegen des Stabilitätsresultates aus Satz 2.16 wird jede berechnete Schicht m gefiltert. Das heißt, man geht über von $E^{s,m}$ nach $E_\kappa^{s,m}$. Dazu wendet man auf die diskreten Daten $E^{s,m}$ eine zweidimensionale schnelle FOURIER–Transformation (FFT) an und bildet

$$\widehat{E}_\kappa^{s,m}(\xi_1, \xi_2, x_3) = \begin{cases} \widehat{E}^{s,m}(\xi_1, \xi_2, x_3) & \text{falls } |(\xi_1, \xi_2)| \le \kappa, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beachte, dass hier ξ_1, ξ_2 und x_3 diskret sind. $E_\kappa^{s,m}$ erhält man nun durch Anwenden der inversen zweidimensionalen FFT auf $\widehat{E}_\kappa^{s,m}$. Weiter ist hier $\kappa = 0.93\Omega k$, wobei der Faktor Ω den 2π-Raum (FFT) auf die wirkliche Geometrie anpasst ($\Omega = 2/\pi$). Die FFT ist auch der Grund für den *großen* Abstand der Seiten Γ_θ voneinander. Bei

dieser Distanz und den hier präsentierten Beispielen ist der Betrag des gestreuten elektrischen Feldes $|E^s|$ auf Γ_θ sehr klein, so dass Null–Randdaten auf Γ_θ verwendet werden können und die FFT gut anwendbar ist (Periodizität der Daten).
Der Backpropagation–Schritt wird völlig analog implementiert.
Für die numerischen Simulationen sind noch folgende Parameter fixiert:

- Die „Objekte" haben einen Durchmesser von ≈ 52 Gitterpunkten, was 40 cm entspricht.

- Die einfallende Welle ist fixiert auf $E^i(x) = E_0^i\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_3}$, das heißt sie propagiert in x_3–Richtung. In den Simulationen 1 und 2 ist ihre Amplitude $E_0^i = (1, 0, 0)^t$, in Simulation 3 gilt hingegen $E_0^i = 2^{-1/2}(1, 1, 0)^t$.

- Für jede Simulation sind Messdaten aus 120 Streuexperimenten verwendet worden. Das Objekt wurde dabei zufällig mit einem Winkel zwischen 60° und 300° in der (x_2, x_3)–Ebene rotiert. Eine Verteilung der Einfallsrichtungen zeigt zum Beispiel Abbildung 4.6 auf Seite 59.

- Für alle 3 Simulationen wurde als Anfangsnäherung $n^0(x) = 1$ gewählt.

4.2 Simulation 1: Rekonstruktion einer homogenen Kugel

Gegeben sei eine im Koordinatenursprung zentrierte Kugel mit dem Radius R und dem konstanten Brechungsindex $n_K(x) = n_{K,1} + \mathrm{i}n_{K,2}$ mit $n_{K,1}, n_{K,2} \in \mathbb{R}$. Außerhalb der Kugel sei der Brechungsindex konstant und reell: $n(x) = n_1$. Betrachten wir nun die Streuung der ebenen Welle $E^i(x) = (1, 0, 0)^t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_3}$ an dieser Kugel, dann finden sich die Lösungen der MAXWELL–Gleichungen (1.2) in [Born,Wolf;1999] Abschnitt 14.5. Mit der Trennung $E = E^i + E^s$ in einfallendes und gestreutes Feld schreibt sich das gestreute Feld E^s außerhalb der Kugel in Kugelkoordinaten als

$$
\begin{aligned}
E_r^s(r,\vartheta,\varphi) &= -\frac{1}{k^2 n_1}\frac{\cos\varphi}{r^2}\sum_{l=1}^{\infty} l(l+1)B_l^e \zeta_l^{(1)}(k\sqrt{n_1}r)P_l^{(1)}(\cos\vartheta),\\
E_\vartheta^s(r,\vartheta,\varphi) &= -\frac{1}{k\sqrt{n_1}}\frac{\cos\varphi}{r}\sum_{l=1}^{\infty}\Bigg[B_l^e \zeta_l^{(1)\prime}(k\sqrt{n_1}r)P_l^{(1)\prime}(\cos\vartheta)\sin\vartheta\\
&\qquad - \mathrm{i}B_l^m \zeta_l^{(1)}(k\sqrt{n_1}r)P_l^{(1)}(\cos\vartheta)\frac{1}{\sin\varphi}\Bigg],\\
E_\varphi^s(r,\vartheta,\varphi) &= -\frac{1}{k\sqrt{n_1}}\frac{\sin\varphi}{r}\sum_{l=1}^{\infty}\Bigg[B_l^e \zeta_l^{(1)\prime}(k\sqrt{n_1}r)P_l^{(1)}(\cos\vartheta)\frac{1}{\sin\vartheta}\\
&\qquad - \mathrm{i}B_l^m \zeta_l^{(1)}(k\sqrt{n_1}r)P_l^{(1)\prime}(\cos\vartheta)\sin\vartheta\Bigg].
\end{aligned}
$$

Die einzelnen Summanden in den unendlichen Summen werden auch elektrische Partialwellen genannt. Die konstanten Koeffizienten B_l^e, B_l^m charakterisieren die gestreute Welle E^s. Sie hängen lediglich von den Umgebungsparametern ab, nämlich von den Materialkonstanten (Radius R und Brechungsindex n_K), sowie von dem Brechungsindex außerhalb der Kugel n_1 und der Wellenzahl der einfallenden Welle k. Sie berechnen sich als

$$
B_l^e = \mathrm{i}^{l+1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\frac{k\sqrt{n_K}\psi_l'(k\sqrt{n_1}R)\psi_l(k\sqrt{n_K}R) - k\psi_l'(k\sqrt{n_K}R)\psi_l(kR)}{k\sqrt{n_K}\zeta_l^{(1)\prime}(k\sqrt{n_1}R)\psi_l(k\sqrt{n_K}R) - k\psi_l'(k\sqrt{n_K}R)\zeta_l^{(1)}(kR)},
$$

$$
B_l^m = \mathrm{i}^{l+1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\frac{k\sqrt{n_K}\psi_l(k\sqrt{n_1}R)\psi_l'(k\sqrt{n_K}R) - k\psi_l'(kR)\psi_l(k\sqrt{n_K}R)}{k\sqrt{n_K}\zeta_l^{(1)}(k\sqrt{n_1}R)\psi_l'(k\sqrt{n_K}R) - k\zeta_l^{(1)\prime}(kR)\psi_l(k\sqrt{n_K}R)}.
$$

Die auftretenden unbekannten Funktionen sind

$$
\psi_l(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}}J_{l+\frac{1}{2}}(\rho), \qquad \zeta_l^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}}H_{l+\frac{1}{2}}(\rho)
$$

mit der Bessel–Funktion $J_{l+\frac{1}{2}}(\rho)$ und der Hankel–Funktion erster Art $H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(\rho)$. Weiter sind die assoziierten Legendre–Polynome erster Art definiert als

$$
P_l^{(1)}(\cos\vartheta) = \frac{1}{\sin\vartheta}[P_{l-1}(\cos\vartheta) - \cos\vartheta P_l(\cos\vartheta)],
$$

wobei

$$
P_l(\cos\vartheta) = \sum_{m=0}^{[l/2]}(-1)^m\frac{(2l-2m)!}{2^l m!(l-m)!(l-2m)!}(\cos\vartheta)^{l-2m}
$$

die Legendre–Polynome sind. Für einen im Koordinatenursprung zentrierten Würfel Q_θ mit Orientierung $\theta \in S^2$ und Seitenlänge $\rho > R$ ist damit theoretisch das elektrische Feld E auf dem Rand ∂Q_θ berechenbar. Für seine praktische Berechnung benötigt man noch ein Resultat aus [Debye;1909], nachdem für $kR < l + 1/2$ die elektrischen Partialwellen *sehr schnell* gegen Null konvergieren. Die oben auftreten unendlichen Summen können also in guter Näherung durch die endliche Summe der ersten $[kR] + 1$ Terme ersetzt werden.

4.2.1 Verifikation des Vorwärtslösers

Damit der PBP–Algorithmus auch auf reale Daten G_θ funktioniert, muss zwingend $R_\theta(n) \approx G_{\theta|\Gamma_\theta^+}$ gelten. Mit Hilfe der analytischen Lösung für die homogene Kugel ist diese Verifikation leicht möglich.

Die folgenden Grafiken zeigen das gestreute elektrische Feld in der Schicht Γ_θ^+. Dabei wird jeweils die analytische Lösung mit der gefilterten analytischen Lösung und der mit dem Vorwärtslöser berechneten Lösung gegenübergestellt. Die Anfangswerte auf Γ_θ^- für den Vorwärtslöser stammen aus der analytischen Lösung. Die Darstellung beschränkt sich ausschließlich auf die Gegenüberstellung des Realteils der drei Komponenten des gestreuten Feldes, weil die Gegenüberstellung des Imaginärteils qualitativ keine neuen Informationen liefern würde.

Bei dem Vergleich des Realteils der ersten Komponente des gestreuten elektrischen Feldes in Abbildung 4.1 zeigt sich eine hervorragende Übereinstimmung der Lösungen. Hier kann der Vorwärtslöser vollständig überzeugen.

Bei dem Vergleich des Realteils der zweiten Komponente des gestreuten elektrischen Feldes in Abbildung 4.2 fällt auf, dass besonders zum Rand hin die mit dem Vorwärtslöser berechnete Lösung die Vorgabe durch die analytische Lösung nicht besonders gut wiedergeben kann. Der Grund dafür ist vor allem darin zu sehen, dass wegen der Null–Randbedingung auf Γ_θ bei der Berechnung der einzelnen Schichten in dem Quader Q_θ die Wellen an den Rändern reflektiert werden. Deshalb entstehen durch Superposition diese Ungenauigkeiten. Abhilfe kann hier nur ein noch größeres Rechengebiet oder die Verwendung von exakten Randdaten auf Γ_θ bringen. Weil bei dem Realteil der ersten (und dritten) Komponente des gestreuten elektrischen Feldes der Abfall des Feldes zum Rand hin sehr viel stärker ist als bei der zweiten Komponente, spielen reflektierte Wellen dort fast keine Rolle. Man beachte außerdem, dass der Betrag des Realteils der zweiten Komponente ca. um den Faktor 100 kleiner ist als bei dem Realteil der ersten Komponente. Daher liegt die Vermutung nahe, dass die Informationen für die Rekonstruktion des Brechungsindex, die in der zweiten Komponente des gestreuten elektrischen Feldes stecken, kein großes Gewicht haben.

Der Vergleich des Realteils der dritten Komponente des gestreuten elektrischen Fel-

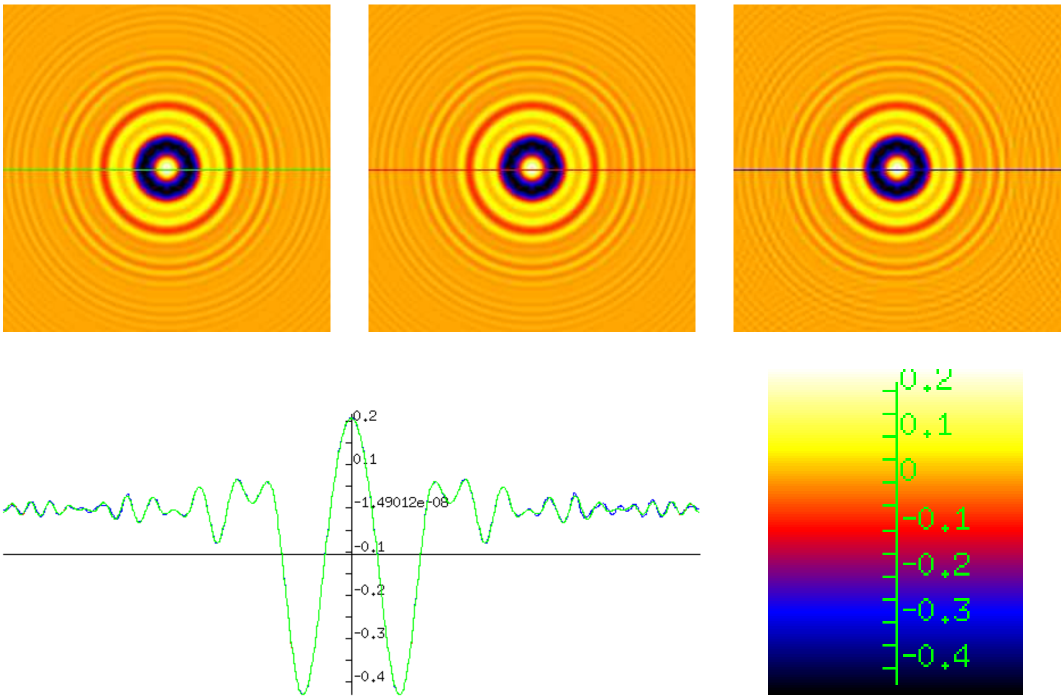

Abbildung 4.1: *Von links nach rechts zeigen die oberen Grafiken die erste Komponente des Realteils der analytischen Lösung, der gefilterten analytischen Lösung und der durch den Vorwärtslöser berechneten Lösung. Die zweite Zeile zeigt einen Querschnitt durch die oberen Grafiken und den für die oberen Grafiken verwendeten Farbkeil.*

des in Abbildung 4.2 fällt ebenso positiv aus wie bei dem Vergleich der Resultate für die erste Komponente.

Für alle drei Komponenten soll noch festgehalten werden, dass die analytische Lösung mit ihrer gefilterten sehr gut übereinstimmt. Dies war nach Satz 2.17, nachdem Frequenzen oberhalb von k vernachlässigbar sind, zu erwarten.

Insgesamt kann festgestellt werden, dass der hier verwendete Vorwärtslöser geeignet ist, für den PBP–Algorithmus verwendet zu werden.

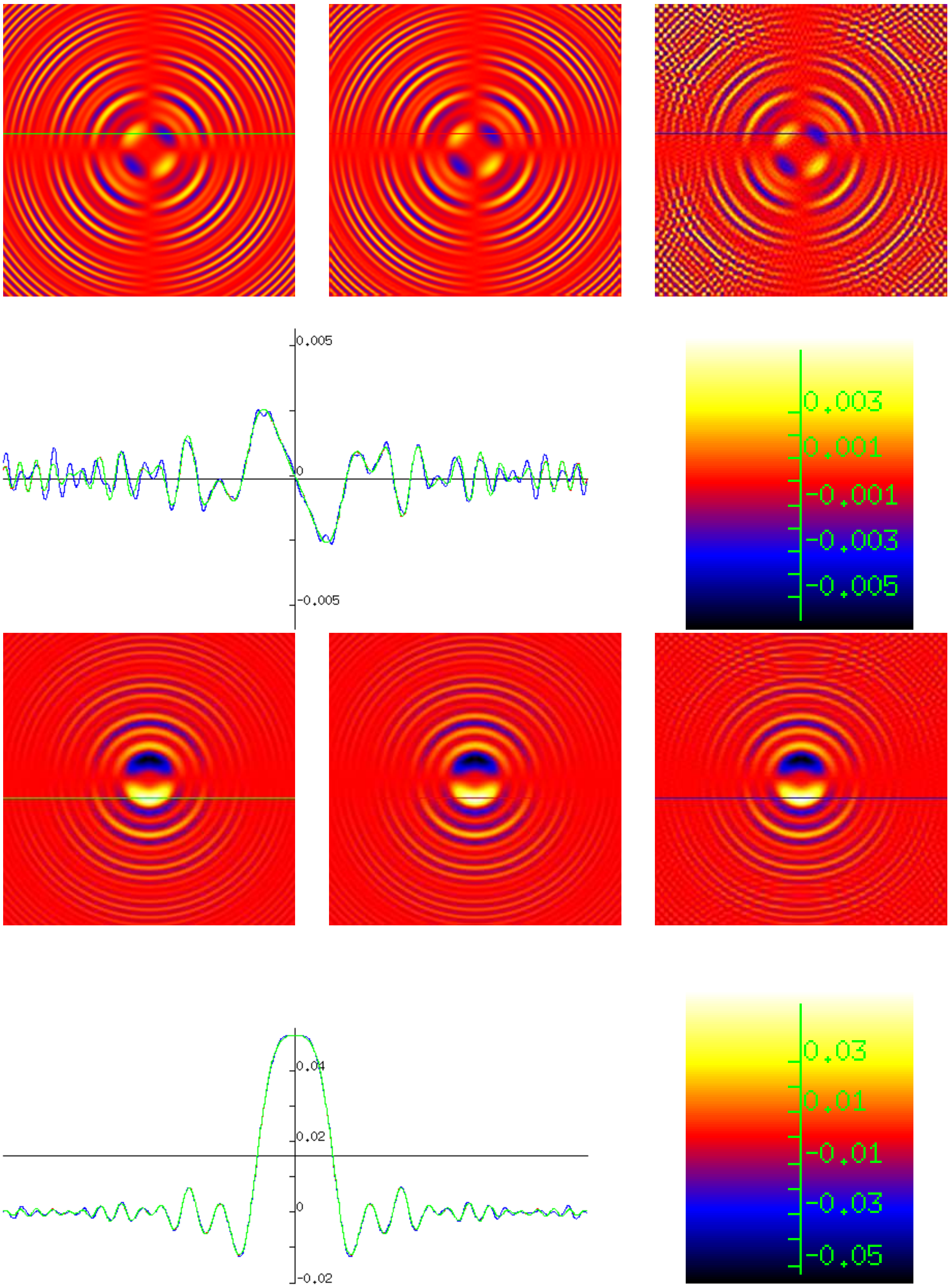

Abbildung 4.2: *Die oberen beiden Zeilen betreffen die zweite Komponente des Realteils des gestreuten elektrischen Feldes, die beiden unteren die dritte Komponente des Realteils des gestreuten elektrischen Feldes. Von links nach rechts zeigen die oberen Grafiken die zweite Komponente des Realteils der analytischen Lösung, der gefilterten analytischen Lösung und der durch den Vorwärtslöser berechneten Lösung. Die zweite Zeile zeigt einen Querschnitt durch die oberen Grafiken und den für die oberen Grafiken verwendeten Farbkeil.*

4.2.2 Rekonstruktionsergebnisse

In diesem Abschnitt wird nun die Qualität des PBP–Algorithmus für die Rekonstruktion des Brechungsindex $n_K = 1.1 + 0.03\mathrm{i}$ der Kugel mit dem Radius 20 cm gezeigt. In Abbildungen 4.3 bzw. 4.4 werden Querschnitte des Real- und Imaginärteils durch die Kugel bei $x_3 = 0\,\mathrm{cm}$ bzw. $x_3 = 14.0625\,\mathrm{cm}$ gezeigt.
Da das Update d für den approximierten Brechungsindex n^r ebenfalls gefiltert wird, kann ein fairer Vergleich der Rekonstruktionsergebnisse nur mit der gefilterten Version des exakten Brechungsindex erfolgen. Um also eine bessere Auflösung zu erhalten, muss die Wellenzahl k vergrößert werden. Alternativ kann man natürlich Löser der partiellen Differentialgleichungen verwenden, für die eine Filterung unnötig ist.

Die Rekonstruktionsergebnisse für die Schicht $x_3 = 0\,\mathrm{cm}$ und $x_3 = 14.0625\,\mathrm{cm}$ fallen ziemlich gut aus. Vergleicht man die Rekonstruktionsqualität des Realteils mit dem Imaginärteil, wird deutlich, dass der Imaginärteil etwas schlechter rekonstruiert werden kann. Diese Beobachtung gilt in etwa auch für die Simulationen 2 und 3. Bei allen drei Simulationen konnte beobachtet werden, dass die Konvergenzgeschwindigkeit des Imaginärteils gegen ihren exakten Wert langsamer war als die des Realteils gegen seinen exakten Wert.

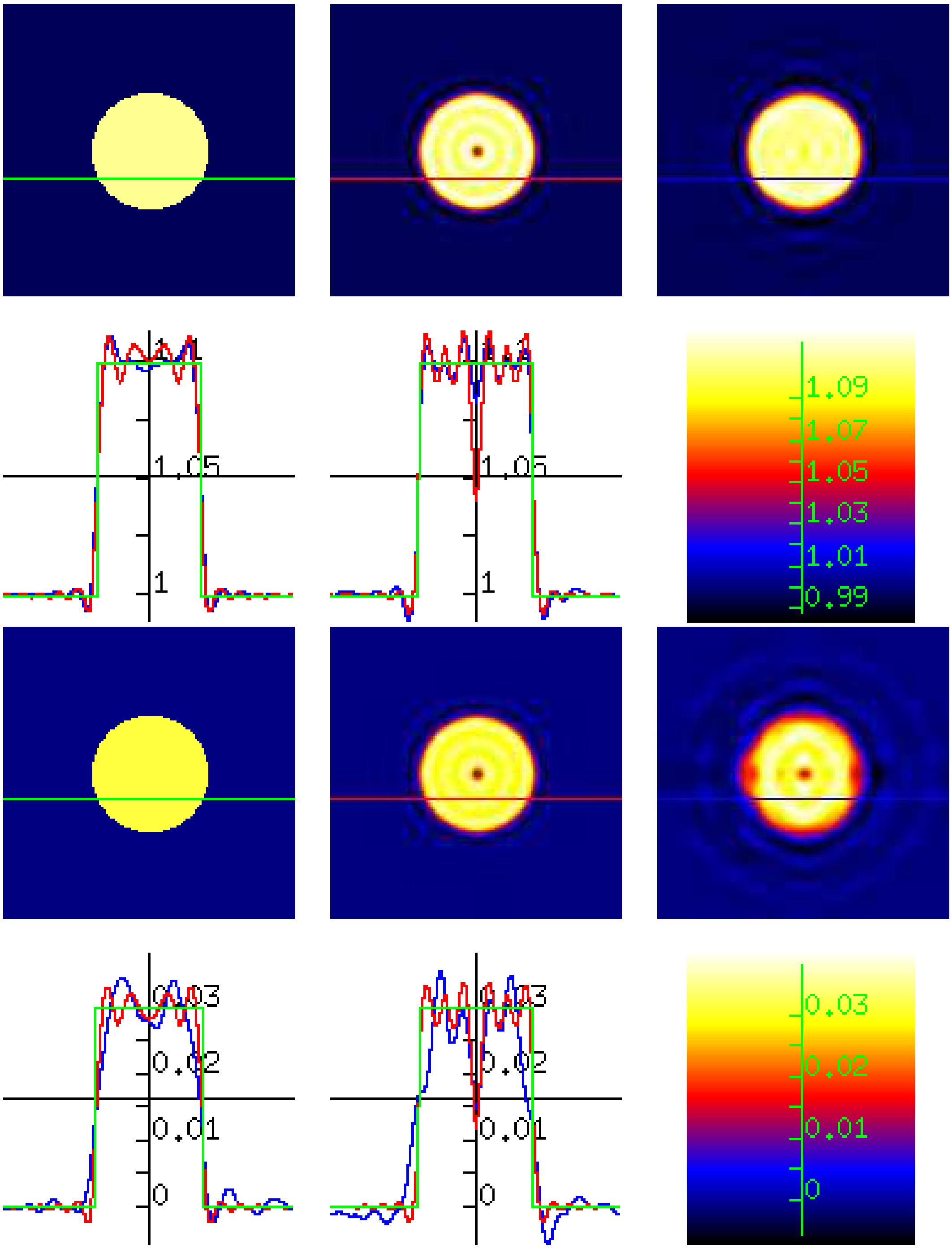

Abbildung 4.3: *Schicht $x_3 = 0$ cm: Von links nach rechts zeigen die oberen Grafiken in der ersten bzw. dritten Zeile den Realteil bzw. Imaginärteil des exakten –, des gefilterten – und des rekonstruierten Brechungsindex. Links in der zweiten und vierten Zeile ist der in den oberen Grafiken eingezeichnete Querschnitt zu sehen. Daneben befindet sich der Querschnitt durch die Mitte des Objektes.*

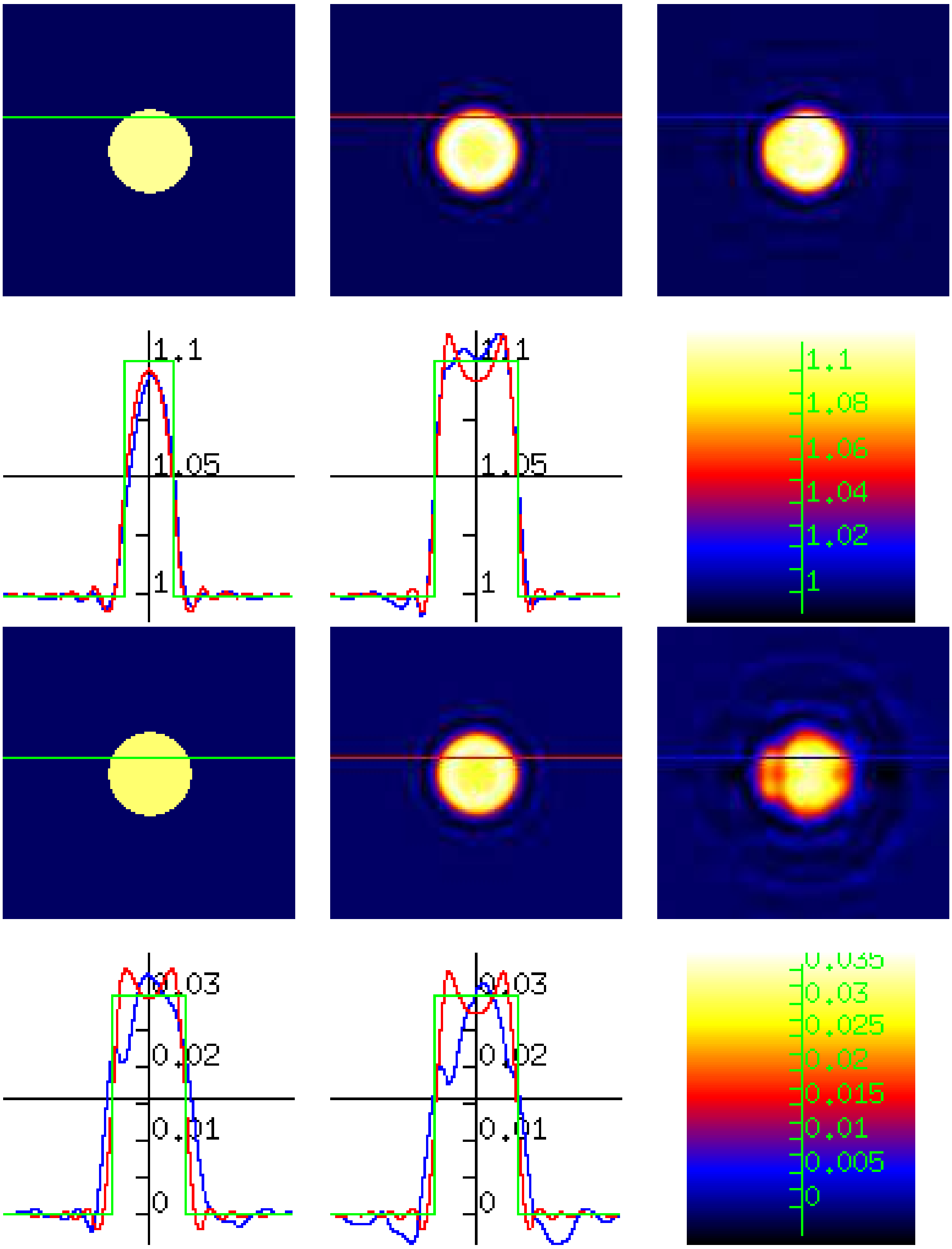

Abbildung 4.4: *Schicht* $x_3 = 14.0625\,cm$*: Von links nach rechts zeigen die oberen Grafiken in der ersten bzw. dritten Zeile den Realteil bzw. Imaginärteil des exakten – , des gefilterten – und des rekonstruierten Brechungsindex. Links in der zweiten und vierten Zeile ist der in den oberen Grafiken eingezeichnete Querschnitt zu sehen. Daneben befindet sich der Querschnitt durch die Mitte des Objektes.*

4.3 Simulation 2: Rekonstruktion eines Herzmodells

In dieser Simulation soll ein Herzmodell rekonstruiert werden. Seine Geometrie ist qualitativ der Arbeit [Bulyshev et al;2000] entnommen. Hier werden andere Materialeigenschaften angenommen, was aber schon alleine wegen der stark unterschiedlichen Frequenz der einfallenden ebenen Welle so sein muss (1 GHz zu 4.77 GHz). Doch ist hier der Kontrast mit ca. 10% geringer gewählt als ca. 30% wie in der Arbeit von [Bulyshev et al;2000].
Das Herzmodell hat folgende Geometrie und Materialeigenschaften: Es besteht aus einer Kugelschale mit einem äußeren und inneren Radius von 20 cm bzw. 12 cm. Darin eingelassen ist eine zentrierte planare Trennwand der Dicke von 8 cm. Die Schale und die Trennwand werden durch den Brechungsindex von $n_H = 1.1 + 0.05\mathrm{i}$ beschrieben. Die beiden Hohlräume sind hingegen charakterisiert durch den Brechungsindex von $n_I = 1.04 + 0.02\mathrm{i}$. Die Grafik 4.5 zeigt einen Querschnitt senkrecht zur Trennwand durch die Mitte des Herzmodells. Die Richtungen θ_j der einfallenden

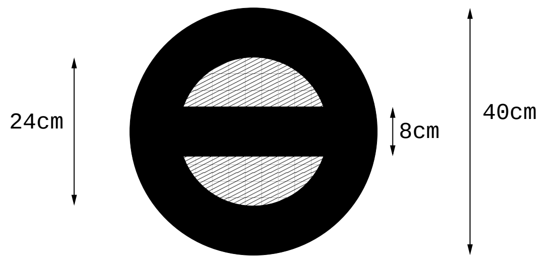

Abbildung 4.5: *Querschnitt durch das Herzmodell in der (x_1, x_2)–Ebene*

elektrischen Felder E^i liegen alle senkrecht zur Ebene der Trennwand des Herzmodells. Sie werden dort zufällig variiert. Ihre Verteilung zeigt Grafik 4.6.

Abbildung 4.6: *Verteilung der Einstrahlungsrichtungen*

Weil hier kein Zugang zu analytischen- oder experimentellen Daten besteht, werden auf Γ_θ^- Null–Randdaten (keine Rückstreuung) und auf Γ_θ^+ mit dem Vorwärtslöser berechnete Randdaten angenommen. Das Verwenden desselben Vorwärtslöser innerhalb des Rekonstruktionsalgorithmus und zur Erzeugung von Messdaten wird als

Inverse-Crime bezeichnet. Diese numerische Simulation kann daher nicht alleine für die Verifikation des PBP–Algorithmus herangezogen werden. Auf die so erzeugten Randdaten wird deshalb ein relativer Fehler von 20% addiert. Das heißt, für jeden Messwert g wird eine Zufallszahl $p_g \in [-1, 1]$ bestimmt, so dass ein modifizierter Messwert

$$\tilde{g} = g(1 + 0.2p_g)$$

entsteht. Die Zufallszahl p_g ist dabei gleichverteilt über $[-1, 1]$.

Als nächstes werden die Rekonstruktionsergebnisse vorgestellt. Verglichen wer-

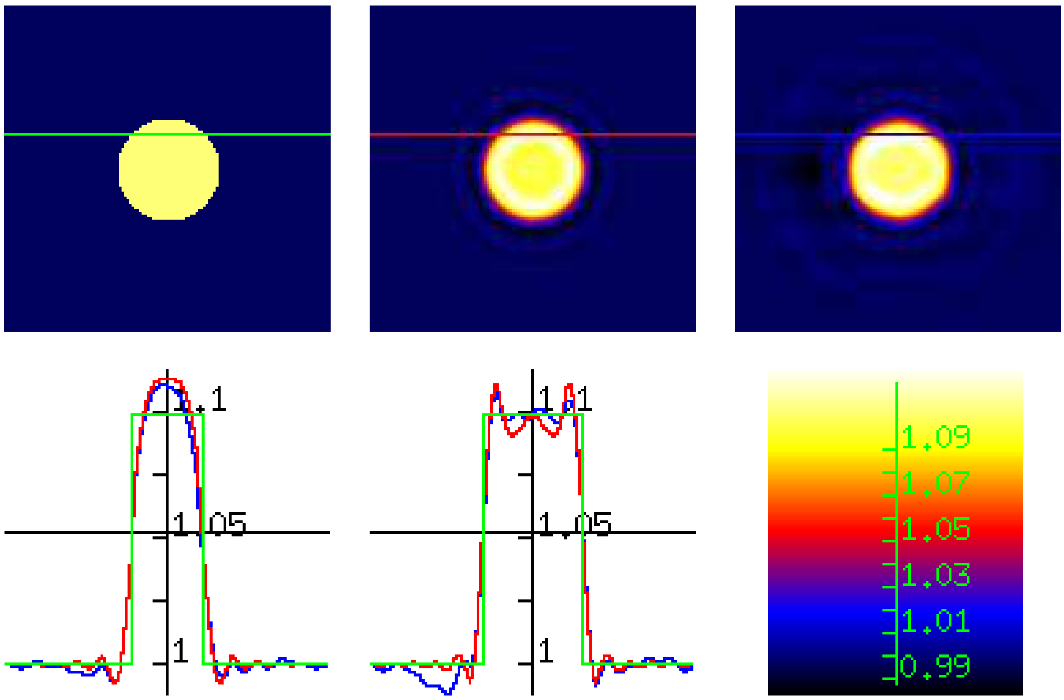

Abbildung 4.7: *Schicht $x_3 = -12.5\,cm$: Von links nach rechts zeigen die oberen Grafiken den Realteil des exakten –, des gefilterten – und des rekonstruierten Brechungsindex. Links unten ist der in den oberen Grafiken eingezeichnete Querschnitt zu sehen. Daneben befindet sich der Querschnitt durch die Mitte des Objektes.*

den die Schichten für $x_3 = -12.5\,\text{cm}$ und $x_3 = 0\,\text{cm}$. Die x_3–Achse liegt in der Ebene der Trennwand und das Zentrum des Herzmodells ist im Ursprung platziert. Der Vergleich findet jeweils zwischen dem exakten Brechungsindex, seiner gefilterten Version und dem mit dem PBP–Algorithmus rekonstruierten Brechungsindex statt. Theoretisch kann der PBP–Algorithmus nur so gut sein wie der gefilterte exakte Brechungsindex.

Die Abbildung 4.7 zeigt den Vergleich des Realteils des Brechungsindex in der Schicht

$x_3 = -12.5\,\mathrm{cm}$. Sie macht deutlich, dass der Realteil des Brechungsindex des Herzmodells in der Schicht $x_3 = -12.5\,\mathrm{cm}$ sehr gut durch den PBP–Algorithmus rekonstruiert werden kann.

Die nächste Abbildung 4.8 zeigt den Vergleich des Imaginärteils des Brechungsindex in der Schicht $x_3 = -12.5\,\mathrm{cm}$. Ihr ist zu entnehmen, dass das Niveau des Imaginärteils des exakten Brechungsindex zum Rand hin nicht erreicht werden kann. Hingegen ist das Niveau der gefilterten Version zu hoch. Der Querschnitt durch die Mitte zeigt jedoch eine sehr gute Approximation. Für den Imaginärteil hat der PBP–Algorithmus in der Schicht $x_3 = -12.5\,\mathrm{cm}$ insgesamt eine gute Rekonstruktion geliefert.

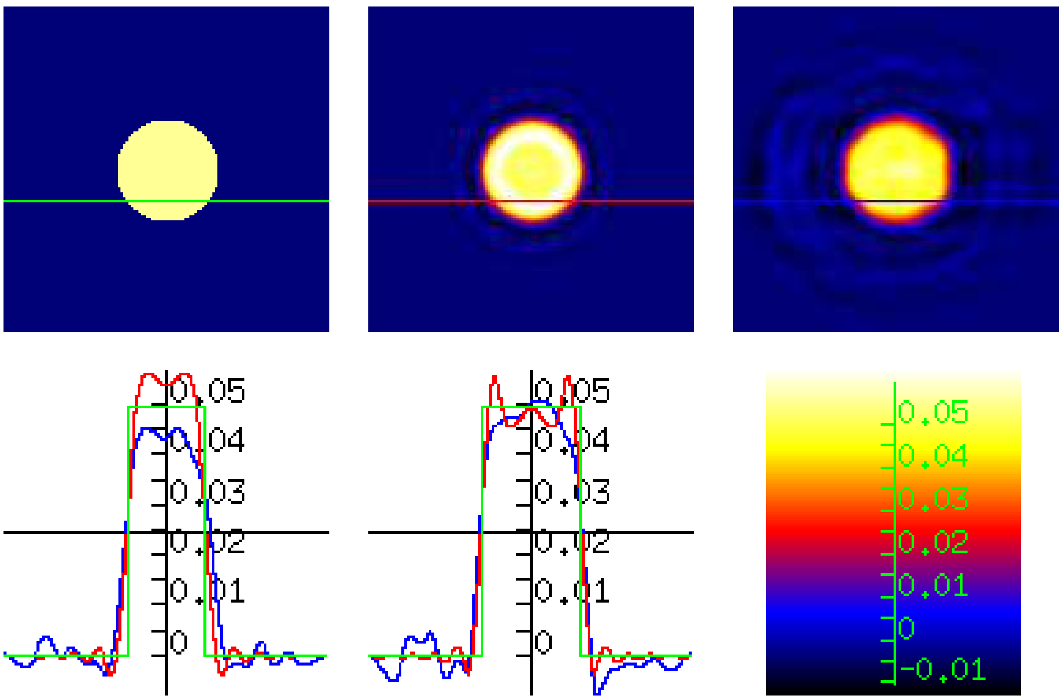

Abbildung 4.8: *Schicht $x_3 = -12.5$ cm: Von links nach rechts zeigen die oberen Grafiken den Imaginärteil des exakten –, des gefilterten – und des rekonstruierten Brechungsindex. Links unten ist der in den oberen Grafiken eingezeichnete Querschnitt zu sehen. Daneben befindet sich der Querschnitt durch die Mitte des Objektes.*

Als nächstes wird in Abbildung 4.9 die Qualität der Rekonstruktion des Brechungsindex in der Schicht $x_3 = 0\,\mathrm{cm}$ gezeigt, wobei hier die Werte für seinen Realteil und Imaginärteil in einer Abbildung gegenübergestellt werden. Dort wird deutlich, dass der Realteil des Brechungsindex in der Schicht $x_3 = 0\,\mathrm{cm}$ sehr gut approximiert wird. Die Qualität der Rekonstruktion übertrifft sogar die Qualität der gefilterten

Version des exakten Brechungsindex. Die Rekonstruktion des Imaginärteils des Brechungsindex ist hingegen nicht so gut gelungen. Der erste Querschnitt durch die untere Kammer des Herzmodells zeigt, dass das Niveau von 0.02i für die Kammer und 0.05i für die Wände nach 120 Iterationen des PBP–Algorithmus nicht erreicht werden konnte. Der zweite Querschnitt durch die Mitte des Objektes zeigt hingegen noch eine befriedigende Approximation.

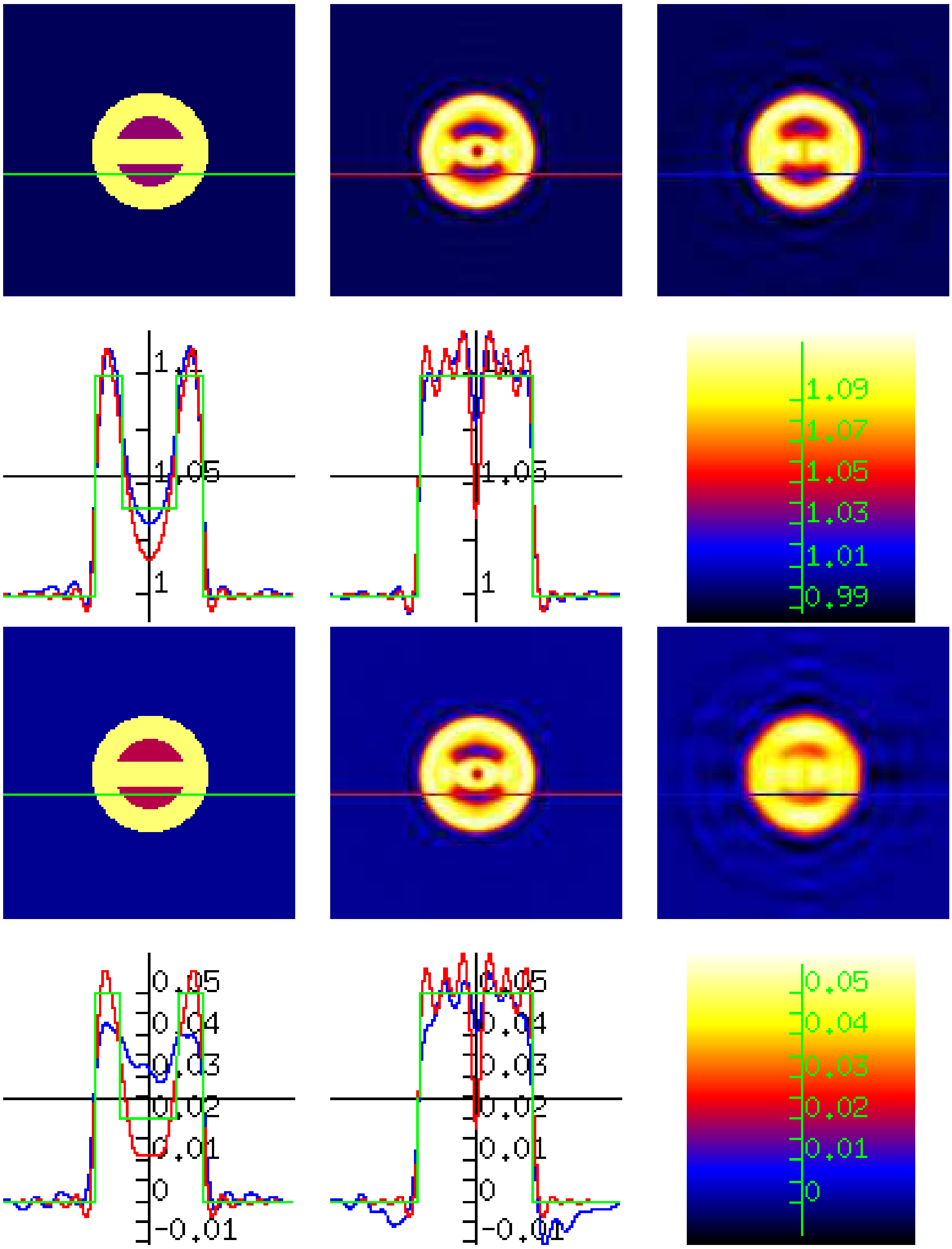

Abbildung 4.9: *Schicht $x_3 = 0$ cm: Von links nach rechts zeigen die oberen Grafiken in der ersten bzw. dritten Zeile den Realteil bzw. Imaginärteil des exakten –, des gefilterten – und des rekonstruierten Brechungsindex. Links in der zweiten und vierten Zeile ist der in den oberen Grafiken eingezeichnete Querschnitt zu sehen. Daneben befindet sich der Querschnitt durch die Mitte des Objektes.*

4.3.1 Konvergenz des Vorwärtslösers

Mit jeder besseren Näherung n^r für den Brechungsindex erreicht der Vorwärtslöser mit $R_\theta(n^r)$ eine bessere Übereinstimmung mit den vorgegebenen Randdaten bei Γ_θ^+. Dies soll hier beim Herzmodell verdeutlicht werden. Abbildung 4.10 zeigt diese Entwicklung für den Realteil der dritten Komponente des elektrischen Feldes.

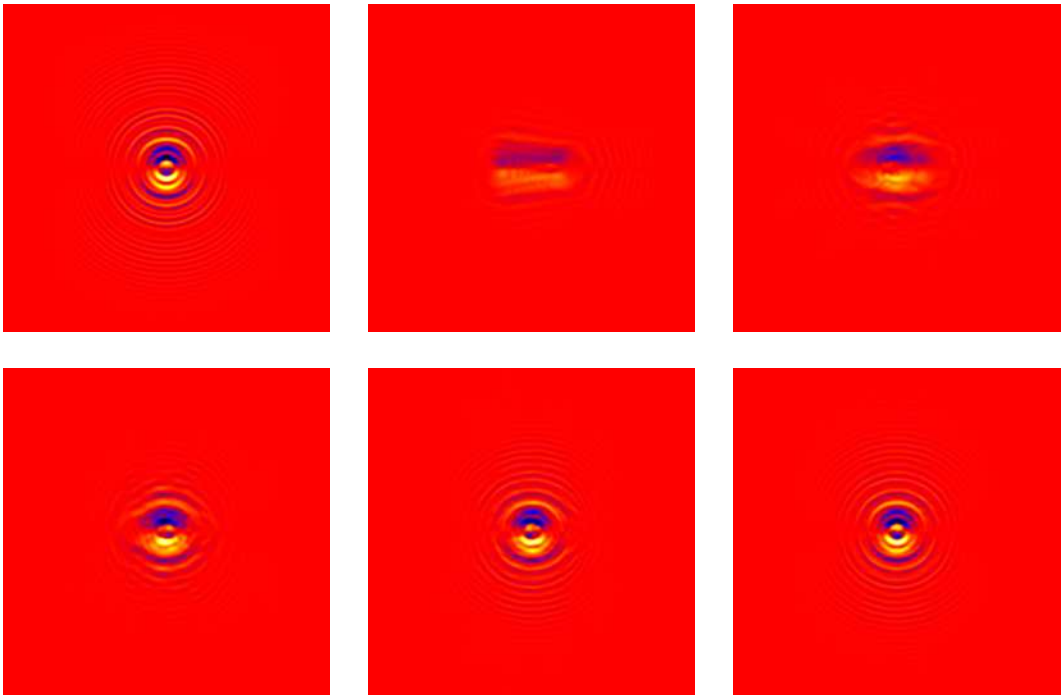

Abbildung 4.10: *Die erste Grafik links oben zeigt, die verwendeten Messwerte. Die anderen Grafiken zeigen ihre Approximation nach* 2, 5, 10, 50 *und* 120 *Iterationen des PBP–Algorithmus. Gezeigt ist jeweils der Realteil der dritten Komponente des gestreuten elektrischen Feldes.*

4.4 Simulation 3: Der inhomogene Zylinder

In diesem Abschnitt werden die Rekonstruktionsergebnisse für einen Zylinder mit dem Brechungsindex

$$n_Z(x) = 1.1 - \frac{32}{75}|x_1| + 0.05\mathrm{i} \quad \text{für } |x_1|, |(x_2, x_3)| \leq 0.2$$

vorgestellt. Während der Imaginärteil des Brechungsindex konstant ist, besitzt der Realteil einen konstanten Gradienten in x_1-Richtung. Abhängig von x_1 verändert sich der Realteil von 1.1 im Zentrum bis ca. 1.015 am Deckel des Zylinders. Grafik 4.11 zeigt einen Querschnitt in der (x_1, x_2)–Ebene durch die Mitte des Zylinders.

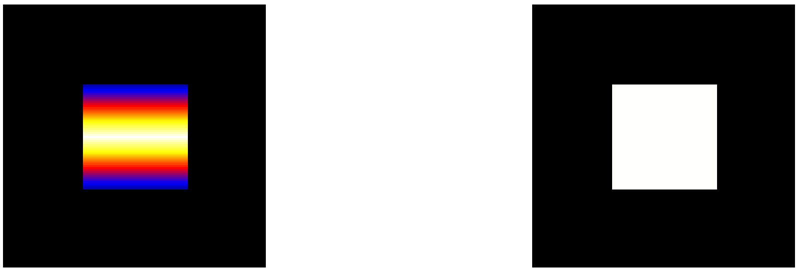

Abbildung 4.11: *Querschnitt durch die Rotationsachse des Zylinders. Links ist der Realteil und rechts der Imaginärteil zu sehen.*

Im Gegensatz zu den Simulationen 1 und 2 wird hier die Amplitude der einfallenden Welle nicht parallel zu einer kartesischen Koordinatenachse gewählt: $E_0^i = 2^{-1/2}(1, 1, 0)^t$.

Abbildung 4.12 bzw. 4.13 zeigt die Rekonstruktionsergebnisse jeweils für den Real- und Imaginärteil des Brechungsindex in den Schichten $x_3 = 0\,\mathrm{cm}$ bzw. $x_3 = 18.75\,\mathrm{cm}$. Zu den Rekonstruktionsergebnissen ist noch anzumerken, dass die Rekonstruktion des Realteils des Brechungsindex in der Schicht $0\,\mathrm{cm}$ dem exakten Brechungsindex etwas näher kommt als die gefilterte Version des exakten Brechungsindex. In dieser Schicht konnte auch der Imaginärteil sehr gut wiedergegeben werden.
Die Rekonstruktionsergebnisse in der Schicht $x_3 = 18.75\,\mathrm{cm}$ sind etwas schwächer, was bei einem Abstand von $1.25\,\mathrm{cm}$ vom Rand und einer Wellenlänge von $\approx 6.3\,\mathrm{cm}$ nicht verwundert.

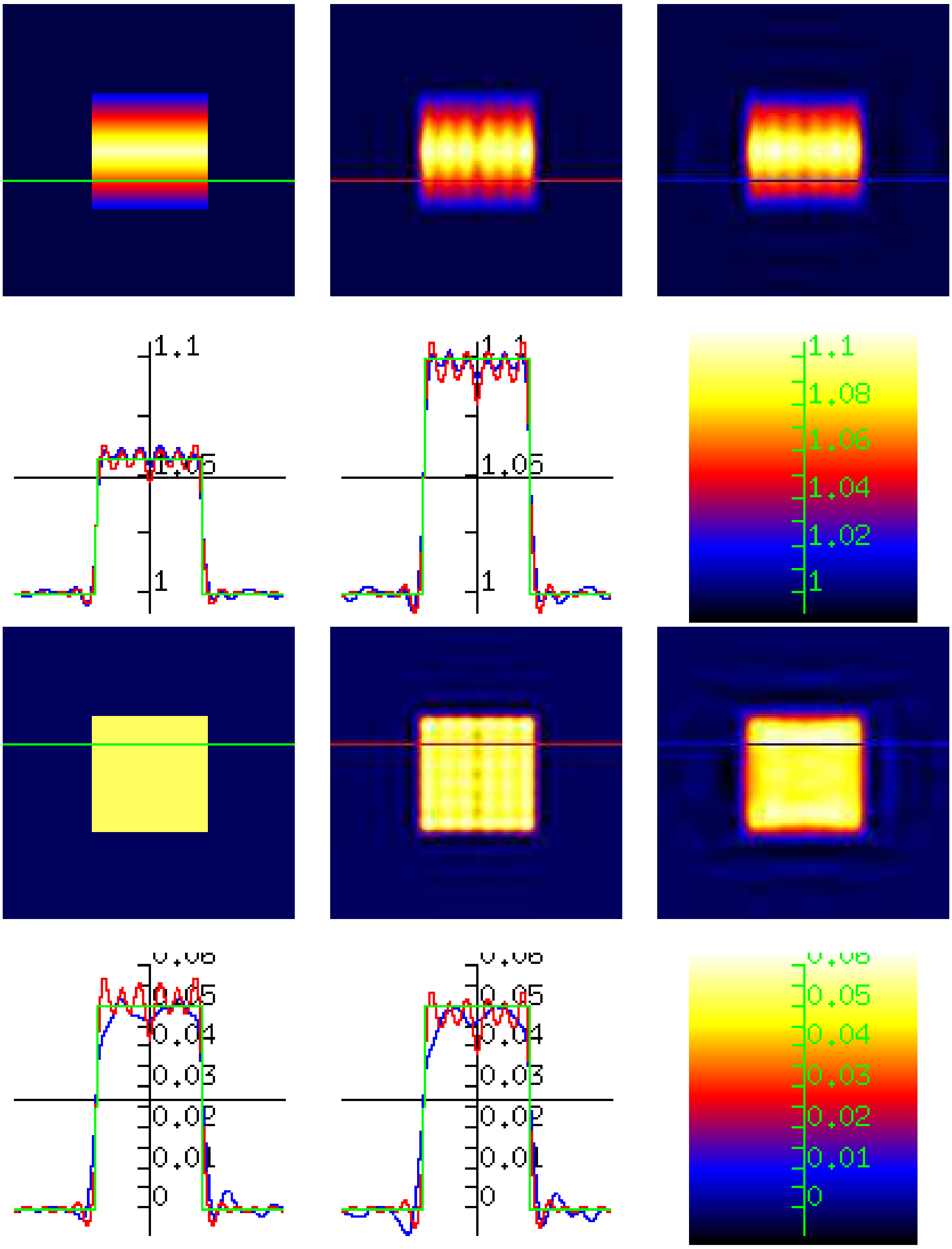

Abbildung 4.12: *Schicht* $x_3 = 0\,cm$: *Von links nach rechts zeigen die oberen Grafiken in der ersten bzw. dritten Zeile den Realteil bzw. Imaginärteil des exakten –, des gefilterten – und des rekonstruierten Brechungsindex. Links in der zweiten und vierten Zeile ist der in den oberen Grafiken eingezeichnete Querschnitt zu sehen. Daneben befindet sich der Querschnitt durch die Mitte des Objektes.*

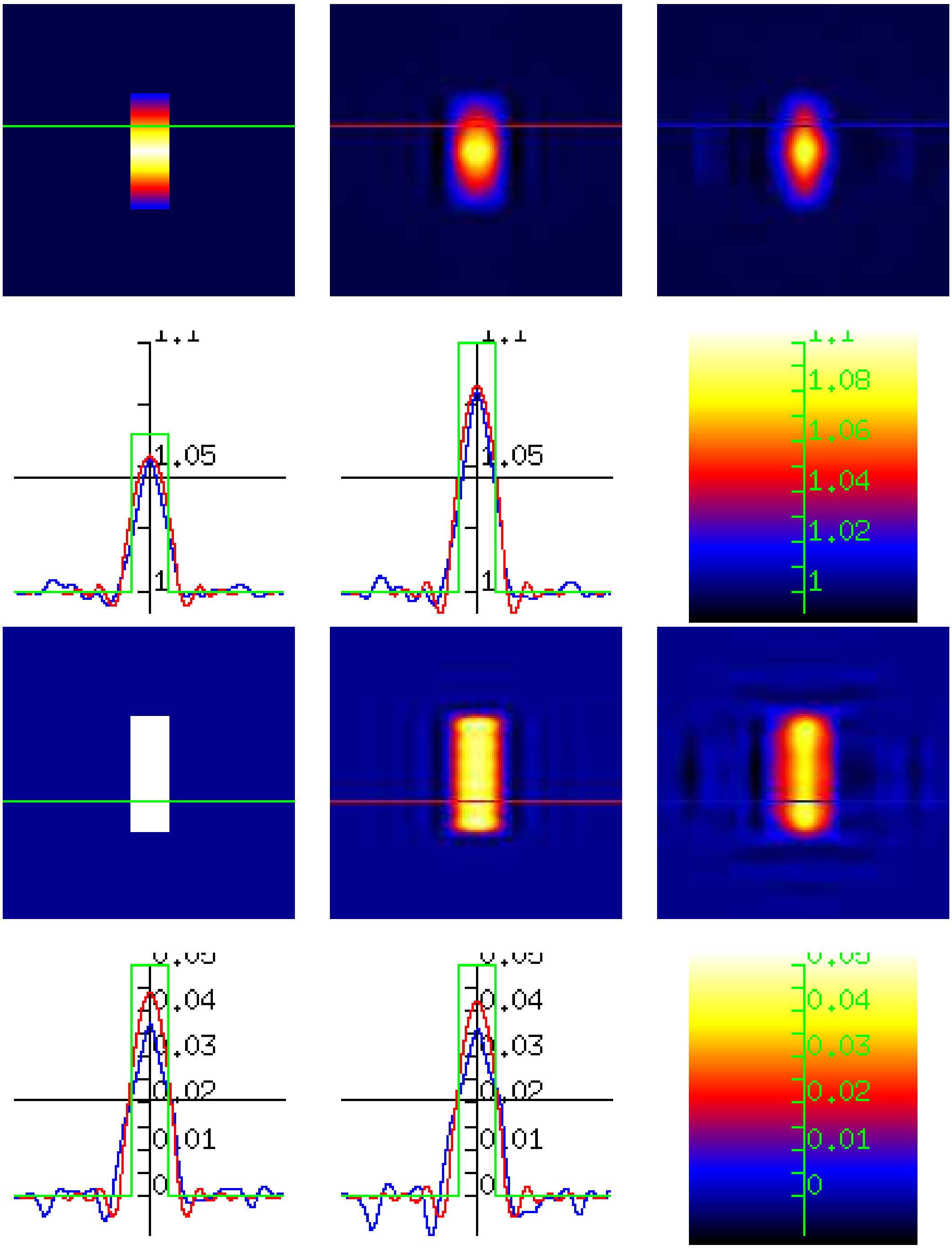

Abbildung 4.13: *Schicht* $x_3 = 18.75\,cm$*: Von links nach rechts zeigen die oberen Grafiken in der ersten bzw. dritten Zeile den Realteil bzw. Imaginärteil des exakten – , des gefilterten – und des rekonstruierten Brechungsindex. Links in der zweiten und vierten Zeile ist der in den oberen Grafiken eingezeichnete Querschnitt zu sehen. Daneben befindet sich der Querschnitt durch die Mitte des Objektes.*

4.5 BORNsche Näherung

Wir wollen noch ein Gefühl dafür bekommen, wie weit entfernt wir im Fall der homogenen Kugel von der BORNschen Näherung sind.
Unter der BORNschen Näherung verstehen wir das elektrische Feld E, das wir erhalten, wenn in der Integralgleichung (2.1) auf der rechten Seite E durch das einfallende Feld E^i ersetzt wird. Also:

$$E(x) = E^i(x) - k^2 \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x,y)(1-n(x))E^i(y)\,\mathrm{d}y \\ + \nabla \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla n(y)}{n(y)} \cdot E^i(y)\Phi(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Wenn der Term $\nabla n/n$ klein ist, ist das gestreute elektrische Feld $E^s = E - E^i$ also „fast" linear in $n-1$.

Die Grafiken in Abbildung 4.14 zeigen, dass sich das gestreute elektrische Feld in

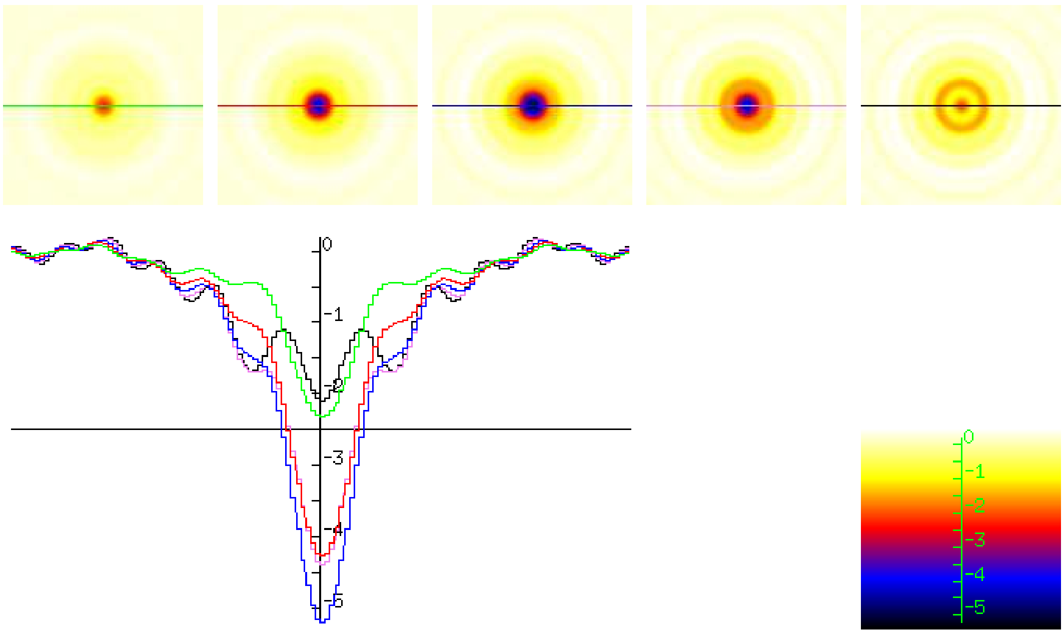

Abbildung 4.14: *Die erste Zeile zeigt den Realteil der ersten Komponente des gestreuten elektrischen Feldes bei Γ_θ^+ für die Streuung an einer Kugel nach Simulation 1 für den Brechungsindex* $n = 1.05,\ 1.1,\ 1.15,\ 1.2,\ 1.25$.

Abhängigkeit vom Brechungsindex sehr früh nichtlinear verhält, so dass für $n \approx 1.1$ der Gültigkeitsbereichs der BORNschen Näherung verlassen wird.

4.6 Approximation durch die Helmholtz–Gleichung

In diesem Abschnitt wird der Frage nachgegangen, inwieweit die Maxwell–Gleichungen für die hier vorgestellten Simulationen durch die Helmholtz–Gleichung approximiert werden kann. Das heißt, ob der Term (die Kopplung)

$$\nabla\left(\frac{\nabla n}{n}\cdot E\right) \tag{4.1}$$

in der Differentialgleichung

$$\Delta E(x)+\nabla\left(\frac{\nabla n(x)}{n(x)}\cdot E(x)\right)+k^2 n(x)E(x)=0 \tag{4.2}$$

vernachlässigt werden kann. Nehmen wir dazu an, dass die einfallende ebene Welle linear polarisiert ist:

$$E_0^i(x)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_3}\,.$$

Mit den obigen Notationen ist also hier $E_0^i=(1,0,0)^t$ und $\theta_j=(0,0,1)^t$. Weil nun die zweite und dritte Komponente des gestreuten elektrischen Feldes E^s erst durch die Kopplung (4.1) entstehen, können diese nicht durch die Helmholtz–Gleichung approximiert werden. Wenn also die Approximation von (4.2) durch die Helmholtz–Gleichung gelingen soll, darf nur die erste Komponente von E^s berücksichtigt werden. Die Differentialgleichung (3.15) für E^s mit $E=\exp(\mathrm{i}kx_3)((1,0,0)^t+E^s)$ schreibt sich dann als

$$\Delta E_1^s+2\mathrm{i}k\frac{\partial}{\partial x_3}E_1^s+k^2(n-1)(E_1^s+1)=0. \tag{4.3}$$

Die Operatoren $R_j(n)$, $A_j(n)$ und $A_j(n)^*$ werden genauso wie in Kapitel 3 konstruiert. Im Fall der Helmholtz–Gleichung haben sie allerdings eine viel einfachere Struktur. Nach dem Artikel [Natterer,Wübbeling;1995] berechnet sich zum Beispiel $A_j(n)^*$ durch

$$A_j(n)^*G_{j,1}=-k^2(\overline{E}_1^s+1)Z,$$

wobei die skalare Funktion Z Lösung von

$$\Delta Z+2\mathrm{i}k\frac{\partial}{\partial x_3}Z+k^2(\bar{n}-1)Z=0$$

mir Randdaten $Z=0$ auf $\Gamma_j^+\cup\Gamma_j$ und $\partial Z/\partial x_3=-\partial G_{j,1}/\partial x_3$ auf Γ_j^+ ist. Der PBP–Algorithmus vereinfacht sich also erheblich. Bei der Implementierung drittelt sich der Speicherbedarf und die Rechendauer verkürzt sich sogar um mehr als den

Faktor 3.

Um das einfachere HELMHOLTZ–Modell mit dem MAXWELL–Modell zu vergleichen, werden die Simulationen 1, 2 und 3 herangezogen. Für beide Modelle sind natürlich dieselben Messdaten auf Γ_j^- und Γ_j^+ verwendet worden. Bis auf den Austausch der Modelle wurden alle übrigen Parameter beibehalten.

Als erstes Beispiel greifen wir die Simulation 1 nochmals auf. Bei der homogenen Kugel muss die Kopplung (4.1) bei der Implementierung nur am Rand der Kugel berücksichtigt werden. Vermutlich wird sie daher keinen großen Einfluss auf die Lösung haben. In Abbildung 4.15 sind die Rekonstruktionsergebnisse durch die Mitte der Kugel gegenübergestellt. Es kann festgestellt werden, dass die Approximation des elektromagnetischen Streuproblems durch die HELMHOLTZ–Gleichung in (4.3) qualitativ zu den gleichen Rekonstruktionsergebnissen führt. Die Beschreibung des Streuproblems durch die MAXWELL–Gleichungen bringt somit hier überhaupt keinen Vorteil.

Als nächstes ziehen wir Simulation 2 heran. Bei dem Vergleich der Rekonstruktionsqualität für den Realteil in Abbildung 4.16 konnte beobachtet werden, dass die harten Übergänge (Kanten) in andere Bereiche des Modells durch das MAXWELL–Modell etwas besser rekonstruiert wird als beim HELMHOLTZ-Modell. Allerdings zeigt der Querschnitt durch die Mitte des Objektes, dass das HELMHOLTZ–Modell das Niveau besser trifft. Die Qualität der Rekonstruktionen des Imaginärteils des Brechungsindex ist gleichwertig.

Als drittes Beispiel benutzen wir die Simulation 3. Abbildung 4.17 zeigt, dass es kleine qualitative Unterschiede in der Rekonstruktion gibt. Der erste Querschnitt in Zeile zwei ist insoweit repräsentativ, als dass er zeigt, dass die Rekonstruktion mit dem HELMHOLTZ–Modell fast immer über dem tatsächlichen Niveau der Vorlage liegt. Hier hat das MAXWELL–Modell kleine Vorteile. Auch die Rekonstruktion des Imaginärteils gelingt bei Verwendung des MAXWELL-Modells ein wenig besser. Hier kann also eine kleine Verbesserung durch die Verwendung der exakteren MAXWELL–Gleichung erreicht werden. Inwieweit dies in der Praxis relevant ist, kann hier nicht entschieden werden.

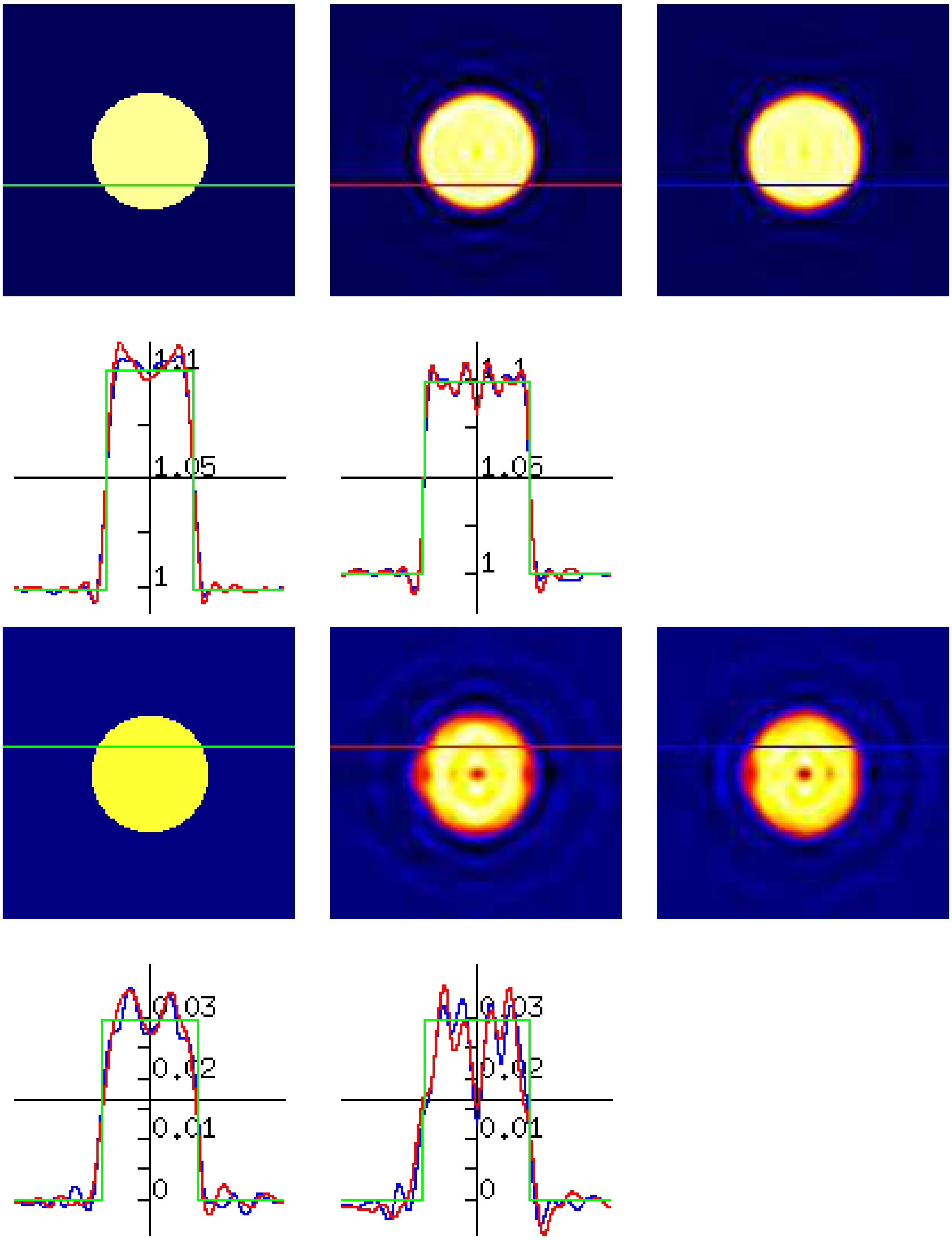

Abbildung 4.15: *Schicht $x_3 = 0\,cm$: Von links nach rechts zeigen die oberen Grafiken in der ersten bzw. dritten Zeile den Realteil bzw. Imaginärteil des exakten –, des mit dem* Maxwell-*Modell rekonstruierten – und des mit dem* Helmholtz–*Modell rekonstruierten Brechungsindex. Links in der zweiten und vierten Zeile ist der in den oberen Grafiken eingezeichnete Querschnitt zu sehen. Daneben befindet sich der Querschnitt durch die Mitte des Objektes.*

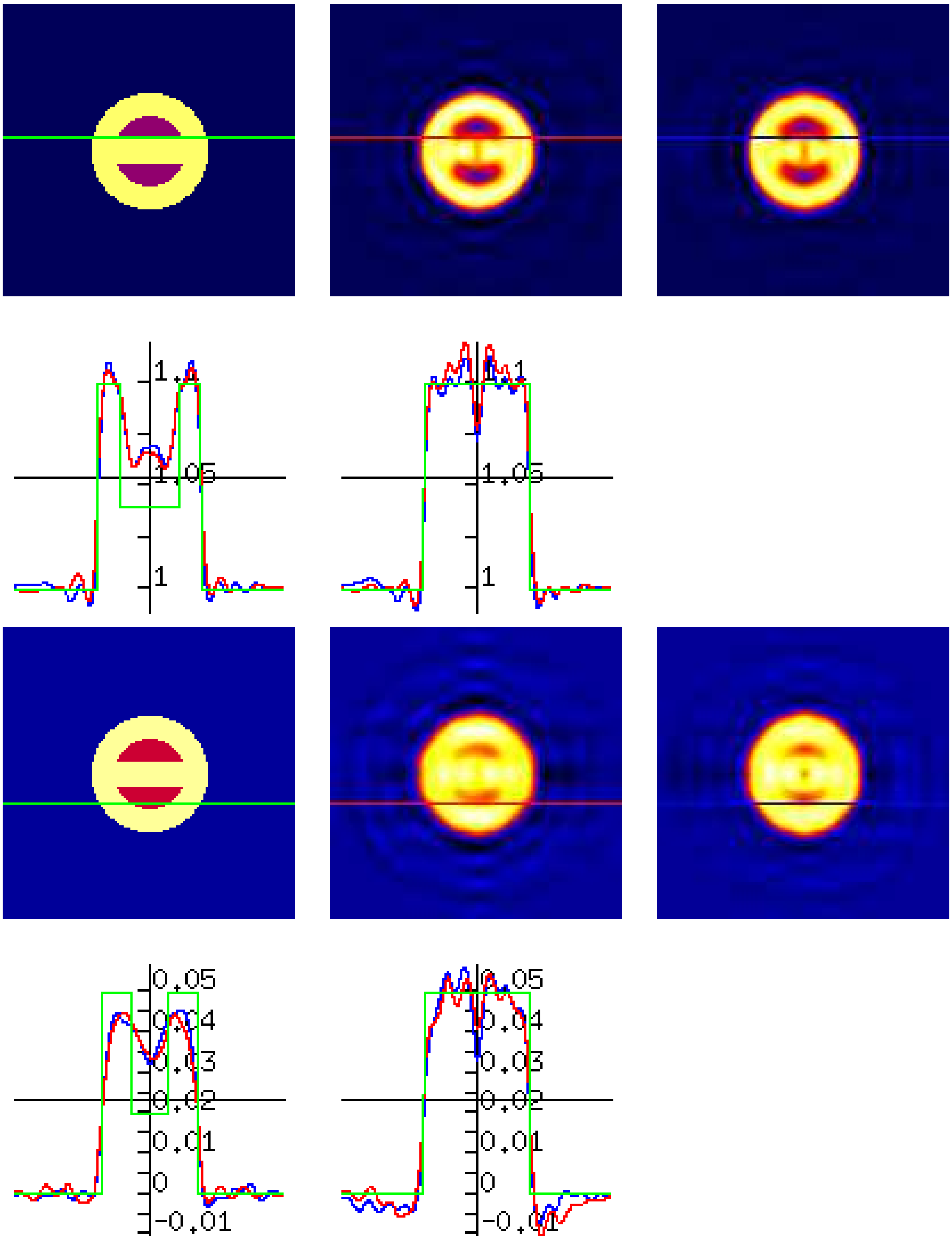

Abbildung 4.16: *Schicht $x_3 = 0\,cm$: Von links nach rechts zeigen die oberen Grafiken in der ersten bzw. dritten Zeile den Realteil bzw. Imaginärteil des exakten –, des mit dem* Maxwell-*Modell rekonstruierten – und des mit dem* Helmholtz–*Modell rekonstruierten Brechungsindex. Links in der zweiten und vierten Zeile ist der in den oberen Grafiken eingezeichnete Querschnitt zu sehen. Daneben befindet sich der Querschnitt durch die Mitte des Objektes.*

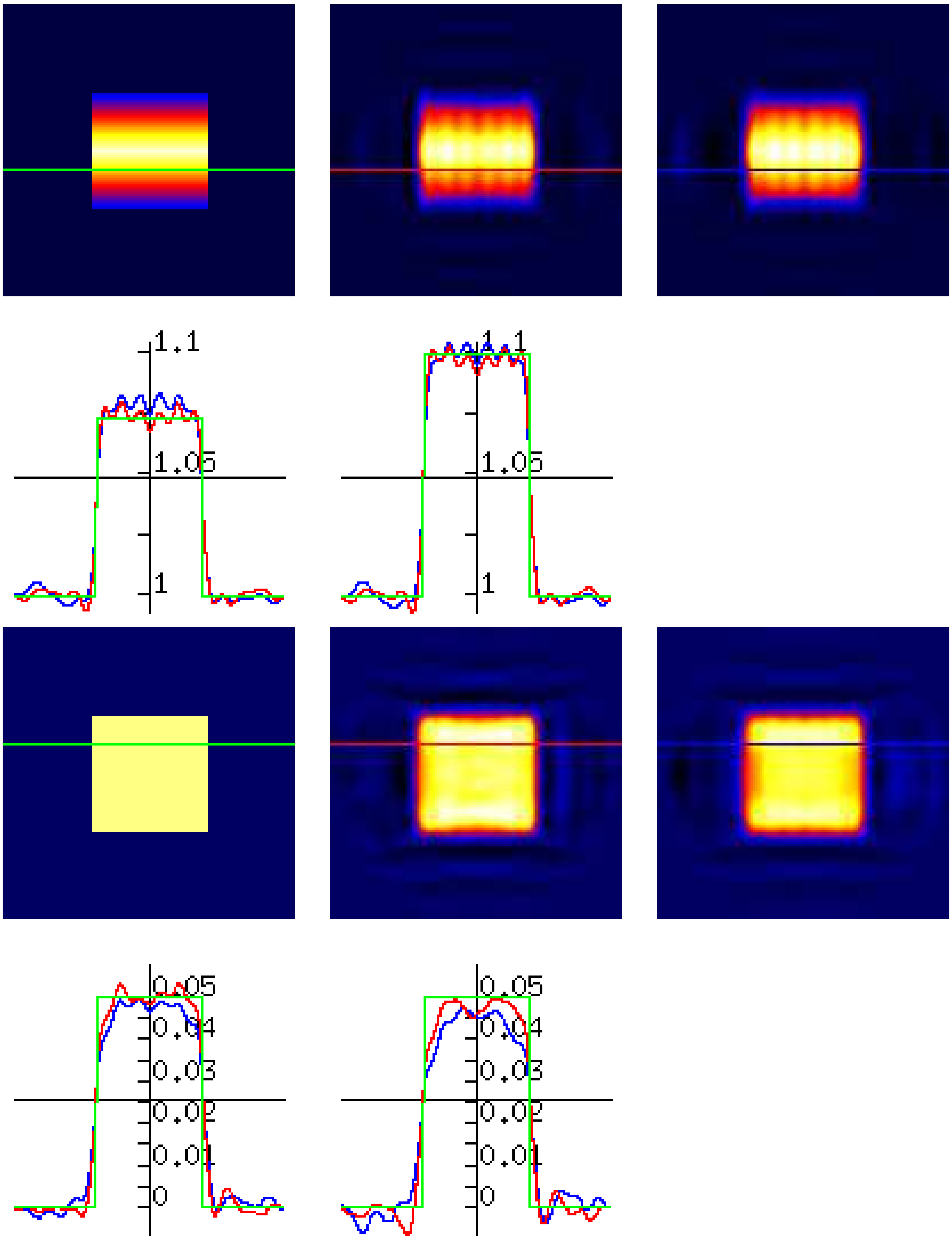

Abbildung 4.17: *Schicht $x_3 = 0$ cm: Von links nach rechts zeigen die oberen Grafiken in der ersten bzw. dritten Zeile den Realteil bzw. Imaginärteil des exakten –, des mit dem* MAXWELL*-Modell rekonstruierten – und des mit dem* HELMHOLTZ*–Modell rekonstruierten Brechungsindex. Links in der zweiten und vierten Zeile ist der in den oberen Grafiken eingezeichnete Querschnitt zu sehen. Daneben befindet sich der Querschnitt durch die Mitte des Objektes.*

4.7 Abschließende Bemerkung

Durch die Arbeiten [Natterer,Wübbeling;1995] und [Natterer;1999] wurde demonstriert, dass der PBP–Algorithmus exzellent im Bereich der Ultraschall–Tomographie funktioniert.

In der hier vorliegenden Arbeit konnte gezeigt werden, dass sich sowohl die Implementierung als auch theoretische Resultate auf den Bereich der Mikrowellen–Tomographie übertragen lassen.

Der PBP–Algorithmus ist in der Lage das nichtlineare inverse Problem für die Maxwell–Gleichungen zu lösen. Ein Vorteil der hier gewählten Implementierung ist, dass sie sich sehr leicht auf ein Multiprozessorsystem übertragen lässt, da Rechnungen im 3D–Raum auf aktuellen Einzelprozessorsystemen sehr zeitintensiv sind.

Es sollte nicht unerwähnt bleiben, dass ein Konvergenzbeweis für den PBP–Algorithmus fehlt. Allerdings wurde für den diskreten Fall unter bestimmten Voraussetzungen lokale Konvergenz in [Meyn;1983] gezeigt.

Der Abschnitt über die Approximation des Maxwell–Modells durch das Helmholtz–Modell zeigt an, dass es durchaus sinnvoll sein kann, das genauere Maxwell–Modell zu nehmen. Allerdings wird für viele Brechungsindizes das Helmholtz–Modell ein guter Vorkonditionierer sein, der für simple Fälle sogar ausreichend sein wird. Doch eine abschließende Antwort auf die Frage, für welche Objekte die Verwendung des Helmholtz–Modells im Bereich der Mikrowellen–Tomographie eine ausreichende Näherung darstellt, kann nur die Simulation mit realen Daten geben.

Literaturverzeichnis

[Abramowitz,Stegun;1965] Abramowitz, M.; Stegun, I.A.: *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc., New York, 1965

[Ammari,Bao;2001] Ammari, H.; Bao, G.: *Analysis of the scattering map of all linearized medium problem for electromagnetic waves*; Inverse Problems 17 (2001) 219 – 234

[Born,Wolf;1999] Born, M.; Wolf, E.: *Principles of Optics*, Camebridge University Press, 1999, 7th edition

[Bulyshev et al;2000] Bulyshev, A.E. et al: *Three–dimensional microwave tomography. Theory and computer experiments in scalar approximation*, Inverse Problems, 16, 2000, 863-85

[Colton,Kress;1983] Colton, D.; Kress, R.: *Integral Equation Methods in Scattering Theory*, John Wiley & Sons, 1983

[Colton,Kress;1992] Colton, D.; Kress, R.: *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Springer-Verlag, 1992

[Colton,Kirsch;1996] Colton, D., Kirsch, A.: *A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region*, Inverse Problems, 383-395, 1996

[Debye;1909] Debye, P.: Ann. d. Physik(4), 30, 1909; Mat. Ann., 67, 1909; Sitzungsb. Münch. Akad. Wiss, Math. Phys. Kl., 5 Abh., 1910

[Gilbarg,Trudinger;1977] Gilbarg, D.; Trudinger, N.S.: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer–Verlag, 1977

[Hagnes et al;1998] Hagness, S.C.; Taflove, A.; Bridges, J.E.: *Two–dimensional FDTD analysis of a pulsed microwave confocal system for breast cancer detection: fixed–focus and antenna–array sensors*, IEEE Trans. Biomed. Eng. 45 1470-9, 1998

[Hiraoka et al;1996] Hiraoka, T.; Tanaka, M.; Takeneka, T.; Harada, H.; Wall, D.; Furuoku, T.: *Electromagnetic Detection of Cylindrical Buried Objects*, Proceedings of The Fourth Japanese and Polish Joint Seminar on Electromagnetic Phenomena Applied to Technology, June 5-7, 1995, Oita, Japan

[Hörmander;1976] Hörmander, L.: *Linear Partial Differential Operators*, Springer–Verlag, 1976

[Joines et al;1980] Joines, W.T.; Jirtle, R.L.; Rafal, M.D.; Schaefer, D.J.:*Microwave power absorption differences between normal and malignant tissue*, Int. J. Radiat. Oncol. Biol. Phys. 6 681-7, 1980

[Kress;2000] Kress, R.: *Iterative solution of the inverse scattering problem for a locally pertrubed half-plane*, Kleinheubacher Berichte, 2000

[Kress,Rundell;2000] Kress, R.; Rundell, W.: *Inverse Scattering for Shape and Impedance*, erscheint in Inverse Problems, http://www.num.math.uni-goettingen.de/kress/researchlist.html

[Meyn;1983] Meyn, K.-H.: *Solution of Underdetermined Nonlinear Equations by Stationary Iteration Methods*, Numer. Math. 42, 161-172, 1983

[Magnus et al;1966] Magnus, W.; Oberhettinger, F.; Soni, R.P.: *Formulas and Theorems for Special Functions of Mathematical Physics*, Springer–Verlag Berlin Heidelberg New York, 1966

[Natterer,Wübbeling;1995] Natterer, F.; Wübbeling, F.: *A propagation-backpropagation method for ultrasound tomography*, Inverse Problems 11 (1995), 1225-1232

[Natterer;1999] Natterer, F.: *An initial value approach to the inverse Helmholtz problem at fixed frequency*, Inverse Problems in Medical Imaging and Nondestructive Testing, Proceedings of the Congerence in Oberwolfach, Germany, 4.–10. Feb. 1997

[Natterer,Wübbeling;2001] Natterer, F.; Wübbeling, F.: *Mathematical Methods in Image Reconstruction*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2001

[Oberhettinger;1973] Oberhettinger, F.: *Fourier Transforms of Distributions and Their Inverses, A Collection of Tables*; Academic Press, New York and London, 1973

[Schepps,Foster;1980] Schepps, J.L.; Foster, K.R.: *The UHF and microwave dielectrical properties of normal and tumor tissues: variation in dielectrical properties with tissues water content*, Phys. Med. Biol. 25 1149-59, 1980

[Semenov et al;1996] Semenov, S.Y.; Svenson R.H.; Dezern, K.R.; Quinn M.E.; Thompson M.; Tatsis G.P.: *Myocardial ischemia and infarction can be detected by microwave spectroscopy, Experimental evidence*, Proc. 18th Annual Int. Conf. of the IEEE Eng. in Medicine and Biology Soc., 1996

[Semenov et al;1999] Semenov, S.Y.; Svenson, R.H.; Bulyshev, A.E.; Souvorov, A.E.; et al: *Three–Dimensional Microwave Tomography: Experimental Prototype of the System and Vector Born Reconstruction Method*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Vol. 46, 937–946, 1999

[Walter;1972] Walter, W.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer-Verlag, 1972

[Walter;1994] Walter, W.: *Einführung in die Theorie der Distributionen*; BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich; 1994

[Werner;2000] Werner, D.: *Funktionalanalysis*, Springer, 2000

Lebenslauf

Matthias Vögeler
geboren am 01.03.1974 in Beelen
Familienstand: ledig
Eltern: Helmut Vögeler, Hildegard Vögeler (geb. Kleine–Dütting)

1980–1984	Grundschule Beelen
1984–1986	Von–Galen–Hauptschule Beelen
1986–1990	Von–Galen–Realschule Warendorf
1990–1993	Höhere Berufsfachschule mit gymnasialer Oberstufe für Wirtschaft und Verwaltung
14.06.1993	Datum des Abiturzeugnisses
07.1993–10.1994	Zivildienst im Josephs–Hospital Warendorf
WS 1994/95 – SoSe 1999	Diplomstudiengang Mathematik (Nebenfach Physik) an der Westfälischen–Wilhelms Universität Münster
03.1997–03.1998	Studentische Hilfskraft bei Baetge & Partner, Technologiehof Münster
WS 1998/99	Studentische Hilfskraft am Institut für Numerische und instrumentelle Mathematik der WWU Münster
19.04.1999	Datum des Diplomzeugnisses
Seit Mai 1999	Beginn der Promotion: Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Numerische und instrumentelle Mathematik der WWU Münster

Münster, Oktober 2001