Jörn Stypa

Existenz einer Lösung für die nichtlineare Elastizitätstheorie mit Anwendung in der Herzmechanik

2000

Angewandte Mathematik

Existenz einer Lösung für die nichtlineare Elastizitätstheorie mit Anwendung in der Herzmechanik

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften im Fachbereich
Mathematik und Informatik
der Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms–Universität Münster

vorgelegt von

Jörn Stypa
aus Kleve

2000

Dekan:	Prof. Dr. W. Lange
Erster Gutachter:	Prof. Dr. C.W. Cryer
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. F. Natterer
Tag der mündlichen Prüfungen:	
Tag der Promotion:	

Für meine Eltern

Zusammenfassung

Die klassischen linearen Modelle der Elastizitätstheorie sind in der Biomechanik nur sehr begrenzt anwendbar und sind dort durch die nichtlinearen Modelle zu ersetzen. Dies gilt besonders für die Modellierung der Herzmechanik, die durch die Batista Operation (Herverkleinerung) neuerdings an Bedeutung gewonnen hat. Die mathematische Modellierung der stationären Herzmechanik führt auf ein nichtlineares System von partiellen Differentialgleichungen. Dabei wird das Herz nicht als dünne Schale modelliert, sondern als dreidimensionales Objekt betrachtet. Die Lösungen dieses Systems sind die Deformationen, mit denen sich Verzerrungen und Spannungen bestimmen lassen.

Für hyperelastische Materialien, wie das Myokard, existiert ein Energiefunktional. In der Elastizitätstheorie sind diese Funktionale nicht konvex, das gleiche gilt auch für die Menge der Deformationen. Daher ist der Existenzsatz von Lax-Milgram für das zugehörige Variationsproblem nicht anwendbar. Der Satz von Ball liefert einen Existenzsatz, wenn das Energiefunktional polykonvex ist.

Wir zeigen in dieser Arbeit, dass das Energiefunktional für die Herzwand nicht polykonvex ist. Die Frage nach der Existenz einer Lösung für Materialien mit nicht polykonvexen Energiefunktionalen ist offen.

In dieser Arbeit präsentieren wir einen lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für diese Materialien und somit auch für die stationäre nichtlineare Herzmechanik. Zusätzlich zeigen wir, dass die Lösung analytisch ist.

Abschließend finden sich numerische Simulationen für nichttriviale Beispiele aus der nichtlinearen Elastizitätstheorie.

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis

ES	**Einsteinsche Summenkonvention**, d.h. über den doppelt auftretenden Index ist zu summieren,
Ω	offene beschränkte und zusammenhängende Menge des $\mathbb{R}^n$, also ein Gebiet des $\mathbb{R}^n$
$\mathbb{M}^n$	Menge der $n \times n$ Matrizen
$\mathbb{M}^n_+$	die Menge aller $F \in \mathbb{M}^n$ mit $\det F > 0$
$\mathbb{S}^n$	Menge der symmetrischen $n \times n$ Matrizen
$\mathbb{O}^n_+$	Menge der orthogonalen $n \times n$ Matrizen mit positiver Determinante
$u(x)$	Verschiebung $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$
$\varphi(x)$	$= id + u(x)$, $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$
x^φ	$= \varphi(x)$
Ω^φ	$= \varphi(\overline{\Omega})$
$\partial_j \varphi(x)$	$= \partial\varphi(x)/\partial x_j$, partielle Ableitung
$\nabla\varphi(x)$	$= \partial_j \varphi_i(x) \in \mathbb{M}^n_+$
F	$= \nabla\varphi(x)$, Deformationsgradient
$T_{Z_{hk}}(\nabla\varphi)$	$= D_{Z_{hk}} T(x, \nabla\varphi(x)) = \nabla_{Z_{hk}} T(x, \nabla\varphi(x))$, partielle Ableitung
C	$= \nabla\varphi^T \nabla\varphi$, Cauchy-Greenscher Verzerrungstensor
E	$= \frac{1}{2}(C - I)$, Verzerrung
$Cof F$	$=(\det F) \cdot F^{-T}$, Cofaktor Matrix von F
t^φ	Cauchyscher Spannungsvektor, in Koordinaten des deformierten Körpers
T^φ	Cauchyscher Spannungstensor, in Koordinaten des deformierten Körpers
$\hat{T}$	$= \hat{T}(F)$, Antwortfunktion für Cauchyschen Spannungstensor
T	$= \det(\nabla\varphi) T^\varphi(x^\varphi)(\nabla\varphi)^{-T}$, 1.Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor
Σ	$= (\nabla\varphi)^{-1} T$, 2.Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor
$div\ T^\varphi(x)$	$= \partial_j T^\varphi_{ij}(x) e_i \in \mathbb{R}^n$ mit $T^\varphi \in \mathbb{M}^n$ und **ES**
$\hat{W}$	Energiefunktional eines hyperelastischen Materials
$\frac{\partial \hat{W}}{\partial F}(x, F)$	$= \frac{\partial \hat{W}}{\partial F_{ij}}(x, F)$
$\varphi^k \rightharpoonup \varphi$	φ^k konvergiert schwach gegen φ
$A \Subset B$	kompakte Einbettung von A in B
$G_1 \subset\subset G_2$	$G_i \subset \mathbb{R}^n$, G_i offen, $\overline{G_1}$ kompakt und $\overline{G_1} \subset G_2$
$W^{m,p}(\Omega)$	Sobolew Raum, über schwache Ableitungen definiert
$H^m(\Omega)$	$= W^{m,2}(\Omega)$
$\mathcal{L}^n(\Omega)$	n-dimensionales Lebesgue-Maß von Ω
$\varphi\|_{\partial\Omega} = l_{\partial\Omega}$	für die Funktion φ gilt: $\varphi(x) = x$ auf $\partial\Omega$
$l_{\overline{\Omega}}$	Menge aller Funktionen, mit $\varphi(x) = x, \quad \forall x \in \overline{\Omega}$

$W^{m,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$	$:= \{v=(v_i) : v_i \in W^{m,p}(\Omega)\}$ mit der Norm $\|\|v\|\|_{m,p} := \left(\sum\limits_{i=1}^n \|\|v_i\|\|_{m,p}^p\right)^{1/p} \forall v \in W^{m,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ und der Seminorm $\|v\|_{m,p} := \left(\sum\limits_{i=1}^n \|v_i\|_{m,p}^p\right)^{1/p} \forall v \in W^{m,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$, damit sind $\|\|v\|\|_{m,p}$, $\|v\|_{m,p}$ äquivalent zu $\sum\limits_{i=1}^n \|\|v_i\|\|_{m,p}$ bzw. $\sum\limits_{i=1}^n \|v_i\|_{m,p}$.
$(W^{m,p}(\Omega,\mathbb{R}^n))^+$	$= \{\varphi \in W^{m,p}(\Omega,\mathbb{R}^n) : det\nabla\varphi > 0\}$
$W^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$	Dualraum von $W_0^{1,p'}(\Omega,\mathbb{R}^n)$, weiteres siehe Lemma (4.3.6)
$y \otimes x$	$= (y_i x_j)_{i,j=1,\ldots n}$ mit $y,x \in \mathbb{R}^n$
$Z \cdot W$	$\sum_{i=1,\ldots,m,j=1,\ldots n} Z_{ij}W_{ij}$ mit $Z,W \in \mathbb{M}^{m,n}$
$\|\alpha\|$	$:= \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ mit $\alpha \in \mathbb{N}^n$
$\alpha!$	$:= \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_n!$ mit $\alpha \in \mathbb{N}^n$
$\alpha < \beta$	$:\Longleftrightarrow \alpha_i < \beta_i \quad \forall i = 1,\ldots n$ mit $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$
$\alpha \leq \beta$	$:\Longleftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i \quad \forall i = 1,\ldots n$ mit $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$
$\binom{\alpha}{\beta}$	$:= \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} \quad \forall \beta \leq \alpha.$ und $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$
$u \cdot v$	$= u^T v$, u und v sind Vektoren
$C_*^m(\Omega)$	$:= \{f \in C^m(\Omega) : \partial^\alpha f$ sind gleichmäßig beschränkt für alle $\|\alpha\| \leq m\}$, Definition (3.1.3)
$\|\|A\|\|$	$= (spur(A^T A))^{1/2}$, Matrix Norm,
$\mathcal{A}_{m+2,p}$	siehe Definition 4.2.1, Seite 65,
$\mathcal{L}_{m+2,p}$	siehe Definition 4.4.1, Seite 76,

Kapitel 1

Einleitung

Die Theorie ist das Netz, das wir auswerfen,
um „die Welt“ einzufangen, - sie zu
rationalisieren, zu erklären und zu beherrschen.
Wir arbeiten daran, die Maschen des Netzes
immer enger zu machen.
Karl Popper, 1934

1.1 Thematik

Die mathematische Beschreibung vieler naturwissenschaftlicher Phänomene führt zum Studium nichtlinearer Systeme. Die Handhabung dieser nichtlinearen Modelle gilt als schwierig. Abhilfe liefern die klassischen linearen Modelle, die für viele Anwendungen ausreichen. In der Elastizitätstheorie sind diese klassischen Modelle fest etabliert und finden z.B. in den Ingenieurwissenschaften ein breites Anwendungsfeld. Die Erfahrung zeigt, dass die lineare Elastizitätstheorie z.B. in der Biomechanik nur begrenzt anwendbar ist. Allgemein liefern diese Modelle bei Dehnungen bis zu 10% noch akzeptable Ergebnisse. Außerhalb dieser Grenze müssen sie durch nichtlineare Modelle ersetzt werden. Ein Grund dafür ist, dass der geometrische Unterschied zwischen dem Referenzkörper und dem deformierten Körper in der linearen Theorie ignoriert wird. Im nichtlinearen Fall dagegen wird die Größe der Deformation uneingeschränkt berücksichtigt.
In der Elastizitätstheorie existieren zwei Arten von Nichtlinearität, die materielle und die geometrische. Die erste liegt vor, wenn die Relation zwischen Spannung und Verzerrung nichtlinear ist. Die zweite ist gültig, wenn geometrische Veränderungen eines Materials einen bedeutenden Einfluss auf die Beziehung von Deformation und Lasten haben. Man beobachtet materielle Nichtlinearität, wenn das Material umschlossen ist und dadurch Reibungen entstehen. Man denke an einen Zylinder im Verbrennungsmotor, der sich minimal ausdehnt. Kleine Ausdehnungen des Zylinders verursachen dort größere Spannungen als bei einem nicht umschlossenen Zylinder. Geometrische Nichtlinearität beinhaltet deformationsabhängige Randwertbedingungen und Lasten. Jede Metallverformung, sei es beim Schmieden oder bei Crash-Tests

für die Automobilindustrie, beinhaltet beide Arten der Nichtlinearität. Das gleiche gilt auch für das mechanische Verhalten des menschlichen Körpers, wenn er Stößen ausgesetzt ist. Hyperelastische Materialien wie z.B. das Herz verhalten sich ebenfalls geometrisch nichtlinear.
In der Elastizitätstheorie kann man keine eindeutige Lösung erwarten. So kann ein dünnes Blech, das zusammengedrückt wird, in zwei stabile Zustände springen (einen Buckel werfen), oder in den instabilen verharren. Die linearen Modelle stoßen auch hier an ihre Grenzen. Erst die nichtlineare Theorie liefert hierfür die passende Antwort.
Die rasant zunehmende Mathematisierung fast aller Wissenschaften eröffnet der Mathematik neue Aufgaben. Sie hat auf viele Fragen noch keine passenden Antworten gefunden. Dies gilt insbesondere für die nichtlineare Elastizitätstheorie und deren Anwendungen im Bereich der Medizin und Biologie. Die Elastizitätstheorie steht somit erneut im Interesse der Mathematik.

Die Batista Operation

Das gesunde Herz ist ein Hohlmuskel und ist etwa so groß wie eine Faust. Es ist in eine linke und eine rechte Herzkammer unterteilt. Die linke Herzkammer ist deutlich größer und pumpt täglich bis zu 9000 Liter sauerstoffreiches Blut in die Körperarterien. Der höchste Blutdruck herrscht in der linken Kammer, ihre Wände sind dreimal so dick wie die der rechten Kammer. Unter Belastung erreicht ein jugendliches Herz bis zu 200 Schläge pro Minute. Im Laufe eines Lebens schlägt das Herz ununterbrochen bis zu 4 000 000 000 mal.
Herzinsuffizienz, auch Herzschwäche genannt, entsteht im Gefolge eines Herzinfarkts, bei Arteriosklerose, Viruserkrankungen und anderen Herzleiden. Das geschwächte Herz gerät in einen tödlichen Kreislauf: Auf nachlassende Stärke reagiert es mit Größenwachstum, das seine Kraft schließlich vollends aufzehrt. In die vergrößerte linke Herzkammer, den wichtigsten Teil des Pumpwerkes, strömt zuviel Blut ein, die Herzmuskeln können soviel Flüssigkeit nicht mehr mit ausreichendem Druck in den Körper pumpen. Mediziner schauen der Erkrankung oft machtlos zu. Sie behandeln das Leiden vor allem mit Medikamenten und verlängern das Leben im Durchschnitt nur um Monate. Für eine Herztransplantation kommen nur wenige junge Patienten in Frage. Selbst für die reicht die Zahl der Spenderorgane nicht aus. In Deutschland z.B waren im Jahr 1995 etwa 500 Herzen verfügbar, mindestens ebenso viele Empfänger warteten vergebens auf ein Ersatzorgan.
Besonders aufsehenerregend ist die Operationstechnik des brasilianischen Herzchirurgs Dr. Randas Batista. Er schneidet einem kranken Herzen, das unter Muskelschwäche leidet, einen dreieckigen Lappen funktionsfähiges Muskelgewebe aus der linken Herzkammer heraus und näht danach die Kammerwand wieder zusammen. Das entfernte Gewebe wiegt im Schnitt 90 Gramm. Während der dreistündigen Operation schlägt das Herz weiter, allerdings wird der Blutkreislauf des Patienten auf eine Herz-Lungen-Maschine umgeleitet. Der Schaden, den er damit am Herzen anrichtet, scheint allerdings

geringer zu sein als der Gewinn. Der Innendurchmesser der Herzkammer verkleinert sich dadurch von $8,4$ cm auf $6,1$ cm. Das restliche Muskelgewebe steht somit unter geringerer Wandspannung. Das Herz kann sich daher effektiver zusammenziehen. Die Pumpleistung des Herzens steigt sofort nach der Operation um das dreifache.
Batista berichtet von bis zu „Kuheuter großen Herzen“, die fast ein Kilogramm wogen, und sich nur noch schwach kontrahierten. Ausschlaggebend für die Entwicklung des ungewöhnlichen Verfahrens war, dass der in der armen Gegend Brasiliens tätige Batista keine Herztransplantationen vornehmen konnte. Hierzu fehlten sowohl die finanziellen Mittel, als auch die technischen Voraussetzungen. Rund sechzig Prozent der 300 Patienten von Batista ging es nach der Operation deutlich besser; die übrigen vierzig Prozent verstarben. Zahlreiche Mediziner stehen der Batista Operation daher skeptisch gegenüber. Mit einer guten medizinischen Vorsorgung und einer strengeren Auswahl der Kranken versuchen einige europäische und amerikanische Chirurgenteams die Risiken zu minimieren. Von der Batista Operation könnten vor allem jene Patienten profitieren, für die kein Spenderherz zur Verfügung steht.
Das physiologische Prinzip der Batista Operation ist es, die Herzwandspannung operativ zu verkleinern. Um diesen Vorgang vollständig zu modellieren ist die Berücksichtigung der mechanischen Kräfte im Herzen, der Blutströmung und des Aktionspotentials erforderlich. Das Myokard, die Herzwand ist ein hyperelastisches nichtlineares anisotropisches inkompressibles Material, das während eines Herzzyklus Dehnungen von bis zu 30 % ausgesetzt ist. Diese großen Dehnungen verursachen Spannungen in der Herzwand, die nicht mehr mit der linearen Elastizitätstheorie beschrieben werden können.
Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit der stationären nichtlinearen Herzmechanik. Die mathematische Modellierung dieses Problems beinhaltet die Lösung eines nichtlinearen Systems von partiellen Differentialgleichungen. Die globale Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung ist noch offen. Diese Arbeit präsentiert einen lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz.

Strukturierung der Arbeit

Das 1. Kapitel beginnt mit einer Einführung in die nichtlineare Elastizitätstheorie. Wir werden auf Unterschiede zur linearen Theorie hinweisen. Es zeigt sich, dass die Piola-Transformation für die Modellierung der stationären Herzmechanik unerläßlich ist. Anschließend werden die notwendigen Materialeigenschaften für diese Arbeit mathematisch formuliert. Zusätzlich führen wir die Energiefunktionale für hyperelastische Materialien ein. Eigenschaften des ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors, die wir für den Existenz- und Eindeutigkeitssatz benötigen werden präsentiert. Das 1.Kapitel endet mit einer Übersicht der nichtlinearen Größen.
In Kapitel 2 stellen wir eine Variationsformulierung für hyperelastische Ma-

terialien vor. Wir zeigen, dass die Energiefunktionale für hyperelastische Materialien nicht konvex sind. Existenzsätze, die konvexe Funktionale voraussetzen sind hier nicht anwendbar. Eine schwächere Formulierung für konvexe Funktionen führt uns zum Existenzsatz von Ball für polykonvexe Funktionen. Wir werden nachweisen, dass das Energiefunktional der Herzwand nicht polykonvex ist. Ein weiterer Existenzsatz setzt schwach unterhalbstetige Funktionen voraus. Dies führt uns zu quasikonvexen Funktionen. Ob eine Funktion quasikonvex ist, gilt als sehr schwer nachweisbar und wird in dieser Arbeit nicht weiter diskutiert.
Das 3. Kapitel zeigt, dass der Laplace-Operator zwischen bestimmten Banach-Räumen ein Homöomorphismus ist. Diese Aussage benötigen wir für unseren lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz.
In Kapitel 4 fixieren wir passende Banach-Räume, so dass das Differential des Elastizitätsoperators in ausgewählten Punkten ein Homöomorphismus ist. Die Menge dieser Punkte werden wir charakterisieren. Der Satz über die Umkehrabbildung ist anwendbar und liefert uns den lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die stationäre nichtlineare Herzmechanik. Wir werden für diese Umgebung eine Abschätzung herleiten.
Wir zeigen in Kapitel 5 numerische Beispiele aus der nichtlinearen Elastizitätstheorie. Dabei betrachten wir Platten, die großen Dehnungen ausgesetzt sind. Diese Platten bestehen, wie das Myokard, aus hyperelastischen und inkompressiblen Materialien. Wir werden nicht nur die Deformationen visualisieren, sondern auch die Kräfteverteilung und die Plattendicke nach der Deformation graphisch darstellen.

An dieser Stelle danke ich Herrn Prof. Dr. C.W. Cryer für die stets gute Betreuung der Arbeit. Herrn Prof. Dr. P.P. Lunkenheimer aus dem Institut Experimentelle Thorax-, Herz- und Gefäßchirurgie, danke ich für die sehr anschauliche Vermittlung der anatomischen Grundlagen. Dr. F. Wübbeling danke ich für die mir zuteil gewordene Unterstützung.

1.2 Das mathematische Modell

In der Elastizitätstheorie betrachtet man den Zustand von Körpern unter Einwirkung von Kräften. Insbesondere studiert man die Verzerrung und Spannung, die durch Deformationen erzeugt werden.

Sei $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ ein Körper im spannungsfreien Zustand. Nach einer Deformation ist $\overline{\Omega}^\varphi := \varphi(\overline{\Omega})$ der aktuelle Zustand der durch die Abbildung

$$\varphi : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}^\varphi \subset \mathbb{R}^3$$

beschrieben wird. Wir setzen

$$\varphi = id + u, \qquad u \in \mathbb{R}^3 \tag{1.1}$$

und bezeichnet u als Verschiebung. In der linearen Elastizitätstheorie werden nur Terme erster Ordnung in den Verschiebungen u berücksichtigt und Terme höherer Ordnung vernachlässigt. In dieser Arbeit steht $\overline{\Omega}$ für das Herz bzw. für das Myokard.
Im folgenden wird φ als genügend glatt vorausgesetzt. Die Funktion φ heißt **Deformation**, wenn

$$det(\nabla\varphi) > 0 \tag{1.2}$$

ist. Dabei gilt für die Matrix $\nabla\varphi$,

$$(\nabla\varphi)_{ij} := F_{ij} := \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} \qquad i,\ j = 1,2,3.$$

Somit ist sichergestellt, dass wir positive Volumina wieder in positive Volumina abbilden. Deformationen sind lokal injektive Abbildungen.
Desweiteren gilt

$$\varphi(x+z) - \varphi(x) = \nabla\varphi(x)\ z + o(z).$$

Für den Euklidischen Abstand erhalten wir

$$\begin{aligned} ||\varphi(x+z) - \varphi(x)||^2 &= ||\nabla\varphi(x)\ z||^2 + o(||z||^2) \\ &= z^T(\nabla\varphi(x))^T\ \nabla\varphi(x)\ z + o(||z||^2). \end{aligned}$$

Wir benutzen im folgenden die Notation $\nabla\varphi^T$ statt $(\nabla\varphi(x))^T$, dies gilt auch für die Verschiebung u. Für die lokale Längenänderung eines Linienelements ist somit die Matrix

$$C = \nabla\varphi^T\nabla\varphi = F^TF \tag{1.3}$$

ausschlaggebend. C heißt (rechter) **Cauchy-Greenscher-Verzerrungstensor**. Die durch

$$E = \frac{1}{2}(C - I) = \frac{1}{2}(\nabla u^T + \nabla u + \nabla u^T\nabla u) \tag{1.4}$$

definierte Abweichung von der Identität bezeichnet man als **Verzerrung**. In der linearen Theorie ignoriert man den nichtlinearen Term $\nabla u^T\nabla u$. Wir erhalten die Darstellung (1.4) mit Hilfe der Gleichungen (1.1) und (1.3).
Die folgenden Größen sind im deformierten Körper definiert. Dies erkennen wir am Index $^\varphi$. Es sei $\Omega^\varphi := \varphi(\Omega)$, $x^\varphi := \varphi(x)$ usw.
Wir nehmen an, dass die Kräfte-Wechselwirkungen vollständig zurückgeführt werden kann auf

1. **Angewandte Volumenkräfte**, definiert durch ein Vektorfeld

   $$f^\varphi : \Omega^\varphi \to \mathbb{R}^3,$$

   welches als die **Dichte der Volumenkraft** pro Volumeneinheit im deformierten Körper bezeichnet wird,

2. **Angewandte Flächenkräfte**, definiert durch ein Vektorfeld

$$g^\varphi : \Gamma^\varphi \to \mathbb{R}^3$$

auf einer da^φ meßbaren Teilmenge $\Gamma^\varphi \subset \partial\Omega$. Man nennt g^φ die **Dichte der angewandten Flächenkraft** pro Einheitsfläche im deformierten Körper.

Eine elementare Kraft $f^\varphi(x^\varphi)\ dx^\varphi$ wirkt somit auf ein elementares Volumen dx^φ an jeden Punkt x^φ im deformierten Körper. Ebenso wirkt eine elementare Kraft $g^\varphi(x^\varphi)\ da^\varphi$ auf eine elementaren Fläche da^φ an jeden Punkt x^φ auf der Teilmenge $\Gamma^\varphi \subset \partial\Omega^\varphi$ im deformierten Körper.
Eine typische Volumenkraft ist die Schwerkraft. Eine Flächenkraft ist z.B. die Nutzlast einer Brücke.
Das zentrale Axiom der Mechanik besagt, dass sich im Gleichgewichtszustand alle Kräfte bzw. Momente zu Null addieren. Typischerweise wird dieser Gleichgewichtszustand im deformierten Körper angenommen. Das folgende Axiom ist deshalb in den Koordinaten des deformierten Körpers formuliert.

Axiom 1.2.1 (Axiom des statischen Gleichgewichts) *Der Körper $\overline{\Omega}^\varphi$ befinde sich unter den Kräften $f^\varphi : \Omega^\varphi \to \mathbb{R}^3$ und $g^\varphi : \Gamma^\varphi \subset \partial\Omega^\varphi \to \mathbb{R}^3$ im Gleichgewicht. Dann existiert ein Vektorfeld (Spannungsvektorfeld von Cauchy)*

$$t^\varphi : \overline{\Omega}^\varphi \times S^2 \to \mathbb{R}^3,\ \text{mit } S^2 := \{v \in \mathbb{R}^3 : |v| = 1\}$$

so dass

1. *für alle offenen $V^\varphi \subset \overline{\Omega}^\varphi$ und alle $x^\varphi \in \Gamma^\varphi \cap \partial V^\varphi$, wo ein äußerer Normalenvektor n^φ auf $\Gamma^\varphi \cap \partial V^\varphi$ existiert, gilt*

$$t^\varphi(x^\varphi, n^\varphi) = g^\varphi(x^\varphi).$$

2. **Axiom des Kräftegleichgewichts:** *Für jedes offene $V^\varphi \subset \overline{\Omega}^\varphi$ gilt*

$$\int_{V^\varphi} f^\varphi(x^\varphi)\ dx^\varphi + \int_{\partial V^\varphi} t^\varphi(x^\varphi, n^\varphi)\ ds^\varphi = 0. \tag{1.5}$$

Dabei bezeichnet n^φ den äußeren Normalenvektor von ∂V^φ.

3. **Axiom des Momentengleichgewichts:** *Für jedes offene $V^\varphi \subset \Omega^\varphi$ gilt*

$$\int_{V^\varphi} x^\varphi \wedge f^\varphi(x^\varphi)\ dx^\varphi + \int_{\partial V^\varphi} x^\varphi \wedge t^\varphi(x^\varphi, n^\varphi)\ ds^\varphi = 0 \tag{1.6}$$

Dabei steht $\wedge$ für das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$.

Auch der berühmte Satz von Cauchy ist in den Koordinaten des deformierten Körpers geschrieben.

Satz 1.2.2 (Satz von Cauchy) *Die Dichte der angewandten Volumenkraft* $f^\varphi : \overline{\Omega}^\varphi \to \mathbb{R}^3$ *sei stetig, und das Spannungsvektorfeld von Cauchy*

$$t^\varphi : (x^\varphi, n) \in \overline{\Omega}^\varphi \times S^2 \to t^\varphi(x^\varphi, n) \in \mathbb{R}^3$$

stetig differenzierbar bezüglich $x^\varphi \in \overline{\Omega}^\varphi$ *für alle* $n \in S^2$ *und stetig bezüglich* $n \in S^2$ *für alle* $x^\varphi \in \overline{\Omega}^\varphi$. *Dann implizieren die Axiome* (1.5) *und* (1.6), *dass es ein stetig differenzierbares Tensorfeld*

$$T^\varphi : x^\varphi \in \overline{\Omega}^\varphi \to T^\varphi(x^\varphi) \in \mathbb{M}^3$$

gibt, so dass der Cauchysche Spannungsvektor der Gleichung

$$t^\varphi(x^\varphi, n) = T^\varphi(x^\varphi)n, \quad \forall (x^\varphi, n) \in \overline{\Omega}^\varphi \times S^2$$

genügt. Weiter gilt

$$\begin{aligned} -div^\varphi\, T^\varphi(x^\varphi) &= \ f^\varphi(x^\varphi), & \forall x^\varphi \in \Omega^\varphi, \qquad (1.7)\\ T^\varphi(x^\varphi) &= \ T^\varphi(x^\varphi)^T, & \forall x^\varphi \in \overline{\Omega}^\varphi, \qquad (1.8)\\ T^\varphi(x^\varphi)n^\varphi &= \ g^\varphi(x^\varphi), & \forall x^\varphi \in \Gamma_1^\varphi, \qquad (1.9) \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet n^φ *den äußeren Normalenvektor entlang* Γ_1^φ. *Der Tensor* T^φ *heißt* **Cauchyscher Spannungstensor**. *Es gilt*

$$div^\varphi\, T^\varphi(x^\varphi) := \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial T^\varphi_{1,i}(x^\varphi)}{\partial x_i^\varphi}, \frac{\partial T^\varphi_{2,i}(x^\varphi)}{\partial x_i^\varphi}, \frac{\partial T^\varphi_{3,i}(x^\varphi)}{\partial x_i^\varphi} \right)^T.$$

Beweis: Siehe Ciarlet [11], Seite 62. □

Nach (1.8) ist der Cauchyscher Spannungstensor symmetrisch.

Axiom 1.2.3 (Axiom der Koordinatenunabhängigkeit) *Das Spannungsvektorfeld von Cauchy* $t^\varphi(x^\varphi, n) = T^\varphi(x^\varphi)n$ *ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. D.h.*

$$R\, t^\varphi(x^\varphi, n) = t^\varphi(Rx^\varphi, Rn) \quad \forall R \in \mathbb{O}^3_+.$$

Dabei ist $\mathbb{O}^3_+$ *die Menge der orthogonalen* 3×3 *Matrizen mit positiver Determinante.*

1.3 Die Piola-Transformation

Die Gleichungen (1.7), (1.8) und (1.9) haben wir in den Koordinaten des deformierten Körpers formuliert. Da diese Koordinaten erst berechnet werden müssen, transformieren wir die Größen auf den Referenzzustand, das heißt auf den nicht deformierten Körper.
Die Transformationen ergeben sich aus dem bekannten Transformationssatz für Integrale. Mit $dx^\varphi = det(\nabla\varphi(x))\; dx$ und $f^\varphi(x^\varphi)\; dx^\varphi = f(x)\; dx$ folgt

$$f(x) \quad = \quad (det\nabla\varphi(x))\; f^\varphi(x^\varphi). \tag{1.10}$$

Die Transformation des Spannungstensors ist komplexer, aber auch elementar berechenbar, siehe Ciarlet [11], Seite 73. Wir erhalten

$$\begin{aligned} T(x) \quad &= \quad (det\nabla\varphi(x))\; T^\varphi(x^\varphi)\nabla\varphi(x)^{-T} = T^\varphi(x^\varphi)\; Cof\nabla\varphi(x) && (1.11)\\ div\; T(x) \quad &= \quad (det\nabla\varphi(x))\; div^\varphi T^\varphi(x^\varphi). && (1.12)\end{aligned}$$

Dabei ist $Cof F = (det F)\cdot F^{-T}$ die Cofaktor Matrix von F. Man bezeichnet T als **ersten Piola Kirchhoffschen Spannungstensor**. Im Gegensatz zum Cauchyschen Spannungstensor T^φ ist dieser nicht symmetrisch. Zur Symmetriesierung führen wir den **zweite Piola Kirchhoffschen Spannungstensor**

$$\Sigma(x) := (\nabla\varphi)^{-1}T(x) = (det\nabla\varphi(x))\; \nabla\varphi(x)^{-1}\; T^\varphi(x^\varphi)\; \nabla\varphi(x)^{-T} \tag{1.13}$$

ein. Die Unterschiede zwischen den drei Tensoren sind bei kleinen Deformationsgradienten zu vernachlässigen. Mit (1.7), (1.10) und (1.12) erhalten wir das System

$$-div\; T(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega. \tag{1.14}$$

Für den symmetrischen zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor setzen wir

$$-div\; \Sigma(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega. \tag{1.15}$$

In der linearen Theorie wird der geometrische Unterschied zwischen den deformierten und den nicht deformierten Körper als so klein angenommen, dass er ignoriert werden kann. Eine Piola-Transformation ist deshalb nicht notwendig, Bonet, [9], Seite 1. Für die Modellierung der stationären Herzmechanik ist sie allerdings erforderlich.

1.4 Materialgesetze

Ziel ist es, zu gegebenen Kräften die Deformation eines Materials und dessen Spannungen zu bestimmen. Die Gleichgewichtsbedingungen (1.7) (1.14) bzw. (1.15) liefern uns drei Gleichungen. Damit sind die sechs Komponenten eines symmetrischen Spannungstensors noch nicht bestimmt. Die fehlenden Gleichungen ergeben sich aus den Materialgesetzen. Hier zeigt sich, dass die Deformation zu gegebenen Kräften auch von den Materialeigenschaften abhängen.

Definition 1.4.1 *Ein Material heißt* **elastisch***, wenn es eine Abbildung*

$$\hat{T} : \overline{\Omega} \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{S}^3$$

gibt, so dass für jeden deformierten Zustand

$$T^\varphi(x^\varphi) = \hat{T}(x, \nabla\varphi(x)) \tag{1.16}$$

gilt. Man bezeichnet $\hat{T}$ *als* **Antwortfunktion** *und* (1.16) *als* **konstitutives Gesetz***. Dabei ist* $\mathbb{M}^3_+$ *die Menge der* 3×3 *Matrizen mit positiver Determinante und* $\mathbb{S}^3$ *die Menge der symmetrischen* 3×3*-Matrizen.*

Antwortfunktionen werden oft über die symmetrischen Tensoren E und C definiert. Die nichtlineare Term dieser Antwortfunktion, bezüglich E oder C werden in der linearen Theorie vernachlässigt. Hinter dem konstitutiven Gesetz verbirgt sich die Annahme, dass die Spannungen in lokaler Weise von den Verschiebungen abhängen und nur von den ersten Ableitungen. Gleichzeitig haben frühere Deformationen keinen Einfluß auf den aktuellen Spannungstensor T^φ.
Im Hinblick auf (1.11) und (1.13) führen wir die auf den Piola-Kirchhoffschen Tensoren bezogenen Antwortfunktionen für elastische Materialien

$$\begin{aligned} T(x, \nabla\varphi(x)) &= \hat{T}(x, \nabla\varphi(x))\; Cof\nabla\varphi(x) && (1.17)\\ \Sigma(x, \nabla\varphi(x)) &= det\nabla\varphi(x)\; (\nabla\varphi(x))^{-1}\hat{T}(x, \nabla\varphi(x))\; \nabla\varphi(x)^{-T} && (1.18) \end{aligned}$$

ein. Die Isotropie besagt, dass sich die Spannungsvektoren nicht ändern, wenn wir den nicht deformierten Körper, also den Körper vor der Deformation drehen. Die folgende Definition gibt dies wider.

Definition 1.4.2 *Ein elastisches Material heißt isotrop im Punkt* x*, wenn die Antwortfunktion*

$$\hat{T}(x, FQ) = \hat{T}(x, F), \quad \forall F \in \mathbb{M}^3_+, Q \in \mathbb{O}^3_+$$

erfüllt. Gilt dies für alle $x \in \Omega$*, so heißt das Material isotrop.*

Isotropie ist eine reine Materialeigenschaft. Sie bedeutet, dass im Material keine Richtung ausgezeichnet ist. Geschichtetes Material, Holz oder Kristalle sind nicht isotrop, kurz **anisotrop**. Dies gilt auch für das Myokard.
Wir können nun den Gleichgewichtszustand eines **elastischen Materials**

auf den Referenzzustand transformieren. Unterteilen wir den Rand $\partial\Omega$ in Γ_0 und Γ_1, wobei die Deformation auf Γ_0 und die angewandte Kraft auf Γ_1 festgelegt ist, so erfüllt die Deformation φ folgende Randwertaufgabe

$$-div\,\hat{T}(x, \nabla\varphi(x)) = f(x, \varphi(x)), \qquad \forall x \in \Omega \tag{1.19}$$
$$\hat{T}(x, \nabla\varphi(x))n = g(x, \nabla\varphi(x)), \qquad \forall x \in \Gamma_1 \tag{1.20}$$
$$\varphi(x) = \varphi_0(x), \qquad \forall x \in \Gamma_0. \tag{1.21}$$

Mit f und g als transformierte Volumen- bzw. Flächenlast und n als äußere Normale. Eine angewandte Volumenkraft heißt **tote Last**, wenn die zugeordnete Dichtefunktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ pro Einheitsvolumen im Referenzzustand unabhängig ist von der aktuellen Deformation, wenn also $f(x) = f(x, \varphi(x))$ gilt. Dasselbe gilt für die angewandte Flächenkraft.

Definition 1.4.3 *Ein elastisches Material mit der Antwortfunktion $\hat{T} : \overline{\Omega} \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{M}^3$ heißt hyperelastisch, wenn es eine Funktion*

$$W : \Omega \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}$$

gibt, differenzierbar bezüglich $F \in \mathbb{M}^3_+$ für alle $x \in \overline{\Omega}$, so dass

$$\hat{T}(x, F) = \frac{\partial W}{\partial F}(x, F), \quad \forall (x, F) \in \Omega \times \mathbb{M}^3_+ \tag{1.22}$$

gilt. Dabei wird komponentenweise differenziert,

$$\hat{T}_{ij}(x, F) = \frac{\partial W}{\partial F_{ij}}(x, F).$$

Die Funktion W bezeichnet man als Energiefunktional (engl. stored energy function).

Es gibt die Energie an, die der Körper bedingt durch die Deformation speichert. Man nimmt

$$W(x, F) \to \infty \text{ für } det\ F \to 0, \quad F \in \mathbb{M}^3_+ \tag{1.23}$$

an. Diese physikalische Annahme besagt, dass wir mit endlicher Energie das Volumen nicht gegen Null deformieren können. Für hyperelastische Materialien läßt sich eine Variationsformulierung zur Randwertaufgabe (1.19), (1.20), (1.21) herleiten. In der Literatur werden auch Energiefunktionale der Form $W(x, E)$, $W(x, C)$ und $W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ mit E als Verzerrung, C als Cauchy-Greenscher-Verzerrungstensor und λ_i als Eigenwerte von C betrachtet.

1.5 Eigenschaften des 1.Piola-Kirchhoffschen Tensors für elastische Materialien

Definition 1.5.1 *Eine Deformation heißt Starrkörperdeformation oder Starrkörperbewegung, wenn sie von der Form*

$$\varphi(x) := v + Rx, \quad v \in \mathbb{R}^3, R \in \mathbb{O}^n_+, \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

ist. Bestehend aus einer Rotation R und einer Translation v. Es folgt

$$\nabla\varphi(x) = R \in \mathbb{O}^n_+.$$

Wir betrachten nun Eigenschaften der Antwortfunktion zum ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor (1.17). Um die folgenden Gleichungen übersichtlicher darzustellen, verwenden wir die Notation $F = \nabla\varphi$.

1. Im Gegensatz zum Cauchyschen Spannungstensor ist der Tensor (1.17) nicht symmetrisch. Es gilt aber

$$T(x, F)F^T \in \mathbb{S}^n, \quad \forall (x, F) \in \Omega \times \mathbb{M}^n_+. \tag{1.24}$$

2. Ist das Axiom der Koordinatenunabhängigkeit (1.2.3) erfüllt, so gilt für die Antwortfunktion eines elastischen Materials $\hat{T}$

$$\hat{T}(x, RF) = R\hat{T}(x, F)R^T, \quad \forall (x, F, R) \in \Omega \times \mathbb{M}^n_+ \times \mathbb{O}^n_+,$$

siehe Ciarlet [11], Seite 101.
Dies zusammen mit $Cof(RF) = R\ Cof(F) \quad \forall (R, F) \in \mathbb{O}^n_+ \times \mathbb{M}^n_+$ ergibt

$$\begin{aligned} T(x, RF) - RT(x, F) &= (\hat{T}(x, RF)R - R\hat{T}(x, F))Cof\ F \\ &= (R\hat{T}(x, F)R^T R - R\hat{T}(x, F))Cof\ F \\ &= 0 \quad \forall (x, R, Z) \in \Omega \times \mathbb{O}^n_+ \times \mathbb{M}^n_+. \end{aligned}$$

Somit gilt für den ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor eines elastischen Materials

$$T(x, RF) = RT(x, F), \quad \forall (x, F, R) \in \Omega \times \mathbb{M}^n_+ \times \mathbb{O}^n_+. \tag{1.25}$$

3. Der Referenzzustand Ω ist spannungsfrei, wenn der Tensor bei der Identität id verschwindet, wenn also

$$T(x, I) = 0, \quad \forall x \in \Omega. \tag{1.26}$$

Es ist $\nabla id = I$, mit I als Einheitsmatrix. Wir erhalten mit (1.25): $T(x, R) = RT(x, I) = 0, \quad \forall (x, R) \in \Omega \times \mathbb{O}^n_+$.

4. Ist der Referenzzustand spannungsfrei, so können wir

$$\Big(\sum_{h,k=1}^{n} \nabla_{Z_{hk}} T(x,I) S_{hk} \Big) \cdot S = S \cdot T'_Z(x,I)(S) > 0, \qquad (1.27)$$
$$\forall (x,S) \in \overline{\Omega} \times (\mathbb{S}_n \setminus \{0\})$$

annehmen.
Motivation: In der linearen Elastizitätstheorie definiert man das Energiefunktional

$$\epsilon := \frac{1}{2} e \cdot C \cdot e = \frac{1}{2} \sum_{i,j,h,k=1}^{3} e_{ij} C_{ijhk} e_{hk},$$

wobei

$$e_{ij} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

symmetrisch ist. Man vergleiche dies mit der Verzerrung (1.4) im nichtlinearen Fall. Der lineare Elastizitätstensor

$$C_{ijhk} := \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial e_{ij} \partial e_{hk}}$$

vierter Ordnung erfüllt die Symmetrie

$$C_{ijhk} = C_{jjhk} = C_{ijkh} = C_{hkij}.$$

Das Energiefunktional ϵ gibt die Energie an, die wir benötigen, um den Körper zu deformieren. Daher ist es sinnvoll $\epsilon > 0 \quad \forall e \neq 0$ anzunehmen. Ist ein Material hyperelastisch, so gilt für die Antwortfunktion

$$\hat{T} := \frac{\partial \epsilon}{\partial e} \text{ und weiter } \hat{T}'_F = C_{ijhk}.$$

Dies rechtfertigt (1.27).

1.6 Nichtlinearität in der Elastizitätstheorie

Der Cauchy-Greensche-Verzerrungstensor

$$C = \nabla \varphi^T \nabla \varphi$$

und die Verzerrung

$$E = \frac{1}{2} (\nabla u^T + \nabla u + \nabla u^T \nabla u)$$

sind nichtlineare Funktionen bezüglich der Deformation φ und der Verschiebung u. Die Herzwand ist **inkompressibel**, folglich muß die nichtlineare Gleichung

$$det \nabla \varphi(x) = 1$$

erfüllt sein. Die Komponenten der Gleichgewichtsgleichung (1.19) bilden ein System von drei nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung bezüglich der unbekannten Deformation φ_j. Für $i = 1, 2, 3$ gilt

$$\sum_{k,l,j=1}^{3} -\frac{\partial \hat{T}_{ij}}{\partial F_{kl}}(x, \nabla\varphi(x)) \frac{\partial^2 \varphi_k(x)}{\partial x_j \partial x_l} - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \hat{T}_{ij}}{\partial x_j}(x, \nabla\varphi(x)) = f_i(x, \varphi(x)). \tag{1.28}$$

Für ein hyperelastisches Material erhalten wir für $i = 1, 2, 3$

$$\sum_{j,k,l=1}^{3} -\frac{\partial^2 W}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}}(x, \nabla\varphi(x)) \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_j \partial x_l}(x) - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial F_{ij}}(x, \nabla\varphi(x)) = f_i(x, \varphi(x)).$$

Experimentellen Messungen zu Folge, besteht das Myokard aus **inkompressiblen, anisotropen hyperelastischen** Material mit

$$W(E) = \frac{C}{2}\Big(exp(Q) - 1\Big) - \frac{p}{2}\Big(g(x) - 1\Big) \tag{1.29}$$

und

$$\begin{aligned} Q &= 2b_1(E_{11} + E_{22} + E_{33}) + 2b_4(E_{12}E_{21} + E_{13}E_{31}) \\ &+ b_2 E_{11}^2 + b_3(E_{22}^2 + E_{33}^2 + 2E_{23}E_{32}), \\ g(x) &= det(F^T F), \end{aligned}$$

mit $b_1 = 0,0$, $b_2 = 18,5$, $b_3 = 3,58$, $b_4 = 1,63$ und der Materialkonstante $C = 0,88kPa$, wobei die x_1-Achse mit der lokalen Richtung der Muskelfasern zusammen fällt. Das Energiefunktional (1.29) berücksichtigt die oben genannten Eigenschaften des Myokards. Wir erkennen, dass das Funktional von der Exponentialfunktion abhängt. Eigenschaften dieses Energiefunktionals werden später genauer analysiert.

Kapitel 2

Existenzsatz für polykonvexe Funktionen

> Ein Problem zeigt sich des Angriffs wert,
> wenn es sich dagegen wehrt.
> Piet Hein

Für den Herzmuskel gibt es ein Energiefunktional W mit der Eigenschaft

$$W : (\Omega, \mathbb{M}^3_+) \to \mathbb{R}, \qquad \hat{T}(x, F) = \frac{\partial W}{\partial F}(x, F)$$

mit $F := \nabla\varphi$. Das Gleichungssystem (1.19) mit den Randwertdaten (1.20), (1.21) ist formal äquivalent zur Variationsaufgabe

$$I(\varphi) = \inf_{\Psi \in \Phi} I(\Psi) \tag{2.1}$$

mit

$$I(\Psi) := \int_\Omega W(x, \nabla\Psi(x))\, dx - \int_\Omega f \cdot \Psi\, dx - \int_{\Gamma_1} g \cdot \Psi\, da \tag{2.2}$$

und

$$\varphi \in \Phi := \{\Psi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3; \Psi = \varphi_0 \text{ auf } \Gamma_0, det\nabla\Psi > 0\},$$

siehe Ciarlet [11], Seite 144. Es soll also die Gesamtenergie minimiert werden. Eine wichtige Voraussetzung für Existenzsätze ist, dass das Funktional $W(x, \cdot) : F \in \mathbb{M}^3_+ \to W(x, F) \in \mathbb{R}$ konvex ist, streng konvex garantiert eine eindeutige Lösung, siehe z.B. [11], Seite 355, Theorem 7.3-2. Für nichtlineare Systeme ist eine eindeutige Lösung allerdings nicht zu erwarten.
Nach Definition besitzen konvexe Funktionen einen konvexen Definitionsbereich. Die Menge $\mathbb{M}^3_+$ ist aber nicht konvex, wie die zwei Diagonalmatrizen $diag(2, 2, 2)$ und $diag(-1, -4, 1)$ zeigen. Für die konvexe Hülle gilt $con\, \mathbb{M}^3_+ = \mathbb{M}^3$, [11], Seite 162, Theorem 4.7-4.
Der Versuch eine konvexe Funktion $\mathbb{W}(x, \cdot) : F \in \mathbb{M}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathbb{W}(x, F) = W(x, F) \quad \forall F \in \mathbb{M}^3_+$$

zu definieren, widerspricht der physikalischen Annahme (1.23)

$$\mathbb{W}(x, F) \to \infty \text{ für } det\ F \to 0, \quad F \in \mathbb{M}^3_+, \tag{2.3}$$

wie der folgende Satz zeigt.

Satz 2.0.1 *Sei $x \in \overline{\Omega}$, so dass die Funktion*

$$\mathbb{W}(x, \cdot) : F \in \mathbb{M}^3 \to W(x, F) \in \mathbb{R}$$

konvex ist. Dann ist dies nicht vereinbar mit der Eigenschaft (2.3).

Beweis: Da die Menge $\mathbb{M}^3_+$ nicht konvex ist, gibt es zwei Matrizen F_0, G_0 und eine Zahl μ_0 mit

$$\mu_0 \in]0, 1[,\ F_0, G_0 \in \mathbb{M}^3_+,\ (1 - \mu_0)F_0 + \mu_0 G_0 \notin \mathbb{M}^3_+.$$

Wir betrachten die konvexe (deshalb auch stetige) Funktion

$$\omega : \lambda \in [0, 1] \to \omega(\lambda) := \mathbb{W}(x, (1 - \lambda)F_0 + \lambda G_0) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Es gilt: $\sup\limits_{0 \le \lambda \le 1} \omega(\lambda) \le \max\{\omega(0), \omega(1)\} < \infty$.
Anderseits existiert ein $\lambda_0 \in]0, \mu_0[$, so dass

$$\begin{aligned} det((1 - \lambda)F_0 + \lambda G_0) &> 0 \quad \forall\, 0 \le \lambda < \lambda_0, \\ det((1 - \lambda_0)F_0 + \lambda_0 G_0) &= 0, \end{aligned}$$

(die Funktion $\lambda \to det((1 - \lambda)F_0 + \lambda G_0)$ ist ein Polynom mit: $Grad \le 3$); es muss gelten $\lim_{\lambda \to \lambda_0} \omega(\lambda) = \infty$, dies ist nicht möglich. □

Dies zeigt, dass es physikalisch keinen Sinn macht, konvexe Energiefunktionale der Gestalt $W(x, F)$ zu betrachten. Es stellt sich die Frage, ob zusätzlich die Zahl der Argumente vergrößert werden kann, um so eine passende konvexe Funktion zu erhalten. Bekanntlich sind die Invarianten einer Matrix F, $l_1 = spurF$, $l_2 = spur\ CofF$ und $l_3 = detF$. Mit $F = \nabla\varphi$, gibt $detF$ die Volumenänderung und $CofF$ die Oberflächenänderung durch die Deformation φ an. Für polykonvexe W gibt es eine konvexe Funktion $\mathbb{W}$, mit den zusätzlichen Argumenten $CofF$ und $detF$, so dass

$$W(x, F) = \mathbb{W}(x, F, CofF, detF) \quad \forall F \in \mathbb{M}^3_+$$

erfüllt ist. Ball [8] zeigt für polykonvexe Funktionen einen Existenzsatz für das Problem (2.1), der die physikalische Eigenschaft (2.3) berücksichtigt.
Dieses Kapitel zeigt den Existenzsatz von Ball für polykonvexe Funktionen. Die Aussage, dass das Energiefunktional des Myokards nicht polykonvex ist, führt uns zu den quasikonvexen Funktionen und beendet dieses Kapitel. Grundlagen für dieses Kapitel sind die Quellen [8], [11], [14], [17].

2.1 Grundlagen für dieses Kapitel

Im Verlauf dieses Kapitels benötigen wir einige bekannte Sätze und Lemmata. An dieser Stelle erfolgt eine kurze Zusammenfassung dieser Aussagen.

Satz 2.1.1 *Es seien V und W Banach Räume und $A : V \to W$ ein kompakter linearer Operator. Dann gilt*

$$v_k \rightharpoonup v \text{ in } V \Rightarrow Av_k \to Av \text{ in } W.$$

Ist V ein normierter Vektorraum , W ein Banach Raum und $B : V \times W \to \mathbb{R}$ eine stetige bilineare Abbildung. Dann gilt

$$v_k \to v \text{ und } w_k \rightharpoonup w \Rightarrow B(v_k, w_k) \to B(v, w).$$

Beweis: Ciarlet [11], Seite 348, Theorem 7.1-5. □

Satz 2.1.2 (Egoroff) *Seien $\{f_k\}$, f meßbare Funktionen und*

$$f_k \to f \text{ fast überall auf } A$$

mit $A \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, $\mathcal{L}^n(A) < \infty$. Dann existiert für alle $\epsilon > 0$ eine meßbare Menge $E \subset A$, so dass

$$\mathcal{L}^n(A \setminus E) \leq \epsilon \text{ und } f_k \to f \text{ gleichmäßig auf } E.$$

Lemma 2.1.3 *Sei $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ konvex. Dann existiert für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ein $r \in \mathbb{R}^n$, so dass die Ungleichung*

$$f(y) \geq f(x) + r \cdot (y - x)$$

für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gilt. Ist f differenzierbar in x, so ist $r = Df(x)$.
Aus Evans, [17], Seite 621.

Satz 2.1.4 (Satz von Mazur) *Sei V ein Banach-Raum und $\{u_n\}$ eine Folge die schwach gegen u konvergiert. Dann existiert eine konvexe Kombination $\{w_n\}$, so dass die Folge*

$$w_n = \sum_{k=n}^{N} \lambda_k u_k, \text{ mit } \sum_{k=n}^{N} \lambda_k = 1 \text{ und } \lambda_k \geq 0, n \leq k \leq N$$

gegen u konvergiert.

Satz 2.1.5 *Sei X ein Banach Raum, $M \subset X$ konvex und abgeschlossen. Dann ist M schwach folgenabgeschlossen, d.h. ist $x_k \in M$ $\forall k \in \mathbb{N}$ und gilt $x_k \rightharpoonup x$ in X, so ist auch $x \in M$.*

Beweis: Alt [6], Seite 166. □

Satz 2.1.6 (Allgemeine Poincarésche Ungleichung) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Bereich und $1 \leq p < \infty$.*

1. *Es existiert eine Konstante c_0, so dass*
$$\int_\Omega |v|^p \, dx \leq c_0 \left(\int_\Omega |grad\ v|^p \, dx + \left| \int_\Omega v \, dx \right|^p \right) \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega).$$
2. *Sei Γ_0 eine da messbare Teilmenge von Γ mit $da(\Gamma_0) > 0$. Dann existiert eine Konstante c_1, so dass*
$$\int_\Omega |v|^p \, dx \leq c_1 \left(\int_\Omega |grad\ v|^p \, dx + \left| \int_{\Gamma_0} v \, dx \right|^p \right) \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega).$$

Lemma 2.1.7 (Lemma von Fatou) *Es seien $\{f_k\}$ und f nicht negative und meßbare Funktionen. Dann gilt*
$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k\to\infty} f_k \, dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx.$$

Satz 2.1.8 (Rellich-Kondrachov Einbettungssatz) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $m \geq 0$ eine ganze Zahl und $1 \leq p < \infty$. Dann gelten folgende kompakte Einbettungen:*

1. *$W^{m,p}(\Omega) \Subset L^q(\Omega)$ für alle q mit $1 \leq q < p^*$, wenn $m < \frac{n}{p}$,*
2. *$W^{m,p}(\Omega) \Subset L^q(\Omega)$ für alle q mit $1 \leq q < \infty$, wenn $m = \frac{n}{p}$*
3. *$W^{m,p}(\Omega) \Subset C^0(\overline{\Omega})$, wenn $\frac{n}{p} < m$,*

mit $p^* = \frac{n*p}{n-m*p}$.
Bem. *Ist $\overline{\Omega}$ beschränkt, so gilt für $f \in C^0(\overline{\Omega})$, $||f||_\infty < \infty$. Somit folgt $f \in L^n(\Omega)$ mit $1 \leq n \leq \infty$. Aus Ciarlet [11], Seite 278.*

2.2 Schwache Konvergenz der Folgen $Cof\nabla\varphi^l$ und $\det\nabla\varphi^l$

Für polykonvexe Energiefunktionale gibt es eine konvexe Funktion mit den zusätzlichen Argumenten $Cof\nabla\varphi$ und $det\nabla\varphi$. Um die Gesamtenergie (2.1) zu minimieren, betrachtet man Minimalfolgen $\varphi^l \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ für das Funktional I. Dieser Abschnitt zeigt, dass aus der schwachen Konvergenz $\varphi^l \rightharpoonup \varphi \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ auch die schwache Konvergenz der zusätzlichen Argumente $Cof\nabla\varphi^l \rightharpoonup Cof\nabla\varphi \in L^q(\Omega, \mathbb{R}^3)$ und $det\nabla\varphi^l \rightharpoonup det\nabla\varphi \in L^r(\Omega, \mathbb{R}^3)$ folgt.

Lemma 2.2.1 *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *ein Gebiet,* $p \geq 2$ *und* $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$*. Die Abbildung*

$$\Psi \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) \to Cof\nabla\Psi \in L^{p/2}(\Omega, \mathbb{M}^3)$$

mit

$$(Cof\nabla\Psi)_{ij} = (\partial_{j+1}\Psi_{i+1}\partial_{j+2}\Psi_{i+2} - \partial_{j+2}\Psi_{i+1}\partial_{j+1}\Psi_{i+2}) \tag{2.4}$$

(Indizes modulo 3) ist wohldefiniert, stetig und es gilt die Implikation

$$\varphi^l \rightharpoonup \varphi \textit{ in } W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) \Longrightarrow \int_\Omega (Cof\nabla\varphi^l)_{ij}\theta dx \longrightarrow_{l\to\infty} \int_\Omega (Cof\nabla\varphi)_{ij}\theta dx.$$

Beweis: Nach der Hölderschen Ungleichung ist die bilineare Abbildung $(\xi, \eta) \in (L^p(\Omega))^2 \to \xi\eta \in L^{p/2}(\Omega)$ wohldefiniert und stetig für $p \geq 2$. Daher gilt dies auch für die Abbildung $\Psi \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) \to Cof\nabla\Psi \in L^{p/2}(\Omega, \mathbb{M}^3)$. Für $\Psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ gilt

$$(Cof\nabla\Psi)_{ij} = \partial_{j+2}(\Psi_{i+2}\partial_{j+1}\Psi_{i+1}) - \partial_{j+1}(\Psi_{i+2}\partial_{j+2}\Psi_{i+1})$$

(Indizes modulo 3).

(Mit der Produktregel folgt die Darstellung (2.4)
Mit der Greenschen Formel folgt (Indizes modulo 3)

$$\int_\Omega (Cof\nabla\Psi)_{ij}\theta dx = -\int_\Omega \Psi_{i+2}\partial_{j+1}\Psi_{i+1}\partial_{j+2}\theta dx + \int_\Omega \Psi_{i+2}\partial_{j+2}\Psi_{i+1}\partial_{j+1}\theta dx. \tag{2.5}$$

Es folgt

$$\left|\int_\Omega (Cof\nabla\Psi)_{ij}\theta dx\right| \leq |(Cof\nabla\Psi)_{ij}|_{0,1,\Omega}|\theta|_{0,\infty,\Omega} \leq c_1(\theta)||\Psi||^2_{1,2,\Omega}$$

und mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt

$$\left|\int_\Omega \Psi_i\partial_j\Psi_k\partial_l\theta dx\right| \leq |\Psi_i|_{0,2,\Omega}|\Psi_k|_{1,2,\Omega}|\theta|_{1,\infty,\Omega} \leq c_2(\theta)||\Psi||^2_{1,2,\Omega}.$$

Dies zeigt, dass für festes $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$ die linke und rechte Seite der Gleichung (2.5) stetig ist, wenn $C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ mit der Norm $||\cdot||_{1,2,\Omega}$ ausgestattet ist. Die zwei Abschätzungen bleiben somit auch für $\Psi \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ gültig. Und damit auch in jeden Raum $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ mit $p \geq 2$, denn $C^2(\overline{\Omega})$ liegt dicht in $H^1(\Omega)$. Es bleibt

$$\varphi^l \rightharpoonup \varphi \text{ in } W^{1,p}(\Omega) \Longrightarrow \int_\Omega \varphi_i^l\partial_j\varphi_k^l\partial_m\theta dx \longrightarrow \int_\Omega \varphi_i\partial_j\varphi_k\partial_m\theta dx \tag{2.6}$$

zu zeigen. Nach der Hölderschen Ungleichung ist die bilineare Abbildung

$$(\xi, \chi) \in L^r(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \int_\Omega \xi\partial_j\chi\partial_m\theta dx$$

stetig, wenn $p^{-1}+r^{-1}\leq 1$ ist.
Mit Satz (2.1.1) folgt die Implikation

$$\left.\begin{array}{ll}\xi^l & \to \xi \text{ in } L^r(\Omega)\\ \chi^l & \rightharpoonup \chi \text{ in } W^{1,p}(\Omega)\end{array}\right\} \Longrightarrow \int_\Omega \xi^l\partial_j\chi^l\partial_m\theta dx \longrightarrow_{l\to\infty} \int_\Omega \xi^l\partial_j\chi^l\partial_m\theta dx.$$

Wir benötigen also ein $r>0$, das zusätzlich

$$\varphi^l \rightharpoonup \varphi \text{ in } W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^3) \Longrightarrow \varphi^l \longrightarrow \varphi \text{ in } L^r(\Omega,\mathbb{R}^3)$$

erfüllt. Mit Satz (2.1.8) folgt die kompakte Einbettung

$$W^{1,p}(\Omega)\Subset L^r(\Omega) \text{ für alle } 1\leq r<p^*=\left\{\begin{array}{l}\frac{3p}{3-p} \text{ wenn } p<3,\\ +\infty \text{ wenn } p\geq 3,\end{array}\right. .$$

Daher gilt

$$\varphi^l \rightharpoonup \varphi \text{ in } W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^3) \Longrightarrow \varphi^l \longrightarrow \varphi \text{ in } L^r(\Omega,\mathbb{R}^3) \text{ für alle } 1\leq r<p^*.$$

Somit existiert für jedes $p\geq 2$ eine Zahl r mit

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{r}\leq 1 \text{ und } r<p^*.$$

Damit folgt (2.6) und die Behauptung. □

Satz 2.2.2 *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Für jede Zahl $p\geq 2$ und jedes q mit $s^{-1}:=p^{-1}+q^{-1}\leq 1$ ist die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl}(\Psi, Cof\nabla\Psi)\in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^3)\times L^q(\Omega,\mathbb{R}^3)\to & & \det\nabla\Psi\\ & = & \partial_j\Psi_1(Cof\nabla\Psi)_{1j}\in L^s(\Omega,\mathbb{R}^3)\end{array}$$

wohldefiniert und stetig. Es gilt

$$\left.\begin{array}{rll}\varphi^l & \rightharpoonup \varphi \textit{ in } W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^3), & p\geq 2\\ Cof\nabla\varphi^l & \rightharpoonup H \textit{ in } L^q(\Omega,\mathbb{R}^3), & p^{-1}+q^{-1}\leq 1\\ \det\nabla\varphi^l & \rightharpoonup \delta \textit{ in } L^r(\Omega), & r\geq 1\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} H & = & Cof\nabla\varphi,\\ \delta & = & \det\nabla\varphi.\end{array}\right.$$

Beweis: Wir zerlegen den Beweis in vier Teile.

1. Die bilineare Abbildung

   $$(\Psi, Cof\nabla\Psi)\in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^3)\times L^q(\Omega,\mathbb{R}^3)\to\partial\Psi_1(Cof\nabla\Psi)_{1j}\in L^s(\Omega,\mathbb{R}^3)$$

   ist nach der Hölderschen Ungleichung wohldefiniert und stetig.

2. Mit $\Psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ gilt

$$div\ Cof\nabla\Psi = 0$$

(Ciarlet [11], Seite 40). Deshalb ist mit der **Einsteinschen Summenkonvention**

$$\partial_j(Cof\nabla\Psi)_{1j} = 0. \tag{2.7}$$

Aus der Linearen Algebra wissen wir

$$(det\nabla\varphi)I = (Cof\nabla\varphi)(\nabla\varphi)^T.$$

Zusammen mit (2.7) folgt

$$\begin{aligned} \det\nabla\Psi &= \partial_j\Psi_1(Cof\nabla\Psi)_{1j} && (2.8)\\ &= \partial_j\Psi_1(Cof\nabla\Psi)_{1j} + \underbrace{\Psi_1\partial_j(Cof\nabla\Psi)_{1j}}_{=0} \\ &= \partial_j(\Psi_1(Cof\nabla\Psi)_{1j}). && (2.9)\end{aligned}$$

Ist nun $\Psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ und $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$, so folgt mit der Greenschen Formel und Gleichung (2.9)

$$\int_\Omega \partial_j\Psi_1(Cof\nabla\Psi)_{1j}\theta dx = -\int_\Omega \Psi_1(Cof\nabla\Psi)_{1j}\partial_j\theta dx. \tag{2.10}$$

Wir zeigen nun, dass die Gleichung (2.10) für alle Funktionen

$$\Psi \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3), \qquad p \geq 2$$

gilt, so dass

$$Cof\nabla\Psi \in L^{p'}(\Omega, \mathbb{R}^3), \qquad p^{-1} + p'^{-1} \leq 1$$

ist. Daraus folgt dann $Cof\nabla\Psi \in L^q(\Omega, \mathbb{R}^3)$ mit $p^{-1} + q^{-1} \leq 1$.
Mit $\partial_j(Cof\nabla\Psi)_{1j} = 0$ für alle $\Psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ und der Greenschen Formel folgt

$$\int_\Omega (Cof\nabla\Psi)_{1j}\partial_j\chi dx = 0 \quad \forall\chi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Für jedes $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt die Abschätzung

$$\left|\int_\Omega (Cof\nabla\Psi)_{1j}\partial_j\chi dx\right| \leq |Cof\nabla\Psi|_{0,1,\Omega}\,|\chi|_{1,\infty,\Omega} \leq c_1(\chi)||\Psi||^2_{1,2,\Omega}.$$

Somit ist die Abbildung

$$\Psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3) \to \int_\Omega (Cof\nabla\Psi)_{1j}\partial_j\chi dx$$

stetig, wenn der Raum $C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ mit der Norm $||\cdot||_{1,p,\Omega}$ und $p \geq 2$ versehen ist. Da $C^2(\overline{\Omega})$ dicht in $W^{1,p}(\Omega)$ liegt, folgt

$$\int_\Omega (Cof\nabla\Psi)_{1j}\partial_j\chi dx = 0$$

für alle $\Psi \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3), p \geq 2$ und alle $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$.
Wir zeigen nun für $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ und $w = (w_j) \in L^{p'}(\Omega)$ mit $p^{-1} + p'^{-1} = 1$, die

$$\int_\Omega w_j\partial_j\chi dx = 0 \quad \forall\chi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{2.11}$$

erfüllen, die Gleichung

$$-\int_\Omega \psi w_j\partial_j\theta dx = \int_\Omega (\partial_j\psi)w_j\theta dx \quad \forall\theta \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.12}$$

Die Behauptung (2.10) folgt dann mit $\psi = \Psi_1$ und $w_j = (Cof\nabla\Psi)_{1j}$.
Für feste w und θ sind beide Seiten der Gleichung (2.12) stetig lineare Formen bezüglich $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$. Da $\overline{\{C^\infty(\overline{\Omega})\}}_{||\cdot||_{1,p,\Omega}} = W^{1,p}(\Omega)$ ist, betrachte $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Mit Gleichung (2.11) und $\psi\theta \in C_0^\infty(\Omega)$ folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega w_j\partial_j(\psi\theta)dx \\ &= \int_\Omega \psi w_j\partial_j\theta dx + \int_\Omega (\partial_j\psi)w_j\theta dx. \end{aligned}$$

Mit $w_j = (Cof\nabla\Psi)_{1j}$ und $\psi = \Psi_1$ folgt die Behauptung (2.10) für alle $\Psi \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3), p \geq 2$. Also ist $Cof\nabla\Psi \in L^q(\Omega, \mathbb{M}^3)$ für alle $\Psi \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ mit $p^{-1} + q^{-1} \leq 1$.

3. Für ein beliebiges $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$ zeigen wir die Implikation

$$\left.\begin{array}{rll} \varphi^l & \rightharpoonup \varphi \text{ in } W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3), & p \geq 2 \\ Cof\nabla\varphi^l & \rightharpoonup Cof\nabla\varphi \text{ in } L^{p'}(\Omega, \mathbb{M}^3), & p^{-1} + p'^{-1} = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\int_\Omega (\det\nabla\varphi^l)\theta dx \to \int_\Omega (\det\nabla\varphi)\theta dx.$$

Mit $\det\nabla\varphi = \partial_j\varphi_1(Cof\nabla\varphi)_{1j}$ aus Gleichung (2.8) und den Ergebnis (2.10) aus Teil (2) genügt es, für die bilineare Abbildung

$$\int_\Omega \varphi_1^l(Cof\nabla\varphi^l)_{1j}\partial_j\theta dx \to_{l\to\infty} \int_\Omega \varphi_1(Cof\nabla\varphi)_{1j}\partial_j\theta dx$$

zu zeigen. Um Satz (2.1.1) anzuwenden, benötigen wir ein $r > 0$, so dass

$$\varphi^l \rightharpoonup \varphi \text{ in } W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) \Rightarrow \varphi^l \to \varphi \text{ in } L^r(\Omega, \mathbb{R}^3)$$

mit $r^{-1} + p'^{-1} \leq 1$ gilt, wenn also die kompakte Einbettung $W^{1,p}(\Omega) \Subset L^r(\Omega)$ erfüllt ist. Nach Satz (2.1.8) gilt dies für $2 \leq p < 3$, wenn $r < p^* = 3p/(3-p)$ ist. Mit

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p'} > \frac{1}{p^*} + \frac{1}{p'} = (\frac{1}{p} - \frac{1}{3}) + (1 - \frac{1}{p}) = \frac{2}{3}$$

folgt die Existenz einer Zahl $r < p^*$, so dass $r^{-1} + p'^{-1} \leq 1$. Für $p \geq 3$ existiert nach Satz (2.1.8) immer ein passendes r mit der gesuchten Eigenschaft.

4. Sei $p \geq 2$, $\{\varphi^l\}$ eine Folge in $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, so dass $Cof\nabla\varphi^l \in L^q(\Omega, \mathbb{M}^3)$ mit $q \geq 1$ und $det\nabla\varphi^l \in L^r(\Omega)$, $r \geq 1$. Weiter soll gelten

$$\varphi^l \rightharpoonup \varphi \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) \quad \text{mit} \quad Cof\nabla\varphi^l \rightharpoonup H \in L^q(\Omega, \mathbb{M}^3) \tag{2.13}$$
$$\text{und} \quad det\nabla\varphi^l \rightharpoonup \delta \text{ in } L^r(\Omega). \tag{2.14}$$

Es gilt nach Lemma (2.2.1)

$$\int_\Omega (Cof\nabla\varphi^l)_{ij}\theta dx \longrightarrow_{l\to\infty} \int_\Omega (Cof\nabla\varphi)_{ij}\theta dx \quad \forall\theta \in C_0^\infty(\Omega)$$

und mit Teil (3) folgt somit

$$\int_\Omega (det\nabla\varphi^l)\theta dx \longrightarrow_{l\to\infty} \int_\Omega (det\nabla\varphi)\theta dx \quad \forall\theta \in C_0^\infty(\Omega).$$

Mit den Gleichungen (2.13) und (2.14) folgt

$$\int_\Omega (Cof\nabla\varphi^l)_{ij}\theta dx \longrightarrow_{l\to\infty} \int_\Omega H_{ij}\theta dx$$

und

$$\int_\Omega (det\nabla\varphi^l)\theta dx \longrightarrow_{l\to\infty} \int_\Omega \delta\theta dx.$$

Wir folgern, dass jede Funktion $(Cof\nabla\varphi - H)_{ij} \in L^1(\Omega, \mathbb{M}^3)$ und $(det\nabla\varphi - \delta) \in L^1(\Omega)$ den Gleichungen

$$\int_\Omega (Cof\nabla\varphi - H)_{ij}\theta dx = 0 \qquad \forall\theta \in C_0^\infty(\Omega)$$
$$\int_\Omega (det\nabla\varphi - \delta)\theta dx = 0 \qquad \forall\theta \in C_0^\infty(\Omega)$$

genügt. Somit gilt

$$(Cof\nabla\varphi - H)_{ij} = 0 \text{ fast überall auf } \Omega$$

und

$$(det\nabla\varphi - \delta) = 0 \text{ fast überall auf } \Omega.$$

Es folgt die Behauptung. □

2.3 Die Energie $I(\varphi)$ als schwach unterhalbstetige Funktion

Für den Existenzsatz benötigen wir die Eigenschaft

$$I(\varphi) := \int_\Omega W(\nabla\varphi(x), x)\, dx \leq \liminf_{l\to\infty} \int_\Omega W(\nabla\varphi^l(x), x)\, dx \tag{2.15}$$

für alle schwach konvergenten Folgen $\varphi^l \rightharpoonup \varphi \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Man nennt $I(\cdot)$ dann schwach unterhalbstetig. Allgemein gilt:

Definition 2.3.1 *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset X$, heißt schwach unterhalbstetig in x, falls für alle Folgen $\{x_k\}$ mit $x_k \rightharpoonup x$ gilt*

$$f(x) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_k).$$

Es ist bekannt, dass (2.15) erfüllt ist, wenn W nach unten beschränkt und die Abbildung $F \mapsto W(F, x) \in \mathbb{R}$ konvex ist. Wir wissen aber, dass es physikalisch keinen Sinn macht, konvexe Energiefunktionale zu betrachten, siehe Satz (2.0.1). Nichtsdestotrotz gibt es nichtkonvexe Funktionen, die (2.15) erfüllen. Dieser Abschnitt zeigt, dass polykonvexe Funktionen zu diesen nichtkonvexen Funktionen gehören.

Satz 2.3.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit Lipschitz stetigen Rand und*

$$W : \mathbb{M}^3_+ \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$$

eine glatte nach unten beschränkte polykonvexe Funktion. Es existiert also eine konvexe stetig partiell differenzierbare Funktion $\mathbb{W}(\cdot,\cdot,\cdot,z,x) : \mathbb{M}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{M}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$W(F, x) = \mathbb{W}(F, det\ F, Cof\ F, \varphi, x) \quad \forall F = \nabla\varphi(x) \in \mathbb{M}^3_+.$$

Es sei

$$I(\varphi) := \int_\Omega W(\nabla\varphi, x)\, dx. \tag{2.16}$$

Dann gilt für alle $\varphi^k \rightharpoonup \varphi$ in $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ mit $p \geq 2$

$$I(\varphi) \leq \liminf_{k\to\infty} I(\varphi^k) = \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega W(\nabla\varphi^k, x) dx.$$

Beweis: Die Gleichung (2.16) besagt $\varphi \in (W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3))^+$, also $\nabla\varphi \in \mathbb{M}^3_+$. Wir wählen eine Folge $\{\varphi^k\}$ mit

$$\varphi^k \rightharpoonup \varphi \text{ in } W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3). \tag{2.17}$$

Sei $l := \liminf_{k\to\infty} I(\varphi^k)$. Wir haben $I(\varphi) \leq l$ zu zeigen. Da $\varphi^k \rightharpoonup \varphi$ in $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, ist die Folge $\{\varphi^k\}_{k=1}^{\infty}$ beschränkt. Also gilt

$$\sup_k ||\varphi^k||_{1,p,\Omega} < \infty.$$

Wenn nötig wählen wir eine Teilfolge aus $\{\varphi^k\}$, so dass

$$l = \lim_{k\to\infty} I(\varphi^k). \tag{2.18}$$

Weiter gilt $\varphi^k \to \varphi$ in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$, Kompaktheitssatz. Somit existiert eine weitere Teilfolge mit

$$\varphi^k \to \varphi \text{ fast überall auf } \Omega.$$

Sei nun $\epsilon > 0$. Mit **Egoroffs Satz** (2.1.2) gibt es eine meßbare Menge E_ϵ mit $\mathcal{L}^3(\Omega \setminus E_\epsilon) \leq \epsilon$, so daß

$$\varphi^k \to \varphi \text{ gleichmäßig auf } E_\epsilon \tag{2.19}$$

konvergiert. Wir definieren

$$F_\epsilon := \{x \in \Omega : |\varphi(x)| + |\nabla\varphi(x)| \leq 1/\epsilon\}. \tag{2.20}$$

Dann gilt $\mathcal{L}^3(\Omega \setminus F_\epsilon) \to 0$ für $\epsilon \to 0$. Wir setzen

$$G_\epsilon := E_\epsilon \cap F_\epsilon. \tag{2.21}$$

Es folgt somit

$$\mathcal{L}^3(\Omega \setminus G_\epsilon) \to 0 \text{ für } \epsilon \to 0.$$

Nach Voraussetzung ist $\hat{W}$ nach unten beschränkt. Œ $\hat{W} \geq 0$ (sonst wähle β konstant, so dass $\tilde{W} := W + \beta \geq 0$). Es folgt

$$\begin{aligned}
I(\varphi^k) &= \int_\Omega W(\nabla\varphi^k, x)dx \\
&\geq \int_{G_\epsilon} W(\nabla\varphi^k, x)dx \\
&= \int_{G_\epsilon} \mathbb{W}(\nabla\varphi^k, \det\nabla\varphi^k, Cof\nabla\varphi^k, \varphi^k, x)dx \\
&\geq \int_{G_\epsilon} \mathbb{W}(\nabla\varphi, \det\nabla\varphi, Cof\nabla\varphi, \varphi^k, x)dx + \\
&\quad \int_{G_\epsilon} \partial_1\mathbb{W}(\nabla\varphi, \det\nabla\varphi, Cof\nabla\varphi, \varphi^k, x)(\nabla\varphi^k - \nabla\varphi) + \\
&\quad \partial_2\mathbb{W}(\nabla\varphi, \det\nabla\varphi, Cof F, \varphi^k, x)(\det\nabla\varphi^k - \det\nabla\varphi) + \\
&\quad \partial_3\mathbb{W}(\nabla\varphi, \det\nabla\varphi, Cof F, \varphi^k, x)(Cof\nabla\varphi^k - Cof\nabla\varphi)dx.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Die letzte Ungleichung folgt aus der Konvexität in den drei ersten Argumenten von W und mit Lemma (2.1.3). Mit (2.19), (2.20) und (2.21) gilt

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_{G_\epsilon} &\mathbb{W}(\nabla\varphi, \det\nabla\varphi, Cof\nabla\varphi, \varphi^k, x)dx\\ = \int_{G_\epsilon} &\mathbb{W}(\nabla\varphi, \det\nabla\varphi, Cof\nabla\varphi, \varphi, x)dx. \qquad (2.23)\end{aligned}$$

Zusätzlich konvergieren

$$\begin{aligned}\partial_1\mathbb{W}(\nabla\varphi, \det\nabla\varphi, Cof\nabla\varphi, \varphi^k, x) &\to \partial_1\mathbb{W}(\nabla\varphi, \det\nabla\varphi, Cof\nabla\varphi, \varphi, x)\\ \partial_2\mathbb{W}(\nabla\varphi, \det\nabla\varphi, Cof\nabla\varphi, \varphi^k, x) &\to \partial_2\mathbb{W}(\nabla\varphi, \det\nabla\varphi, Cof\nabla\varphi, \varphi, x)\\ \partial_3\mathbb{W}(\nabla\varphi, \det\nabla\varphi, Cof\nabla\varphi, \varphi^k, x) &\to \partial_3\mathbb{W}(\nabla\varphi, \det\nabla\varphi, Cof\nabla\varphi, \varphi, x)\end{aligned}$$

gleichmäßig auf G_ϵ und mit Satz (2.2.2) gilt

$$\begin{aligned}\nabla\varphi^k &\rightharpoonup \nabla\varphi \text{ in } L^p(\Omega, \mathbb{M}^3) \text{ und}\\ Cof\nabla\varphi^k &\rightharpoonup Cof\nabla\varphi \text{ in } L^q(\Omega, \mathbb{M}^3), \text{ mit } q^{-1} + p^{-1} \leq 1,\\ \det\nabla\varphi^k &\rightharpoonup \det\nabla\varphi \text{ in } L^r(\Omega), \text{ mit } r \geq 1.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}0 = \lim_{k\to\infty}\int_{G_\epsilon} &\partial_1\mathbb{W}(\nabla\varphi, \det\nabla\varphi, Cof\nabla\varphi, \varphi^k, x)(\nabla\varphi^k - \nabla\varphi) +\\ &\partial_2\mathbb{W}(\nabla\varphi, \det\nabla\varphi, Cof\nabla\varphi, \varphi^k, x)(\det\nabla\varphi^k - \det\nabla\varphi) +\\ &\partial_3\mathbb{W}(\nabla\varphi, \det\nabla\varphi, Cof\nabla\varphi, \varphi^k, x)(Cof\nabla\varphi^k - Cof\nabla\varphi)dx. \qquad (2.24)\end{aligned}$$

Mit (2.18), (2.23) und (2.24) folgt aus (2.22)

$$l = \lim_{k\to\infty} I(\varphi^k) \geq \int_{G_\epsilon} \mathbb{W}(\nabla\varphi, \det\nabla\varphi, Cof\nabla\varphi, \varphi, x)dx. \qquad (2.25)$$

Diese Ungleichung gilt für alle $\epsilon > 0$. Nach Voraussetzung ist $\nabla\varphi \in \mathbb{M}^3_+$. Mit $W \geq 0$ und der monotonen Konvergenz folgt für $\epsilon \to 0$

$$l \geq \int_\Omega \mathbb{W}(\nabla\varphi, \det\nabla\varphi, \varphi, x)dx = \int_\Omega W(\nabla\varphi, x)dx = I(\varphi).$$

□

2.4 Balls Existenzsatz für polykonvexe Funktionen

Nach der geleisteten Vorarbeit, zeigen wir nun den Existenzsatz von Ball für polykonvexe Funktionen.

Satz 2.4.1 (Balls Existenzsatz für polykonvexe Funktionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit Lipschitz stetigen Rand und $W : \mathbb{M}^3_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ ein Energiefunktional mit folgenden Eigenschaften:

1. **Polykonvex:** *Für fast alle $x \in \Omega$ und $z \in \mathbb{R}^3$ existiert eine konvexe Funktion*
$$\mathbb{W}(\cdot,\cdot,\cdot,z,x) : \mathbb{M}^3 \times]0,\infty[\times \mathbb{M}^3 \to \mathbb{R},$$
so dass
$$W(F,x) = \mathbb{W}(F, detF, CofF, z, x) \quad \forall F \in \mathbb{M}^3_+;$$
weiter sei die Funktion
$$\mathbb{W}(F,\delta,H,z,\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$$
meßbar für alle
$$(F,\delta,H,z) \in \mathbb{M}^3 \times]0,+\infty[\times \mathbb{M}^3 \times \mathbb{R}^3$$
und
$$z \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{W}(F, \det F, CofF, z, x) \in \mathbb{R}$$
sei stetig.

2. **Verhalten bei det F$\to$ 0$^+$:** *Für fast alle $x \in \Omega$ gilt*
$$\lim_{detF \to 0^+} W(F,x) = +\infty.$$

3. **Koerzivität:** *Es existieren Konstanten α, β, p, q, r, so dass $\alpha > 0$, $p \geq 2$, $q \geq p/(p-1)$, $r > 1$ und*
$$W(F,x) \geq \alpha\Big(||F||^p + ||CofF||^q + (detF)^r\Big) + \beta$$
für fast alle $x \in \Omega$ und alle $F \in \mathbb{M}^3_+$.

Sei $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ eine da−meßbare Zerlegung von $\Gamma = \partial\Omega$ mit $area\Gamma_0 > 0$, und sei $\varphi_0 : \Gamma_0 \to \mathbb{R}^3$ eine meßbare Funktion, so dass die Menge:
$$\Phi : = \Big\{\Psi \in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^3); Cof\nabla\Psi \in L^q(\Omega,\mathbb{M}^3), det\nabla\Psi \in L^r(\Omega), \Psi = \varphi_0 \text{ da fast überall auf } \Gamma_0, det\nabla\Psi > 0 \text{ fast überall in } \Omega\Big\}$$
nicht leer ist. Sei $f \in L^\rho(\Omega,\mathbb{R}^3)$ und $g \in L^\sigma(\Gamma_1,\mathbb{R}^3)$, so dass das lineare Funktional
$$L : \Psi \in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^3) \to L(\Psi) := \int_\Omega f \cdot \Psi dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot \Psi da \qquad (2.26)$$

stetig ist. Sei

$$I(\Psi) := \int_\Omega W\Big(\nabla\Psi(x), x\Big)dx - L(\Psi),$$

und nehmen wir an, dass $\inf_{\Psi\in\Phi} I(\Psi) < +\infty$ *ist. Dann existiert mindestens eine Funktion* φ *mit*

$$\varphi \in \Phi \text{ und } I(\varphi) = \inf_{\Psi\in\Phi} I(\Psi).$$

Beweis:

1. Für fast alle $x \in \Omega$ ist die Funktion $\mathbb{W}(\cdot,\cdot,\cdot,z,x) : \mathbb{M}^3 \times]0,+\infty[\times\mathbb{M}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig (Sie ist konvex, reellwertig auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen Raums und ist bezüglich $z \in \mathbb{R}^3$ stetig; [11], Seite 169, Theorem 4.7-10.). Für alle $(F,\delta,H,z) \in \mathbb{M}^3\times]0,+\infty[\times\mathbb{M}^3 \times \mathbb{R}^3$ ist $W(F,\delta,H,z,\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ meßbar, und $\mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3\times]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$ ist eine Borel-Menge. Es folgt, dass die Funktion

$$x \in \Omega \to \mathbb{W}\Big(\nabla\Psi(x), det\nabla\Psi(x), Cof\nabla\Psi(x), \Psi(x), x\Big) \in \mathbb{R}$$

   meßbar für alle $\Psi \in \Phi$ ist (Caratheodory Funktion). Weiter ist W fast überall nach unten beschränkt (wegen Punkt 3 in der Voraussetzung) und es gilt

$$\begin{aligned}&\int_\Omega W\Big(\nabla\Psi(x), x\Big)dx = \\ &\int_\Omega \mathbb{W}\Big(\nabla\Psi(x), det\nabla\Psi(x), Cof\nabla\Psi(x), \Psi(x), x\Big)dx \in [\beta vol\Omega, +\infty]\end{aligned}$$

   für alle $\Psi \in \Phi$. Somit ist das Integral $\int_\Omega W(\nabla\Psi(x), x)dx$ wohldefiniert.

2. Wir bestimmen nun die untere Schranke für die Gesamtenergie $I(\Psi)$ für $\Psi \in \Phi$. Mit der Koerzivität von W und der Stetigkeit von L folgt

$$\begin{aligned} I(\Psi) \geq\ & \alpha \int_\Omega \Big(||\nabla\Psi||^p + ||Cof\nabla\Psi||^q + (det\nabla\Psi)^r\Big)dx \\ +\ & \beta \cdot vol\Omega - ||L|| \cdot ||\Psi||_{1,p,\Omega} \quad \forall\Psi \in \Phi. \end{aligned}$$

   Zusammen mit $\Psi = \varphi_0$ auf Γ_0 und Satz (2.1.6) erhalten wir Konstanten $c > 0$ und d mit

$$I(\Psi) \geq c\Big(||\Psi||^p_{1,p,\Omega} + |Cof\nabla\Psi|^q_{0,q,\Omega} + |det\nabla\Psi|^r_{0,r,\Omega}\Big) + d \quad \forall\Psi \in \Phi.$$

3. Sei $\{\varphi^k\}$ eine Minimalfolge für das Funktional I, d.h. eine Folge die

$$\varphi^k \in \Phi \quad \forall k \in \mathbb{N}, \text{ und } \lim_{k\to\infty} I(\varphi^k) = \inf_{\Psi\in\Phi} I(\Psi)$$

genügt. Nach Annahme ist $\inf_{\Phi\in\Psi} I(\Psi) < \infty$ und mit gezeigtem zweiten Teil ist die Folge $\{\varphi^k, Cof\nabla\varphi^k, det\nabla\varphi^k\}$ beschränkt im reflexiven Banach-Raum $W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^3)\times L^q(\Omega,\mathbb{M}^3)\times L^r(\Omega)$. Also existiert eine Teilfolge $\{\varphi^l, Cof\nabla\varphi^l, det\nabla\varphi^l\}$ die schwach gegen ein Element (φ, H, δ) im Raum $W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^3)\times L^q(\Omega,\mathbb{M}^3)\times L^r(\Omega)$ konvergiert. Mit Satz (2.2.2) folgt $H = Cof\nabla\varphi$ und $\delta = det\nabla\varphi$. Wir haben also eine Teilfolge in der Minimalfolge mit

$$\begin{array}{ll} \varphi^l \rightharpoonup \varphi & \text{in } W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^3), \\ Cof\nabla\varphi^l \rightharpoonup Cof\nabla\varphi & \text{in } L^q(\Omega,\mathbb{M}^3), \\ det\nabla\varphi^l \rightharpoonup det\nabla\varphi & \text{in } L^r(\Omega). \end{array}$$

4. Wir zeigen nun $\varphi \in \Phi$. Es genügt $det\nabla\varphi > 0$ fast überall auf Ω und $\varphi = \varphi_0$ auf Γ_0 zu zeigen.
Wegen $det\nabla\varphi^l \rightharpoonup det\nabla\varphi$ in $L^r(\Omega)$, existiert nach Satz (2.1.4) für jedes l Zahlen $i(l) \geq l$ und λ_s^l, $l \leq s \leq i(l)$, so dass

$$\lambda_s^l \geq 0, \quad \sum_{s=l}^{i(l)} \lambda_s^l = 1, \quad d^l := \sum_{s=l}^{i(l)} \lambda_s^l det\nabla\varphi^s \longrightarrow_{l\to\infty} det\nabla\varphi \text{ in } L^r(\Omega).$$

Daher existiert eine Teilfolge $\{d^m\}$ in $\{d^l\}$ die fast überall gegen $det\nabla\varphi$ konvergiert. Wegen $d^l > 0$ fast überall, folgern wir $det\nabla\varphi \geq 0$ fast überall auf Ω. Wir führen nun die Annahme $det\nabla\varphi = 0$ auf $A \subset \Omega$ mit $volA > 0$ zum Widerspruch. Es gilt

$$\int_A |det\nabla\varphi^l| dx = \int_A det\nabla\varphi^l dx \to \int_A det\nabla\varphi dx = 0,$$

da die charakteristische Funktion der Menge A zu $L^{r'}(\Omega)$ gehört. Somit gilt $det\nabla\varphi^l \to 0$ in $L^1(A)$. Es existiert eine Teilfolge $\{\varphi^m\}$ in $\{\varphi^l\}$, so dass

$$det\nabla\varphi^m(x) \to 0 \text{ für fast alle } x \in A.$$

Für die Folge der meßbaren Funktionen $\{f^m\}$ mit

$$f^m : x \in A \to f^m(x) := W(\nabla\varphi^m(x), x) \geq \beta \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

(Koerzivität von W) folgt mit Lemma (2.1.7)

$$\int_A \liminf_{m\to\infty} f^m(x)dx \leq \liminf_{m\to\infty} \int_A f^m(x)dx \leq \lim_{m\to\infty} \int_A f^m(x)dx. \quad (2.27)$$

Mit Voraussetzung 2 folgt

$$\begin{aligned} \liminf_{m\to\infty} f^m(x) &= \lim_{m\to\infty} W(\nabla\varphi^m(x), x) \\ &= \lim_{detF\to 0^+} W(F, x) = +\infty \text{ für fast alle } x \in A. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Mit (2.27) und (2.28) folgt

$$\lim_{m\to\infty}\int_A f^m(x)dx = \lim_{m\to\infty}\int_A W(\nabla\varphi^m(x),x)dx = +\infty.$$

Nach Voraussetzung ist aber $\lim\limits_{m\to\infty} I(\varphi^m) = \inf_{\Psi\in\Phi} I(\Psi) < +\infty$ und

$$\begin{aligned} I(\varphi^m) &\geq \int_A W(\nabla\varphi^m(x),x)dx \\ &+ \beta\cdot vol(\Omega\setminus A) - ||L||\cdot||\varphi^m||_{1,p,\Omega}, \end{aligned}$$

das β kommt von der Koerzivität. Dies ist ein Widerspruch. Also ist $det\nabla\varphi > 0$ fast überall auf Ω.
Wir haben noch $\varphi = \varphi_0$ auf Γ_0 zu zeigen.
Sei $w \in \Phi$ fest. Es ist $\varphi^l - w \in W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^3)$. Der Raum $W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^3)$ ist ein abgeschlossener linearer Teilraum von $W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^3)$ und mit Satz (2.1.5) ist dieser schwach folgenabgeschlossen. Es folgt

$$\varphi - w \in W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^3).$$

Daher ist spur $\varphi = \varphi_0$ auf Γ_0. Damit ist $\varphi \in \Phi$ gezeigt.

5. Mit $det\nabla\varphi > 0$ fast überall auf Ω und mit Satz (2.3.2) folgern wir

$$\int_\Omega W(\nabla\varphi(x),x)dx \leq \liminf_{l\to\infty}\int_\Omega W(\nabla\varphi^l(x),x)dx.$$

Das lineare Funktional (2.26) ist stetig und es folgt $L(\varphi) = \lim\limits_{l\to\infty} L(\varphi^l)$. Insgesamt haben wir

$$I(\varphi) \leq \liminf_{l\to\infty} I(\varphi^l)$$

gezeigt.

6. Die Funktion φ ist Lösung des Problems, da $\varphi \in \Phi$ (siehe Teil 4) und

$$I(\varphi) \leq \liminf_{l\to\infty} I(\varphi^l) = \inf_{\Psi\in\Phi} I(\Psi) \Rightarrow I(\varphi) = \inf_{\Psi\in\Phi} I(\Psi).$$

□

2.5 Das Energiefunktional des Myokards

Dieser Abschnitt zeigt, dass das Energiefunktional des Myokards nicht polykonvex ist. Der Existenzsatz von Ball (2.4.1) ist daher nicht anwendbar.

Nichtsdestotrotz ist der Satz von Ball kein mathematischer Selbstzweck. So besitzen z.B. die Ogden Materialien ein polykonvexes Energiefunktional.
Cosat et al [12] geben ein durch Experimente bestimmtes Energiefunktional für das Myokard an:

$$\hat{W}(x,E) = \frac{C}{2}(e^{\hat{Q}} - 1) - \frac{p}{2}(g^{(x)} - 1) \tag{2.29}$$

mit

$$\begin{aligned}\hat{Q}(E) &= 2b_1(E_{11} + E_{22} + E_{33}) \\ &\quad + b_2E_{11}^2 + b_3(E_{22}^2 + E_{33}^2 + 2E_{23}E_{32}) \\ &\quad + 2b_4(E_{12}E_{21} + E_{13}E_{31})\end{aligned}$$

und den Konstanten $C = 0,88kPa$, $b_1 = 0,0$, $b_2 = 18,5$, $b_3 = 3,58$ und $b_4 = 1,63$.
Die Inkompressibilität der Herzwand ist hier eine Nebenbedingung. Sie wird in Gleichung (2.29) durch $g^{(x)} = det(F^TF) = (detF)^2 = 1$ und dem Lagrangeschen Multiplikator $p/2$ berücksichtigt, dabei ist p der hydrostatische Druck. Die Nebenbedingung hat deshalb keinen Einfluss auf die Konvexität bzw. Polykonvexität und wird im folgenden nicht berücksichtigt. Mit $E = \frac{1}{2}(F^TF - I)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}E_{11} &= \frac{1}{2}(F_{11}^2 + F_{21}^2 + F_{31}^2 - 1) \\ E_{22} &= \frac{1}{2}(F_{12}^2 + F_{22}^2 + F_{32}^2 - 1) \\ E_{33} &= \frac{1}{2}(F_{13}^2 + F_{23}^2 + F_{33}^2 - 1) \\ E_{23} &= E_{32} = \frac{1}{2}(F_{12}F_{13} + F_{22}F_{23} + F_{32}F_{33}) \\ E_{12} &= E_{21} = \frac{1}{2}(F_{11}F_{12} + F_{21}F_{22} + F_{31}F_{32}) \\ E_{13} &= E_{31} = \frac{1}{2}(F_{11}F_{13} + F_{21}F_{23} + F_{31}F_{33}).\end{aligned}$$

Statt $\hat{W}(x,E)$ und $\hat{Q}(E)$ betrachten wir die Funktionen $W(x,F)$ und $Q(F)$.

Satz 2.5.1 *Die Abbildung $W(x,F)$ ist nicht polykonvex.*

Beweis: Wir nehmen an, dass die Funktionen polykonvex sind. Es sei $\epsilon > 0$ und

$$\begin{aligned}F_\epsilon &:= \epsilon I = \epsilon diag(1,1,1), \\ G_\epsilon &:= \epsilon diag(1,1,3).\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} detF_\epsilon &= \epsilon^3 > 0, \\ detG_\epsilon &= 3\epsilon^3 > 0, \\ det(\frac{1}{2}(F_\epsilon + G_\epsilon)) &= 2\epsilon^3, \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} det(\frac{1}{2}(F_\epsilon + G_\epsilon)) &= \frac{1}{2}detF_\epsilon + \frac{1}{2}detG_\epsilon, \\ CofF_\epsilon &= diag(\epsilon^2, \epsilon^2, \epsilon^2), \\ CofG_\epsilon &= diag(3\epsilon^2, 3\epsilon^2, \epsilon^2), \\ Cof(\frac{1}{2}(F_\epsilon + G_\epsilon)) &= diag(2\epsilon^2, 2\epsilon^2, \epsilon^2), \end{aligned}$$

so dass

$$Cof(\frac{1}{2}(F_\epsilon + G_\epsilon)) = \frac{1}{2}CofF_\epsilon + \frac{1}{2}CofG_\epsilon.$$

Nach Annahme ist $W(x,\cdot) : \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}$ polykonvex, daher gibt es eine konvexe Funktion $\mathbb{W}(x,\cdot,\cdot,\cdot) : \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times]0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} W(x, \frac{1}{2}(F_\epsilon + G_\epsilon)) &= \mathbb{W}(x, \frac{1}{2}(F_\epsilon + G_\epsilon), Cof\ \frac{1}{2}(F_\epsilon + G_\epsilon), det(\frac{1}{2}(F_\epsilon + G_\epsilon))) \\ &= \mathbb{W}(x, \frac{1}{2}F_\epsilon + \frac{1}{2}G_\epsilon, \frac{1}{2}CofF_\epsilon + \frac{1}{2}CofG_\epsilon, \frac{1}{2}detF_\epsilon + \frac{1}{2}detG_\epsilon) \\ &\leq \frac{1}{2}\mathbb{W}(x, F_\epsilon, CofF_\epsilon, detF_\epsilon) + \frac{1}{2}\mathbb{W}(x, G_\epsilon, CofG_\epsilon, detG_\epsilon) \\ &= \frac{1}{2}W(x, F_\epsilon) + \frac{1}{2}W(x, G_\epsilon). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Wir zeigen nun, dass diese Ungleichung nicht für alle $\epsilon > 0$ erfüllt ist.
Mit $D = diag(d_1, d_2, d_3)$ als Diagonalmatrix folgt mit $b_1 = 0,0$

$$4Q(D) = b_2(d_1^2 - 1)^2 + b_3((d_2^2 - 1)^2 + (d_3^2 - 1)^2)$$

und weiter

$$\begin{aligned} 4Q(F_\epsilon) &= (b_2 + b_3)(\epsilon^2 - 1)^2 + b_3(\epsilon^2 - 1)^2 \\ 4Q(G_\epsilon) &= (b_2 + b_3)(\epsilon^2 - 1)^2 + b_3(9\epsilon^2 - 1)^2 \\ 4Q(\frac{1}{2}(F_\epsilon + G_\epsilon)) &= (b_2 + b_3)(\epsilon^2 - 1)^2 + b_3(4\epsilon^2 - 1)^2. \end{aligned}$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} f(\epsilon) &:= Q(\frac{1}{2}(F_\epsilon + G_\epsilon)) - \frac{1}{2}Q(F_\epsilon) - \frac{1}{2}Q(G_\epsilon) \\ &= \frac{b_3}{4}((4\epsilon^2 - 1)^2 - \frac{1}{2}(9\epsilon^2 - 1)^2 - \frac{1}{2}(\epsilon^2 - 1)^2) \\ &= \frac{b_3}{4}(-25\epsilon^4 + 2\epsilon^2). \end{aligned}$$

Für $\epsilon < \frac{\sqrt{2}}{5}$ ist $f(\epsilon) > 0$. Deswegen ist Q nicht konvex für alle $\epsilon < \frac{\sqrt{2}}{5}$.
Es sei

$$\begin{aligned}\frac{C}{2}g(\epsilon) &:= W(x, \frac{1}{2}(F_\epsilon + G_\epsilon)) - \frac{1}{2}W(x, F_\epsilon) - \frac{1}{2}W(x, G_\epsilon)\\ &= \frac{C}{2}\Big(e^{Q(x,\frac{1}{2}(F_\epsilon+G_\epsilon))} - \frac{1}{2}e^{Q(x,F_\epsilon)} - \frac{1}{2}e^{Q(x,G_\epsilon)}\Big).\end{aligned}$$

Wir zeigen, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $g(\delta) > 0$ für alle $0 < \delta < \epsilon$. Es genügt

$$h(\delta) := g(\delta)e^{-Q(x,\frac{1}{2}(F_\delta+G_\delta))} > 0$$

für alle $0 < \delta < \epsilon$ zu zeigen. Es ist

$$h(\epsilon) = 1 - \frac{1}{2}e^{\frac{b_3}{4}(-15\epsilon^4+6\epsilon^2)} - \frac{1}{2}e^{\frac{b_3}{4}(65\epsilon^4-10\epsilon^2)}.$$

Die Taylor Reihe von h mit Entwicklungspunkt 0 hat die Gestalt

$$h(\epsilon) = b_3\epsilon^2 + 0(\epsilon^4).$$

Daher gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $h(\delta) > 0$ und $g(\delta) > 0$ für alle $0 < \delta < \epsilon$. Daher gilt die Ungleichung (2.30) nicht für alle $\epsilon > 0$. Somit kann W nicht polykonvex sein. □

Versuche dieses Energiefunktional mit dem Satz von Ball zu verknüpfen blieben erfolglos.

2.6 Existenzsatz ohne konvexe Voraussetzung

Existenzsätze die konvexe bzw. polykonvexe Funktionen voraussetzen, lösen unser Problem (2.1) für das Energiefunktional des Myokards also nicht. Folgender Satz kommt ohne diese Voraussetzungen aus. Wir benötigen zunächst eine Definition.

Definition 2.6.1 *Eine Menge $D \subset X$ heißt schwach kompakt, falls für alle Folgen $\{x_k\} \subset D$ eine Teilfolge $\{x_{k_j}\}$ und ein $x \in D$ existiert mit $x_k \rightharpoonup x$.*

Satz 2.6.2 *Sei $D \subset X$ schwach kompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ schwach unterhalbstetig, Definition* (2.3.1). *Dann besitzt f auf D ein (globales) Minimum.*

Beweis: Sei

$$c := \inf_{x\in D} f(x).$$

Dann gibt es eine Minimalfolge $\{x_k\} \subset D$ mit $c = \lim_{k\to\infty} f(x_k)$. Da D schwach kompakt ist, gilt $x_k \rightharpoonup x \in D$. Nun ist f schwach unterhalbstetig, also

$$f(x) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_k) = c,$$

daher ist $x \in D$ ein globales Minimum. □

Dies ist der passende Satz für unser Problem. Allerdings macht die Voraussetzung, dass $f : D \to \mathbb{R}$ schwach unterhalbstetig sein soll, Probleme. Denn für

$$I(\varphi) := \int_\Omega g(x, \varphi(x), \nabla\varphi(x))\, dx$$

mit $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($\nabla\varphi \in \mathbb{R}^{nm}$) und g konvex bezüglich $\nabla\varphi$ gilt die Folgerung ([14], Seite 97)

$$g \textit{ konvex} \Rightarrow g \textit{ polykonvex} \Rightarrow g \textit{ quasikonvex}$$

und

$$g \textit{ quasikonvex} \Longleftrightarrow I(\varphi) \text{ ist schwach unterhalbstetig.}$$

Es gibt nichtkonvexe, schwach unterhalbstetige Funktionen. Die Überprüfung, ob eine gegebene Funktion quasikonvex ist, gilt als sehr schwer, [14], Seite 97. In dieser Arbeit soll dieser Weg auch nicht weiter verfolgt werden. Trotzdem könnte dies ein Zugang zum Existenzsatz sein. Wir beenden dieses Kapitel mit der Definition einer quasikonvexen Funktion.

Definition 2.6.3 *Eine Borel meßbare und lokal integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}$ heißt quasikonvex, wenn*

$$f(A) \leq \frac{1}{meas D} \int_D f(A + \nabla\varphi(x))\, dx$$

für alle beschränkten Bereiche $D \subset \mathbb{R}^n$, für alle $A \in \mathbb{R}^{nm}$ und für alle $\varphi \in W_0^{1,\infty}(D, \mathbb{R}^m)$ erfüllt ist.

Aus Dacorogna [14], Seite 99.

Kapitel 3

Der Laplace-Operator als Homöomorphismus

Der Beweis ist ein Götze, vor dem
der Mathematiker sich foltert.
Sir Arthur Eddington

Die Unmöglichkeit der Konvexität von $W(x, F)$ zwang uns, einen schwächeren Begriff, die Polykonvexität, einzuführen. Wir haben weiter gezeigt, dass das Energiefunktional für das Myokard nicht polykonvex ist. Ob eine Funktion quasikonvex ist, gilt als schwer nachprüfbar. Wir stoßen daher auf Schwierigkeiten, wenn wir für unsere Variationsaufgabe (2.1) einen Existenzsatz herleiten wollen.
Wir wissen, dass sich die Antwortfunktion $\hat{T}(x, F)$ aus $W(x, F)$ mit der Gleichung (1.22) berechnen läßt. Es gibt also die Möglichkeit, direkt mit der Antwortfunktion und dem System der partiellen Differentialgleichungen (1.28) zu arbeiten. Wir betrachten das System als Operator zwischen zwei Banach-Räumen. Ziel ist es, den Satz über die Umkehrfunktion anzuwenden. Eine Voraussetzung ist, dass das Differential an einen Punkt φ_0 bijektiv ist. Dazu benötigen wir, dass der Laplace-Operator

$$\Delta : W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \to W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \tag{3.1}$$

ein surjektiver Homöomorphismus ist. Dabei entspricht Ω der Herzwand und folglich ist $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Aus Stetigkeitsgründen muß $p > n = 3$ sein. Damit sind die genannten Sobolev-Räume keine Hilberträume. Der Satz von Lax-Milgram ist daher nicht anwendbar.
Dieses Kapitel befaßt sich intensiv mit der Aussage (3.1). Wir benötigen zunächst einige Definitionen und Lemmata. Grundlage für dieses Kapitel sind die Quellen [3] und [22].

3.1 Einige Grundlagen

Definition 3.1.1 *Für die Multiindizes* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *und* $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *natürlicher Zahlen sei:*

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \\ \alpha! &:= \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_n! \\ \alpha < \beta &:\Longleftrightarrow \alpha_i < \beta_i \quad \forall i = 1, \ldots n \\ \alpha \leq \beta &:\Longleftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i \quad \forall i = 1, \ldots n \\ \binom{\alpha}{\beta} &:= \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!} \quad \forall \beta \leq \alpha. \end{aligned}$$

Definition 3.1.2 *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *beschränkt, offen und*

$$B(\Phi, \Psi) := \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} (a_{\alpha\beta} D^\alpha \Phi, D^\beta \Psi)_0 \quad \Phi, \Psi \in C_0^\infty(\Omega)$$

eine gleichmäßige elliptische Dirichlet Bilinearform der Ordnung m *auf* Ω. $B(\Psi, \Phi)$ *heißt regulär, wenn für* $|\alpha| \leq m$, $|\beta| \leq m$, $a_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$ *sind. Weiter nehmen wir an, dass* $a_{\alpha\beta}$ *mit* $|\alpha| = |\beta| = m$ *stetig auf* $\overline{\Omega}$ *sind oder äquivalent,* $a_{\alpha\beta}$ *sind gleichmäßig stetig auf* Ω *für* $|\alpha| = |\beta| = m$. *Wie üblich ist* $(\Phi, \Psi)_0 := \int_\Omega \Phi\Psi \, dx$.

Definition 3.1.3 *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *beschränkt, offen und*

$$C_*^m(\Omega) := \{f \in C^m(\Omega) : \partial^\alpha f \text{ sind gleichmäßig beschränkt für alle } |\alpha| \leq m\}.$$

Definition 3.1.4 (Stetig differenzierbare Bilinearform) *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *beschränkt und offen,* $m \geq 1$ *eine ganze Zahl und*

$$B(\Psi, \Phi) := \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} (a_{\alpha\beta} D^\alpha \Psi, D^\beta \Phi)_0 \quad \forall \Psi, \Phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

sei eine gleichmäßige elliptische reguläre Dirichlet Bilinearform. Sei $k \geq 1$ *eine ganze Zahl.* B *heißt* k *mal stetig differenzierbar auf* Ω, *wenn* $a_{\alpha\beta} \in C_*^{|\beta|+k-m}(\Omega)$ *für* $|\beta| + k - m > 0$ *und sonst* $a_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$ *ist.*

Lemma 3.1.5 *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *beschränkt, offen und*

$$L := \sum_{|s| \leq 2m} a_s(\cdot) D^s$$

gleichmäßig elliptisch auf Ω. *Sei* $a_s \in L^\infty(\Omega)$ *für* $|s| \le m$ *und* $a_s \in C_*^{|s|-m}(\Omega)$ *für* $|s| > m$. *Für* $|s| \ge m+1$ *sei* $s = s_1 + s_2$ *mit* $|s_1| = m$. *Sei*

$$\begin{aligned} B_L(\Psi, \Phi) \;&:=\; \sum_{|s|\le m} (a_s D^s \Psi, \Phi)_0 \\ &\quad + \sum_{m+1\le |s|\le 2m} (-1)^{|s_2|} \sum_{\tau \le s_2} \binom{s_2}{\tau} (D^{s_2-\tau} a_s D^{s_1}\Psi, D^\tau \Phi)_0 \end{aligned}$$

mit $\Psi, \Phi \in C_0^\infty(\Omega)$. *Dann ist*

$$B_L(\Psi, \Phi) = (L\Psi, \Phi)_0 \quad \forall \Psi, \Phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

und B_L *ist eine gleichmäßige elliptische reguläre Dirichlet Bilinearform auf* Ω, *welche* m *mal stetig differenzierbar ist. Ist weiter* $k \ge 0$ *eine ganze Zahl und* $a_s \in C_*^k(\Omega)$ *für* $|s| \le m$ *und* $a_s \in C_*^{|s|+k}(\Omega)$ *für* $|s| > m$, *dann ist* B_L $(m+k)$ *mal stetig differenzierbar. Ist* $a_s \in C_*^{|s|+k}(\Omega)$ *und* B_L^* *definiert durch*

$$\begin{aligned} B_L^*(u,v) := \overline{B_L(v,u)} \;&:=\; \sum_{|s|\le m} (\overline{a}_s D^s u, v)_0 \\ &\quad + \sum_{m+1\le |s|\le 2m} (-1)^{|s_2|} \sum_{\tau \le s_2} \binom{s_2}{\tau} (D^{s_2-\tau} \overline{a}_s D^{s_1} u, D^\tau v)_0 \end{aligned}$$

dann sind B_L *und* B_L^* $(m+k)$ *mal stetig differenzierbar.*

Beweis: Der Beweis folgt durch direktes Nachrechnen. Es ist

$$(L\Psi, \Phi)_0 = \sum_{|s|\le m} (a_s D^s \Psi, \Phi)_0 + \sum_{m+1\le |s|\le 2m} (a_s D^s \Psi, \Phi)_0.$$

Mit partieller Integration und der Leibnizschen Formel (siehe Agmon [3], Seite 9) folgt für das zweite Summenzeichen,

$$\begin{aligned} \sum_{m+1\le |s|\le 2m} (a_s D^s \Psi, \Phi)_0 \;&=\; \sum_{m+1\le |s|\le 2m} \int_\Omega a_s D^s \Psi \Phi dx \\ &= \sum_{m+1\le |s|\le 2m} \int_\Omega D^{s_1+s_2} \Psi \Phi a_s dx \\ &= \sum_{m+1\le |s|\le 2m} (-1)^{|s_2|} \int_\Omega D^{s_1}\Psi D^{s_2}(\Phi a_s) dx \\ &= \sum_{m+1\le |s|\le 2m} (-1)^{|s_2|} \int_\Omega D^{s_2}(\Phi a_s) D^{s_1}\Psi dx \\ &= \sum_{m+1\le |s|\le 2m} (-1)^{|s_2|} \int_\Omega \sum_{\tau\le s_2} \binom{s_2}{\tau} D^\tau \Phi D^{s_2-\tau} a_s D^{s_1} \Psi dx \end{aligned}$$

$$= \sum_{m+1\le|s|\le 2m} (-1)^{|s_2|} \Big(\sum_{\tau\le s_2} \binom{s_2}{\tau} D^{s_2-\tau} a_s D^{s_1}\Psi, D^\tau \Phi \Big)_0$$
$$= \sum_{m+1\le|s|\le 2m} (-1)^{|s_2|} \sum_{\tau\le s_2} \binom{s_2}{\tau} (D^{s_2-\tau} a_s D^{s_1}\Psi, D^\tau \Phi)_0 .$$

Insgesamt folgt

$$B_L(\Psi,\Phi) = (L\Psi,\Phi)_0 \quad \forall \Psi,\Phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Mit den Definitionen (3.1.4) und (3.1.3) folgt der Rest der Aussage. □

Satz 3.1.6 (Gårdings verallgemeinerte Ungleichung) *Es sei $m \ge 1$ eine ganze Zahl und $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ reelle Zahlen mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Die Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei beschränkt und offen mit $\partial\Omega \in C^m$. Weiter sei $B(\Phi,\Psi)$ eine gleichmäßige elliptische reguläre Dirichlet Bilinearform der Ordung m. Dann ist $B(\Phi,\Psi)$ stetig für alle $(\Phi,\Psi) \in W_0^{m,p}(\Omega) \times W_0^{m,q}(\Omega)$ und es gibt Konstanten $C_i = C_i(n,m,p,\Omega,E) > 0$ und $K_i = K_i(n,m,p,\Omega,E,a_{\alpha\beta}) \ge 0$ $(i = 1,2)$, so dass für alle $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ gilt*

$$\sup_{\Phi\in S_q} |B(u,\Phi)| \ge C_1||u||_{m,p} - K_1||u||_{0,p} \tag{3.2}$$

oder äquivalent

$$\sup_{\Phi\in S_q} |B(u,\Phi)| \ge C_2||u||_{m,p} - K_1||u||_{L_1(\Omega)}, \tag{3.3}$$

mit $S_q := \{\Phi \in W_0^{m,q}(\Omega) : ||\Phi||_{m,q} \le 1\}$ und der Elliptizitäts-Konstanten E .

Beweis: Siehe [22], Seite 106, Theorem 6.3.
Simader benutzt die Norm $|\cdot|_{m,p}$ anstelle $||\cdot||_{m,p}$. Für $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ sind diese Normen jedoch äquivalent. □

Definition 3.1.7 *Es sei $e_i \in \mathbb{R}^n$ ein Einheitsvektor und $0 \ne h \in \mathbb{R}$. Ist $u(\cdot)$ in einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definiert und ist $(x+he_i) \in \Omega$, $x \in \Omega$, dann sei*

$$(\delta_h^i u)(x) := \frac{u(x+he_i)-u(x)}{h}.$$

Lemma 3.1.8 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen und $u \in W^{k,p}(\Omega)$ mit $k \ge 1$, $1 < p < \infty$. Dann gilt für alle $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ und jedes h mit $0 < h < dist(\overline{\Omega_1},\partial\Omega)$*

$$||\delta_h^i u||_{k-1,p,\Omega_1} \le ||u||_{k,p,\Omega}, \quad i = 1,\dots,n.$$

Beweis: Siehe [22], Seite 136. □

Lemma 3.1.9 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen und $u \in W^{k,p}(\Omega)$ mit $k \geq 0$, $1 < p < \infty$. Existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ und jedes h mit $0 < h < h_0(\Omega_1)$ es ein $i \in \{1, \dots n\}$ gibt mit $||\delta_h^i u||_{k,p,\Omega_1} \leq C$, so ist*

$$D^{e_i} u \in W^{k,p}(\Omega).$$

Beweis: Siehe [22], Seite 136. □

3.2 Formulierung des Problems

Definition 3.2.1 *Für $0 < R < \infty$ sei*

$$\begin{aligned} S_R &:= \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\} \\ H_R &:= \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R, x_n > 0\}. \end{aligned}$$

Lemma 3.2.2 *Es sei $\Omega_R \subset \mathbb{R}^n$ entweder S_R oder H_R. Angenommen*

1. *für $R > 0$ und $m \geq 1$ sei*

$$B(\Psi, \Phi) := \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} (a_{\alpha\beta} D^\alpha \Psi, D^\beta \Phi)_0 \quad \forall \Phi, \Psi \in C_0^\infty(\Omega_R)$$

   eine gleichmäßige elliptische reguläre Dirichlet Bilinearform auf Ω_R. Die Koeffizienten $a_{\alpha\beta}$ genügen für $|\beta| = m$ der gleichmäßigen Lipschitz Bedingung auf Ω_R mit der Lipschitz Konstanten L,

2. *für ein $p \in \mathbb{R}$ mit $1 < p < \infty$ gibt es ein $u \in W^{m,p}(\Omega_R)$, so dass $\xi u \in W_0^{m,p}(\Omega_R)$ für alle $\xi \in C_0^\infty(S_R)$,*

3. *es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass*

$$|B(u, \Phi)| \leq C ||\Phi||_{m-1,q,\Omega_R} \quad \forall \Phi \in W_0^{m,q}(\Omega_R) \tag{3.4}$$

   mit $1 < q < \infty$, und $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Dann ist $D^{e_i} u \in W^{m,p}(\Omega_{R_1})$ für alle $R_1 < R$ und es existiert eine Konstante $\gamma = \gamma(n, m, p, a_{\alpha\beta}, L, R, R_1) > 0$, so dass

$$||D^{e_i} u||_{m,p,\Omega_{R_1}} \leq \gamma(C + ||u||_{m,p,\Omega_R})$$

wobei entweder

$$\begin{aligned} & i = 1, \dots\dots, n, \quad &\text{für } \Omega_R = S_R \\ \text{oder} \quad & i = 1, \dots, n-1, \quad &\text{für } \Omega_R = H_R. \end{aligned}$$

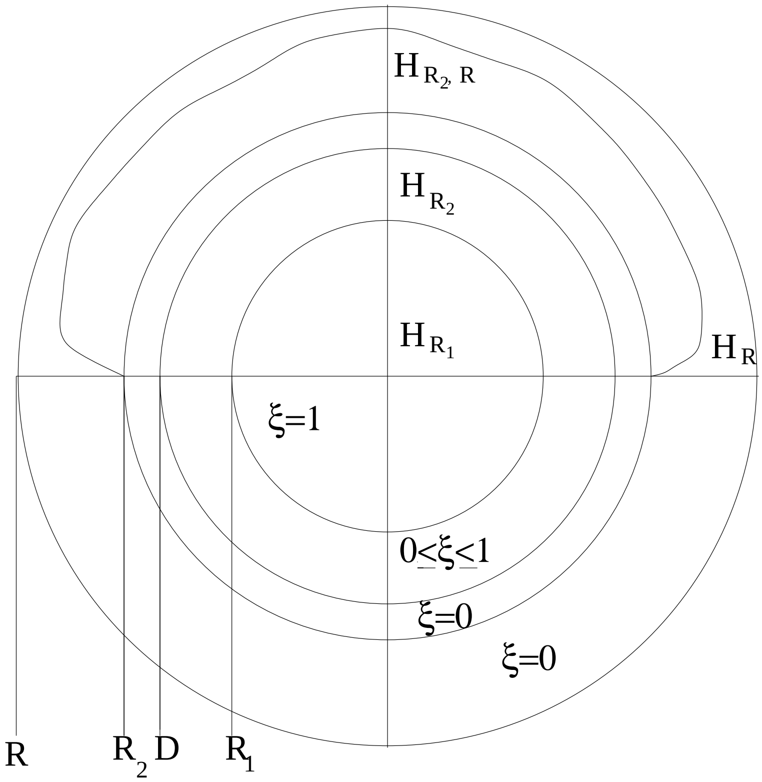

Abbildung 3.1: Darstellung der verschiedenen Gebiete für den Beweis.

Beweis: Œ sei $a_{\alpha\beta} = 0$ für $|\beta| \leq m-1$. Sonst betrachte

$$\begin{aligned} \Big| \sum_{\substack{|\alpha \leq m \\ |\beta|=m}} (a_{\alpha\beta} D^\alpha u, D^\beta \Phi)_0 \Big| &= \Big| B(u, \Phi) - \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m-1}} (a_{\alpha\beta} D^\alpha u, D^\beta \Phi)_0 \Big| \\ &\leq (C + C_1 ||u||_{m,p}) ||\Phi||_{m-1,q} \end{aligned}$$

mit $C_1 = C_1(n, m, ||a_{\alpha\beta}||_{L^\infty})$. Diese Bilinearform genügt somit den Voraussetzungen.
Es sei $0 < R_1 < R$ und $R_2 = \frac{1}{2}(R + R_1)$. Also $0 < R_1 < R_2 < R$.
Für $\Omega_R = H_R$ gibt es ein $H_{R_2,R}$ mit

$$\partial H_{R_2,R} \in C^m \text{ und } H_{R_2} \subset H_{R_2,R} \subset H_R.$$

Für diesen Fall sein $G := H_{R_2,R}$, sonst sei $G := S_{R_2}$.
Sei $\xi \in C_0^\infty(S_R)$ mit

$$\begin{aligned} 0 \leq \xi(x) \leq 1 &\qquad \text{auf } S_R \\ \xi(x) = 1 &\qquad \text{auf } S_{R_1} \\ \xi(x) = 0 &\qquad \text{außerhalb von } S_D \end{aligned}$$

mit $D := R_1 + \frac{1}{4}(R - R_1) = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$. Somit ist $\xi u \in W_0^{m,p}(G)$.
Sei nun $0 < h < \frac{1}{4}(R - R_1)$ und entweder

$$\begin{aligned} & i = 1, \ldots\ldots, n, && \text{für } \Omega_R = S_R \\ \textit{oder} \quad & i = 1, \ldots, n-1, && \text{für } \Omega_R = H_R. \end{aligned}$$

Somit ist $v_h^i := \delta_h^i(\xi u) \in W_0^{m,p}(\Omega_{R_2}) \subseteq W_0^{m,p}(G)$, siehe Definition (3.1.7). Gesucht ist eine Abschätzung für $||v_h^i||_{m,p,G}$, die unabhängig ist von h. Dazu betrachten wir $B(v_h^i, \Phi) = B(\delta_h^i(\xi u), \Phi)$ und transformieren zunächst den Operator δ_h^i und dann ξ zur anderen Seite, so dass (3.4) anwendbar ist. Alle auftretenden Terme sind mit der Hölderschen Ungleichung abschätzbar.
Mit der Leibnizschen Formel erhalten wir

$$D^\alpha(\xi u) = \sum_{\gamma \le \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D^{\alpha-\gamma}\xi D^\gamma u$$

für alle $x \in \Omega_r$ mit $r > 0$. Setze $D^{\alpha-\gamma}u(x) = 0 \quad \forall x \notin \Omega_R$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\delta_h^i D^\alpha(\xi u) &= \frac{D^\alpha(\xi u)(x+he_i) - D^\alpha(\xi u)(x)}{h} \\
&= D^\alpha \frac{\xi u(x+he_i) - \xi u(x)}{h} \\
&= D^\alpha \delta_h^i(\xi u) \\
&= D^\alpha v_h^i \quad \forall x \in \Omega_R.
\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\Big|B(v_h^i, \Phi)\Big| &= \Big| \sum_{\substack{|\alpha| \le m \\ |\beta| = m}} \Big(a_{\alpha\beta} D^\alpha v_h^i, D^\beta \Phi\Big)_{0,\Omega_R} \Big| \\
&= \Big| \sum_{\substack{|\alpha| \le m \\ |\beta| = m}} \Big(a_{\alpha\beta} \delta_h^i D^\alpha(\xi u), D^\beta \Phi\Big)_{0,\Omega_R} \Big| \\
&= \Big| \sum_{\substack{|\alpha| \le m \\ |\beta| = m}} \Big(a_{\alpha\beta} \delta_h^i \Big(\sum_{\gamma \le \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D^{\alpha-\gamma}\xi D^\gamma u\Big), D^\beta \Phi\Big)_{0,\Omega_R} \Big| \\
&\le \Big| \sum_{\substack{|\alpha| \le m \\ |\beta| = m}} \Big(a_{\alpha\beta} \delta_h^i \Big(\sum_{\gamma < \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D^{\alpha-\gamma}\xi D^\gamma u\Big), D^\beta \Phi\Big)_{0,\Omega_R} \Big| \\
&\quad + \Big| \sum_{\substack{|\alpha| \le m \\ |\beta| = m}} \Big(a_{\alpha\beta} \delta_h^i \Big(\sum_{\gamma = \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D^{\alpha-\gamma}\xi D^\gamma u\Big), D^\beta \Phi\Big)_{0,\Omega_R} \Big| \\
&\le \Big| \sum_{\substack{|\alpha| \le m \\ |\beta| = m}} \Big(a_{\alpha\beta} \delta_h^i (\xi D^\alpha u), D^\beta \Phi\Big)_{0,\Omega_R} \Big| \\
&\quad + K||u||_{m,p,\Omega_R} ||\Phi||_{m,q,\Omega_R} \quad \forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega_R). \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Mit der generischen Konstanten $K = K(n, m, p, \xi, R, R_1, L, a_{\alpha\beta})$.
Wir benötigen für den nächsten Schritt die Abschätzung

$$\Big| \sum_{\substack{|\alpha| \le m \\ |\beta| = m}} \Big(a_{\alpha\beta}(x) \frac{\xi(x+he_i) D^\alpha u(x+he_i)}{h}, D^\beta \Phi(x)\Big)_{0,\Omega_R}$$

$$\leq \Big| \sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\|\beta|=m}} \Big(a_{\alpha\beta}(x-he_i)\frac{\xi(x)D^\alpha u(x)}{h}, D^\beta\Phi(x-he_i)\Big)_{0,\Omega_R}\Big|$$

$$+K||u||_{m,p,\Omega_R}||\Phi||_{m,q,\Omega} \quad \forall\Phi\in C_0^\infty(\Omega_R) \tag{3.6}$$

die sich aus der Stetigkeit der Funktionen und des Fehlerkorrekturtermes ergibt. Wir schätzen nun den ersten Term von (3.5) ab.

$$\Big|\sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\|\beta|=m}} \Big(a_{\alpha\beta}\delta_h^i(\xi D^\alpha u), D^\beta\Phi\Big)_{0,\Omega_R}\Big|$$

$$= \Big|\sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\|\beta|=m}} \Big(a_{\alpha\beta}(x)\frac{(\xi D^\alpha u)(x+he_i)-(\xi D^\alpha u)(x)}{h}, D^\beta\Phi(x)\Big)_{0,\Omega_R}\Big|$$

$$= \Big|\sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\|\beta|=m}} \Big(a_{\alpha\beta}(x)\frac{\xi(x+he_i)D^\alpha u(x+he_i)}{h}, D^\beta\Phi(x)\Big)_{0,\Omega_R}$$

$$-\sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\|\beta|=m}} \Big(a_{\alpha\beta}(x)\frac{\xi(x)D^\alpha u(x)}{h}, D^\beta\Phi(x)\Big)_{0,\Omega_R}\Big|$$

$$\overset{(3.6)}{\leq} \Big|\sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\|\beta|=m}} \Big(a_{\alpha\beta}(x-he_i)\frac{\xi(x)D^\alpha u(x)}{h}, D^\beta\Phi(x-he_i)\Big)_{0,\Omega_R}$$

$$-\sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\|\beta|=m}} \Big(a_{\alpha\beta}(x)\frac{\xi(x)D^\alpha u(x)}{h}, D^\beta\Phi(x)\Big)_{0,\Omega_R}\Big|$$

$$+K||u||_{m,p,\Omega_R}||\Phi||_{m,q,\Omega_R}$$

$$\leq \Big|\sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\|\beta|=m}} -\Big(a_{\alpha\beta}(x)\frac{\xi(x)D^\alpha u(x)}{h}, D^\beta\Phi(x)\Big)_{0,\Omega_R}$$

$$+\sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\|\beta|=m}} -\Big(a_{\alpha\beta}(x)\xi(x)\frac{D^\alpha u(x)}{h}, -D^\beta\Phi(x-he_i)\Big)_{0,\Omega_R}$$

$$-\sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\|\beta|=m}} -\Big(a_{\alpha\beta}(x)\xi(x)\frac{D^\alpha u(x)}{h}, -D^\beta\Phi(x-he_i)\Big)_{0,\Omega_R}$$

$$+\sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\|\beta|=m}} \Big(a_{\alpha\beta}(x-he_i)\xi(x)\frac{D^\alpha u(x)}{h}, D^\beta\Phi(x-he_i)\Big)_{0,\Omega_R}\Big|$$

$$+K||u||_{m,p,\Omega_R}||\Phi||_{m,q,\Omega_R}$$

$$\leq \Big|\sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\|\beta|=m}} -\Big(a_{\alpha\beta}(x)\xi(x)D^\alpha u(x), \frac{D^\beta\Phi(x)-D^\beta\Phi(x-he_i)}{h}\Big)_{0,\Omega_R}\Big|$$

$$
\begin{aligned}
& +\Big| \sum_{\substack{|\alpha|\le m\\|\beta|=m}} \Big(\xi(x)D^\alpha u(x)D^\beta\Phi(x-he_i), \frac{a_{\alpha\beta}(x-he_i)-a_{\alpha\beta}(x)}{h}\Big)_{0,\Omega_R}\Big| \\
& +K||u||_{m,p,\Omega_R}||\Phi||_{m,q,\Omega_R} \\
\le\; & \Big| \sum_{\substack{|\alpha|\le m\\|\beta|=m}} \Big(a_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u(x), \xi(x)\delta^i_{-h}D^\beta\Phi(x\Big)_{0,\Omega_R}\Big| \\
& +K||u||_{m,p,\Omega_R}||\Phi||_{m,q,\Omega_R} \\
=\; & |B(u,\xi\delta^i_{-h}\Phi)| + K||u||_{m,p,\Omega_R}||\Phi||_{m,q,\Omega_R} \quad \forall\Phi\in C_0^\infty(\Omega_R). \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

Mit den Abschätzungen (3.5) und (3.7) folgt

$$
|B(v_h^i,\Phi)| \le |B(u,\xi\delta^i_{-h}\Phi)| + K||u||_{m,p,\Omega_R}||\Phi||_{m,q,\Omega_R} \quad \forall\Phi\in C_0^\infty(\Omega_R) \quad (3.8)
$$

mit der generischen Konstanten $K = K(n,m,p,\xi,R,R_1,L,a_{\alpha\beta}) > 0$.
Es ist $\xi\delta^i_{-h}\Phi \in C_0^\infty(\Omega_D)$ und $\Omega_D \subset\subset G$. Daher folgt aus (3.4) und Lemma (3.1.8)

$$
\begin{aligned}
|B(u,\xi\delta^i_{-h}\Phi)| &\le C||\xi\delta^i_{-h}\Phi||_{m-1,q,\Omega_D} \\
&\le C_1||\Phi||_{m,q,G} \\
&\le C_2||\Phi||_{m,q,\Omega_R} \quad \forall\Phi\in C_0^\infty(\Omega_R).
\end{aligned}
$$

Zusammen mit (3.8) folgt

$$
\begin{aligned}
|B(v_h^i,\Phi)| &\le C_2||\Phi||_{m,q,\Omega_R} + K||u||_{m,p,\Omega_R}||\Phi||_{m,q,\Omega_R} \\
&\le K(C_3+||u||_{m,p,\Omega_R})||\Phi||_{m,q,\Omega_R} \quad \forall\Phi\in C_0^\infty(\Omega_R). \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

Da $v_h^i = \delta_h^i(\xi u) \in W_0^{m,p}(G)$ und $\partial G \in C^m$ ist, liefert die verallgemeinerten Ungleichung von Gårding (3.1.6) Konstanten $M > 0$ und $N > 0$, so dass

$$
M||v_h^i||_{m,p,G} \le \sup_{\Phi\in S_q(G)} |B(v_h^i,\Phi)| + N||v_h^i||_{0,p,G}, \qquad (3.10)
$$

mit $||\Phi||_{m,q,G} \le 1 \quad \forall\Phi\in S_q(G)$.
Lemma (3.1.8) angewandt auf $v_h^i = \delta_h^i(\xi u) \in W_0^{m,p}(G)$ liefert

$$
||v_h^i||_{0,p,G} \le ||\xi u||_{1,p,\Omega_R} \le K_1||u||_{m,p,\Omega_R} \qquad (3.11)
$$

mit der Konstanten $K_1 = K_1(\xi,R_1,R,m,n) > 0$. Mit $G \subset \Omega_R$, (3.9) und (3.11) folgt aus (3.10)

$$
||v_h^i||_{m,p,G} \le \gamma(C+||u||_{m,p,\Omega_R}) \qquad (3.12)
$$

für $0 < h < \frac{1}{4}(R-R_1)$ und $\gamma = \gamma(N,M,K,K_1) > 0$. Nach Lemma (3.1.9) ist $D^{e_i}(\xi u) \in W^{m,p}(G)$. Die Abschätzung (3.12) bleibt erhalten, wenn v_h^i durch $D^{e_i}(\xi u)$ ersetzt wird. Nach Konstruktion ist $\xi \equiv 1$ auf Ω_{R_1}, somit ist $D^{e_i}u \in W^{m,p}(\Omega_{R_1})$. Damit folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 3.2.3 *Sei $u \in W^{m+1,p}(H_R)$, so dass*

$$\xi u \in W_0^{m,p}(H_R) \quad \forall \xi \in C_0^\infty(S_R),$$

mit $0 < R < \infty$, $1 < p < \infty$ und $m \geq 1$. Dann ist

$$\xi D^{e_i} u \in W_0^{m,p}(H_R) \quad \forall \xi \in C_0^\infty(S_R), i = 1, \ldots, n-1.$$

Beweis: Es sei $\tilde{H}_R \subset \mathbb{R}^n$ so konstruiert, dass $\partial \tilde{H}_R \in C^k$, mit $k \geq 1$ und *supp* $\xi \cap H_R \subset \tilde{H}_R$. Der reflexive Banach-Raum $W_0^{m,p}(\tilde{H}_R)$ ist somit schwach folgenkompakt. Der Beweis kann mit dieser Vorarbeit aus Agmon [3], Seite 118, Lemma 9.4 übernommen werden. □

Lemma 3.2.4 *Es sei*

1. *$m \geq 1$, $k \geq 1$ ganze Zahlen mit $k \leq 2m$ und $1 < p, q < \infty$ reelle Zahlen mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,*
2. *$0 < R < \infty$ und $L := \sum_{|s| \leq 2m} a_s(\cdot) D^s$ sei gleichmäßig elliptisch auf S_R mit den Koeffizienten $a_s \in C^{|s|+k-2m}(S_R)$ für $|s| + k - 2m > 0$, so dass $D^\gamma a_s \in L^\infty(S_R)$ für alle $|\gamma| \leq |s| + k - 2m$, und $a_s \in L^\infty(S_R)$ für $|s| + k - 2m \leq 0$,*
3. *$u \in L^p(S_R)$ und es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $\Phi \in C_0^\infty(S_R)$*
$$|(u, L\Phi)_0| \leq C ||\Phi||_{2m-k,q,S_R}.$$

Dann gilt für jedes $R_1 < R$, $u \in W^{k,p}(S_{R_1})$ und es gibt eine Konstante $\gamma = \gamma(m, n, k, p, L, R, R_1) > 0$, so dass

$$||u||_{k,p,S_{R_1}} \leq \gamma(C + ||u||_{0,p,S_R}). \tag{3.13}$$

Beweis: Siehe [22], Seite 143, Theorem 9.5. □

Definition 3.2.5 *Seien $m \geq k \geq 1$ ganze Zahlen. Weiter sei $C_{0,k}^m(H_R)$ die Menge aller Funktionen $\varphi \in C^m(\overline{H}_R)$ mit den Eigenschaften*

1. *es existiert eine reelle Zahl $\delta > 0$ abhängig von φ, so dass $\varphi(x) = 0$ für $R - \delta \leq |x| \leq R$, $x_n \geq 0$ und*
2. *$D^\alpha \varphi(x) = 0$ für $|x| \leq R$, $x_n = 0$ und für alle α mit $|\alpha| \leq k - 1$.*

Lemma 3.2.6 *Angenommen*

1. *es seien $m \geq k \geq 1$ ganze Zahlen und $1 < p, q < \infty$ reelle Zahlen mit $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$,*

2. *es ist $0 < R < \infty$ und $u \in L^p(H_R)$ mit der schwachen Ableitung $D^{ke_i}u \in L^p(H_R) \quad \forall i = 1, \ldots, n-1$ und*

3. *es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass*

$$|(u, D^{me_n}\Phi)_0| \leq C||\Phi||_{m-k,q,H_R} \quad \forall \Phi \in C_0^\infty(H_R). \tag{3.14}$$

Dann gibt es für jedes $R_1 < R$, $u \in W^{k,p}(H_{R_1})$ und es gibt eine Konstante $\gamma = \gamma(n, m, k, p, R, R_1) > 0$, so dass

$$||u||_{k,p,H_{R_1}} \leq \gamma(C + \sum_{i=1}^{n-1} ||D^{ke_i}u||_{0,p,H_R} + ||u||_{0,p,H_R}).$$

Beweis: Es sei $\tilde{u}$ eine Erweiterung von u auf S_R mit

$$u \in C^{2m-1}(\overline{H}_R) \Longrightarrow \tilde{u} \in C^{2m-1}(\overline{S}_R).$$

Für $x = (x', x_n)$ sei

$$\tilde{u}(x', x_n) := \begin{cases} u(x', x_n) & |x| < R, x_n \geq 0 \\ \sum\limits_{j=1}^{2m+1} \lambda_j u(x', -j^{-1}x_n) & |x| < R, x_n < 0, \end{cases} \tag{3.15}$$

wobei $\lambda_j \in \mathbb{R}$ Konstanten sind die der Gleichung

$$\sum_{j=1}^{2m+1} \lambda_j(-j)^{-s} = 1 \qquad s = -1, 0, 1, \ldots, 2m-1 \tag{3.16}$$

genügen. Die Determinante dieses Systems von $2m+1$ Gleichungen ist eine Vandermond Determinante für die Einträge $-j^{-1}$, $j = 1, \ldots, 2m+1$. Damit ist das System (3.16) eindeutig lösbar mit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2m+1}) \in \mathbb{R}^{2m+1}$. Weiter ist $\tilde{u} \in L^p(S_R)$ und $\tilde{u}$ ist schwach differenzierbar mit $D^{ke_i}\tilde{u} \in L^p(S_R)$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und

$$(D^{ke_i}\tilde{u})(x) = \begin{cases} D^{ke_i}u(x) & |x| < R, x_n \geq 0 \\ \sum\limits_{j=1}^{2m+1} \lambda_j (D^{ke_i}u)(x', -j^{-1}x_n) & |x| < R, x_n < 0. \end{cases} \tag{3.17}$$

Es gibt eine Konstante $K = K(n, m) > 0$, so dass

$$||D^{se_i}\tilde{u}||_{0,p,S_R} \leq K||D^{se_i}u||_{0,p,H_R}, \tag{3.18}$$

mit $s = 0$, $s = k$ oder $i = 1, \ldots, n-1$.
Sei $\Psi \in C_0^\infty(S_R)$ und für $x \in \overline{H}_R$ sei

$$\Psi^*(x) := \Psi(x', x_n) - \sum_{j=1}^{2m+1} \lambda_j (-j)^{1-2m} \Psi(x', -jx_n). \tag{3.19}$$

Mit (3.16) folgt

$$D^{se_n}\Psi^*(x)|_{x_n=0} = 0 \text{ für } s = 0, \ldots, 2m. \tag{3.20}$$

Es folgt $\Psi^* \in C_{0,2m}^{2m}(H_R) \subset C_{0,m}^m(H_R)$. Wir zeigen nun

$$(\tilde{u}, D^{2me_n}\Psi)_{0,S_R} = (u, D^{2me_n}\Psi^*)_{0,H_R}. \tag{3.21}$$

Mit (3.15) folgt

$$\begin{aligned}
(\tilde{u}, D^{2me_n}\Psi)_{0,S_R} &= \int\limits_{x_n>0} \tilde{u} D^{2me_n}\Psi dx + \int\limits_{x_n<0} \tilde{u} D^{2me_n}\Psi dx \\
&= \int\limits_{x_n>0} u D^{2me_n}\Psi dx \\
&\quad + \sum_{j=1}^{2m+1} \lambda_j \int\limits_{x_n<0} u(x', -j^{-1}x_n) D^{2me_n}\Psi dx.
\end{aligned}$$

Wir substituieren $y_n := -j^{-1}x_n$ und erhalten nach Umbenennung $x_n := y_n$,

$$\begin{aligned}
(\tilde{u}, D^{2me_n}\Psi)_{0,S_R} &= \int\limits_{x_n>0} u D^{2me_n}\Psi dx \\
&\quad - \sum_{j=1}^{2m+1} \lambda_j (-j)^{1-2m} \int\limits_{x_n>0} u D^{2me_n}\Psi(x', -jx_n) dx \\
&= (u, D^{2me_n}\Psi^*)_{0,H_R},
\end{aligned}$$

damit ist Gleichung (3.21) gezeigt. Mit (3.14) und (3.21) folgt

$$\begin{aligned}
|(\tilde{u}, D^{2me_n}\Psi)_{0,S_R}| &= |(u, D^{2me_n}\Psi^*)_{0,H_R}| \\
&\leq C||\Psi^*||_{m-k,q,H_R} \\
&\leq C\tilde{K}||\Psi||_{m-k,q,S_R} \quad \forall \Psi \in C_0^\infty(S_R),
\end{aligned} \tag{3.22}$$

mit der Konstanten $\tilde{K}$. Für $1 \leq i \leq n-1$ folgt aus (3.18)

$$\begin{aligned}
|(\tilde{u}, D^{2me_i}\Psi)_{0,S_R}| &= |(D^{ke_i}\tilde{u}, D^{(2m-k)e_i}\Psi)_{0,S_R}| \\
&\leq K||D^{ke_i}u||_{0,p,H_R}||\Psi||_{2m-k,q,S_R}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

für alle $\Psi \in C_0^\infty(S_R)$. Betrachte den Operator

$$A := (-1)^m \sum_{i=1}^{n} D^{2me_i},$$

so dass es für alle $l \in \mathbb{R}^n$ eine Konstante $E = E(n,m) > 0$ gibt mit

$$(-1)^m A(l) = \sum_{i=1}^{n} |l_i|^{2m} \geq E|l|^{2m}.$$

Aus (3.22) und (3.23) folgt zusammen mit $m \geq k \geq 1$

$$\begin{aligned} \left|(\tilde{u}, A\Psi)_{0,S_R}\right| &\leq C\tilde{K}||\Psi||_{m-k,q,S_R} + \sum_{i=1}^{n-1} K||D^{ke_i}u||_{0,p,H_R}||\Psi||_{2m-k,q,S_R} \\ &\leq K\Big(C_1 + \sum_{i=1}^{n-1} ||D^{ke_i}u||_{0,p,H_R}\Big)\,||\Psi||_{2m-k,q,S_R} \qquad (3.24) \end{aligned}$$

für alle $\Psi \in C_0^\infty(S_R)$. Mit Lemma (3.2.4) folgt $\tilde{u} \in W^{k,p}(S_{R_1})$ und

$$||\tilde{u}||_{k,p,S_{R_1}} \leq \gamma(\tilde{C} + ||\tilde{u}||_{0,p,S_R}). \qquad (3.25)$$

Zusammen mit (3.24) und (3.18) folgt

$$\begin{aligned} ||\tilde{u}||_{k,p,S_{R_1}} &\leq \gamma_1\Big(K\Big(C_1 + \sum_{i=1}^{n-1} ||D^{ke_i}u||_{0,p,H_R}\Big) + ||\tilde{u}||_{0,p,S_R}\Big) \\ &\leq \gamma_1 K_1\Big(C_1 + \sum_{i=1}^{n-1} ||D^{ke_i}u||_{0,p,H_R} + ||u||_{0,p,H_R}\Big). \qquad (3.26) \end{aligned}$$

Es ist $\tilde{u}|_{H_{R_1}} = u|_{H_{R_1}}$. Aus $\tilde{u} \in W^{k,p}(S_{R_1})$ folgt $u \in W^{k,p}(H_{R_1})$.
Die Abschätzung

$$||u||_{k,p,H_{R_1}} \leq ||\tilde{u}||_{k,p,S_{R_1}}$$

zusammen mit (3.26) liefert die Behauptung.
□

Lemma 3.2.7 *Es sei Ω_R entweder S_R oder H_R und weiter*

1. *$m \geq 1$,$k \geq 0$ ganze Zahlen mit $k \leq m$ und $1 < p,q < \infty$ reelle Zahlen mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,*
2. *für ein $0 < R < \infty$ sei B eine gleichmäßig elliptische, k mal stetig differenzierbare reguläre Dirichlet Bilinearform vom Grad m auf Ω_R,*
3. *mit $u \in W^{m,p}(\Omega_R)$ sei $\xi u \in W_0^{m,p}(\Omega_R)$ für jedes $\xi \in C_0^\infty(S_R)$,*

4. *es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass*

$$|B(u,\Phi)| \leq C||\Phi||_{m-k,q,\Omega_R} \quad \forall \Phi \in W_0^{m,q}(\Omega_R).$$

Dann gilt für jedes $R_1 < R$, $u \in W^{m+k}(\Omega_{R_1})$ und es gibt eine Konstante $\gamma = \gamma(m,n,p,k,a_{\alpha\beta},E,R,R_1) > 0$, so dass

$$||u||_{m+k,p,\Omega_{R_1}} \leq \gamma\Big(C + ||u||_{m,p,\Omega_R}\Big). \tag{3.27}$$

Beweis: Wir betrachten zuerst den Fall $\mathbf{\Omega_R = S_R}$.
Œ sei $a_{\alpha\beta}(\cdot) = 0$ für $|\beta| + k - m \leq 0$. Sonst betrachte

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\ m-k<|\beta|\leq m}} (a_{\alpha,\beta}D^\alpha u, D^\beta\Phi)_0\Big| &= \Big|B(u,\Phi) - \sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\ |\beta|\leq m-k}} (a_{\alpha,\beta}D^\alpha u, D^\beta\Phi)_0\Big|\\ &\leq (C + C_1||u||_{m,p,\Omega_R})||\Phi||_{m-k,p,\Omega_R}\end{aligned}$$

mit $C_1 = C_1(n,m,k,||a_{\alpha\beta}||_{L^\infty})$. Diese Bilinearform genügt somit den Voraussetzungen.
Beweis durch vollständige Induktion nach k. Der Induktionsanfang mit $k = 0$ ist trivial.
Sei nun $1 \leq k \leq m$ und das Lemma für $k-1$ bewiesen. Wir zeigen nun den Induktionsschritt. Sei dazu $0 < R_1 < R$ und $R_2 := \frac{1}{2}(R_1 + R)$ und $R_3 := \frac{1}{2}(R_2 + R)$. Es folgt

$$0 < R_1 < R_2 < R_3 < R.$$

Mit Annahme (4) folgt die Abschätzung

$$|B(u,\Phi)| \leq C||\Phi||_{m-k,q,S_R} \leq C||\Phi||_{m-(k-1),q,S_R}$$

und mit dem Induktionsanfang folgt $u \in W^{m+k-1,p}(S_{R_3})$. Ist $k = 1$, dann folgt mit Lemma (3.2.2)

$$||D^{e_i}u||_{m,p,S_{R_1}} \leq \tilde{\gamma}(\tilde{C} + ||u||_{m,p,S_R}),$$

daher folgt Ungleichung (3.27).
Sei nun $k > 1$. Nach der Induktionsvoraussetzung ist

$$u \in W^{m+k-1,p}(S_{R_3}) \subset W^{m+1,p}(S_{R_3}). \tag{3.28}$$

Deshalb gilt für die partielle Ableitung nach den Einheitsvektoren e_i

$$D^{e_i}u \in W^{m,p}(S_{R_3}) \quad \forall i = 1,\ldots,n \tag{3.29}$$

und weiter mit der Induktionsvoraussetzung

$$||u||_{m+k-1,p,S_{R_3}} \leq \gamma(C + ||u||_{m,p,S_R}). \tag{3.30}$$

Sei nun $\Phi \in C_0^\infty(\Omega_{R_3})$. Nach Annahme (2) und mit $a_{\alpha\beta} = 0$ für $|\beta|+k-m \leq 0$, folgt mit der partiellen Integration

$$\begin{aligned}
B(D^{e_i}u, \Phi) &= \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ m-k<|\beta|\leq m}} (a_{\alpha\beta} D^{e_i} D^\alpha u, D^\beta \Phi)_{0,S_{R_3}} \\
&= \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ m-k<|\beta|\leq m}} (D^{e_i}(a_{\alpha\beta} D^\alpha u), D^\beta \Phi)_{0,S_{R_3}} \\
&\quad - \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ m-k<|\beta|\leq m}} (D^{e_i} a_{\alpha\beta} D^\alpha u, D^\beta \Phi)_{0,S_{R_3}} \\
&= - \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ m-k<|\beta|\leq m}} (a_{\alpha\beta} D^\alpha u, D^{e_i} D^\beta \Phi)_{0,S_{R_3}} \\
&\quad - \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ m-k<|\beta|\leq m}} (D^{e_i} a_{\alpha\beta} D^\alpha u, D^\beta \Phi)_{0,S_{R_3}} \\
&= -B(u, D^{e_i}\Phi) \\
&\quad - \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ m-k<|\beta|\leq m}} (D^{e_i} a_{\alpha\beta} D^\alpha u, D^\beta \Phi)_{0,S_{R_3}} \quad \forall i = 1, \ldots, n. \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Betrachte nun die Terme $(D^{e_i} a_{\alpha\beta} D^\alpha u, D^\beta \Phi)_{0,S_{R_3}}$ aus Gleichung (3.31). Die Bilinearform B ist nach Voraussetzung k mal stetig differenzierbar. Mit Definition (3.1.4) folgt $a_{\alpha\beta} \in C_*^{|\beta|+k-m}$. Daher ist $D^{e_i} a_{\alpha\beta} \in C_*^{|\beta|+k-m-1}$ beschränkt für alle $i = 1, \ldots, n$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $u \in W^{m+k-1,p}(S_{R_3})$. Mit $|\alpha| \leq m$,$|\beta| \leq m$ folgt

$$|\alpha| + |\beta| - m + k - 1 \leq m + k - 1.$$

Wir können nun $|\beta| - m + k - 1$ mal partiell integrieren und transformieren somit $|\beta| - m + k - 1$ Ableitungen von Φ auf die linke Seite von $(\cdot,\cdot)_{0,S_{R_3}}$. Mit der Hölderschen Ungleichung für Integrale erhalten wir folgende Abschätzung

$$\begin{aligned}
|(D^{e_i} a_{\alpha\beta} D^\alpha u, D^\beta \Phi)_{0,S_{R_3}}| &\leq \int_{S_{R_3}} |D^{e_i} a_{\alpha\beta} D^\alpha u D^\beta \Phi| dx \\
&\leq K||u||_{m+k-1,p,S_{R_3}} \, ||\Phi||_{m-k+1,q,S_{R_3}} \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

für alle $\Phi \in C_0^\infty(S_{R_3})$, $i = 1, \ldots, n$ und der generischen Konstante $K = K(a_{\alpha\beta}, n, m, k)$. Aus Gleichung (3.31) folgt mit (3.32) und Annahme (4)

$$\begin{aligned}
|B(D^{e_i}u, \Phi)| &\leq |B(u, D^{e_i}\Phi)| + K||u||_{m+k-1,p,S_{R_3}} \, ||\Phi||_{m-k+1,q,S_{R_3}} \\
&\leq C||\Phi||_{m-k+1,q,S_{R_3}} + K||u||_{m+k-1,p,S_{R_3}} \, ||\Phi||_{m-k+1,q,S_{R_3}} \\
&\leq (C + K||u||_{m+k-1,p,S_{R_3}}) \, ||\Phi||_{m-k+1,q,S_{R_3}} \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

für alle $\Phi \in C_0^\infty(S_{R_3})$ und $i = 1, \ldots, n$. Mit (3.33) ist Annahme (4) für (3.29) erfüllt. Für dieses $D^{e_i}u \in W^{m,p}(S_{R_3}) \quad \forall i = 1, \ldots, n$ gilt nun auch die Induktionsvoraussetzung, daher ist

$$D^{e_i}u \in W^{m+k-1,p}(S_{R_2}) \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

und somit
$$u \in W^{m+k}(S_{R_2}).$$
Um die Abschätzung (3.27) zu zeigen, kombinieren wir die Induktionsvoraussetzung für $D^{e_i}u \in W^{m,p}(S_{R_3}) \quad \forall i = 1,\dots,n$ mit der Abschätzung (3.33)

$$\begin{aligned}||D^{e_i}u||_{m+k-1,p,S_{R_2}} &\leq \gamma(C + K||u||_{m+k-1,p,S_{R_3}} + ||D^{e_i}u||_{m,p,S_{R_3}})\\ &\leq \gamma(C + K||u||_{m+k-1,p,S_{R_3}} + ||u||_{m+1,p,S_{R_3}})\\ &\leq \gamma(C + ||u||_{m,p,S_R}) \quad \forall i = 1,\dots,n.\end{aligned}$$

Mit $R_1 < R_2 < R$ folgt die erste Behauptung
$$||u||_{m+k,p,S_{R_1}} \leq \gamma(C + ||u||_{m,p,S_R}).$$

Sei nun $\mathbf{\Omega_R = H_R}$.
Wir können wieder Œ $a_{\alpha\beta}(\cdot) = 0$ für $|\beta| + k - m \leq 0$ annehmen. Der Induktionsanfang für $k = 0$ ist trivial. Sei nun $1 \leq k \leq m$ und das Lemma für $k - 1$ bewiesen.
Der Induktionsschritt verläuft ähnlich wie im ersten Teil des Beweises.
Sei $k = 1$, mit Lemma (3.2.2) folgt $D^{e_i}u \in W^{m,p}(H_{R_2}) = W^{m+k-1,p}(H_{R_2})$.
Ist $k > 1$, dann folgt mit der Induktionsvoraussetzung $u \in W^{m+1,p}(H_{R_3})$.
Mit Lemma (3.2.3) und Annahme (3) folgt
$$\xi D^{e_i}u \in W_0^{m,p}(H_{R_3}) \quad \forall i = 1,\dots,n-1 \quad \forall \xi \in C_0^\infty(S_{R_3}).$$

Damit erfüllt $D^{e_i}u \in W^{m,p}(H_{R_3})$ auch die Annahme (3) für alle $\xi \in C_0^\infty(S_{R_3})$.
Daher gilt die Abschätzung (3.33) auch für $\Phi \in C_0^\infty(H_{R_3})$,$D^{e_i}u \in W^{m,p}(H_{R_3})$ mit $i = 1,\dots,n-1$. Die Induktionsvoraussetzung liefert $D^{e_i}u \in W^{m+k-1,p}(H_{R_2})$ für $i = 1,\dots,n-1$. Wie im Fall $\Omega_R = S_R$, liefert die Induktionsvoraussetzung die generische Konstante γ und die Abschätzung

$$\begin{aligned}||D^{e_i}u||_{m+k-1,p,H_{R_2}} &\leq \gamma(C + ||u||_{m+k-1,p,H_{R_3}}) && (3.34)\\ &\leq \gamma(C + ||u||_{m,p,H_R}) \quad \forall i = 1,\dots,n-1. && (3.35)\end{aligned}$$

Mit $R_1 < R_2$ gibt es Konstanten, so dass
$$||D^{e_i}u||_{m+k-1,p,H_{R_1}} \leq \gamma\Big(C + ||u||_{m,p,H_R}\Big) \quad \forall i = 1,\dots,n-1. \qquad (3.36)$$

Es bleibt noch $D^{e_n}u \in W^{m+k-1,p}(H_{R_1})$ zu zeigen. Mit Annahme (2) und $a_{\alpha\beta}(\cdot) = 0$ für $|\beta| + k - m \leq 0$ folgt

$$\begin{aligned}B(u,\Phi) &= \sum_{|\alpha|\leq m} (a_{\alpha m e_n} D^\alpha u, D^{m e_n}\Phi)_{0,H_{R_2}}\\ &+ \sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\ m-k<|\beta|\leq m\\ \beta\neq m e_n}} (a_{\alpha\beta} D^\alpha u, D^\beta \Phi)_{0,H_{R_2}} \quad \forall \Phi \in C_0^\infty(H_{R_2}). \qquad (3.37)\end{aligned}$$

Da $|\beta| > 0$ ist, gibt es ein $i = i(\beta)$ mit $1 \leq i \leq n$, so dass $\beta_i \neq 0$ und $D^\beta \Phi = D^{e_i} D^{\beta - e_i} \Phi$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $u \in W^{m+1,p}(H_{R_2})$. Mit der partiellen Integration erhalten wie für jeden Term der zweiten Summe aus Gleichung (3.37)

$$\begin{aligned}(a_{\alpha\beta} D^\alpha u, D^\beta \Phi)_{0,H_{R_2}} &= -(D^{e_i}(a_{\alpha\beta} D^\alpha u), D^{\beta-e_i}\Phi)_{0,H_{R_2}} \\ &= -(D^{e_i} a_{\alpha\beta} D^\alpha u, D^{\beta-e_i}\Phi)_{0,H_{R_2}} \\ &\quad -(a_{\alpha\beta} D^\alpha D^{e_i} u, D^{\beta-e_i}\Phi)_{0,H_{R_2}}. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Wie im ersten Teil des Beweises können wir $|\beta| - m + k - 1$ mal partiell integrieren und transformieren somit $|\beta| - m + k - 1$ Ableitungen von $D^{\beta-e_i}\Phi$ auf die linke Seite von $(\cdot,\cdot)_{0,H_{R_2}}$. Für den Fall $|\beta| \leq m-1$ ist dies möglich, denn es ist

$$|\alpha + e_i| + |\beta| - m + k - 1 \leq m + k - 1$$

und nach Induktionsvoraussetzung ist $u \in W^{m+k-1}(H_{R_2})$. Die Bilinearform B ist nach Voraussetzung k mal stetig differenzierbar. Mit (3.38) folgt die Abschätzung

$$|(a_{\alpha\beta} D^\alpha u, D^\beta \Phi)_{0,H_{R_2}}| \leq K||u||_{m+k-1,p,H_{R_2}} ||\Phi||_{m-k,q,H_{R_2}}, \tag{3.39}$$

mit der generischen Konstanten $K = K(a_{\alpha\beta}, n, m, k) > 0$.
Für den Fall $|\beta| = m \geq 1$ folgt aus $\beta \neq me_n$ dann $i(\beta) \neq n$. Aus Gleichung (3.38) folgt somit

$$\begin{aligned}|(a_{\alpha\beta} D^\alpha u, D^\beta \Phi)_{0,H_{R_2}}| \leq\ & K\Big(||u||_{m+k-1,p,H_{R_2}} ||\Phi||_{m-k,q,H_{R_2}} \\ & + ||D^{e_i} u||_{m+k-1,p,H_{R_2}} ||\Phi||_{m-k,q,H_{R_2}}\Big). \end{aligned} \tag{3.40}$$

Mit den Abschätzungen (3.34), (3.39) und (3.40) folgt

$$\Bigg| \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ m-k < |\beta| \leq m \\ \beta \neq me_n}} (a_{\alpha\beta} D^\alpha u, D^\beta \Phi)_{0,H_{R_2}} \Bigg| \leq \gamma(C + ||u||_{m+k-1,p,H_{R_3}}) ||\Phi||_{m-k,q,H_{R_2}}. \tag{3.41}$$

Mit Gleichung (3.37) folgt

$$\begin{aligned} &\Bigg| \sum_{|\alpha| \leq m} (a_{\alpha,me_n} D^\alpha u, D^{me_n} \Phi)_{0,H_{R_2}} \Bigg| \\ &\leq \Bigg| \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ m-k < |\beta| \leq m \\ \beta \neq me_n}} (a_{\alpha\beta} D^\alpha u, D^\beta \Phi)_{0,H_{R_2}} \Bigg| + \Big| B(u,\Phi) \Big|. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Daher folgt mit Abschätzung (3.41) und Annahme (4)

$$\begin{aligned} &\Bigg| \sum_{|\alpha| \leq m} (a_{\alpha,me_n} D^\alpha u, D^{me_n} \Phi)_{0,H_{R_2}} \Bigg| \\ &\leq \gamma(C + ||u||_{m+k-1,p,H_{R_3}}) ||\Phi||_{m-k,q,H_{R_2}} + C||\Phi||_{m-k,q,H_{R_2}} \\ &\leq \gamma(C + ||u||_{m+k-1,p,H_{R_3}}) ||\Phi||_{m-k,q,H_{R_2}} \end{aligned} \tag{3.43}$$

für alle $\Phi \in C_0^\infty(H_{R_2})$. Sei nun

$$v := \sum_{|\alpha|\leq m} a_{\alpha,me_n} D^\alpha u. \tag{3.44}$$

Somit ist $v \in L^p(H_{R_2})$. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt

$$||u||_{m+k-1,p,H_{R_3}} \leq \gamma(C + ||u||_{m,p,H_R}). \tag{3.45}$$

Abschätzung (3.43) und (3.44) zusammen mit (3.45) ergibt

$$|(v, D^{me_n}\Phi)_{0,H_{R_2}}| \leq \gamma(C + ||u||_{m,p,H_R})||\Phi||_{m-k,q,H_{R_2}} \ \forall \Phi \in C_0^\infty(H_{R_2}). \tag{3.46}$$

Für $i = 1, \ldots, n-1$ gilt

$$D^{e_i}u \in W^{m+k-1,p}(H_{R_2}) \Rightarrow D^{ke_i}v \in L^p(H_{R_2}).$$

Die Voraussetzungen für das Lemma (3.2.6) sind für das Gebiet H_{R_2} und für die Funktion v aus (3.44) erfüllt. Somit ist $v \in W^{k,p}(H_{R_1})$; mit Lemma (3.2.6) und Abschätzung (3.46) folgt

$$\begin{aligned} ||v||_{k,p,H_{R_1}} \quad \leq \quad & \gamma\Big(\gamma(C + ||u||_{m,p,H_R}) \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} ||D^{ke_i}v||_{0,p,H_{R_2}} + ||v||_{0,p,H_{R_2}}\Big) \end{aligned} \tag{3.47}$$

für $i = 1, \ldots, n-1$. Mit (3.44) und (3.35) folgt

$$\begin{aligned} ||D^{ke_i}v||_{0,p,H_{R_2}} \quad & \leq \quad \Big|\Big|\sum_{|\alpha|\leq m} D^{ke_i}(a_{\alpha,me_n}D^\alpha u)\Big|\Big|_{0,p,H_{R_2}} \\ & \leq \quad K||D^{e_i}u||_{m+k-1,p,H_{R_2}} \\ & \leq \quad \gamma(C + ||u||_{m,p,H_R}) \quad \forall i = 1, \ldots, n-1, \end{aligned} \tag{3.48}$$

und weiter

$$\begin{aligned} ||v||_{0,p,H_{R_2}} \quad & \leq \quad \Big|\Big|\sum_{|\alpha|\leq m} a_{\alpha,me_n}D^\alpha u\Big|\Big|_{0,p,H_{R_2}} \\ & \leq \quad K||u||_{m,p,H_R} \end{aligned} \tag{3.49}$$

Abschätzung (3.47) zusammen mit (3.48) und (3.49) ergibt

$$||v||_{k,p,H_{R_1}} \leq \gamma(C + ||u||_{m,p,H_R}). \tag{3.50}$$

Die Bilinearform B ist gleichmäßig elliptisch. Nach Definition existiert somit eine Konstante $E > 0$, so dass

$$\Big|\sum_{|s|=2m} a_s(x)l^s\Big| \geq E|l|^{2m}$$

für alle $x \in H_R$ und $l \in \mathbb{R}^n$. Mit $l = (0, \ldots, 0, 1)$ folgt

$$|a_{me_n,me_n}(x)| \geq E > 0 \quad \forall x \in H_R.$$

Mit der Definition von v folgt somit

$$D^{me_n}u = (a_{me_n,me_n})^{-1}(v - \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ \alpha\neq me_n}} a_{\alpha,me_n}D^\alpha u) \tag{3.51}$$

Mit $\alpha \neq me_n$ gibt es ein $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, so dass $D^\alpha u = D^{\alpha-e_i}D^{e_i}u$. Aus (3.35) folgt $D^{\alpha-e_i}D^{e_i}u \in W^{k,p}(H_{R_1}) \quad \forall i = 1, \ldots, n-1$. Zusammen mit (3.50) ist die rechte Seite von (3.51) ein Element aus dem Raum $W^{k,p}(H_{R_1})$. Daher folgt mit (3.35) und (3.50) aus (3.51)

$$||D^{me_n}u||_{k,p,H_{R_1}} \leq \gamma(C + ||u||_{m,p,H_R}).$$

Zusammen mit (3.36) folgt

$$||D^{e_i}u||_{m+k-1,p,H_{R_1}} \leq \gamma(C + ||u||_{m,p,H_R}) \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Damit folgt die Behauptung. □

Satz 3.2.8 *Es seien*

1. $m \geq 1$ *und* $k \geq 0$ *ganze Zahlen und* $1 < p, q < \infty$ *reelle Zahlen mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,
2. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *eine beschränkte offene Menge mit* $\partial\Omega \in C^{2m+k}$,
3. $f \in W^{k,p}(\Omega)$,
4. $L = \sum_{|s|\leq 2m} a_s(.)D^s$ *gleichmäßig elliptisch auf* Ω *mit den Koeffizienten* $a_s \in C^k_*(\Omega)$ *für* $|s| \leq m$ *und* $a_s \in C^{|s|+k}_*(\Omega)$ *für* $|s| > m$,
5. $u \in W^{m,p}_0(\Omega)$ *und* $B_L(u, \Phi) = (f, \Phi)_0 \quad \forall\Phi \in C^\infty_0(\Omega)$, B_L *sei wie im Lemma* (3.1.5) *definiert.*

Dann ist $u \in W^{m,p}_0(\Omega) \cap W^{2m+k,p}(\Omega)$ *und* $Lu = f$. *Desweitern existiert eine Konstante* $\gamma = \gamma(n, m, k, p, \Omega, L) > 0$, *so dass*

$$||u||_{2m+k,p,\Omega} \leq \gamma(||f||_{k,p,\Omega} + ||u||_{0,p,\Omega}). \tag{3.52}$$

Beweis: Mit Lemma (3.1.5) folgt sofort die Behauptung $Lu = f$.
Für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ existiert eine offene Umgebung $U(x_0)$ und eine $2m + k$ mal stetig differenzierbare Abbildung

$$T : U(x_0) \cap \overline{\Omega} \to \overline{H}_R$$

mit $\overline{H}_R := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R, x_n > 0\}}$ für ein $R > 0$. Die Bilinearform B_L ist mit Lemma (3.1.5) $(m+k)$ mal stetig differenzierbar. Sie wird durch T ebenfalls in eine gleichmäßige elliptische Bilinearform transformiert.Dabei bleibt sie $(m+k)$ mal stetig differenzierbar. Alle Voraussetzungen aus Satz (3.2.8) bleiben erhalten. Mit Lemma (3.2.7) ist die transformierte Funktion $u \in W^{2m+k,p}(H_{R/2})$. Sei $U^*(x_0) := \overline{\Omega} \cap T^{-1}(S_{R/2})$. Mit Lemma (3.2.7) folgt

$$\begin{aligned} ||u||_{2m+k,p,U^*(x_0)} &\leq \gamma(x_0)\Big(||f||_{k,p,U(x_0)} + ||u||_{m,p,U(x_0)}\Big) \\ &\leq \gamma(x_0)\Big(||f||_{k,p,\Omega} + ||u||_{m,p,\Omega}\Big). \end{aligned} \tag{3.53}$$

Da $\partial\Omega$ kompakt ist, gibt es $x_j \in \partial\Omega$, $j = 1, \ldots N$ mit $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^N U^*(x_i)$. Somit ist auch

$$\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^{N} U^*(x_i) \tag{3.54}$$

kompakt und in Ω enthalten. Daher gibt es eine endliche Zahl offener Kugeln K_j, $j = 1, \ldots, M$ welche die Menge (3.54) überdecken. Jede Kugel K_j hat die Eigenschaft, dass eine Kugel Q_j mit demselben Mittelpunkt und doppeltem Radius von K_j in Ω enthalten ist. Es ist $u \in W^{m,p}(Q_j)$ für alle $j = 1, \ldots, M$. Wie bei der Herleitung der Abschätzung (3.53) gibt es für jedes Q_j eine stetig differenzierbare Abbildung

$$T_j : Q_j \to S_R.$$

Wie im ersten Teil des Beweises folgt mit Lemma (3.2.7) für die transformierte Funktion $u \in W^{2m+k,p}(S_{R/2})$. Sei $U^*(K_j) := \overline{\Omega} \cap T^{-1}(S_{R/2})$. Mit Lemma (3.2.7) folgt

$$\begin{aligned} ||u||_{2m+k,p,U^*(K_j)} &\leq \gamma(K_j)\Big(||f||_{k,p,Q_j} + ||u||_{m,p,Q_j}\Big) \\ &\leq \gamma(K_j)\Big(||f||_{k,p,\Omega} + ||u||_{m,p,\Omega}\Big) \ \forall j = 1, \ldots, M. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Mit (3.53) und (3.55) folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} ||u||_{2m+k,p,\Omega} &\leq \sum_{i=1}^{N} ||u||_{2m+k,p,U^*(x_i)} + \sum_{j=1}^{M} ||u||_{2m+k,p,U^*(K_j)} \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \gamma(x_i)(||f||_{k,p,\Omega} + ||u||_{m,p,\Omega}) \\ &+ \sum_{j=1}^{M} \gamma(K_j)(||f||_{k,p,\Omega} + ||u||_{m,p,\Omega}) \\ &\leq N \max_i\{\gamma(x_i)\} \ (||f||_{k,p,\Omega} + ||u||_{m,p,\Omega}) \\ &+ M \max_j\{\gamma(K_j)\} \ (||f||_{k,p,\Omega} + ||u||_{m,p,\Omega}). \end{aligned}$$

Daher folgt mit $\beta := (N+M)\max_{i,j}\{\gamma(x_i), \gamma(K_j)\}$

$$||u||_{2m+k,p,\Omega} \;\leq\; \beta\,(||f||_{k,p,\Omega} + ||u||_{m,p,\Omega}). \tag{3.56}$$

Mit $B_L(u,\Phi) = (f,\Phi)_0 \quad \forall\Phi \in C_0^\infty(\Omega)$ und Gårdings verallgemeinerten Ungleichung, Satz (3.1.6) folgt

$$c_1||u||_{m,p,\Omega} \leq ||f||_{k,p,\Omega} + c_2||u||_{0,p,\Omega}. \tag{3.57}$$

Mit (3.56) und (3.57) folgt

$$\begin{aligned} ||u||_{2m+k,p,\Omega} &\leq \beta\Big(||f||_{k,p,\Omega} + c_3||f||_{k,p,\Omega} + c_4||u||_{0,p,\Omega}\Big) \\ &\leq \gamma\Big(||f||_{k,p,\Omega} + ||u||_{0,p,\Omega}\Big). \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. □

Lemma 3.2.9 *Sei*

1. *$m \geq 1$ eine ganze Zahl und $1 < p, q < \infty$ reelle Zahlen mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,*
2. *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ beschränkt und offen mit $\partial\Omega \in C^m$,*
3. *B eine gleichmäßige elliptische reguläre Dirichlet Bilinearform der Ordnung m auf Ω.*

Definieren wir

$$N(T_p) \;:=\; \{u \in W_0^{m,p}(\Omega) : B(u,\Phi) = 0 \quad \forall\Phi \in C_0^\infty(\Omega)\} \tag{3.58}$$
$$N(T_q) \;:=\; \{v \in W_0^{m,q}(\Omega) : B(\Psi,v) = 0 \quad \forall\Psi \in C_0^\infty(\Omega)\}, \tag{3.59}$$

so ist $dim N(T_p) = dim(T_q) < \infty$ und für alle $F \in W_0^{m,q}(\Omega)'$ hat die Gleichung

$$B(f,\Phi) = F(\Phi) \quad \forall\Phi \in W_0^{m,q}(\Omega) \tag{3.60}$$

eine Lösung $f \in W_0^{m,p}(\Omega)$ genau dann, wenn $F(v) = 0 \quad \forall v \in N(T_q)$. Ist $H \in W_0^{m,p}(\Omega)'$, so existiert eine Lösung $h \in W_0^{m,q}(\Omega)$ für die Gleichung

$$B(\Psi,h) = \overline{H(\Psi)} \quad \forall\Psi \in W_0^{m,p}(\Omega) \tag{3.61}$$

genau dann, wenn $H(u) = 0 \quad \forall u \in N(T_p)$.
Für den Fall $dim N(T_p) = dim N(T_q) = 0$ sind die Gleichungen (3.60) *und* (3.61) *eindeutig lösbar für beliebige $F \in W_0^{m,q}(\Omega)'$ bzw. $H \in W_0^{m,p}(\Omega)'$.*
Es gilt weiter

$$\begin{aligned} u \in N(T_p) &\;\Rightarrow\; u \in N(T_{p'}) \quad \forall\, 1 < p' < \infty, \\ v \in N(T_q) &\;\Rightarrow\; v \in N(T_{q'}) \quad \forall\, 1 < q' < \infty. \end{aligned}$$

Dabei sind $N(T_{p'})$, $N(T_{q'})$ analog wie (3.58) *und* (3.59) *definiert.*

Beweis: Der Beweis beinhaltet Fredholm's Alternative und soll hier nicht bewiesen werden. Der komplette Beweis findet sich bei Simader [22], Seite 181, Theorem 10.7. □

Lemma 3.2.10 *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt,* $1 \leq p < \infty$,

$$q = \begin{cases} \infty & \text{für } p = 1 \\ p/(p-1) & \text{für } 1 < p < \infty \\ 1 & \text{für } p = \infty, \end{cases}$$

$N := N(n,m) := \sum_{|\alpha| \leq m} 1$ *und* $L^q_N := \prod_{j=1}^{N} L^q(\Omega)$. *Für alle* $L \in W^{m,p}(\Omega)'$ *existiert ein Element* $v := (v_\alpha)_{0 \leq |\alpha| \leq m} \in L^q_N$ *,so dass*

$$L(u) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u \, v_\alpha dx \quad \forall u \in W^{m,p}(\Omega) \tag{3.62}$$

und

$$||L; (W^{m,p}(\Omega)'|| = \inf ||v; L^q_N|| = \min ||v; L^q_N||. \tag{3.63}$$

Dabei wird das Infinimum über die Menge aller $v \in L^q_N$ *genommen, die der Gleichung* (3.62) *genügen. Das Infinimum liegt in dieser Menge.*
Ist $1 < p < \infty$, *so ist* $v \in L^q_N$ *sogar eindeutig bestimmt.*

Beweis: Adams [2], Seite 48 Theorem 3.8, mit der anschließenden Bemerkung folgt die Eindeutigkeit. □

Satz 3.2.11 *Es seien*

1. $m \geq 1, k \geq 0$ *ganze Zahlen,*

2. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *beschränkt und offen mit* $\partial\Omega \in C^{2m+k}$,

3. $$L = \sum_{|s| \leq 2m} a_s(\cdot) D^s$$

   ein gleichmäßiger elliptischer Differentialoperator auf Ω *mit den Koeffizienten* $a_s \in C_*^{|s|+k}(\Omega)$.

Sei L^* *der adjungierter Operator (oder duale Operator) zu* L.
Für jedes p *und* q *mit* $1 < p, q < \infty$ *und* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *gilt:*

1. *Wenn*

$$\begin{aligned} N(L) &:= \{s \in W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{2m+k,p}(\Omega) : L\, s = 0\} \\ N(L^*) &:= \{t \in W_0^{m,q}(\Omega) \cap W^{2m+k,q}(\Omega) : L^*\, t = 0\}, \end{aligned}$$

dann ist dim $N(L) = \dim N(L^*) < \infty$. *Und weiter, mit* $s \in N(L)$ *folgt* $s \in W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m+k,p'}(\Omega)$ *für jedes* $1 < p' < \infty$.
Das gleiche gilt auch für $N(L^*)$.

2. *Für* $f \in W^{k,p}(\Omega)$ *hat die Gleichung* $Lu = f$ *eine Lösung* $u \in W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{2m+k,p}(\Omega)$ *genau dann, wenn*

$$(f,t)_0 = \int_\Omega ft\, dx = 0 \quad \forall t \in N(L^*).$$

Für ein $g \in W^{k,q}(\Omega)$ *hat die Gleichung* $L^*v = g$ *eine Lösung* $v \in W_0^{m,q}(\Omega) \cap W^{2m+k,q}(\Omega)$ *genau dann ,wenn*

$$(g,s)_0 = \int_\Omega gs\, dx = 0 \quad \forall s \in N(L).$$

Für den Fall

$$\dim N(L) = \dim N(L^*) = 0$$

sind die Gleichungen eindeutig lösbar für beliebige $f \in W^{k,p}(\Omega)$ *und* $g \in W^{k,q}(\Omega)$.

3. *Es gibt eine Konstante* $\gamma = \gamma(n,m,p,k,L,\Omega) > 0$, *so dass die Lösungen folgenden Abschätzungen genügen.*

$$\begin{aligned} ||u||_{2m+k,p} &\leq \gamma(||Lu||_{k,p} + ||u||_{0,p}) \quad \forall u \in W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{2m+k,p}(\Omega) \\ ||v||_{2m+k,q} &\leq \gamma(||L^*v||_{k,q} + ||v||_{0,q}) \quad \forall v \in W_0^{m,q}(\Omega) \cap W^{2m+k,q}(\Omega). \end{aligned}$$

Beweis: Es seien B_L und B_{L^*} nach Lemma (3.1.5) konstruiert, bezüglich L,L^*. Dann gilt für jedes $u \in W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{2m+k,p}(\Omega)$

$$B_L(u,\Phi) = (Lu,\Phi)_0 \quad \forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.64}$$

Denn der Raum $C_0^\infty(\Omega)$ liegt dicht in $W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{2m+k,p}(\Omega)$. Mit $Lu = f$, wobei $u \in W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{2m+k,p}(\Omega)$ und $f \in W^{k,p}(\Omega)$, folgt dann mit Gleichung (3.64) und Lemma (3.1.5)

$$B_L(u,\Phi) = (f,\Phi)_0 \quad \forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.65}$$

Ist die Gleichung (3.65) für $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ und $f \in W^{k,p}(\Omega)$ erfüllt, so ist nach Lemma (3.2.8) schon $u \in W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{2m+k,p}(\Omega)$ und $Lu = f$. Mit diesen Voraussetzungen folgt die Äquivalenz:
$u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ genügt $B_L(u,\Phi) = (f,\Phi)_0 \quad \forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $f \in W^{k,p}(\Omega)$ $\Longleftrightarrow u \in W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{2m+k,p}(\Omega)$.

Dies gilt auch für die Bilinearform B_{L^*}, denn es ist $B_{L^*}(u,\Phi) = \overline{B_L(\Phi,u)}$.
Mit der Notation aus Lemma (3.2.9) folgt

$$N(L) = N(T_p) \text{ und } N(L^*) = N(T_q). \tag{3.66}$$

Mit Lemma (3.2.9) folgt die erste Aussage.
Statt $Lu = f$ mit $u \in W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{2m+k,p}(\Omega)$ und $f \in W^{k,p}(\Omega)$ betrachten wir die Variationsformelierung (3.65) mit $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$. Der Raum $C_0^\infty(\Omega)$ liegt dicht in $W_0^{m,q}(\Omega)$. Mit den Abschätzungen

$$\begin{aligned} |(f,\Phi)_0| &\leq ||f||_{k,p}||\Phi||_{m,q} \quad &\forall \Phi \in W_0^{m,q}(\Omega) \\ |B_L(u,\Phi)| &\leq K||u||_{m,p}||\Phi||_{m,q} \quad &\forall \Phi \in W_0^{m,q}(\Omega), \end{aligned}$$

folgt die Stetigkeit. Mit $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ folgt

$$\begin{aligned} & B_L(u,\Phi) = (f,\Phi)_0 \quad \forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega) \\ \iff \quad & B_L(u,\Phi) = (f,\Phi)_0 \quad \forall \Phi \in W_0^{m,q}(\Omega) \end{aligned} \tag{3.67}$$

Es sei nun

$$F(\Phi) := (f,\Phi)_0 \quad \forall \Phi \in W_0^{m,q}(\Omega) \tag{3.68}$$

mit $F \in W_0^{m,q}(\Omega)'$. Wegen

$$|F(\Phi_j) - F(\Phi_l)| \leq ||f||_{k,p}||\Phi_j - \Phi_l||_{m,q} \quad \forall \Phi_j, \Phi_l \in W_0^{m,q}(\Omega)$$

ist F stetig.
Ist andererseits $F \in W_0^{m,q}(\Omega)'$, $\Phi \in W_0^{m,q}(\Omega) \subset W^{m,q}(\Omega)$ mit $1 < q < \infty$, dann gibt es mit Lemma (3.2.10) genau ein Element $v \in L_N^p$, so dass

$$F(\Phi) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (v_\alpha, D^\alpha \Phi)_0 \quad \forall \Phi \in W_0^{m,q}(\Omega).$$

Damit gibt es für $F(\Phi)$ genau die Darstellung (3.68).
Dies zusammen mit (3.67) ergibt

$$\begin{aligned} & B_L(u,\Phi) = (f,\Phi)_0 \quad \forall \Phi \in W_0^{m,q}(\Omega) \\ \iff \quad & B_L(u,\Phi) = F(\Phi) \quad \forall \Phi \in W_0^{m,q}(\Omega). \end{aligned} \tag{3.69}$$

Damit ist Lemma (3.2.9) anwendbar. Es folgt, dass für alle $F \in W_0^{m,q}(\Omega)'$ die Gleichung (3.69) eine Lösung $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ hat genau dann, wenn $F(v) = 0 \quad \forall v \in N(T_q)$.
Mit (3.66) und der Darstellung (3.68) folgt

$$F(v) = 0 \quad \forall v \in N(T_q) \iff (f,v)_0 = 0 \quad \forall v \in N(L^*).$$

Somit hat (3.69) eine Lösung genau dann, wenn $(f,v)_0 = 0 \quad \forall v \in N(L^*)$.
Zusammen mit (3.67) und (3.64) folgt Aussage 2 für den Operator L. Die

Eindeutigkeit der Lösung folgt mit Lemma (3.2.9). Für den Operator L^* verläuft der Beweis analog. Damit ist Aussage 2 gezeigt.
Es gilt (3.64) für $u \in W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{2m+k,p}(\Omega)$. Typischerweise gilt für $v \in W_0^{m,q}(\Omega) \cap W^{2m+k,q}(\Omega)$

$$B_L^*(v, \Phi) = (L^* v, \Phi)_0 \quad \forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Mit

$$\begin{aligned} Lu &= f \in W^{k,p}(\Omega) \\ L^* v &= g \in W^{k,q}(\Omega) \end{aligned}$$

und Lemma (3.2.8) folgen die Abschätzungen für Aussage 3 und damit ist der Satz bewiesen. □
Wir zeigen nun, dass der Laplace-Operator

$$\Delta : W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \to W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

ein surjektiver Homöomorphismus ist. Dabei wenden wir Lemma (3.2.11) komponentenweise an.

Satz 3.2.12 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{m+2}$, $m \geq 0$ und $p > n$. Dann ist der Laplace-Operator mit*

$$\Delta : W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \to W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

ein surjektiver Homöomorphismus.

Beweis: Um Lemma (3.2.11) anzuwenden zeigen wir, dass das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ auf } \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.70}$$

mit $u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $0 \in W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ genau eine Lösung hat. Für den Nullraum folgt dann

$$dim\ N(\Delta) = dim\ N(\Delta^*) = 0. \tag{3.71}$$

Erfüllt Ω die Kegeleigenschaft, so gilt für die Sobolev-Räume (keine stetige Einbettung)

$$\begin{aligned} W^{m,p}(\Omega) &\subseteq W^{j,p}(\Omega) \quad j \leq m,\ 1 \leq p \leq \infty \\ W^{m,p}(\Omega) &\subseteq W^{m,k}(\Omega) \quad 0 \leq m,\ 1 \leq k \leq p \leq \infty. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) &\Rightarrow u \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n) \\ f \in W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) &\Rightarrow f \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Es ist $W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n) = W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt

$$A : B := spur A^T B = \sum_{i,j=1,\cdots,n} A_{ij} B_{ij}.$$

Die zugehörige Bilinearform für das Dirichlet Problem (3.70) und den Hilbert Raum $W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ist

$$a(u, v) := \int_\Omega \nabla u : \nabla v \; dx \quad \forall u, v \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Wir erhalten unter Ausnutzung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für konvergente Reihen und bestimmte Integrale

$$\begin{aligned}
|a(u, v)| &= \left| \int_\Omega \nabla u : \nabla v \; dx \right| = \left| \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\nabla u)_{ij} (\nabla v)_{ij} dx \right| \\
&\leq \left| \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n [(\nabla u)_{ij}]^2 dx \right)^{1/2} \left(\sum_{i,j=1}^n [(\nabla v)_{ij}]^2 dx \right)^{1/2} \right| \\
&\leq \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n [(\nabla u)_{ij}]^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n [(\nabla v)_{ij}]^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq |u|_{1,2} \; |v|_{1,2} \quad \forall u, v \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

Die Bilinearform $a(u, v)$ ist somit stetig für alle $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Ist Ω beschränkt, so sind nach Poincaré die Normen $|\cdot|_1$ und $||\cdot||_1$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$ äquivalent. Somit existiert eine Konstante $c > 0$ mit

$$\int_\Omega \nabla u : \nabla u \; dx = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\nabla u)_{ij}^2 dx = |u|_1^2 \geq c||u||_1^2.$$

Damit ist die stetige Bilinearform elliptisch. Nach Lax-Milgram existiert genau eine Lösung $u = 0 \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ für das Problem (3.70). Damit ist auch $u = 0 \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ die eindeutige Lösung für das Problem (3.70). Für den Nullraum folgt somit Gleichung (3.71). Der Laplace-Operator ist gleichmäßig elliptisch. Der Rest der Aussage folgt dann mit Lemma (3.2.11). $\square$

Kapitel 4

Linearisierung und Existenzsatz

Es ist ein Denkgesetz, dass jede
Funktion im Unendlichkleinen
linear wird.
Unbekannter Physiker 1915

Ziel dieses Kapitels ist es, einen lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für das Problem

$$div\, T(x, \nabla\varphi(x)) + f = 0 \text{ auf } \Omega \tag{4.1}$$

$$\varphi|_{\partial\Omega} = l_{\partial\Omega} \tag{4.2}$$

herzuleiten. Im Mittelpunkt steht der Operator

$$u \mapsto div\, T(x, \nabla(id + u)). \tag{4.3}$$

Hier ist $T(x, \nabla\varphi(x))$, kurz $T(\nabla\varphi)$ die Antwortfunktion zum ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor für elastische Materialien. Das Kapitel zeigt, dass das Differential des Operators bei Starrkörperbewegungen ein Homöomorphismus von $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ auf den Raum $W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ist. Der Satz über die Umkehrabbildung liefert dann lokale Existenz und Eindeutigkeit für die Lösung des Dirichlet Problems (4.1). Grundlagen für dieses Kapitel sind die Quellen [5], [9], [18], [21], [23] und [25].

4.1 Grundlagen aus der Funktionalanalysis

Im Verlauf dieses Kapitels benötigen wir einige Definitionen, Sätze und Lemmata, die als Grundkenntnisse der Funktionalanalysis gelten. Zur besseren Übersicht und zwecks einfacherer Verweise erfolgt an dieser Stelle eine kurze Zusammenfassung dieser Aussagen.

Satz 4.1.1 (Satz vom inversen Operator) *Es seien X, Y Banach-Räume, $T : X \to Y$ eine bijektive stetige lineare Abbildung. Dann ist T^{-1} stetig, also ein Homöomorphismus.*

Lemma 4.1.2 *Sei $HL(X,Y)$ die Menge aller linearen Homöomorphismen zwischen den Banach-Räumen X und Y. Dann ist $HL(X,Y) \subset L(X,Y)$ offen.*

Beweis: Mit Y als Banach-Raum folgt, dass auch $L(X,Y)$ ein Banach Raum ist. Für ein $\Psi \in L(X,Y)$ definieren wir die Supremumsnorm

$$||\Psi|| := \sup_{x \neq 0} \frac{||\Psi(x)||}{||x||}. \tag{4.4}$$

Sei $T_0 \in HL(X,Y)$. Die Abbildung $U \mapsto T_0^{-1}U$ von $L(X,Y)$ nach $L(X,X)$ ist stetig und $HL(X,Y)$ ist das Urbild der Menge $HL(X,X)$. Daher können wir Œ $X = Y$ annehmen.
Sei $T \in HL(X,X), U \in L(X,X)$ mit $||T-U|| < \epsilon$ und $||T^{-1}(T-U)|| < 1$. Wir zeigen, $U \in HL(X,X)$. Es ist

$$U = T\Big(I - T^{-1}(T-U)\Big).$$

Mit der von Neumann-Reihe folgt

$$\Big(I - T^{-1}(T-U)\Big)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(T^{-1}(T-U)\Big)^n \in L(X,X).$$

Daher ist U invertierbar und es gilt

$$U^{-1} = \Big(I - T^{-1}(T-U)\Big)^{-1} T^{-1}$$

ist stetig und linear. U^{-1} ist stetig genau dann, wenn das Urbild offener Mengen offen ist. U ist damit eine offene Abbildung. Da $B_\delta \subset U(B_1(0))$ für ein $\delta > 0$, ist $B_r(0) \subset U(B_{r/\delta}(0))$ für alle $r > 0$. Also ist U surjektiv. Damit ist U ein linearer Homöomorphismus. □

Satz 4.1.3 *Seien $(X, ||\cdot||_X), (Y, ||\cdot||_Y)$ reflexive reelle Banach-Räume und b eine stetige Bilinearform auf $X \times Y$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *Es gibt eine Konstante $c > 0$ mit*

$$\sup_{0 \neq x \in X} \frac{|b(x,y)|}{||x||_X} \geq c||y||_Y \quad \forall y \in Y,$$

und

$$\sup_{0 \neq y \in Y} \frac{|b(x,y)|}{||y||_Y} \geq c||x||_X \quad \forall x \in X.$$

2. *Für jedes $y' \in Y'$ existiert ein eindeutiges $x \in X$, so dass*

$$y'(y) = b(x,y) \quad \forall y \in Y.$$

3. *Für jedes $x' \in X'$ existiert ein eindeutiges $y \in Y$, so dass*

$$x'(x) = b(x, y) \quad \forall x \in X.$$

Beweis: Siehe Valent [25], Seite 57 Theorem 2.3 □

Lemma 4.1.4 *Es seien X, Y normierte Räume und $T : X \to Y$ eine beschränkte, lineare Abbildung. Dann ist T stetig bezüglich der schwachen Topologien von X und Y.*

Beweis: Hirzebruch [19], Seite 62. □

Satz 4.1.5 (Satz über die Umkehrabbildung) *Es seien X, Y Banach-Räume, $U \subset X$ eine offene Teilmenge und $x_0 \in U$. Ist $f : U \to Y$, eine C^k-Abbildung ($k \geq 1$) und das Differential bei x_0 eine Bijektion von X auf Y. Dann existiert eine offene Umgebung U_0 von x_0 in X mit $U_0 \subset U$ und eine offene Umgebung V_0 von $f(x_0)$ in Y, so dass f einen C^k-Diffeomorphismus von U_0 auf V_0 induziert. Ist f bei x_0 analytisch, so ist auch die Inverse von f bei $f(x_0)$ analytisch.*

Satz 4.1.6 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und erfülle die Kegeleigenschaft. Ist $mp > n$, dann existiert eine Konstante K^* abhängig von m, p, n und von den endlichem Kegel aus der Kegeleigenschaft, so dass für alle $u, v \in W^{m,p}(\Omega)$ das fast überall punktweise auf Ω definierte Produkt uv zu $W^{m,p}(\Omega)$ gehört. Es gilt*

$$||uv||_{m,p,\Omega} \leq K^* ||u||_{m,p,\Omega} ||v||_{m,p,\Omega}.$$

Damit ist $W^{m,p}(\Omega)$ eine kommutative Banach-Algebra bezüglich der punktweisen Multiplikation und der äquivalenten Norm

$$||u||^*_{m,p,\Omega} = K^* ||u||_{m,p,\Omega}.$$

Beweis: Adams [2], Seite 115 □

Lemma 4.1.7 *Erfülle $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ die Kegeleigenschaft und seien $m, k \geq 0$ ganze Zahlen. Ist $(m+k)p > n$, $u \in W^{m,p}(\Omega)$, $v \in W^{m+k,p}(\Omega)$, dann ist $uv \in W^{m,p}(\Omega)$ und es gibt eine Zahl $c > 0$ unabhängig von u und v, mit*

$$||uv||_{m,p} \leq c ||u||_{m,p} ||v||_{m+k,p}.$$

Beweis: Siehe Valent [25], Seite 27. □

Definition 4.1.8 *Es sei $N \geq 1$ eine ganze Zahl und $(x,y) \mapsto f(x,y)$ eine reellwertige Funktion definiert auf $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Für jede Funktion $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^N$ sei $F(\sigma) : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$F(\sigma)(x) := f(x, \sigma(x)) \quad \forall x \in \Omega.$$

Lemma 4.1.9 *Erfülle $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ die Kegeleigenschaft, sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen, $m \geq 1$ eine ganze Zahl, und $f \in C^m(\overline{\Omega} \times U)$. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} F : \{\sigma \in W^{m+r,p}(\Omega, \mathbb{R}^N) : \sigma(\overline{\Omega}) \subset U\} \subset W^{m+r,p}(\Omega, \mathbb{R}^N) &\to W^{m,p}(\Omega) \\ \sigma &\mapsto F(\sigma) \end{aligned}$$

stetig für jede ganze Zahl $r \geq 0$ mit $(m+r)p > n$.

Beweis: Ein Induktionsbeweis findet sich in Valent [25], Seite 27. □

Das folgende Lemma zeigt, dass die Funktion auch stetig differenzierbar ist.

Lemma 4.1.10 *Erfülle $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ die Kegeleigenschaft, sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $m \geq 1$. Ist $f \in C^{m+1}(\overline{\Omega} \times U)$, dann ist für alle ganzen Zahlen $r \geq 0$ mit $(m+r)p > n$ die Abbildung*

$$\begin{aligned} F : \{\sigma \in W^{m+r,p}(\Omega, \mathbb{R}^N) : \sigma(\overline{\Omega}) \subset U\} &\to W^{m,p}(\Omega) \\ \sigma &\mapsto F(\sigma) \end{aligned} \tag{4.5}$$

stetig differenzierbar und das Differential für ein beliebiges σ ist die stetig lineare Abbildung

$$F'(\sigma) : W^{m+r,p}(\Omega, \mathbb{R}^N) \to W^{m,p}(\Omega)$$

definiert für alle $\tau \in W^{m+r,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit

$$F'(\sigma)(\tau) = \sum_{j=1}^{N} F_{y_j}(\sigma)\tau_j, \tag{4.6}$$

wobei $F_{y_j}(\sigma) = D_{y_j} f(x, \sigma(x))$ eine reellwertige Funktion auf Ω ist.

Beweis: Ist $D_{y_j} f \in C^m(\overline{\Omega} \times U)$, so folgt mit Lemma (4.1.9) $F_{y_j}(\sigma) \in W^{m,p}(\Omega)$. Mit Lemma (4.1.7) folgt $\tau_j F_{y_j}(\sigma) \in W^{m,p}(\Omega)$. Mit $(m+r)p > n$ ist $W^{m+r,p}(\Omega)$ stetig in $C^1(\overline{\Omega})$ eingebettet. Dass die Abbildung (4.6) wohldefiniert und stetig ist, folgt mit Lemma (4.1.9). Wir zeigen nun mit

$$\lim_{||\tau||_{m+r,p} \to 0} \frac{||F(\sigma+\tau) - F(\sigma) - \sum_{j=1}^{N} \tau_j F_{y_j}(\sigma)||_{m,p}}{||\tau||_{m+r,p}} = 0, \tag{4.7}$$

dass die Abbildung auch differenzierbar ist und mit (4.6) übereinstimmt. Für jedes $\tau \in W^{m+r,p}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ mit $||\tau||_{m+r,p}$ so klein, dass

$$\sup_{x \in \Omega} |\tau(x)| < dist(\sigma(\overline{\Omega}), \mathbb{R}^N \setminus U),$$

können wir

$$F(\sigma + \tau) - F(\sigma) - \sum_{j=1}^{N} \tau_j F_{y_j}(\sigma) = \sum_{j=1}^{N} \tau_j \int_0^1 (F_{y_j}(\sigma + t\tau) - F_{y_j}(\sigma))dt$$

schreiben. Zusammen mit Lemma (4.1.7) erhalten wir

$$\begin{aligned} & \Big|\Big| F(\sigma + \tau) - F(\sigma) - \sum_{j=1}^{N} \tau_j F_{y_j}(\sigma) \Big|\Big|_{m,p} \\ \leq\ & c||\tau||_{m+r,p} \sum_{j=1}^{N} \Big|\Big| \int_0^1 F_{y_j}(\sigma + t\tau) - F_{y_j}(\sigma))dt \Big|\Big|_{m,p}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

wobei $c > 0$ unabhängig von τ ist. Nach Lemma (4.1.9) ist die Abbildung $\sigma \mapsto F_{y_j}(\sigma)$ von $\{\sigma \in W^{m+r,p}(\Omega, \mathbb{R}^N) : \sigma(\overline{\Omega}) \subset U\}$ nach $W^{m,p}(\Omega)$ stetig. Die Gleichung (4.7) folgt somit aus (4.8), denn es gilt

$$\Big|\Big| \int_0^1 F_{y_j}(\sigma + t\tau) - F_{y_j}(\sigma))dt \Big|\Big|_{m,p} \leq \int_0^1 ||F_{y_j}(\sigma + t\tau) - F_{y_j}(\sigma)||_{m,p} dt.$$

Sei $L := L(W^{m+r,p}(\Omega, \mathbb{R}^N), W^{m,p}(\Omega))$ der Raum aller stetig linearen Abbildungen von $W^{m+r,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ nach $W^{m,p}(\Omega)$, ausgestattet mit der Topologie der beschränkten Konvergenz.
Es genügt zu zeigen, dass der Operator $\sigma \mapsto F'(\sigma)$ von $\{\sigma \in W^{m+r,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) : \sigma(\overline{\Omega}) \subset U\}$ in den Raum L stetig ist. Wir wissen, dass die Abbildung $\sigma \mapsto F_{y_j}(\sigma)$ von $\{\sigma \in W^{m+r,p}(\Omega, \mathbb{R}^N) : \sigma(\overline{\Omega}) \subset U\}$ nach $W^{m,p}(\Omega)$ stetig ist. Mit Lemma (4.1.7) folgt für Gleichung (4.6) und festes $\overline{\sigma} \in W^{m+r,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit $\overline{\sigma}(\overline{\Omega}) \subset U$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} ||(F'(\sigma) - F'(\overline{\sigma}))(\tau)||_{m,p} &\leq \sum_{j=1}^{N} ||(F_{y_j}(\sigma) - F_{y_j}(\overline{\sigma}))\tau_j||_{m,p} \\ &\leq Nc||F_{y_j}(\sigma) - F_{y_j}(\overline{\sigma})||_{m,p}||\tau||_{m+r,p} \end{aligned}$$

mit $c > 0$ unabhängig von τ und σ. Insgesamt erhalten wir

$$\lim_{||\sigma - \overline{\sigma}||_{m+r+p} \to 0} \left\{ \frac{||(F'(\sigma) - F'(\overline{\sigma}))(\tau)||_{m,p}}{||\tau||_{m+r,p}} : 0 \neq \tau \in W^{m+r,p}(\Omega, \mathbb{R}^N) \right\} = 0.$$

Damit ist das Differential (4.6) beschränkt und somit stetig. □
Die Hauptaussage ist nicht die Gestalt des Differentials, sondern die Fixierung der Räume.

4.2 Zulässige Deformationen und deren topologischen Eigenschaften

Wir definieren nun die Menge aller zulässigen Deformationen für dieses Kapitel bzw. diese Theorie.

Definition 4.2.1 *Eine Deformation φ heißt zulässig für das Problem (4.1), (4.2), wenn φ ein orientierungserhaltender C^1-Diffeomorphismus von $\overline{\Omega}$ auf $\overline{\Omega}$ ist und $\varphi|_{\partial\Omega} = l_{\partial\Omega}$. Die Menge aller zulässigen Deformationen mit $\varphi \in W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{A}_{m+2,p}$.*

Lemma 4.2.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend und stimme mit dem Inneren der Menge $\overline{\Omega}$ überein. Dann ist eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(x) = x, \forall x \in \partial\Omega$ ein orientierungserhaltender C^1 Diffeomorphismus von $\overline{\Omega}$ auf $\overline{\Omega}$ genau dann, wenn* $\det \nabla\varphi > 0$ *für alle $x \in \overline{\Omega}$.*

Beweis: Siehe Valent [25], Seite 92, Lemma 3.1. □

Damit ist sichergestellt, dass positive Volumina wieder in positive Volumina abgebildet werden. Für spätere Sätze benötigen wir, dass $\mathcal{A}_{m+2,p}$ eine offene Menge ist. Der folgende Satz zeigt dies.

Satz 4.2.3 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit stetig differenzierbarem Rand, Ω stimme mit dem Inneren der Menge $\overline{\Omega}$ überein und $m \geq 0$ eine ganze Zahl. Dann ist für $p(m+1) > n$, $\mathcal{A}_{m+2,p}$ eine offene Teilmenge des affinen Teilraumes $(l_{\overline{\Omega}} + W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)) \cap W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \subset W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$.*

Beweis: Für $p(m+1) > n$ ist $W^{m+2,p}(\Omega)$ stetig in $C^1(\overline{\Omega})$ eingebettet, siehe Satz (2.1.8). Weiter gilt mit $u \in C^1(\overline{\Omega})$

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Daher gilt für $p(m+1) > n$,

$$u \in W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \text{ mit } u|_{\partial\Omega} = 0 \Longleftrightarrow u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n),$$

es folgt

$$\mathcal{A}_{m+2,p} \subseteq (l_{\overline{\Omega}} + W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)) \cap W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{A}_{m+2,p}$ offen ist in $(l_{\overline{\Omega}} + W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)) \cap W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Sei dazu $\varphi_0 \in \mathcal{A}_{m+2,p}$ fest und

$$\mu_0 := \inf_{x \in \Omega} \det \nabla\varphi_0(x). \tag{4.9}$$

Mit Lemma (4.2.2) folgt $\mu_0 > 0$. Mit $\varphi \mapsto \det \nabla\varphi$ ist eine stetig Abbildung von $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ nach $C^0(\overline{\Omega})$ definiert. Da $W^{m+2,p}(\Omega)$ stetig in $C^1(\overline{\Omega})$ eingebettet ist, ist die Abbildung auch von $W^{m+2,p}(\Omega)$ nach $C^0(\overline{\Omega})$ stetig. Daher existiert eine offene konvexe Umgebung U_0 um φ_0 in $W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, so dass

$$\sup_{x\in\Omega} |\det \nabla\varphi(x) - \det \nabla\varphi_0(x)| < \mu_0 \quad \forall \varphi \in U_0.$$

Zusammen mit (4.9) folgt

$$\inf_{x\in\Omega} \det \nabla\varphi(x) > 0 \quad \forall\varphi \in U_0.$$

Die Menge Ω stimmt mit dem Inneren ihres Abschlusses überein. Mit Lemma (4.2.2) folgt, dass jedes $\varphi \in (l_{\overline{\Omega}} + W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)) \cap U_0$ ein orientierungserhaltender C^1-Diffeomorphismus von $\overline{\Omega}$ auf $\overline{\Omega}$ ist. Daher ist

$$(l_{\overline{\Omega}} + W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)) \cap U_0 \subseteq \mathcal{A}_{m+2,p}.$$

Also ist $\mathcal{A}_{m+2,p}$ offen in $(l_{\overline{\Omega}} + W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)) \cap W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. □

4.3 Linearisierung des Elastizitätsoperators

Ziel dieses Abschnittes ist es, den Elastizitätsoperator zu linearisieren.
Dies führt auf das Differential des Spannungstensors $T(x, \nabla\varphi(x))$ an einen festen Punkt $\varphi \in (W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n))^+$.

Lemma 4.3.1 *Erfülle $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ die Kegeleigenschaft, sei $p(m+1) > n$ und $T \in C^{m+2}(\overline{\Omega} \times \mathbb{M}^n_+, \mathbb{M}^n)$. Dann ist*

$$\varphi \mapsto div\ T(\nabla\varphi) \tag{4.10}$$

eine stetig differenzierbare Abbildung von $(W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n))^+$ nach $W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und das Differential an einem beliebigen Punkt $\varphi \in (W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n))^+$ in Richtung ∇v, ist die (stetig lineare) Abbildung

$$v \mapsto div\Big(\sum_{k,h=1}^{n} T_{Z_{hk}}(\nabla\varphi)\nabla_k v_h\Big), \tag{4.11}$$

mit $T_{Z_{hk}}(\nabla\varphi) := D_{Z_{hk}} T(x, \nabla\varphi(x))$.

Beweis: Wir betrachten die Richtungsableitung von $T(\nabla\varphi)$ in Richtung ∇v für beliebig oft differenzierbare T, φ und v. Es gilt:

$$D_Z T(\nabla\varphi)(\nabla v) \;:=\; \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} T(\nabla\varphi + \epsilon\nabla v)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k,h=1}^{n} \left.\frac{\partial T}{\partial F_{hk}}\right|_{F_{hk}=(\nabla\varphi)_{hk}} \left.\frac{d((\nabla\varphi)_{hk}+\epsilon(\nabla v)_{hk})}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \\
&= \sum_{k,h=1}^{n} \left.\frac{\partial T}{\partial F_{hk}}\right|_{F_{hk}=(\nabla_k\varphi_h)} \nabla_k v_h \\
&= \sum_{k,h=1}^{n} T_{Z_{hk}}(\nabla\varphi)\nabla_k v_h.
\end{aligned}
$$

Es folgt

$$
div\Big(D_Z T(\nabla\varphi)(\nabla v)\Big) = div\Big(\sum_{k,h=1}^{n} T_{Z_{hk}}(\nabla\varphi)\nabla_k v_h\Big).
$$

Zusammen mit dem Einbettungssatz (2.1.8) und Lemma (4.1.10) folgt die Aussage für die Räume $W^{m+2,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ und $W^{m,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Nach Satz (4.2.3) ist die Teilmenge

$$
\begin{aligned}
(W^{m+2,p}(\Omega,\mathbb{R}^n))^+ : &= \{\varphi\in W^{m+2,p}(\Omega,\mathbb{R}^n) : \det\nabla\varphi>0\} \\
&\subset W^{m+2,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)
\end{aligned}
$$

offen. Insgesamt folgt die Behauptung. □

Damit ist die stetig lineare Abbildung (4.11) die Linearisierung des Operators (4.10). Dies motiviert zur folgender Definition:

Definition 4.3.2 *Seien $l_{ijhk}:\Omega\to\mathbb{R}$ mit $i,j,h,k=1,\dots,n$, reellwertige Funktionen und $l:\Omega\times\mathbb{M}_n\to\mathbb{M}_n$ sei durch*

$$
l(x,Z) := \left(\sum_{h,k=1}^{n} l_{ijhk}(x)Z_{hk}\right)_{i,j=1,\dots,n}
$$

definiert. Für eine Funktion $\sigma:\Omega\to\mathbb{M}_n$ definieren wir die zugeordnete linearisierte Abbildung

$$
\begin{aligned}
L(\sigma):\Omega &\to \mathbb{M}_n \\
L(\sigma)(x) &:= l(x,\sigma(x)).
\end{aligned}
$$

Damit ist der linearisierte Operator (4.11) von der Gestalt

$$
u \mapsto div\ L(\nabla u)
$$

mit $L=T_Z(\nabla\varphi)$ für festes $\varphi\in(W^{m+2,p}(\Omega,\mathbb{R}^n))^+$. Die folgende Definition geht auf Agmon,Douglis und Nirenberg zurück.

Definition 4.3.3 *Der Operator*

$$u \mapsto div\ L(\nabla u) = div\left(\sum_{h,k=1}^{n} l_{ijhk}(x)\nabla_k u_h\right)_{i,j=1,\dots,n} \tag{4.12}$$

ist elliptisch in Punkt $x \in \Omega$, wenn

$$\det\left(\sum_{j,k=1}^{n} l_{ijhk}(x)\xi_j\xi_k\right)_{i,h=1,\dots,n} \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Gilt

$$(\eta \otimes \xi) \cdot l(x, \eta \otimes \xi) > 0 \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

dann ist der Operator (4.12) *stark elliptisch in $x \in \Omega$. Gelten die Bedingungen für alle $x \in \Omega$, so ist der Operator elliptisch bzw. stark elliptisch auf Ω.*

Satz 4.3.4 *Seien l_{ijhk} stetige Funktionen auf $\overline{\Omega}$. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für*

$$(\eta \otimes \xi) \cdot l(x, \eta \otimes \xi) > 0, \quad \forall (x, \xi, \eta) \in \overline{\Omega} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \tag{4.13}$$

ist, dass es zwei Zahlen $c > 0$ und $\lambda > 0$ gibt, so dass

$$\sum_{i,j,k,h=1}^{n} \int_{\Omega} l_{ijhk}(x)\nabla_j v_i \nabla_k v_h\, dx + \lambda ||v||_{0,2}^2 \geq c||v||_{1,2}^2 \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Aus der Gleichung (4.13) *folgt*

$$\det\left(\sum_{j,k=1}^{n} l_{ijhk}(x)\xi_j\xi_k\right)_{i,h=1,\dots,n} > 0 \quad \forall (x, \xi) \in \overline{\Omega} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

und mit $l_{ijhk} \in C^0(\overline{\Omega})$ folgt

$$\det\left(\sum_{j,k=1}^{n} l_{ijhk}(x)\xi_j\xi_k\right)_{i,h=1,\dots,n} \geq c_1|\xi|^{2n} \quad \forall (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n. \tag{4.14}$$

Dabei ist $c_1 > 0$ unabhängig von (x, ξ). Setzen wir für c_1 das Minimum der stetigen Funktion

$$(x, \xi) \mapsto \det\left(\sum_{j,k=1}^{n} l_{ijhk}(x)\xi_j\xi_k\right)_{i,h=1,\dots,n}$$

auf $\overline{\Omega} \times \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| = 1\}$, so ist Gleichung (4.14) *erfüllt.*

Beweis: Siehe Fichera [18]. Der Satz ist auch als Gårdingsche Ungleichung bekannt. □

Satz 4.3.5 *Seien $l_{ijhk} \in W^{m+1,p}(\Omega)$ mit $p > n$ und sei $\partial\Omega \in C^{m+2}$. Dann folgt aus*

$$(\eta \otimes \xi) \cdot l(x, \eta \otimes \xi) > 0, \quad \forall (x, \xi, \eta) \in \overline{\Omega} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}),$$

für alle $u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ die Abschätzung

$$||div\ L(\nabla u)||_{m,p} + ||u||_{0,2} \geq c||u||_{m+2,p}. \tag{4.15}$$

Dabei ist die Zahl $c > 0$ unabhängig von u und nur abhängig von den Funktionen l_{ijhk} durch die Elliptizitäts-Konstante c_1 aus der Abschätung (4.14), eine obere Schranke für $||l_{ijhk}||_{m+1,p}$ $(i, j, h, k = 1, \ldots, n)$ und von $1/\delta$. Hier ist δ das strikt positive reelle Funktional aus der Arbeit von Agmon, Douglis und Nierenberg (siehe [5], Seite 43). Die Autoren bezeichnen δ als die "minor constant" für das Dirichlet Problem des Operators $u \mapsto div\ l(x, \nabla u(x))$.

Beweis: Ein Beweis für die Abschätzung

$$||div\ L(\nabla u)||_{m,p} + ||u||_{0,p} \geq c||u||_{m+2,p}$$

mit $p > n$ und $u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ findet sich in Valent ([25], Theorem 6.2, Seite 75).
Mit der dazugehörenden Bemerkung ([25], Seite 77) folgt dann die Behauptung. □

Lemma 4.3.6 *Es sei $l_{ijhk} \in L^\infty(\Omega)$ $(i, j, h, k = 1, \ldots n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ mit $p > 1$ und*

$$b(v, u) := \int_\Omega l(x, \nabla u(x)) \cdot \nabla v(x)\, dx \quad \forall (v, u) \in W_0^{1,p'}(\Omega, \mathbb{R}^n) \times W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Dann gibt es für jedes $f \in W^{-1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ein eindeutiges $u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit

$$-div\ L(\nabla u) = f \tag{4.16}$$

genau dann, wenn es ein $c > 0$ gibt, welches

$$\sup\left\{\frac{|b(v,u)|}{||v||_{1,p'}} : 0 \neq v \in W_0^{1,p'}(\Omega, \mathbb{R}^n)\right\} \geq c||u||_{1,p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n),$$

und

$$\sup\left\{\frac{|b(v,u)|}{||u||_{1,p}} : 0 \neq u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)\right\} \geq c||v||_{1,p'} \quad \forall v \in W_0^{1,p'}(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

erfüllt.

Beweis: Der Operator

$$u \mapsto div\ L(\nabla u) \tag{4.17}$$

bildet $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ nach $W^{-1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ab.
Wir identifizieren $W^{-1,p}(\Omega)$ mit dem Dual $(W_0^{1,p'}(\Omega))'$ von $W_0^{1,p'}(\Omega)$ und definieren $(v, f) \mapsto < v, f >$ auf $W_0^{1,p'}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $W^{-1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ durch

$$< v, f > := \sum_{i=1}^{n} f_i(v_i). \tag{4.18}$$

Daher können wir $W^{-1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ als den Dualraum von $W_0^{1,p'}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ betrachten. Wir erhalten die starke Topologie auf $W^{-1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ durch die Norm

$$||f||_{-1,p} := \sup \left\{ \frac{|< v, f >|}{||v||_{1,p'}} : 0 \neq v \in W_0^{1,p'}(\Omega, \mathbb{R}^n) \right\}. \tag{4.19}$$

Ist $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $v \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, so folgt mit (4.18)

$$< v, -div\ L(\nabla u) > = -\int_\Omega \sum_{i,j,h,k}^{n} \nabla_j (l_{ijhk} \nabla_k u_h) v_i dx = \int_\Omega l(x, \nabla u(x)) \cdot \nabla v dx.$$

Der Raum $C_0^\infty(\Omega)$ liegt dicht in $W_0^{1,p'}(\Omega)$. Daher folgt

$$\begin{gathered} < v, -div\ L(\nabla u) > = b(v, u) \\ \forall (v, u) \in W_0^{1,p'}(\Omega, \mathbb{R}^n) \times W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n). \end{gathered} \tag{4.20}$$

Für $l_{ijhk} \in L^\infty(\Omega)$ liefert die Höldersche Ungleichung

$$|b(v, u)| \leq c_p ||v||_{1,p'}\ ||u||_{1,p} \quad \forall (v, u) \in W^{1,p'}(\Omega, \mathbb{R}^n) \times W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n), \tag{4.21}$$

mit $c_p > 0$ unabhängig von u und v. Daher ist die Bilinearform

$$(v, u) \mapsto b(v, u) \quad \forall (v, u) \in W^{1,p'}(\Omega, \mathbb{R}^n) \times W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

stetig. Mit (4.19), (4.20) und (4.21) folgt

$$||div\ L(\nabla u)||_{-1,p} \leq c_p ||u||_{1,p} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Damit ist gezeigt, dass (4.17) ein stetiger Operator von $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ nach $W^{-1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ist.
Ist nun $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $f \in W^{-1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, so folgt mit (4.20)

$$-div\ L(\nabla u) = f \iff b(v, u) = < v, f > \quad \forall v \in W_0^{1,p'}(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Die Räume $X := W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $Y := W_0^{1,p'}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ sind reflexiv. Mit Satz (4.1.3) folgt die Behauptung. □

Satz 4.3.7 *Es sei* $l_{ijkh} \in W^{m+1,p}(\Omega)$ $(i,j,k,h = 1,\ldots,n)$, $m \geq 0, p > n$ *und* $\partial\Omega \in C^{m+2}$. *Gilt*

$$|b(v,v)| \geq c||v||_{1,2}^2 \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n) \tag{4.22}$$

für eine Zahl $c > 0$ *unabhängig von* v *mit*

$$b(v,u) := \int\limits_\Omega l(x, \nabla u(x)) \cdot \nabla v dx = \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k,h=1}^n l_{ijhk}(x) \nabla_k u_h(x) \nabla_j v_i(x) dx,$$

dann ist der Operator

$$u \mapsto div\ l(x, \nabla u(x)) \tag{4.23}$$

ein (linearer) surjektiver Homöomorphismus von

$$W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \to W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Beweis: Mit $\nabla_k u_h, \nabla_j v_i, l_{ijhk} \in W^{m+1,p}(\Omega)$ und $\partial\Omega \in C^{m+2}$ (Kegeleigenschaft ist erfüllt) folgt mit Satz (4.1.6), dass die Bilinearform $b(v,u)$ wohldefiniert auf $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ist. Gleichung (4.22) besagt, dass die Funktion $b(v,v)$ keinen Vorzeichenwechsel besitzt. Um dies zu zeigen, nehmen wir das Gegenteil an.
Annahme: Es existieren $v, w \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, so dass $b(v,v) \geq c||v||_{1,2}^2$ und $b(w,w) < -c||w||_{1,2}^2$. Sei nun $\lambda \in [0,1]$ und

$$F(\lambda) := \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k,h=1}^n l_{ijhk}(x) \nabla_k(\lambda v_h + (1-\lambda) w_h) \nabla_j(\lambda v_i + (1-\lambda) w_i)\ dx.$$

Es ist

$$F(0) = \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k,h=1}^n l_{ijhk}(x) \nabla_k w_h \nabla_j w_i\ dx < -c||w||_{1,2}^2 \tag{4.24}$$

$$F(1) = \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k,h=1}^n l_{ijhk}(x) \nabla_k v_h \nabla_j v_i\ dx \geq c||v||_{1,2}^2. \tag{4.25}$$

Die Funktion $F(\lambda)$ ist auf $[0,1]$ stetig. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $s \in [0,1]$, so dass $F(s) = 0$ und $F(s) \geq c||sv + (1-s)w||_{1,2}^2$. Damit $||sv + (1-s)w||_{1,2}^2 = 0$, müssen v und w linear abhängig sein.
Mit $w := \mu v$, $\mu \in \mathbb{R}$ und Gleichungen (4.24),(4.25) folgt

$$0 > F(0) = \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k,h=1}^n l_{ijhk}(x) \nabla_k(\mu v_h) \nabla_j(\mu v_i)\ dx = \mu^2 F(1) \geq 0.$$

Das ist ein Widerspruch. Folglich hat die Funktion $b(v,v)$ kein Vorzeichenwechsel. Damit gilt Œ $b(v,v) \geq 0 \ \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$.
Für jedes $(x,t) \in \Omega \times [0,1]$ setzen wir

$$m_{ijhk}(x,t) := t l_{ijhk}(x) + (1-t)\delta_{ih}\delta_{jk}, \tag{4.26}$$

mit δ_{ih}, δ_{jk} als Kronecker-Symbol. Die Funktionen $l_{ijhk} \in W^{m+1,p}(\Omega)$ erfüllen die Gleichung (4.22). Für jede Funktion $\sigma : \Omega \to \mathbb{M}_n$ sei $M_t(\sigma)$ die $\mathbb{M}_n$-wertige Funktion, die durch

$$M_t(\sigma)(x) := M_t(x, \sigma(x)) := \left(\sum_{h,k=1}^{n} m_{ijhk}(x,t)\sigma_{hk}(x) \right)_{i,j=1,\ldots,n} \tag{4.27}$$

auf Ω definiert ist.
Wir zeigen für ein $c_2 > 0$ die Abschätzung

$$||div\ M_t(\nabla u)||_{-1,2} \geq c_2 ||u||_{1,2} \quad \forall (t,u) \in [0,1] \times W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n). \tag{4.28}$$

Wie oben gezeigt, kann Œ $b(v,v) \geq 0 \ \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ angenommen werden. Betrachte die Funktion $b_t(v,v)$ für $(t,v) \in [0,1] \times W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
b_t(v,v) &:= \int_\Omega \sum_{i,j,k,h=1}^{n} m_{ijhk}(x,t) \nabla_k v_h \nabla_j v_i \ dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i,j,k,h=1}^{n} \Big(t l_{ijhk}(x) + (1-t)\delta_{ih}\delta_{jk} \Big) \nabla_k v_h \nabla_j v_i \ dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i,j,k,h=1}^{n} t l_{ijhk}(x) \nabla_k v_h \nabla_j v_i + (1-t)\delta_{ih}\delta_{jk} \nabla_k v_h \nabla_j v_i \ dx \\
&\geq tc||v||_{1,2}^2 + (1-t) \int_\Omega \sum_{j,i=1}^{n} \nabla_j v_i \nabla_j v_i \ dx \\
&= tc||v||_{1,2}^2 + (1-t) \int_\Omega \sum_{j,i=1}^{n} (\nabla_j v_i)^2 \ dx \\
&= tc||v||_{1,2}^2 + (1-t) \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} (\nabla_j v_i)^2 \ dx \\
&= tc||v||_{1,2}^2 + (1-t) \sum_{i=1}^{n} |v_i|_{1,2}^2 \\
&= tc||v||_{1,2}^2 + (1-t)|v|_{1,2}^2 \\
&\geq tc||v||_{1,2}^2 + (1-t)c_1||v||_{1,2}^2, \qquad \text{(Poincaré, } c_1 > 0) \\
&\geq c_2||v||_{1,2}^2
\end{aligned} \tag{4.29}$$

und $c_2 := \min\limits_{0\leq t\leq 1}\{tc + (1-t)c_1\} > 0$.
Mit Abschätzung (4.29) folgt

$$\begin{aligned}
& |b_t(v,v)| \geq c_2||v||_{1,2}^2 \quad \forall (t,v) \in [0,1]\times W_0^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^n) \\
\Rightarrow \quad & \frac{|b_t(v,v)|}{||v||_{1,2}} \geq c_2||v||_{1,2} \quad \forall (t,v) \in [0,1]\times W_0^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^n)\setminus\{0\} \\
\Rightarrow \quad & \sup\left\{\frac{|b_t(v,u)|}{||v||_{1,2}} : 0 \neq v \in W_0^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^n)\right\} \geq c_2||u||_{1,2} \\
& \forall (t,u) \in [0,1]\times W_0^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

Mit dieser Abschätzung ist Lemma (4.3.6) anwendbar und liefert zusammen mit dem Operator (4.27) angewandt auf (4.16), (4.19) (4.20) die gesuchte Abschätzung (4.28).
Nach Sobolev ist $W^{m+1,p}(\Omega)$ in $C^m(\overline{\Omega})$ stetig eingebettet. Damit ist auch $m_{ijhk}(x,t) \in C^m(\overline{\Omega})$. Mit der Abschätzung (4.29) und Satz (4.3.4) folgt (4.13) für $m_{ijhk}(x,t)$, also

$$\sum_{i,j,h,k=1}^{n} m_{ijhk}(x,t)\xi_j\xi_k\eta_i\eta_h > 0, \tag{4.30}$$
$$\forall (t,x,\xi,\eta) \in [0,1]\times\overline{\Omega}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}).$$

Mit Abschätzung (4.30) und Satz (4.3.4) folgt, dass es eine Zahl $c_1 > 0$ gibt, unabhängig von (t,x,ξ), so dass

$$\det\left(\sum_{j,k=1}^{n} m_{ijhk}(x,t)\xi_j\xi_k\right)_{i,h=1,\ldots,n} \geq c_1|\xi|^{2n}, \quad \forall (t,x,\xi) \in]0,1[\times\Omega\times\mathbb{R}^n.$$

Für c_1 setzen wir das Minimum der strikt positiven, stetigen Funktion

$$(t,x,\xi) \mapsto \det\left(\sum_{j,k=1}^{n} m_{ijhk}(x,t)\xi_j\xi_k\right)_{i,h=1,\ldots,n}$$

auf der kompakten Menge $[0,1]\times\overline{\Omega}\times\{\xi\in\mathbb{R}^n : |\xi| = 1\} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$.
Agmon, Douglis und Nirenberg zeigen in ihrer Arbeit, dass ein stark elliptisches System mit Dirichlet Begingungen die “complementing condition” erfüllt und die “minor constant” positiv ist, siehe [5], Seite 43-44.
Abschätzung (4.30) zeigt, dass der Operator $u \mapsto div\ M_t(\nabla u)$ stark elliptisch ist. Somit erfüllt das Dirichlet Problem für den stark elliptischen Operator $u \mapsto div\ M_t(\nabla u)$ die “complementing condition” $\forall t \in [0,1]$. Folglich ist die “minor constant”, nennen wir sie δ_t, für dieses Problem zweifellos positiv $\forall t \in [0,1]$. Die Funktion $t \mapsto \delta_t$ ist stetig, somit folgt $\inf\{\delta_t : t \in [0,1]\} > 0$.
Dies zusammen mit Satz (4.3.5) zeigt, dass es eine Zahl $c_3 > 0$ gibt, unabhängig von u und t mit

$$||div\ M_t(\nabla u)||_{m,p} + ||u||_{0,2} \geq c_3||u||_{m+2,p}, \tag{4.31}$$

für alle $(t,u) \in [0,1] \times (W_0^{1,p}(\Omega,\mathrm{I\!R}^n) \cap W^{m+2,p}(\Omega,\mathrm{I\!R}^n))$.
Aus der gezeigten Abschätzung (4.28) folgt

$$||u||_{1,2} \leq c_2^{-1}||div\ M_t(\nabla u)||_{-1,2} \quad \forall (t,u) \in [0,1] \times W_0^{1,2}(\Omega,\mathrm{I\!R}^n), \tag{4.32}$$

mit Abschätzung (4.31) und $\alpha := c_3^{-1}$ folgt

$$||u||_{m+2,p} \leq \alpha||div\ M_t(\nabla u)||_{m,p} + \alpha||u||_{0,2} \tag{4.33}$$

für alle $(t,u) \in [0,1] \times (W_0^{1,p}(\Omega,\mathrm{I\!R}^n) \cap W^{m+2,p}(\Omega,\mathrm{I\!R}^n))$.
Mit (4.32), (4.33) und $\beta := \alpha c_2^{-1}$ folgt

$$\begin{aligned} ||u||_{m+2,p} &\leq \alpha||div\ M_t(\nabla u)||_{m,p} + \alpha||u||_{0,2} \\ &\leq \alpha||div\ M_t(\nabla u)||_{m,p} + \alpha||u||_{1,2} \\ &\leq \alpha||div\ M_t(\nabla u)||_{m,p} + \beta||div\ M_t(\nabla u)||_{-1,2} \qquad (4.34) \\ \forall (t,u) &\in [0,1] \times \Big(W_0^{1,p}(\Omega,\mathrm{I\!R}^n) \cap W^{m+2,p}(\Omega,\mathrm{I\!R}^n)\Big). \end{aligned}$$

Die Zahlen α, β sind wie c_2 und c_3 unabhängig von u und t.
Die Divergenz der Gleichung (4.27) für $t = 0$ und jedes $x \in \Omega$ ist,

$$\begin{aligned} (div\ M_0(\nabla u))(x) &= div\Bigg(\sum_{h,k=1}^{n} m_{ijhk}(x,0)\nabla_k u_h(x)\Bigg)_{i,j=1,\ldots,n} \\ &= div\Bigg(\sum_{h,k=1}^{n} \delta_{ih}\delta_{jk}\nabla_k u_h(x)\Bigg)_{i,j=1,\ldots,n} \\ &= \Delta u(x), \end{aligned}$$

mit $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$ und Δ als Laplace-Operator der wie *div* zeilenweise wirkt.
Mit der Voraussetzung $\partial\Omega \in C^{m+2}$ und Satz (3.2.12) ist der Laplace-Operator

$$\Delta : W_0^{1,p}(\Omega,\mathrm{I\!R}^n) \cap W^{m+2,p}(\Omega,\mathrm{I\!R}^n) \to W^{m,p}(\Omega,\mathrm{I\!R}^n).$$

ein surjektiver Homöomorphismus.
Sei nun

$$\begin{aligned} J := \Big\{ t : t \in [0,1], u \mapsto div\ M_t(\nabla u) \text{ ist ein (linearer) surjektiver} \\ \text{Homöomorphismus von } W_0^{1,p}(\Omega,\mathrm{I\!R}^n) \cap W^{m+2,p}(\Omega,\mathrm{I\!R}^n) \to W^{m,p}(\Omega,\mathrm{I\!R}^n) \Big\}. \end{aligned}$$

Die Menge J ist somit nicht leer. Wir zeigen nun, dass J eine offene Teilmenge des topologischen Raumes $[0,1]$ ist.
Die Menge der linearen Homöomorphismen von Banach-Raum X surjektiv auf den Banach-Raum Y ist eine offene Teilmenge des Banach-Raumes $L(X,Y)$ der mit der Supremumsnorm (4.4) ausgestattet ist, siehe Lemma (4.1.2). Die Abbildung

$$t \mapsto div\ (M_t \circ \nabla)$$

von $[0,1]$ in den Raum der stetigen linearen surjektiven Abbildungen von $W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)\cap W^{m+2,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ auf $W^{m,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ ist stetig. Da das Urbild offener Mengen über stetigen Funktionen offen ist, folgt dass J offen in $[0,1]$ ist.

Wir zeigen nun, dass J auch abgeschlossene Teilmenge von $[0,1]$ ist und somit folgt $J=[0,1]$. Dann ist gezeigt, dass $u\mapsto div\ M_1(\nabla u)$, also der Operator (4.23), ein linearer surjektiver Homöomorphismus von $W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)\cap W^{m+2,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)\to W^{m,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ ist.

Sei $\{t_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ eine Folge in J die gegen ein $t\in[0,1]$ konvergiert. Wir zeigen $t\in J$.

Sei $f\in W^{m,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ beliebig aber fest. Mit $t_r\in J\ \forall r\in\mathbb{N}$, gibt es für jedes $r\in\mathbb{N}$ ein

$$u(r)\in W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)\cap W^{m+2,p}(\Omega,\mathbb{R}^n) \text{ mit } div\ M_{t_r}(\nabla u(r))=f.$$

Mit Ungleichung (4.34) folgt, dass die Folge $\{u(r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist in $W^{m+2,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Der Teilraum

$$W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)\cap W^{m+2,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)\subset W^{m+2,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$$

ist reflexiv. Daher existiert in $\{u(r)\}_{r\in\mathbb{N}}\in W^{m+2,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ eine schwach konvergente Teilfolge $\{u(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$u(n)\rightharpoonup u\in W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)\cap W^{m+2,p}(\Omega,\mathbb{R}^n).$$

Für alle $t\in[0,1]$ ist die lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} u & \mapsto & div\ M_t(\nabla u) \\ W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)\cap W^{m+2,p}(\Omega,\mathbb{R}^n) & \to & W^{m,p}(\Omega,\mathbb{R}^n) \end{array} \tag{4.35}$$

stetig und mit Lemma (4.1.4) auch stetig bezüglich der schwachen Topologien von $W^{m+2,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ und $W^{m,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Damit ist die Folge $\{div\ M_{t_n}(u(n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt im reflexiven Raum $W^{m,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Somit gibt es eine schwach konvergente Teilfolge, wir bleiben bei der Notation, mit

$$div\ M_{t_n}(\nabla u(n))\rightharpoonup div\ M_t(\nabla u) \text{ in } W^{m,p}(\Omega,\mathbb{R}^n).$$

Mit $div\ M_{t_n}(\nabla u(n))=f\ \forall n\in\mathbb{N}$ folgt die starke Konvergenz von

$$\begin{array}{lcl} <div\ M_{t_n}(\nabla u(n)),l>\to & <div\ M_t(\nabla u),l> & \forall l\in W^{m,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)' \\ <div\ M_{t_n}(\nabla u(n)),l>\to & <f,l> & \forall l\in W^{m,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)'. \end{array}$$

Dies ergibt

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{n\to\infty} div\ M_{t_n}(\nabla u(n)) & = & div\ M_t(\nabla u) \\ & = & f. \end{array} \tag{4.36}$$

Seien nun $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $div\ M_t\nabla u = div\ M_t\nabla v$. Mit Ungleichung (4.34) folgt $\forall (t,u) \in [0,1] \times (W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n))$

$$\begin{aligned} ||u-v||_{m+2,p} &\leq \alpha ||div\ M_t(\nabla u) - div\ M_t(\nabla v)||_{m,p} \\ &+ \beta ||div\, M_t(\nabla u) - div\ M_t(\nabla v)||_{-1,2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist der Operator (4.36) injektiv.
Da $f \in W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ beliebig war, ist (4.36) stetig linear und bijektiv.
Mit dem Satz vom Inversen Operator (4.1.1) folgt, dass die Abbildung (4.36) ein Homöomorphismus ist, also $t \in J$. Damit ist der Satz bewiesen. □

Nach Voraussetzung ist das Myokard $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und somit $p > n = 3$. Daher sind die Sobolev-Räume keine Hilbert-Räume. Deswegen haben wir Satz (3.2.12) für Banach-Räume gezeigt.

4.4 Spezielle Deformationen

Die folgenden Sätze zeigen, dass Starrkörperbewegungen die Voraussetzung (4.22) aus Satz (4.3.7) erfüllen. Wir betrachten den ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor $T(x, \nabla\varphi(x))$, kurz $T(\nabla\varphi)$, aus der Einleitung.

Definition 4.4.1 *Sei $\mathcal{L}_{m+2,p}$ die Menge aller $\varphi \in \mathcal{A}_{m+2,p}$, so dass*

$$\int_\Omega \sum_{h,k=1}^n (\nabla_{Z_{hk}} T(\nabla\varphi)\nabla_k v_h) \cdot \nabla v dx \geq c(\varphi)||v||_{1,2}^2, \forall v \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n),$$

mit passender Zahl $c(\varphi) > 0$ unabhängig von v.

Eine Motivation für diese Definition findet sich in der Einleitung, Abschätzung (1.27).

Satz 4.4.2 *Sei $\partial\Omega \in C^1$ und die Ableitungen $\nabla_{Z_{hk}} T$ für $(h,k = 1, \dots n)$ seien stetige Funktionen auf $(\overline{\Omega} \times \mathbb{M}_+^n)$. Dann ist für $(m+1)p > n$, $\mathcal{L}_{m+2,p}$ eine offene Teilmenge von $\mathcal{A}_{m+2,p}$ und offene Teilmenge des affinen Teilraumes $(l_{\overline{\Omega}} + W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)) \cap W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \subset W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$.*

Beweis: Sei $\varphi_0 \in \mathcal{L}_{m+2,p}$, dann gibt es eine Zahl $c(\varphi_0) > 0$ mit

$$\int_\Omega \sum_{h,k=1}^n (\nabla_{Z_{hk}} T(\nabla\varphi_0)\nabla_k v_h) \cdot \nabla v dx \geq c(\varphi_0)||v||_{1,2}^2,\ \forall v \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n). \quad (4.37)$$

Die Funktionen $\nabla_{Z_{hk}} T_{ij}$ existieren und sind stetig auf $(\overline{\Omega} \times \mathbb{M}_+^n)$. Mit Sobolevs Einbettungssatz folgt, dass $\varphi \mapsto \nabla_{Z_{hk}} T(\nabla\varphi)$eine stetige Abbildung von

$(W^{m+2,p}(\Omega,\mathbb{R}^n))^+$ nach $C^0(\overline{\Omega},\mathbb{M}^n)$ ist. Dann gibt es für alle ϵ mit $0<\epsilon<c(\varphi_0)$ eine Umgebung U_0 von φ_0 in $W^{m+2,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$, so dass aus $\varphi\in U_0$ folgt

$$\left|\int\limits_\Omega \sum_{h,k=1}^n ((\nabla_{Z_{hk}}T(\nabla\varphi_0)-\nabla_{Z_{hk}}T(\nabla\varphi))\nabla_k v_h)\cdot\nabla v\;dx\right| \le \epsilon||v||_{1,2}^2 \qquad (4.38)$$

für alle $v\in C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Kombinieren wir (4.37) mit (4.38), so folgt aus $\varphi\in U_0$

$$\int_\Omega \sum_{h,k=1}^n (\nabla_{Z_{hk}}T(\nabla\varphi)\nabla_k v_h)\cdot\nabla v dx \ge (c(\varphi_0)-\epsilon)||v||_{1,2}^2, \quad \forall v\in C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n).$$

Mit Satz (4.2.3) können wir U_0 so wählen, dass $U_0\subseteq\mathcal{A}_{m+2,p}$ ist. Damit ist der Satz bewiesen. □

Lemma 4.4.3 *Es sei* $T\in C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{M}_+^n,\mathbb{M}_+^n)$ *und* (1.24), (1.25), (1.26), (1.27) *seien erfüllt. Dann gibt es für alle* $R\in\mathbb{O}_+^n$ *eine reelle Zahl* $m_R>0$*, so dass*

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega &\Big(\sum_{h,k=1}^n \nabla_{Z_{hk}}T(x,R)\nabla_k v_h(x)\Big)\cdot\nabla v(x)\;dx\\ &\ge m_R\int\limits_\Omega |\nabla(R^Tv)+(\nabla(R^Tv))^T|^2\;dx, \quad \forall v\in W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

gilt.

Beweis: Valent [25], Seite 62, Theorem 3.3 □
Damit zeigen wir den nächsten Satz.

Satz 4.4.4 *Es erfülle* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *die Kegeleigenschaft,*

$$T\in C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{M}_+^n,\mathbb{M}^n),$$

und seien (1.24), (1.25), (1.26), (1.27) *erfüllt. Dann gibt es für alle* $R\in\mathbb{O}_+^n$ *ein* $c_R>0$*, so dass*

$$\int\limits_\Omega \sum_{h,k=1}^n (\nabla_{Z_{hk}}T(x,R)\nabla_k v_h(x))\cdot\nabla v(x)\;dx \ge c_R||v||_{1,2}^2$$

für alle $v\in W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ *mit*

$$\int\limits_\Omega v\;dx=0, \qquad R^T\int\limits_\Omega Dv\;dx\in\mathbb{S}_n \qquad (4.39)$$

und für alle $v\in W_0^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Mit $D^s v := (\nabla_j v_i + \nabla_i v_j)_{i,j=1,\dots n}$, der Poincaréschen und der ersten Kornschen Ungleichung

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \leq 2 \int_\Omega |D^s v|^2 \, dx, \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

folgt mit $c_1 > 0$ die Abschätzung

$$||R^T v||_{1,2}^2 \leq c_1 \int_\Omega |\nabla(R^T v) + \nabla(R^T v)|^2 \, dx \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n). \tag{4.40}$$

Eine Folgerung aus der zweiten Kornschen Ungleichung ist mit $c_2 > 0$ die Abschätzung

$$||v||_{1,2}^2 \leq c_2 \int_\Omega |D^s v|^2 \, dx$$

für alle

$$v \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n) \text{ mit } \int_\Omega v \, dx = 0 \text{ und } \int_\Omega \nabla v \, dx \in \mathbb{S}^n.$$

Daraus folgt mit $c_3 > 0$ die Abschätzung

$$||R^T v||_{1,2}^2 \leq c_3 \int_\Omega |\nabla(R^T v) + \nabla(R^T v)|^2 \, dx \tag{4.41}$$

für alle

$$v \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n) \text{ mit } \int_\Omega v \, dx = 0 \text{ und } R^T \int_\Omega \nabla v \, dx \in \mathbb{S}_n. \tag{4.42}$$

Insgesamt erhalten wir mit (4.40), (4.41) und $c_4 > 0$ die Abschätzung

$$||R^T v||_{1,2}^2 \leq c_4 \int_\Omega |\nabla(R^T v) + \nabla(R^T v)|^2 \, dx \tag{4.43}$$

für alle $v \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, die (4.42) erfüllen und für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$.
Es gilt

$$||v||_{1,2} \leq c_5 ||R^T v||_{1,2}, \quad \forall v \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n) \tag{4.44}$$

mit $c_5 > 0$ unabhängig von v. Lemma (4.4.3) zusammen mit (4.43) und (4.44) liefert die Behauptung. $\square$

Zusammen mit den Definitionen (1.5.1) und (4.4.1) folgt, dass jede Starrkörperbewegung ein Element aus $\mathcal{L}_{m+2,p}$ ist. Insbesondere ist die Identität eine Starrkörperbewegung.

4.5 Der linearisierte Elastizitätsoperator als analytische Funktion

Die folgenden Sätze zeigen, unter welchen Voraussetzungen der Elastizitätsoperator analytisch ist.

Definition 4.5.1 *Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $(x,y) \mapsto f(x,y)$ eine reellwertige C^∞-Funktion auf $\overline{\Omega} \times U$. Wir nennen f analytisch in y bei y_0 und gleichmäßig bezüglich x, wenn für jedes $x_0 \in \overline{\Omega}$ eine Umgebung U_0 von $(x_0, y_0) \in \overline{\Omega} \times U$ existiert, so dass*

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f_y^{(k)}(x, y_0)(y - y_0)^k \quad \forall (x,y) \in U_0. \tag{4.45}$$

Dabei ist $f_y^{(k)}(x, y_0)$ die k-te Ableitung der Funktion $y \mapsto f(x,y)$ bei y_0 und $(y-y_0)^k$ bezeichnet die multilineare Form $(\underbrace{y - y_0, \ldots, y - y_0}_{k-mal})$.
Wir nennen f analytisch in y und gleichmäßig in x, wenn für alle $y_0 \in U$, f analytisch ist in y bei y_0 und gleichmäßig in x. Die Definition gilt auch, wenn f eine $\mathbb{R}^M$-wertige Funktionen mit $M \geq 1$ ist.

Für kompaktes $\overline{\Omega}$ ist f analytisch in y bei y_0 und gleichmäßig in x genau dann, wenn es eine Umgebung V_0 von y_0 in U gibt, so dass (4.45) für alle $(x,y) \in \overline{\Omega} \times V_0$ gilt.

Satz 4.5.2 *Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ erfülle die Kegeleigenschaft, $m \geq 1$. Ist $f \in C^\infty(\overline{\Omega} \times U)$ und für $|\alpha| \leq m$ seien die Funktionen*

$$(x,y) \mapsto D_x^\alpha f(x,y)$$

analytisch in y und gleichmäßig in x. Ist $r > 0$ eine natürliche Zahl mit $(m+r)p > n$, dann ist $\sigma \mapsto F(\sigma)$ eine analytische Abbildung mit

$$F : \{\sigma \in W^{m+r,p}(\Omega, \mathbb{R}^N) : \sigma(\overline{\Omega}) \subset U\} \subset W^{m+r,p}(\Omega, \mathbb{R}^N) \to W^{m,p}(\Omega).$$

Beweis: Siehe Valent [25], Seite 39. □
Damit folgt der nächsten Satz.

Satz 4.5.3 *Erfülle $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ die Kegeleigenschaft, sei*

$$T \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \mathbb{M}_n^+, \mathbb{M}_n),$$

und für $|\alpha| \leq m+1$ seien die Funktionen $(x,Z) \mapsto D_x^\alpha T(x,Z)$ analytisch in Z und gleichmäßig in x. Dann ist für $(m+1)p > n$ der Elastizitätsoperator

$$\varphi \mapsto div\, T(\nabla \varphi)$$

eine analytische Abbildung von $(W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n))^+$ nach $W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Beweis: Mit Satz (4.5.2) und $(m+1)p > n$ folgt, dass $\nabla\varphi \mapsto T(\nabla\varphi)$ eine analytische Abbildung von $W^{m+1,p}(\Omega, \mathbb{M}^n)$ nach $W^{m+1}(\Omega, \mathbb{M}^n)$ ist.
Die Menge $(W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n))^+$ ist nach Satz (4.2.3) offene Teilmenge des affinen Teilraumes $(l_{\overline{\Omega}} + W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Der Operator *div* wirkt zeileneweise. Daher folgt für $\varphi \mapsto div\ T(\nabla\varphi)$ die Behauptung. □

4.6 Ein lokaler Existenzsatz für das Dirichlet Problem

Satz 4.6.1 (Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz) *Es sei $m \geq 0$, $p > n$, $\partial\Omega \in C^{m+2}$ und $T \in C^{m+2}(\overline{\Omega} \times \mathbb{M}^n_+, \mathbb{M}^n)$ die Antwortfunktion zum ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor. Dann gibt es für jedes $\varphi_0 \in \mathcal{L}_{m+2,p}$ Zahlen $\xi > 0$ und $\eta > 0$, so dass für alle $f \in W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $||f + div\, T(\nabla\varphi_0)||_{m,p} < \xi$ das Problem*

$$div\, T(x, \nabla\varphi) + f = 0 \ auf\ \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{4.46}$$

$$\varphi|_{\partial\Omega} = l_{\partial\Omega} \tag{4.47}$$

genau eine Lösung $\varphi(f) \in \mathcal{L}_{m+2,p} \subset W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $||\varphi(f) - \varphi_0||_{m+2,p} < \eta$ hat, wobei φ ein orientierungserhaltender C^1-Diffeomorphismus von $\overline{\Omega}$ auf $\overline{\Omega}$ ist. Weiter ist die Abbildung $f \mapsto \varphi(f)$ stetig differenzierbar, sie ist analytisch bei $div\, T(x, \nabla\varphi_0)$, wenn $T \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \mathbb{M}^n_+, \mathbb{M}^n)$ und für $|\alpha| \leq m+1$ die Funktionen $(x, Z) \mapsto D^\alpha_x T(x, Z)$ analytisch in Z und gleichmäßig bezüglich x sind.

Beweis: Mit Satz (4.2.3) folgt, dass $\mathcal{A}_{m+2,p} - l_{\overline{\Omega}}$ eine offene Teilmenge des Raumes $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ist. Lemma (4.3.1) zusammen mit $T \in C^{m+2}(\overline{\Omega} \times \mathbb{M}^n_+, \mathbb{M}^n)$ ergibt, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{m+2,p} - l_{\overline{\Omega}} \to &\quad W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \\ v \mapsto &\quad div\ T(\nabla(l_{\overline{\Omega}} + v)) \end{aligned}$$

stetig differenzierbar ist. Analog zur Definition (4.3.2) bezeichnen wir das Differential an einem beliebigen Punkt $\varphi_0 = l_{\overline{\Omega}} + v \in \mathcal{L}_{m+2,p}$ in Richtung ∇u mit $div\ L(\nabla u)$. Satz (4.4.2) besagt, dass die Menge $\mathcal{L}_{m+2,p}$ offen ist in $\mathcal{A}_{m+2,p}$. Zusammen mit Definition (4.4.1) und Satz (4.3.7) folgt, dass die stetig lineare Abbildung

$$\begin{aligned} div\ L(\nabla\cdot) : W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \to &\quad W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \\ u \mapsto &\quad div\ L(\nabla u). \end{aligned}$$

eine Bijektion ist. Nach dem Satz über die Umkehrabbildung (4.1.5) existieren für jedes $\varphi_0 \in \mathcal{L}_{m+2,p}$ offene Umgebungen U_0 von φ_0 und V_0 von

$div\, T(\nabla\varphi_0)$ mit

$$\begin{aligned} U_0 &\subset \mathcal{L}_{m+2,p} \subset (l_\Omega + W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)) \cap W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \\ V_0 &\subset W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

so dass der finite Elastizitätsoperator

$$\varphi \mapsto div\, T(\nabla\varphi) \tag{4.48}$$

ein C^1-Diffeomorphismus von $U_0 \to V_0$ ist.
Daher existieren Zahlen $\xi > 0$, $\eta > 0$, so dass das Problem (4.46), (4.47) für alle $f \in W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $||f + div\, T(\nabla\varphi_0)||_{m,p} < \xi$ genau eine Lösung $\varphi(f) \in W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $||\varphi(f) - \varphi_0||_{m+2,p} < \eta$ hat.
Sei nun $T \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \mathbb{M}^n_+, \mathbb{M}^n)$ und für $|\alpha| \leq m + 1$ seien die Funktionen $(x, Z) \mapsto D_x^\alpha T(x, Z)$ analytisch in Z und gleichmäßig bezüglich x.
Mit Satz (4.5.3) folgt, dass (4.48) analytisch ist von $(W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n))^+$ nach $W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Zusätzlich ist der Operator (4.48) ein C^1-Diffeomorphismus von U_0 auf V_0. Mit Satz (4.1.5) folgt, dass $f \mapsto \varphi(f)$ analytisch ist bei $div\; T(x, \nabla\varphi_0)$. $\square$

Dass die Antwortfunktion des inkompressiblen, anisotropen und hyperelastischen Myokards diesen Voraussetzungen genügt, zeigt der folgende Abschnitt. Mit der Bemerkung zu Satz (4.4.4) folgt, dass die Identität ein Element aus $\mathcal{L}_{m+2,p}$ ist. Gilt für die Deformation $\varphi_0 = id$, so befindet sich der Körper im Referenzzustand und es wirken keine Kräfte auf ihn. Der Satz (4.6.1) ist anwendbar und liefert uns lokale Existenz und Eindeutigkeit.
Zusätzlich kann die Dimension n frei gewählt werden. Für das Myokard $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ gilt $n = 3$.

Damit haben wir uns einen lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die stationäre nichtlineare Herzmechanik hergeleitet.

Wir zeigen nun eine Abschätzung für die Umgebung U_0 von $\varphi_0 = id \in \mathcal{L}_{m+2,p}$.

Satz 4.6.2 *Es gelten die Voraussetzungen und Notationen aus Satz* (4.6.1). *Sei $\varphi_0 = id$, dann gilt für alle $\varphi = id + u \in U_0$ die Abschätzung*

$$||u||_{m+2,p} < 1/K.$$

Dabei ist $K > 0$ eine von u unabhängige Konstante.

Beweis: Mit $m \geq 0$, $p > n = 3$ folgt die kompakte Einbettung

$$W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \Subset C^1_B(\Omega, \mathbb{R}^n) := \{u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) : \nabla u \text{ ist beschränkt auf } \Omega\},$$

siehe Valent [25], Seite 20. Wir betrachten daher die stetig differenzierbare Funktion

$$\varphi = id + u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Mit der von Neumann Reihe folgt, dass die Matrix

$$\nabla\varphi = \nabla(id + u) = I + \nabla u$$

invertierbar ist für alle $||\nabla u||_\infty < 1$. Wir definieren die konvexe Menge

$$U := \{\nabla\varphi = I + \nabla u : ||\nabla u||_\infty < 1\}.$$

Mit $\nabla\varphi \in U$ folgt daher $det\ \nabla\varphi \neq 0$. Die Determinantenfunktion ist stetig und somit gilt

$$det\nabla\varphi > 0, \qquad \forall\nabla\varphi \in U,$$

denn sonst existiert für $\nabla\psi \in U$ mit $det\nabla\psi = det(I + \nabla u) < 0$ ein $t \in]0, 1[$, so dass $I + t\nabla u \in U$ und $det(I + t\nabla\varphi) = 0$. Dies ist ein Widerspruch.
Ist $\varphi \in U_0$ so folgt $\nabla\varphi_0 \in U$. Nach Adams, [2] Seite 96 gibt es eine Einbettungskonstante $K > 0$, abhängig von Ω, der Dimension n und des Kegels aus der Kegelbedingung, so dass

$$||\nabla u||_\infty \leq K||\nabla u||_{m+1,p} = K||u||_{m+2,p}, \quad \forall u \in W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Mit $||u||_{m+2,p} < 1/K$ folgt die Behauptung. $\square$

4.7 Die Antwortfunktion für das Myokard

Costa et al [12] rechnet mit der Antwortfunktion des zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors, der sich aus dem Energiefunktional (4.49) ergibt. Diese Antwortfunktion ist allerdings vom Verzerrungstensor E abhängig.
Es ist $E = \frac{1}{2}(F^T F - I)$, mit $F = I$ folgt $E \notin \mathbb{M}^3_+$. Somit ist

$$\Sigma(x, E) \notin C^{m+2}(\overline{\Omega} \times \mathbb{M}^3_+, \mathbb{M}^3).$$

Wir benötigen zusätzlich die Antwortfunktion des ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors um Satz 4.6.1 anzuwenden. Die folgende Transformation ist also für die Anwendung des lokalen Existenzsatzes (4.6.1) notwendig. Wir betrachten das Energiefunktional

$$\hat{W}(x, E) = \frac{C}{2}(e^{\hat{Q}} - 1) - \frac{p}{2}(g^{(x)} - 1) \tag{4.49}$$

für das inkompressible, anisotrope und hyperelastische Myokard mit

$$\begin{aligned} \hat{Q} \;=\;& 2b_1(E_{11} + E_{22} + E_{33}) + b_2 E_{11}^2 + \\ & b_3(E_{22}^2 + E_{33}^2 + 2E_{23}E_{32}) + \\ & 2b_4(E_{12}E_{21} + E_{13}E_{31}). \end{aligned} \tag{4.50}$$

Das Energiefunktional (4.49) und die Konstanten sind aus Gleichung (2.29) bekannt. Aus Gleichung (4.50) folgt ($b_1 = 0,0$)

$$\hat{Q} = b_2 E_{11}^2 + b_3(E_{22}^2 + E_{33}^2 + 2E_{23}E_{32}) + 2b_4(E_{12}E_{21} + E_{13}E_{31}). \quad (4.51)$$

Die Matrix

$$E = \frac{1}{2}(C - I) \text{ mit } C = F^T F \quad (4.52)$$

ist symmetrisch. Mit (4.51) folgt

$$\hat{Q} = b_2 E_{11}^2 + b_3(E_{22}^2 + E_{33}^2 + 2E_{23}^2) + 2b_4(E_{12}^2 + E_{31}^2). \quad (4.53)$$

Für die Komponenten der Matrix E gilt:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{2}(C_{11} - 1), \quad E_{22} = \frac{1}{2}(C_{22} - 1), \quad E_{33} = \frac{1}{2}(C_{33} - 1), \\ E_{23} &= \frac{1}{2}C_{23}, \quad E_{12} = \frac{1}{2}C_{12}, \quad E_{31} = \frac{1}{2}C_{31}. \end{aligned}$$

Dies eingesetzt in Gleichung (4.53) ergibt

$$\begin{aligned} \hat{Q} = \; & \frac{b_2}{4}(C_{11} - 1)^2 + \\ & \frac{b_3}{4}\Big((C_{22} - 1)^2 + (C_{33} - 1)^2 + 2C_{23}^2\Big) + \\ & \frac{b_4}{2}\Big(C_{12}^2 + C_{13}^2\Big). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Um die folgenden Gleichungen übersichtlich darzustellen, verwenden wir die **Einsteinsche Summenkonvention**.
Mit der Gleichung (4.52) ergibt sich für die Komponenten der Matrix C

$$C = F^T F \Rightarrow C_{ij} = F_{ki}F_{kj} = \sum_{k=1}^{3} F_{ki}F_{kj}. \quad (4.55)$$

Mit (4.54) und (4.55) folgt

$$\begin{aligned} \hat{Q} = \; & \frac{b_2}{4}(F_{k1}F_{k1} - 1)^2 + \\ & \frac{b_3}{4}\Big((F_{k2}F_{k2} - 1)^2 + (F_{k3}F_{k3} - 1)^2 + 2(F_{k2}F_{k3})^2\Big) + \\ & \frac{b_4}{2}\Big((F_{k1}F_{k2})^2 + (F_{k1}F_{k3})^2\Big). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Insgesamt ergibt sich für die Gleichung (4.49)

$$\begin{aligned} \hat{W}(x, F) = \frac{C}{2}\Big\{ \; & exp \; \Big[\frac{b_2}{4}\Big(F_{k1}F_{k1} - 1\Big)^2 + \\ & \frac{b_3}{4}\Big((F_{k2}F_{k2} - 1)^2 + (F_{k3}F_{k3} - 1)^2 + 2(F_{k2}F_{k3})^2\Big) + \\ & \frac{b_4}{2}\Big((F_{k1}F_{k2})^2 + (F_{k1}F_{k3})^2\Big)\Big] \\ & -1 \; \Big\} - \frac{p}{2}\Big((detF)^2 - 1\Big). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Für die Komponenten der Antwortfunktion für den zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor gilt

$$\Sigma(x,F)_{ij} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial F_{ij}}(x,F) \qquad \forall F \in \mathbb{M}^3_+ \text{ mit } detF = 1.$$

Mit (1.17) und (1.18) erhalten wir die Antwortfunktion für den ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor durch

$$T(x,F) = F\,\Sigma(x,F).$$

Nach Konstruktion von $\hat{W}$ können wir $T \in C^{m+2}(\overline{\Omega} \times \mathbb{M}^3_+, \mathbb{M}^3)$ annehmen. Die Antwortfunktion für das Myokard erfüllt somit die Voraussetzung aus Satz (4.6.1).

Kapitel 5

Numerische Berechnungen

Die Wahrheit ist viel zu komplex,
als dass sie irgend etwas anderes als
Approximationen erlauben würde.
John von Neumann

Dieses Kapitel zeigt zwei Beispiele aus der nichtlinearen Elastizitätstheorie. Einfache, aber aussagekräftige geometrische Objekte zeigen, wie große Verschiebungen hyperelastisches und inkompressibles Material deformieren. Gleichzeitig zeigen diese Beispiele, dass die lineare Elastizitätstheorie hier nicht anwendbar ist und durch die nichtlineare Theorie ersetzt werden muß. Die Größe der Deformationen darf und kann hier nicht mehr ignoriert werden. Zusätzlich werden wir Materialkonstanten einführen und ihre physikalische Bedeutung erfahren.
Das FORTRAN Programm FLagSHyP (Finte element LArGe Strain HYperelasticity Program) von Javier Bonet und Richard D. Wood [9] führt die Berechnungen durch und ist unter
http://www.swansea.ac.uk/civeng/Research/Software/flagshyp/
zugänglich. Als Eingabedaten benötigt das Programm die Triangulierung mit den Randwertdaten, eine definierte Materialnummer mit den zugehörigen Eigenschaften Dichte und Dicke des Materials und die Lamé-Konstanten $\lambda > 0, \mu > 0$. Sie sind nur für homogene isotrope elastische Materialien definiert und ergeben sich aus der Darstellung der Antwortfunktion

$$\Sigma(E) = \lambda(spur(E))I + 2\mu E + o(E).$$

Dabei heißt ein Material homogen, wenn seine Antwortfunktion im Referenzzustand unabhängig ist von $x \in \overline{\Omega}$. Mit den Lamé-Konstanten lassen sich die Poissonzahl ν und das Elastizitätsmodul E berechnen. Es gilt

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \qquad \mathsf{E} = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}. \tag{5.1}$$

Die Poissonzahl beschreibt die Querkontraktion, so verringert sich z.B. der Durchmesser eines Stabes, wenn er gedehnt wird. Dieses Verhältnis gibt die

Poissonzahl wider. Es gilt $0 < \nu < 0,5$. Das Elastizitätsmodul kann physikalisch gedeutet werden als jene Spannung, die eine Werkstoffverlängerung auf das Doppelte bewirken würde. Die Lamé-Konstante λ beschreibt die Spannung infolge von Dichteänderung. Bei inkompressiblen Materialien, die keine Dichteänderung zulassen ist, $\lambda \to \infty$.

	E ($10^5 Kg/cm^2$)	ν	λ ($10^5 Kg/cm^2$)	μ ($10^5 Kg/cm^2$)
Stahl	21.00	0.28	10.00	8.20
Eisen	20.00	0.28	9.90	7.80
Kupfer	11.00	0.34	8.70	4.10
Bronze	10.00	0.31	6.20	3.80
Aluminium	7.00	0.34	5.60	2.60
Nickel	2.20	0, 30	1, 30	0.85
Gummi	0.037	0.485	0.40	0.012

Tabelle 5.1: Durchschnittswerte für die Konstanten E, ν, λ und μ

Bei den folgenden Beispielen wird eine Triangulierung mit bilinearen Viereckslementen benutzt. Das Programm FLagSHyP berechnet die Deformation und für jeden Gauß-Punkt die Spannung und die Dicke des deformierten Körpers. In unseren Beispielen wird die Spannung in der X,Y-Ebene berechnet.
Um die Spannung graphisch darzustellen, benutzen wir die von Mises Spannung, siehe [20], Seite 373. Zusammen mit der **ES** gilt für die von Mises Spannung m an einem Punkt x^φ im deformierten Körper

$$m = \sqrt{\frac{3}{2}\tilde{T}(x^\varphi)_{rs}\tilde{T}(x^\varphi)_{rs}}, \quad \text{mit} \quad \tilde{T}(x^\varphi)_{rs} := T^\varphi(x^\varphi)_{rs} - \frac{1}{3}T^\varphi(x^\varphi)_{kk}\delta_{rs}.$$

Wie üblich ist δ_{rs} das Kronecker-Symbol und T^φ der symmetrische Cauchysche Spannungstensor. Anschließend werden die Daten auf den Gauß-Punkten arithmetisch gemittelt und auf den zugehörigen Gitterpunkten übertragen. Mit dem Graphikprogramm plotmtv werden die Daten nachträglich visualisiert.

5.1 Hyperelastisches Material

Aus der Einleitung ist bekannt, dass das Myokard ein hyperelastisches inkompressibles Material ist, das während eines Herzzyklus Dehnungen von bis zu 30% ausgesetzt ist. Das erste Beispiel zeigt eine ausgestanzte, quadratische Platte. Das Material sei homogen, isotrop und hyperelastisch. Somit verhält sich die Platte wie das Herz geometrisch nichtlinear. Wir betrachten das Material mit der Dichte $\rho = 1.0$, der Wanddicke $h = 0.1$ und den Lamé-Konstanten $\lambda = 100$, $\mu = 100$. Für das Elastizitätsmodul und die Poissonzahl erhalten wir $\mathsf{E} = 250$ und $\nu = 0.25$.
FLagHysP berechnet uns die Deformation, die Dicke der deformierten Platte und die Spannungen in der $X, Y-$Richtung. Für den symmetrischen Cauchy-Greenschen Verzerrungstensor gilt

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{pmatrix}, \text{ mit } C_{33} = \frac{h^2}{H^2}.$$

Dabei steht H für die Dicke der Platte nach der Deformation. Die reellen Eigenwerte λ_1 und λ_2, der oberen symmetrischen 2×2 Matrix geben die Ausdehnungen in den Hauptrichtungen an, die durch die zugehörigen Eigenvektoren gegeben sind. Wir betrachten nun das Energiefunktional, das über die Eigenwerte definiert ist

$$E(\lambda_1, \lambda_2) = \mu((\ln \lambda_1)^2 + (\ln \lambda_2)^2) + \frac{\overline{\lambda}}{2}(\ln j)^2,$$

mit

$$\begin{array}{rclrcl} \overline{\lambda} & = & \gamma\lambda, & \gamma & = & \frac{2\mu}{\lambda+2\mu} \\ j^\gamma & = & J, & J^2 & = & det\ C. \end{array}$$

Die Abbildung (5.1) zeigt die Platte im nichtdeformierten Referenzzustand. Zu erkennen sind die Triangulierung und sechs markierten Punkte. Die Abbildung (5.2) zeigt die Platte im deformierten Gleichgewichtszustand, nachdem der linke und rechte Rand um jeweils 1.8 Einheiten verschoben wurde. Dies entspricht einer Dehnung um den Faktor 1.2 in X-Richtung. Dadurch reduziert sich die Y-Ausdehnung um den Faktor 1.08 und die Wanddicke der Platte h um den Faktor 1.078. Für die markierten Punkte aus Abbildung (5.1) ergibt sich die Deformation in X, Y-Richtung

$$\begin{array}{ll} \varphi(4.00, 0.00) = (5.69, 0.00) & \varphi(9.00, 0.00) \;=\; (10.80, 0.00) \\ \varphi(9.00, 9.00) = (10.80, 9.00) & \varphi(0.00, 9.00) \;=\; (0.00, 8.34) \\ \varphi(0.00, 4.00) = (0.00, 3.58) & \varphi(5.91, 5.91) \;=\; (7.21, 5.80). \end{array}$$

Die Abbildung (5.3) zeigt die von Mises Spannungen in der deformierten Platte in X,Y-Richtung. Die unterschiedliche Wanddicke der Platte ist in der

Abbildung (5.4) zu sehen. Der geometrische Unterschied zwischen der deformierten und der nichtdeformierten Platte ist deutlich zu erkennen und kann nicht ignoriert werden.
Wir wissen, dass die lineare Elastizitätstheorie bei Dehnungen über 10% keine akzeptablen Ergebnisse mehr liefert. Die Dehnung von 20% in X-Richtung und die dadurch entstehenden Dehnungen in Y- und Z-Richtung zeigen zusammen mit der hyperelastischen Eigenschaft, dass die nichtlineare Elastizitätstheorie für dieses Beispiel zwingend erforderlich ist.

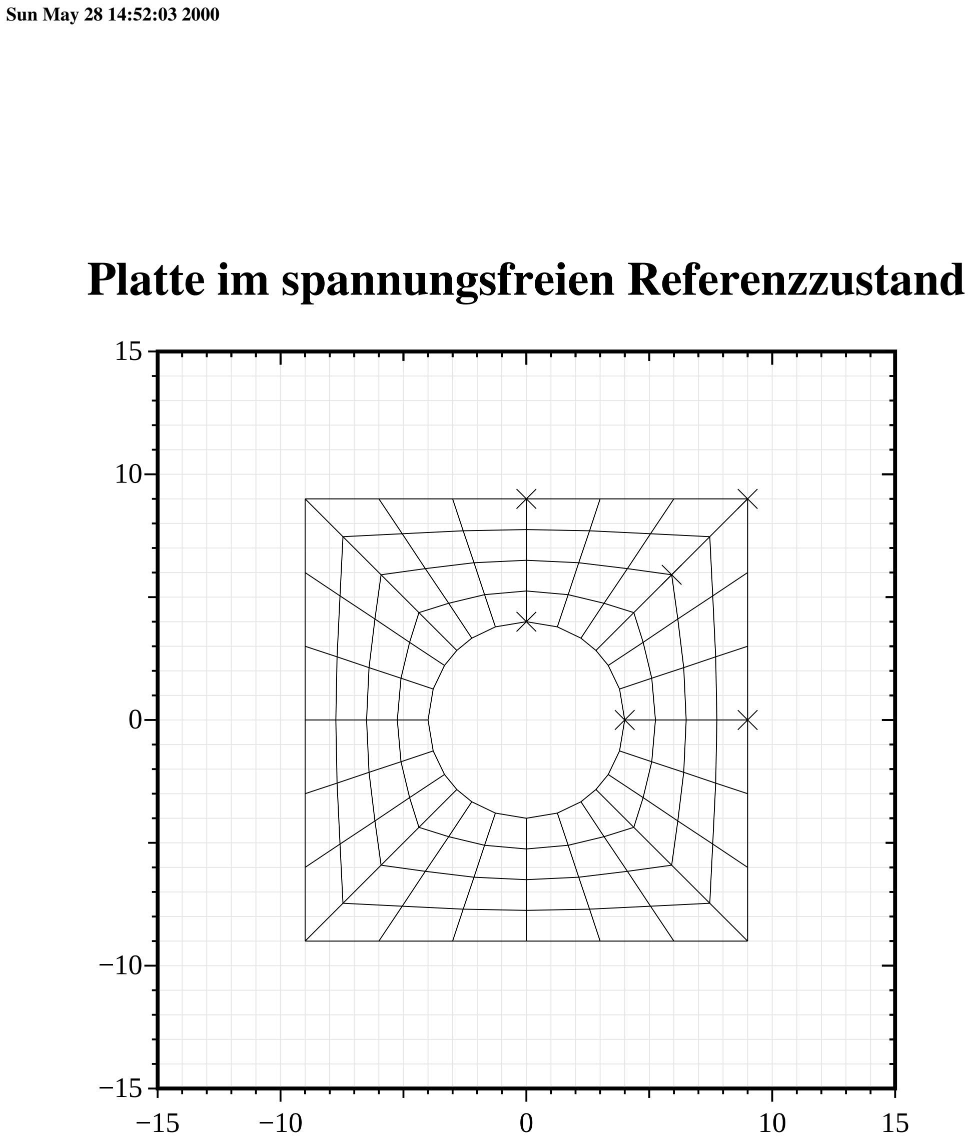

Abbildung 5.1:

Tue May 30 19:20:21 2000

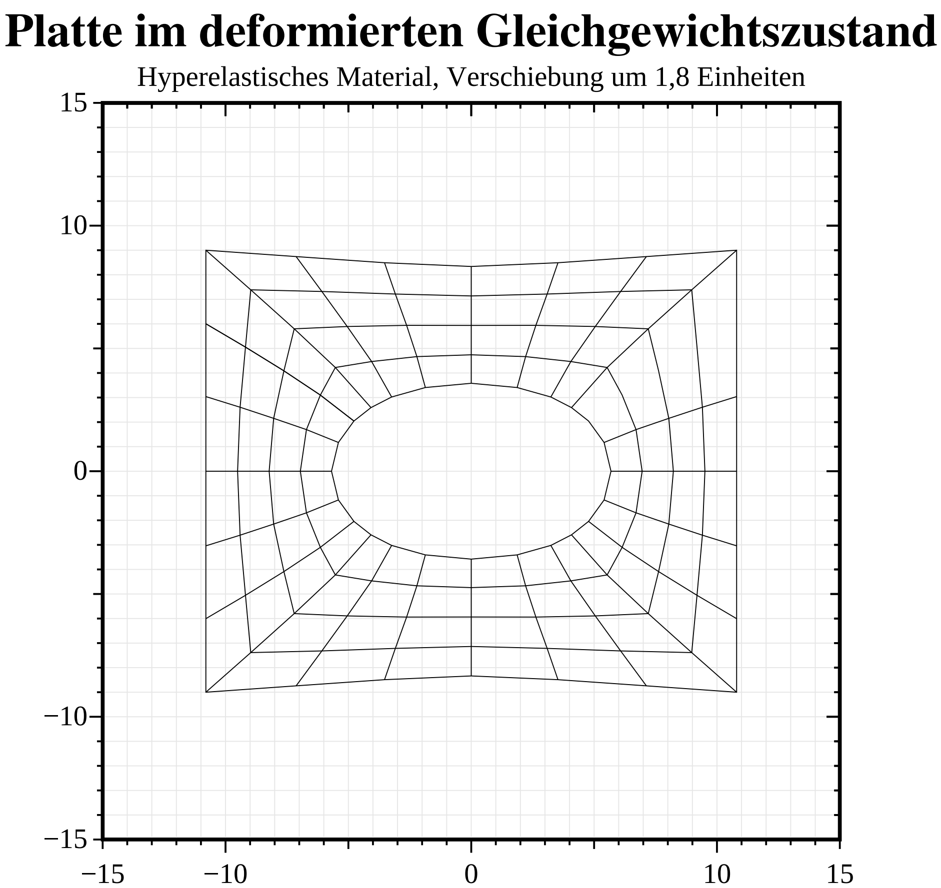

Abbildung 5.2:

Thu Jun 1 20:43:43 2000

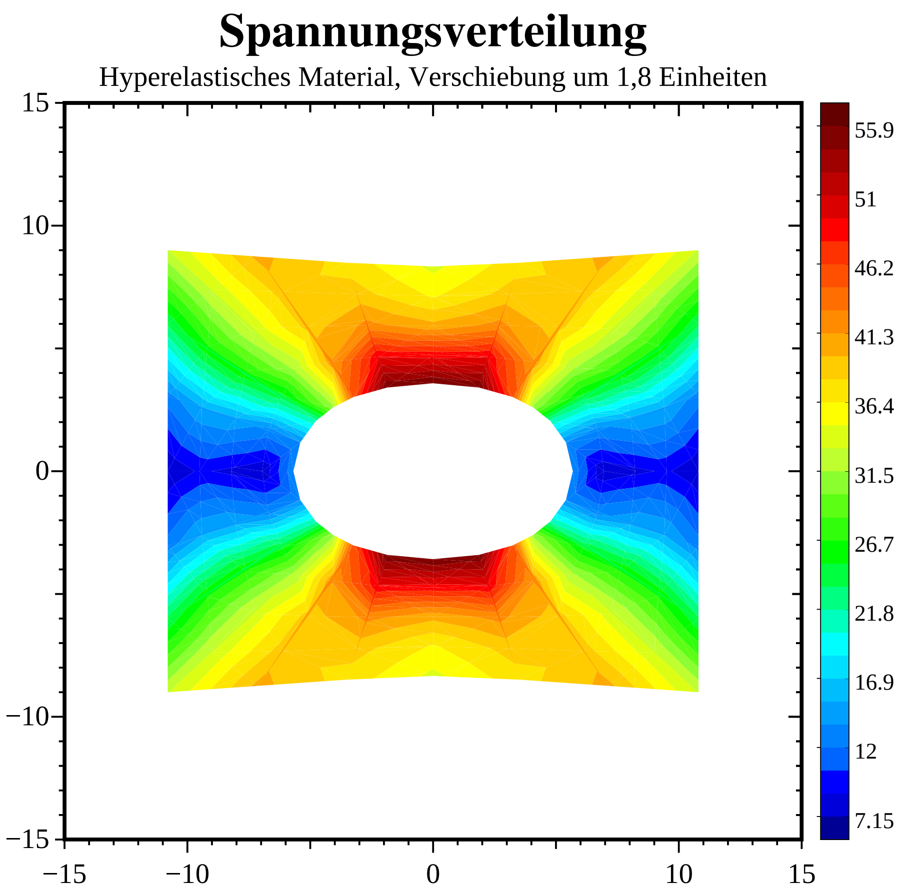

Abbildung 5.3:

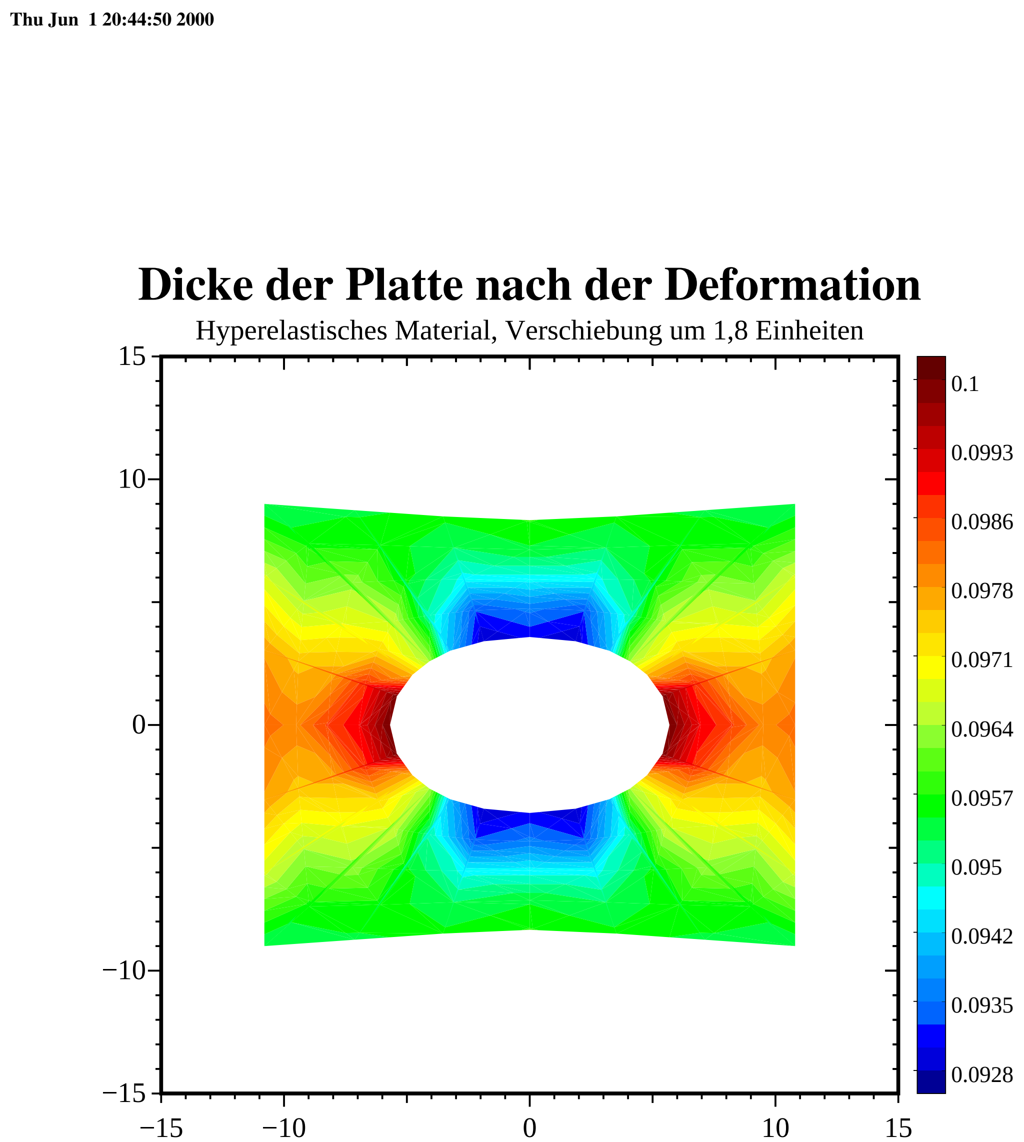

Abbildung 5.4:

5.2 Inkompressibles Neo-Hooke Material

Dieses Beispiel zeigt die Platte aus dem ersten Beispiel; diesmal bestehend aus inkompressiblen Neo-Hooke Material. Inkompressible Materialien wie das Myokard verändern ihr Volumen durch eine Deformation nicht. Für sie gilt $detF = 1$. Neo-Hooke Materialien sind hyperelastisch und besitzen ein Energiefunktional der Gestalt

$$W(C) = \frac{\mu}{2}(spur\ C\ - 3) - \mu \ln J + \frac{\lambda}{2}(\ln J)^2, \text{ mit } J^2 = detC,$$

und C als Cauchy-Greenscher Verzerrungstensor, siehe Bonet [9], Seite 124. Für inkompressibles Material gilt $detC = detF^T F = detF^T \cdot detF = 1$. Die Energiefunktionale für inkompressible Neo-Hooke Materialien reduzieren sich somit auf

$$W(C) = \frac{\mu}{2}(spur\ C\ - 3).$$

Costa et al [12] benutzt für eine einfache Modellierung des Myokards ein inkompressibles Neo-Hooke Material.
Wir betrachten das Material Nr. 6 aus den Programm FLagSHyP mit der Dichte $\rho = 1.0$, der Wanddicke $h = 0.1$ und der Lamé-Konstante $\mu = 100$. Bei inkompressiblen Materialien ist die Lamé-Konstante λ unbeschränkt. Wir betrachten die Grenzwerte aus (5.1) und setzen $\nu = 0.5$ und $\mathsf{E} = 300$.
Wie im ersten Beispiel können wir die Ergebnisse mit der Abbildung (5.1) vergleichen. Die Abbildung (5.5) zeigt uns die deformierte Platte im Gleichgewichtszustand, nachdem wir den linken und rechten Rand um jeweils 10 Einheiten verschoben haben. Dies entspricht einer Dehnung um den Faktor 2 in X-Richtung. Dadurch reduziert sich die Y-Ausdehnung der inkompressiblen Platte um den Faktor 1.41, für die Plattendicke erhalten wir den Faktor 1.83. Wir erhalten für unsere sechs markierten Punkte aus Abbildung (5.1) die Deformation

$$\begin{array}{ll} \varphi(4.00, 0.00) = (12.97, 0.00) & \varphi(9.00, 0.00) \;=\; (19.00, 0.00) \\ \varphi(9.00, 9.00) = (19.00, 9.00) & \varphi(0.00, 9.00) \;=\; (0.00, 6.35) \\ \varphi(0.00, 4.00) = (0.00, 3.18) & \varphi(5.91, 5.91) \;=\; (13.31, 5.13). \end{array}$$

Die Dehnungen sind hier offensichtlich größer als im ersten Beispiel. Das Neo-Hooke-Material zusammen mit den Dehnungen in X-,Y- und Z-Richtung zeigt uns, dass auch hier die nichtlineare Elastizitätstheorie zwingend erforderlich ist.

Tue May 30 11:13:39 2000

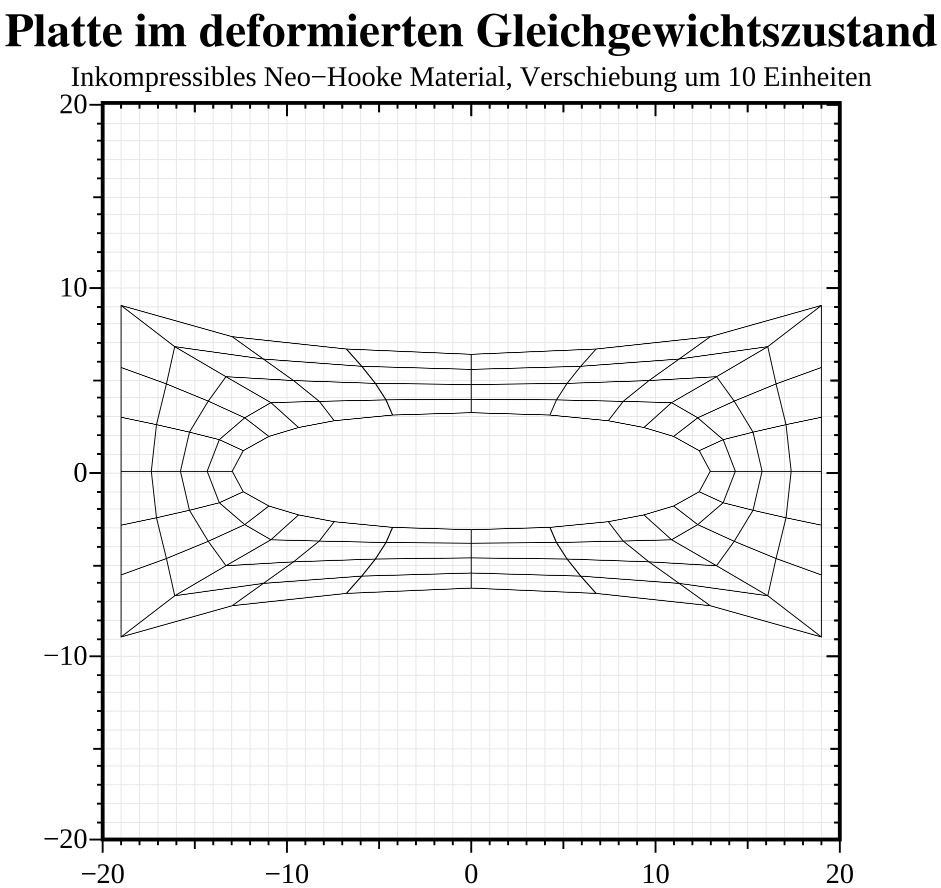

Abbildung 5.5:

Thu Jun 1 20:39:40 2000

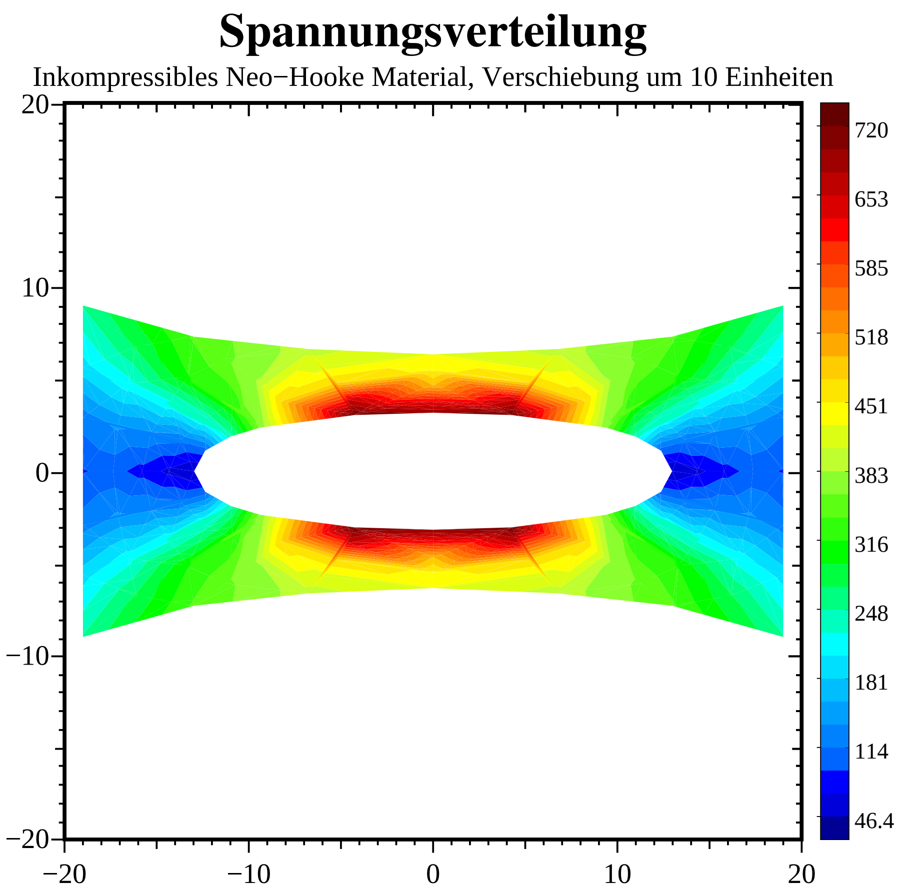

Abbildung 5.6:

Fri Jun 2 18:39:59 2000

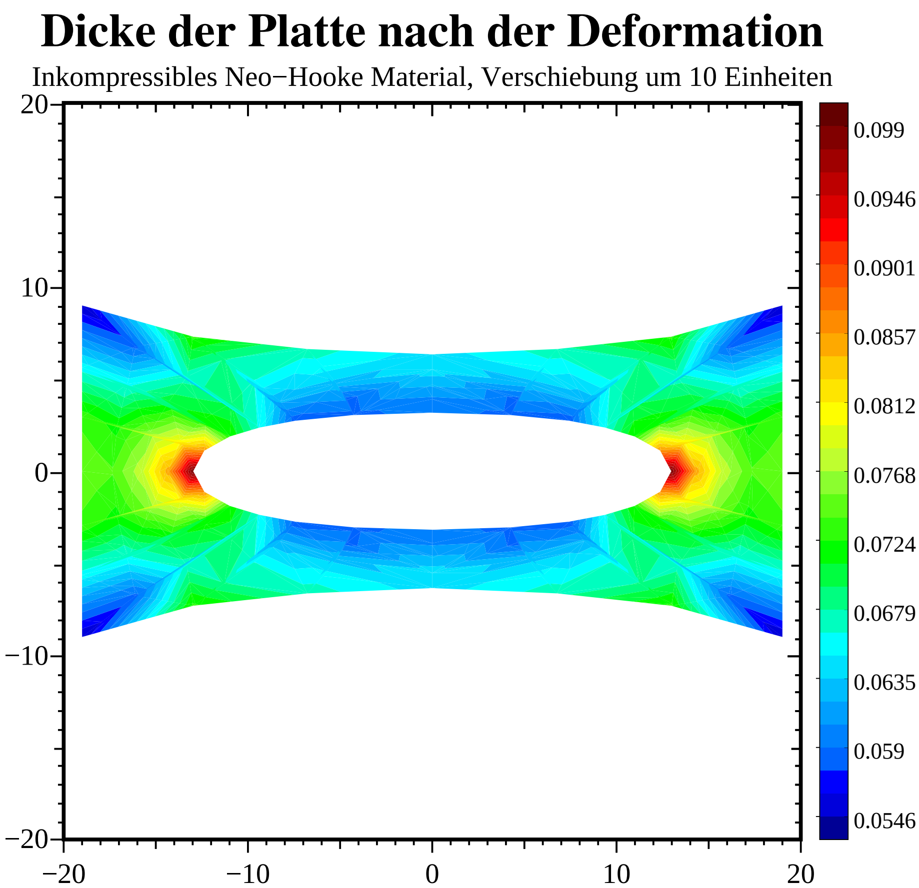

Abbildung 5.7:

Kapitel 6

Abschließende Beurteilung

Der Wille ist menschlich,
und die Ausführung beschränkt.
Der Wunsch ist ohne Grenzen
und die Tat ist eingezwängt
William Shakespeare

Wir wissen, dass hyperelastische Materialien Energiefunktionale besitzen und diese aus physikalischen Gründen nicht konvex sein können. Die Existenz einer Lösung für das zugehörige Variationsproblem ist daher nicht durch den Satz von Lax-Milgram gesichert.
Dies führte uns zu den polykonvexen Funktionen und zu den Existenzsatz von Ball. Wir haben gezeigt, dass das Energiefunktional des Myokards nicht polykonvex ist. Der Satz Ball ist daher nicht anwendbar.
Um Satz (2.6.2) anzuwenden, müssen wir unter anderem zeigen, dass die Gesamtenergie eine schwach unterhalbstetige Funktion ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn das Energiefunktional quasikonvex ist. Konvexe bzw. polykonvexe Funktionen sind stets quasikonvex. Sind diese Voraussetzung nicht erfüllt, so gilt der Nachweis als sehr schwer. Es sei bemerkt, dass es nichtkonvexe schwach unterhalbstetige Funktionen gibt. Zusätzlich müssen wir zeigen, dass die Definitionsmenge $\mathbb{M}^3_+$ schwach kompakt ist. Für konvexe abgeschlossene Mengen ist auch dies bekannt. Die zwei Diagonalmatrizen $diag(2,2,2)$ und $diag(-1,-4,1)$ zeigen jedoch, dass die Menge $\mathbb{M}^3_+$ nicht konvex ist.
Auf der einen Seite erkennen wir, dass konvexe Funktionen und konvexe Mengen sehr hilfreich sind, um die Existenz einer Lösung zu zeigen. Auf der anderen Seite bietet die Elastizitätstheorie keine konvexen Funktionale und keine konvexen Mengen. Schwächere Konvexitätsbegriffe halfen uns nicht weiter, einen Existenzsatz für die stationäre nichtlineare Herzmechanik herzuleiten.

Die Antwortfunktion eines hyperelastischen Materials ist gemäß Definition die Jacobi-Matrix des Energiefunktionals. Der Satz von Cauchy (1.2.2), zusammen mit der Piola-Transformation, führt auf ein nichtlineares elliptisches System von partiellen Differentialgleichungen. Dieses System beschreibt das Myokard im Gleichgewichtszustand und ist somit ein Modell für die stationäre nichtlineare Herzmechanik. Das System bezeichnet man auch als Elastizitätsoperator, passende Sobolev-Räume haben wir über $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ fixiert. Aus Stetigkeitsgründen sind diese Sobolev-Räume keine Hilbert-Räume. Wir haben gezeigt, dass der Operator differenzierbar ist und dass das Differential für alle $\varphi \in \mathcal{L}_{m+2,p}$ bijektiv ist. Um die Bijektion nachzuweisen, zeigten wir unter anderem, dass der Laplace-Operator

$$\Delta : W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap W^{m+2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \to W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

für $m \geq 0$ und $p > n$ ein Homöomorphismus ist. Wegen $p > n = 3$ haben wir auch hier keine Hilbert-Räume vorliegen. Deshalb ist der Satz von Lax-Milgram auch hier nicht anwendbar. Die Menge $\mathcal{L}_{m+2,p}$ haben wir charakterisiert und gezeigt, dass Starrkörperbewegungen zu ihr gehören. Der Satz über die Umkehrabbildung garantiert uns für jedes $\varphi \in \mathcal{L}_{m+2,p}$ eine Umgebung, in der eine eindeutige Lösung existiert. Analytische Voraussetzungen für den Elastizitätsoperator zeigen, dass die Abbildung $f \mapsto \varphi(f)$ analytisch ist. Die Deformation $\varphi = id$ ist eine Starrkörperbewegung und folglich ein Element der Menge $\mathcal{L}_{m+2,p}$. Somit haben wir uns einen lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die nichtlineare stationäre Herzmechanik hergeleitet.

Ein weiteres Ziel war es, die Umgebung U_0 um den Punkt $\varphi_0 = id$ abzuschätzen, für die uns der Satz (4.6.1) eine eindeutige Lösung garantiert. Wir haben die Abschätzung

$$||u||_{m+2,p} < 1/K, \qquad \forall\, \varphi = id + u \in U_0 \tag{6.1}$$

gezeigt. Dabei ist die Einbettungskonstante $K > 0$ nur von $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, der Dimension n und des Kegels aus der Kegelbedingung abhängig. Materialeigenschaften die im Elastizitätsoperator enthalten sind, werden also nicht berücksichtigt. Abhilfe liefert hier eine Abschätzung für die Umgebungen, wo der Elastizitätsoperator ein Diffeomorphismus ist. Hierfür sollte ein St.Venant-Kirchhoff Material mit der Antwortfunktion

$$\Sigma(E) = \lambda spur(E)I + 2\mu E$$

betrachtet werden. St.Venant-Kirchhoff Materialien sind hyperelastisch und besitzen ein nicht polykonvexes Energiefunktional der Gestalt

$$W(E) = \frac{\lambda}{2}(spur E)^2 + \mu\, spur(E^2),$$

siehe [11], Seite 183. Im Anhang findet sich die Abschätzungen für diese Umgebungen. Probleme treten bei der Normabschätzung für die Inverse des Differentials auf. Der Satz (4.6.1) zeigt, dass diese Inverse existiert, eine Normabschätzung ist aber nicht gelungen. Der Grund dafür liegt in der Darstellung des linearisierten Elastizitätsoperators

$$u \mapsto div\Big(\sum_{k,h=1}^{3} T_{Z_{hk}}(\nabla\varphi_0)\nabla_k u_h\Big).$$

Der Satz A.1 liefert uns zwar die Umgebungen, wo der Elastizitätsoperator ein Diffeomorphismus ist, dabei wird die Nebenbedingung $\varphi \in \mathcal{L}_{m+2,p}$ allerdings nicht berücksichtigt.
Wir wissen aber, dass die Abschätzung (6.1) erfüllt sein muss. Somit erhalten wir eine Abschätzung für die Verschiebung u in Abhängigkeit des Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und der Materialeigenschaft, die im Elastizitätsoperator enthalten ist. Für ein St.Venant-Kirchhoff Material ist die Materialeigenschaft durch die Lamé-Konstanten λ und μ gegeben.

Wir haben gesehen, dass St.Venant-Kirchhoff Materialien hyperelastisch sind und nicht polykonvexe Energiefunktionale besitzen. Einen allgemeinen Existenzsatz für große Dehnungen scheint es für diese Materialien nicht zu geben. Trotzdem präsentieren Bonet und Wood [9] ein Programm, welches Berechnungen für hyperelastische Materialien durchführt. Existenzsätze werden von den Autoren leider nicht behandelt. Die geometrische Veränderung des Materials wird von FLagSHyP berücksichtigt. Desweitern können inkompressible Materialien berechnet werden. Das Programm eignet sich nicht, um anisotrope Materialien wie das Myokard zu modellieren.

Um eine Beziehung zur Herzmechanik herzustellen, wählte ich ein hyperelastisches und ein inkompressibles Neo-Hooke Material. Costa et al [12] benutzte für eine einfache Modellierung des Myokards ebenfalls ein inkompressibles Neo-Hooke Material. Dabei wird das transversisotropische Verhalten des Myokards jedoch nicht berücksichtigt. Wird dagegen das Energiefunktional (1.29) betrachtet, so fließt die Anisotropie des Myokards mit ein. Auch Costa et al [12], [13] erwähnt keine Existenzsätze. Die Triangulierung unserer Platten mag etwas grob erscheinen, sie ist aber noch ausreichend, um die gewünschten Effekte sichtbar zu machen. Deutlich zu erkennen sind die Deformationen in der $X, Y-$Richtung, der dadurch herbeigeführte Materialschwund in der $Z-$Richtung und die Spannungsverteilung.

Anhang A

Anhang

A.1 Abschätzung für die Umkehrabbildung

Satz A.1.1 *Seien E und F Banach-Räume und $f : U \subset E \to F$ aus $C^r, r \geq 2$, $x_0 \in U$, $Df(x_0)$ ein Isomorphismus mit*

$$L = ||Df(x_0)|| \quad \textit{und} \quad M = ||Df(x_0)^{-1}||.$$

Weiter sei

$$||D^2 f(x)|| \leq K \quad \textit{für} \quad ||x - x_0|| \leq R \quad \textit{mit} \quad \overline{B_R(x_0)} \subset U$$

und

$$\begin{aligned} P &= \min\left\{\frac{1}{2KM}, R\right\}, \\ Q &= \frac{P}{4M}. \end{aligned}$$

Dann bildet f die offene Menge $B_P(x_0)$ diffeomorph auf $B_Q(f(x_0))$ ab. Für $y_1, y_2 \in \overline{B_Q(f(x_0))}$ gilt $||f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)|| \leq 2M||y_1 - y_2||$.

Beweis: Wir können $x_0 = 0, f(x_0) = 0$ und $E = F$ annehmen. Von der Identität

$$Df(x) = Df(0) + \int_0^1 D^2 f(tx)x dt$$

erhalten wir $||Df(x)|| \leq L + K||x||$ für $x \in \overline{B_R(0)}$.
Wir betrachten nun die von Neumann Reihe

$$||(I + A)^{-1}|| \leq \sum_{k=0}^{\infty} ||A||^k = \frac{1}{1 - ||A||}$$

für $||A|| < 1$ und

$$Df(x) = Df(0)\Big(I + (Df(0))^{-1}\int_0^1 D^2 f(tx)xdt\Big).$$

Sei nun

$$\begin{aligned} A &:= \Big(Df(0)\Big)^{-1}\int_0^1 D^2 f(tx)xdt \\ \Rightarrow \quad ||A|| &\leq ||Df(0)^{-1}|| \cdot ||D^2 f(tx)|| \cdot ||x|| \\ \Rightarrow \quad ||A|| &\leq MK \cdot ||x||. \end{aligned}$$

Damit $||A|| \leq \frac{1}{2} < 1$ ist, muß

$$||x|| \leq \frac{1}{2MK} \quad \text{ und } \quad ||x|| \leq R$$

sein. Nun kann die von Neumann Reihe angewandt werden, es folgt

$$||Df(x)^{-1}|| \leq \frac{||Df(0)^{-1}||}{1 - ||A||} \leq 2M, \text{ für } ||x|| \leq P.$$

Sei nun

$$g_y(x) := \Big(Df(0)\Big)^{-1}\Big(y + Df(0)x - f(x)\Big),$$

mit $y \in \overline{B_Q(f(0))}$. Wir schreiben

$$\varphi(x) := Df(0)\cdot x - f(x) = \int_0^1 D\varphi(sx)\cdot xds = -\int_0^1\int_0^1 D^2 f(tsx)\cdot(sx, x)dtds.$$

Das zweite Gleichheitszeichen erhält man durch zweifache Anwendung des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung, angewandt auf $Df(0)\cdot x - f(x)$. Somit erhalten wir

$$g_y(x) = \Big(Df(0)^{-1}\Big)\cdot\Big(y + \varphi(x)\Big), \quad ||\varphi(x)|| \leq \frac{K}{2}||x||^2 \quad \text{für} \quad ||x|| \leq R.$$

Sei nun $||y|| \leq \frac{P}{4M}$, mit $||x|| \leq P \leq \frac{1}{2MK}$ folgt

$$\begin{aligned} ||g_y(x)|| &\leq M\Big(||y|| + \frac{K}{2}||x||^2\Big) \leq M\Big(\frac{P}{4M} + \frac{K}{2}||x||^2\Big) \leq M\Big(\frac{P}{4M} + \frac{K}{2}P^2\Big) \\ &\leq M\Big(\frac{P}{4M} + \frac{KP}{4MK}\Big) \\ &= \frac{P}{2}. \end{aligned}$$

Ist $||y||$ und $||x||$ wie oben gewählt, so folgt

$$g_y : \overline{B_P(0)} \to \overline{B_{P/2}(0)}.$$

Wir zeigen nun, dass $g_y(x)$ eine Kontraktion ist, indem wir $g_y(x)$ differenzieren.

$$\begin{aligned}
Dg_y(x) &= D\Big(Df(0)^{-1}(y + Df(0)x - f(x))\Big) \\
&= Df(0)^{-1}\Big(Dy + Df(0) - Df(x)\Big) \\
&= Df(0)^{-1}\Big(0 + Df(0) - Df(x)\Big) \\
&= Df(0)^{-1}\Big(-\int_0^1 D^2 f(xs)x ds\Big) \\
\Rightarrow ||Dg_y(x)|| &\leq ||Df(0)^{-1}|| \quad \left|\left|\int_0^1 D^2 f(xs)x ds\right|\right| \\
&\leq MK||x|| \\
&\leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Mit dem Mittelwertsatz folgt

$$||g_y(x_1) - g_y(x_2)|| \leq \frac{1}{2}||x_1 - x_2|| \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in \overline{B_P(0)} \tag{A.1}$$

damit ist gezeigt, dass $g_y(x)$ auf $\overline{B_P(0)}$ eine Kontraktion ist. Somit besitzt $g_y(x)$ genau einen Fixpunkt in $\overline{B_P(0)}$.
Sei nun $\hat{x}$ dieser eindeutige Fixpunkt zu festen $y \in \overline{B_Q(0)}$, es folgt

$$\begin{aligned}
& g_y(\hat{x}) = Df(0)^{-1}\Big(y + Df(0)\hat{x} - f(\hat{x})\Big) = \hat{x} \\
\Rightarrow\quad & Df(0)^{-1}\Big(y - f(\hat{x})\Big) + \hat{x} = \hat{x} \\
\Rightarrow\quad & f(\hat{x}) = y
\end{aligned}$$

Der Fixpunkt $\hat{x}$ ist somit eindeutige Lösung der Gleichung $f(\hat{x}) = y$ mit $y \in \overline{B_Q(0)}$. Folglich besitzt f eine Umkehrfunktion mit

$$f^{-1} : \overline{B_Q(0)} \to \overline{B_P(0)}.$$

Um die Stetigkeit von f^{-1} auf $\overline{B_Q(0)}$ zu zeigen, betrachte für festes y und $x_1, x_2 \in \overline{B_P(0)}$ die Gleichung $(A.1)$

$$\begin{aligned}
& ||g_y(x_1) - g_y(x_2)|| \leq \frac{1}{2}||x_1 - x_2|| \\
\Rightarrow\quad & \left|\left|Df(0)^{-1}\Big(y + Df(0)x_1 - f(x_1) - \Big(y + Df(0)x_2 - f(x_2)\Big)\Big)\right|\right| \leq \frac{1}{2}\left|\left|x_1 - x_2\right|\right| \\
\Rightarrow\quad & ||x_1 - x_2 + Df(0)^{-1}(f(x_2) - f(x_1))|| \leq \frac{1}{2}||x_1 - x_2|| \\
\Rightarrow\quad & ||x_1 - x_2|| - ||Df(0)^{-1}(f(x_2) - f(x_1))|| \leq \frac{1}{2}||x_1 - x_2|| \\
\Rightarrow\quad & \frac{1}{2}||x_1 - x_2|| \leq ||Df(0)^{-1}|| \cdot ||(f(x_1) - f(x_2)|| \\
\Rightarrow\quad & ||x_1 - x_2|| \leq 2M||f(x_1) - f(x_2)|| \\
\Rightarrow\quad & ||f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)|| \leq 2M||y_1 - y_2||,
\end{aligned}$$

mit $f^{-1}(y_i) = x_i$ und $y_i = f(x_i)$. Damit ist f^{-1} auf $\overline{B_Q(0)}$ stetig.
Wir zeigen nun, dass f auf einer offenen Menge $G \subset \overline{B_P(0)}$ diffeomorph ist. Da f stetig differenzierbar ist, findet sich ein $r > 0$ und ein $T \in \mathbb{R}$, so dass $||Df(x)^{-1}|| \leq T$ für alle $x \in B_r(0) \subset \overline{B_P(0)}$. Für $y_1, y_2 \in \overline{B_{r/4M}(0)}$ sei $x_1 = f^{-1}(y_1)$ und $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Es folgt

$$\begin{aligned}
& ||f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2) - Df(x_2)^{-1} \cdot (y_1 - y_2)|| \\
= \; & ||x_1 - x_2 - Df(x_2)^{-1} \cdot (f(x_1) - f(x_2))|| \\
= \; & ||Df(x_2)^{-1} \cdot (Df(x_2) \cdot (x_1 - x_2) - f(x_1) + f(x_2))|| \\
\leq \; & T||f(x_1) - f(x_2) - Df(x_2) \cdot (x_1 - x_2)||.
\end{aligned}$$

Zusammen mit der Stetigkeit von f^{-1} folgt, dass f^{-1} bei $f(x) = y$ differenzierbar ist mit der Ableitung $Df(x)^{-1}$ auf $B_{r/4M}(0)$. Damit ist gezeigt, dass f ein Diffeomorphismus von $B_P(0)$ auf $B_Q(0)$ ist. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] Abraham, R., Marsden, J.E.,Ratiu T.
Manifolds, Tensor Analysis, and Applications Second Edition
Springer Verlag, Applied Mathematical Sciences 75, 1988

[2] Adams R. A.
Sobolev Spaces
Academic Press, Inc New York, 1975

[3] Agmon Shmuel
Lectures On Elliptic Boundary Value Problems
Van Nostrand Mathematical Studies 1965

[4] Agmon, S., Douglis, A., Nirenberg, L.
Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I.
Comm.Pure Appl. Math. 12, 623-727, 1959

[5] Agmon, S., Douglis, A., Nirenberg, L.
Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, II.
Comm.Pure Appl. Math. 17, 35-92, 1964

[6] Alt, Hans Wilhelm
Lineare Funktionalanalysis
Eine anwendungsorientierte Einführung, 2. Auflage
Springer-Verlag, 1992

[7] Antman Stuart S.
Nonlinear Problems of Elasticity
Springer-Verlag, Applied Mathematical Sciences Volume 107, 1995

[8] Ball, J.M.
Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity
Arch.Rational. Mech.Anal. 63, 337-403, 1977

[9] Bonet, J., Wood, R.D.
Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis
Cambridge University Press 1999, 2.Auflage

[10] Braess Dietrich
Finite Elemente
Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie
Springer Verlag, 1997, 2. Auflage

[11] Ciarlet, Philippe G.
Mathematical Elasticity, Volume I:
Three-Dimensional Elasticity
North-Holland, Studies in Mathematics And Its Applications,Volume 20, 1988

[12] Costa,K.,Hunter,P.,Rogers,J.,Guccione,J.,Waldman,L.,McCulloch,A.
A three-dimensional finite element method for large elastic deformations of ventricular myocardium: I-cylindrical and spherical polar coordinates
Transactions of the ASME, Vol. 118,November 1996

[13] Costa,K.,Hunter,P.,Rogers,J.,Guccione,J.,Waldman,L.,McCulloch,A.
A three-dimensional finite element method for large elastic deformations of ventricular myocardium: II-prolate spheroidal coordinates
Transactions of the ASME, Vol. 118,November 1996

[14] Dacorogna B.
Direct Methods in the Calculus of Variations
Springer Verlag, Applied Mathematical Sciences Volume 78, 1989

[15] Drozdov Aleksey D.
Finite Elasticity And Viscoelasticity, A Course in the Nonlinear Mechanics of Solids
World Scientific, 1996

[16] Ekeland I., Temam R.
Convex Analysis And Variational Problems
North-Holland, Studies in Mathematics And Its Applications,Volume 1, 1976,

[17] Evans, Lawrence C.
Partial Differential Equations
Graduate Studies in Mathematics Volume 1998

[18] Fichera, G.
Existence theorems in elasticity
In: Handbuch der Physik, Vol. IVa/2. Springer-Verlag, Berlin 1972

[19] Hirzebruch F., Scharlau W.
Einführung in die Funktionalanlysis, 1996
Spektrum Akademischer Verlag

[20] Langtangen Hans Petter
Computational Partial Differential Equations
Numerical Methods and Diffpack Programming
Lecture Notes in Computational Science and Engineering 2
Springer 1999

[21] Marsden, J., Hughes, T.,J.,R.
Mathematical Foundations of Elasticity
Dover Publications, Inc, 1994

[22] Simader, Christian G.
On dirichlet's Boundary Value Problem
Lecture Notes in Mathematics, Vol.268, Springer-Verlag,Berlin, 1972

[23] Spencer A.J.M.
Continuum mechanics
Longman Scientific & Technical, 1992

[24] Timoshenko S.P., Goodier J.N.
Theory of Elasticity, Third Edition
McGraw-Hill Book Company, 1970

[25] Valent Tullio
Boundary Value Problems of Finite Elasticity
Springer Tracts in Natural Philosophy, Volume 31, 1988

[26] Vorovich I.I.
Nonlinear Theory of Shallow Shells
Springer Verlag, Applied Mathematical Sciences, Volume 133, 1999

LEBENSLAUF

Name:	Jörn Stypa
geboren am:	04.09.1971 in Kleve
Familienstand:	ledig
Eltern:	Waldemar Stypa Elisabeth Stypa, geb. Vierboom
Schulbildung:	Grundschule-Unterstadt Kleve von 1978 bis 1982 Wilhelm-Frede-Hauptschule Kleve-Rindern von 1982 bis 1988 Aufbaugymnasium Uedem von 1988 bis 1991
Hochschulreife:	am 17.06.1991, in Uedem
Grundwehrdienst:	von 01.07.1991 bis 30.06.1992
Studium:	Studium der Mathematik an der Westfälischen Wilhelms-Universität (WWU) in Münster, WS 1992 bis SS 1997
Prüfungen:	Vordiplom im Fach Mathematik am 27.10.1994 Diplom im Fach Mathematik am 16.09.1997
Tätigkeiten:	wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Numerische und instrumentelle Mathematik von 01.10.1997 bis 30.9.1999 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Numerische und instrumentelle Mathematik von 01.10.1999 bis heute
Beginn der Dissertation:	Oktober 1997 im Fach Mathematik am Institut für Numerische und instrumentelle Mathematik der WWU in Münster Betreuer: Prof. Dr. C.W.Cryer