# Charakterisierung des menschlichen Bronchialbaums als Fraktal

Diplomarbeit

vorgelegt von

Jörn Stypa

Thema gestellt von

Prof. Dr. C.W. Cryer

3.Juni 1997

Westfälische Wilhelms-Universität
Institut für Numerische und
instrumentelle Mathematik
Einsteinstraße 62
48149 Münster

# Charakterisierung des menschlichen Bronchialbaums als Fraktal

Diplomarbeit

vorgelegt von

Jörn Stypa

Thema gestellt von

Prof. Dr. C.W. Cryer

3.Juni 1997

Westfälische Wilhelms-Universität
Institut für Numerische und
instrumentelle Mathematik
Einsteinstraße 62
48149 Münster

# Inhaltsverzeichnis

# Abbildungsverzeichnis

# Tabellenverzeichnis

# Symbolverzeichnis

| | |
|---|---|
| log | Logarithmus zur Basis 10 |
| ln | Logarithmus zur Basis e |
| $\log_2$ | Logarithmus zur Basis 2 |
| $\mathcal{A}$ | $\sigma$-Algebra, Seite 20 |
| $\emptyset$ | Die leere Menge |
| $(X, d)$ | metrischer Raum $X$ mit der Metrik $d$ |
| $\mathcal{P}(X)$ | Potenzmenge von $X$ |
| $\mathcal{B}(X)$ | Borel Algebra von $X$, Seite 20 |
| $\mu(F)$ | Maß und Verteilung, Seite 20, Seite 21 |
| $\mathcal{L}^n(F)$ | n-dimensionale Lebesgue-Maß von $F$, Seite 21 |
| $\Gamma$ | Gammafunktion, Seite 22 |
| $\|U\|$ | Durchmesser der Menge $U$, Seite 21 |
| $(U_i)$ | Familie von Teilmengen $U_i \subset X$, Seite 21 |
| $\mathcal{H}^s(F)$ | s-dimensionale Hausdorff-Maß von $F$, Seite 22 |
| $dim_H F$ | Hausdorff-Dimension der Menge $F$, oder auch fraktale Dimension, Seite 25 |
| $dim_T F$ | Topologische Dimension der Menge $F$, Seite 27 |
| $\mathcal{C}$ | Cantor Menge, Seite 29 |
| $N_\delta(F)$ | Seite 32 |
| $dim_B F$ | Box-Dimension der Menge $F$, Seite 32 |
| $\overline{dim}_B F$ | obere Box-Dimension der Menge $F$, Seite 32 |
| $\underline{dim}_B F$ | untere Box-Dimension der Menge $F$, Seite 32 |
| $\propto$ | proportional |
| $\mathcal{K}$ | Koch-Kurve, Seite $39, 51$ |
| $h(A, B)$ | Hausdorff Metrik, Seite 42 |
| $K(X)$ | Raum aller nichtleeren kompakter Mengen von $X$, Seite 42 |
| $(K(X), h)$ | der metrische Raum $K(X)$ mit der Metrik $h$, Seite 42 |
| $S_\infty$ | invariante Menge, Seite 44 |
| $S^k$ | k-Iteration des Hutchinson Operators, Seite 41 |
| $dim_S F$ | Selbstähnlichkeitsdimension der Menge $F$, Seite 45 |
| $J_K$ | die Menge aller k-Term Folgen, Seite 47 |
| $\Delta$ | Sierpiński-Dreieck, Seite 50 |
| $\Phi_s(x)$ | s-Potential an einem Punkt x, Seite 54 |
| $I_s(\mu)$ | s-Energie der Verteilung $\mu$, Seite 54 |

| | |
|---|---|
| $C_k(\mathbb{R}^n)$ | Raum aller stetigen Funktionen mit kompakten Träger, Seite 57 |
| $C_k^+(\mathbb{R}^n)$ | alle nicht negativen Elemente aus $C_k(\mathbb{R}^n)$, Seite 57 |
| $G(n,k)$ | Menge aller k-dimensionaler Vektorräume aus $\mathbb{R}^n$, Seite 59 |
| $proj_\Pi F$ | die orthogonale Projektion von $F$ auf $\Pi \in G(n,k)$, Seite 59 |
| $proj_\theta F$ | die orthogonale Projektion von $F$ auf $L_\theta \in G(2,1)$, Seite 59 |
| $L_\theta$ | die Gerade $L \in G(2,1)$ schneidet den Ursprung mit dem Winkel $\theta$, Seite 59 |
| $a \bullet b$ | gewöhnliches Skalarprodukt, Seite 60 |
| $E \times G$ | das kartesische Produkt der Mengen $E \subset \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^m$, Seite 64 |
| $\mathbb{H}$ | rechte Halbebene in $\mathbb{R}^2$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$, Seite 69 |
| $\mathrm{Pfad}_n$ | Pfadlänge des Bronchialbaums, Seite 72 |
| $\mathcal{T}$ | unendlich verzweigter Bronchialbaum, Seite 72 |
| BCM | Box Counting Methode, Seite 39 |
| $\mathcal{T}_{i,n}$ | i-te Bronchie in der n-te Generation von $\mathcal{T}$, Seite 76 |
| $\mathcal{T}_\circ$ | (3.8) auf Seite 76 |
| $\mathcal{T}_g$ | grober Bronchialbaumausguß, Seite 77 |
| $\mathcal{T}_f$ | feiner Bronchialbaumausguß, Seite 78 |

# Einleitung: Problem und Zielsetzung

Die klassische Geometrie kann zerklüftete, irreguläre, zersplitterte, verästelte, kurz komplexe Strukturen nicht befriedigend beschreiben. Die fraktale Geometrie ist ein mächtiges Werkzeug zur Beschreibung und Charakterisierung dieser komplexen Strukturen. Komplexe Strukturen sind nahezu überall in der Natur zu finden (Botanik, Geologie, Meteorologie, Medizin usw.). Die von Mandelbrot [25] geprägte und definierte Geometrie, findet hier ein breites Anwendungsfeld. Insbesondere verzweigte Hohlraumsysteme wie der Bronchialbaum oder Blutgefäßsysteme können mit der fraktalen Geometrie charakterisiert werden. Charakteristisch für die Struktur ist ihre fraktale Dimension. Sie ist umso größer, je komplexer die Struktur ist. Gewöhnlich ist die fraktale Dimension einer Struktur nicht ganzzahlig und größer als ihre topologische Dimension.
Ziel dieser Arbeit ist es, die fraktale Geometrie zu beschreiben, den menschlichen Bronchialbaum als Fraktal zu charakterisieren und seine fraktale Dimension zu bestimmen. Diese Arbeit zeigt, daß ein Foto des räumlichen Bronchialbaums genügt, um seine fraktale Dimension zu bestimmen. Weitere Anwendungen zeigen die fraktale Strukturierung des Organismus.
Das 1. Kapitel beschreibt die Lunge aus medizinischer Sicht und den gesetzmäßigen Aufbau des Bronchialbaums. Hauptaufgabe der Lunge ist es, die Atemgase Sauerstoff und Kohlendioxid in den geschlossenen Blutkreislauf ein bzw. auszuschleusen. Dies erfolgt in den Alveolen über Diffusion. Abschnitt 1.4 befaßt sich mit Modellen des Bronchialbaums und zeigt physikalische und geometrische Vorteile. Diese Vorteile werden von mir ausführlicher als im Artikel [15] hergeleitet. Außerdem ergibt sich ein Zusammenhang zum Goldenen Schnitt.
Das 2. Kapitel befaßt sich mit der fraktalen Geometrie. Das Hausdorff-Maß[1] ist eine Verallgemeinerung des Lebesgue-Maßes und ist die Grundlage für die fraktale Geometrie. Die Rückrichtung in der Behauptung 2.1.7 wird von mir vervollständig. Die Hausdorff-Dimension leitet sich vom Hausdorff-Maß ab. Den Satz 2.2.1 habe ich durch Zwischenschritte ergänzt. Mandelbrot definiert eine Fraktal als eine Mengen deren Hausdorff-Dimension echt größer ist als ihre topologische. Die Hausdorff-Dimension bezeichnet er als fraktale Dimension. Um den Begriff der fraktalen **Dimension** zu rechtfertigen, zeigt der

[1] Felix Hausdorff, 1868-1942 [14]

Abschnitt 2.2 Eigenschaften derselben und vergleicht sie mit der eingeführten topologischen Dimension. Dabei wird der Satz 2.2.4 von mir vervollständigt. Das Beispiel 2.2.8 ergänze ich durch einige Aussagen. Die Bestimmung der fraktalen Dimension mittels des Hausdorff-Maßes, erweist sich am Beispiel der Cantor-Menge als sehr aufwendig. Für die numerische Dimensionsbestimmung einer komplexen Struktur, ist das Hausdorff-Maß nicht brauchbar.
Kapitel 2.3 lößt dieses Problem, mit Einführung der Box-Dimension. Zwei Anwendungen benutzen ein Potenzgesetz, welches sich aus der Box-Dimension ergibt, um die fraktale Strukturierung des Organismus aufzuzeigen. Die Box Counting Methode (BCM) ist ein numerisches Verfahren zur Bestimmung der Box-Dimension. Die BCM ist sowohl für ebene als auch für räumliche Strukturen anwendbar. Man spricht dann von der BCM im $\mathbb{R}^2$ bzw. von der BCM im $\mathbb{R}^3$. Allerdings ist die Box-Dimension einer Menge im allgemeinen größer als ihre fraktale Dimension.
Der Abschnitt 2.4 befaßt sich mit selbstähnlichen Mengen. Ihre Ähnlichkeitsdimension ist leicht zu bestimmen und es zeigt sich, daß sie mit der fraktalen und der Box-Dimension übereinstimmt. Der Abschnitt 2.4 wird von mir ausführlich beschrieben. Den Satz 2.4.15 habe ich um einige Zwischenschritte ergänzt. Viele komplexe Strukturen in der Natur können als selbstähnliche Mengen gedeutet werden. So auch der menschliche Bronchialbaum. Die BCM ist anwendbar und liefert die fraktale Dimension.
Die Aussagen der Abschnitte 2.5 und 2.6 benötige ich, um die Box-Dimension des Bronchialbaums effektiv zu bestimmen.
Der Abschnitt 2.5 zeigt, wie sich die fraktale Dimension einer Menge bei orthogonaler Projektion verhält. Ein allgemeiner Beweis dieser Aussage beinhaltet Sätze aus der Maßtheorie und soll nicht Gegenstand dieser Arbeit sein. Der Beweis für Staubmengen im $\mathbb{R}^2$ die auf einer Geraden projiziert werden, wird von mir ausführlich beschrieben.
Mit der fraktalen Dimension von Schnittmengen eines Fraktals und einer Ebene befaßt sich der Abschnitt 2.6. Der Beweis beinhaltet Sätze aus der Maßtheorie. Anstatt den Satz über Schnittmengen zu beweisen, zeige ich anschauliche Beispiel.
Das 3. Kapitel befaßt sich mit der Charakterisierung des menschlichen Bronchialbaums und der numerischen Bestimmung der fraktalen Dimension.
Mein fraktales Modell eines symmetrischen und unendlich oft verzweigten Bronchialbaums findet sich im Abschnitt 3.1. Dieses Modell zeigt, daß der menschliche Bronchialbaum als selbstähnliche Menge gedeutet werden kann.

Für die Ähnlichkeitsdimension liefert mein Modell den Wert 3,0. Wie oben erwähnt, stimmt die Ähnlichkeitsdimension bei selbstähnlichen Mengen mit der fraktalen und der Box-Dimension überein. Der Bronchialbaum ist im $\mathbb{R}^3$ eingebettet und hat deswegen höchstens die fraktale Dimension 3,0. Mein Modell beschreibt daher einen raumfüllenden Bronchialbaum.
Die sukzessive Verzweigung des Bronchialbaums führt zur dieser raumfüllenden Fläche und liefert somit eine wichtige Voraussetzung für einen effektiven Diffusionsaustausch der Atemgase. Dies ist der physiologische Vorteil des Bronchialbaums.
Ein Programm für die BCM im $\mathbb{R}^3$, benötigt einen 3D-Datensatz der räumlichen Struktur. Die Erstellung des 3D-Datensatzes ist aufwendig. Die von mir hergeleitete Methode im Abschnitt 3.2 zeigt, wie die fraktale Dimension des räumlichen Bronchialbaums anhand eines Fotos vom Ausguß bestimmt wird. Daher genügt es die BCM im $\mathbb{R}^2$ anzuwenden, um die Box-Dimension des Bronchialbaums zu bestimmen. Damit reduziert sich die Laufzeit des Programms und der Speicherbedarf für den Datensatz.
Die Methode wird auf zwei Ausgüssen von Bronchialbäumen angewandt. Das Kapitel 3.3 zeigt die Erstellung der 2D-Datensätze. Das von mir geschriebene C++ Programm boxc.cpp bestimmt die Box-Dimension mittels BCM im $\mathbb{R}^2$. Eine Diskette mit dem Programm boxc.cpp und den Datensätzen der zwei Bronchialbäumen, befindet sich auf der letzten Seite in dieser Arbeit. Das Programm läuft auf einer UNIX-Workstation. Die Ergebnisse im Abschnitt 3.4 zeigen die fraktale Strukturierung des Bronchialbaums.
Kitaoka und Takahashi [19, Seite 116] (1994) benutzten die BCM im $\mathbb{R}^3$, um die Box-Dimension der Bronchien im Lungenlappen zu bestimmen. Ich zeige im Abschnitt 3.5, daß die Autoren, bedingt durch den groben Datensatz, die fraktale Dimension einer Schnittfläche durch den Bronchialbaum bestimmt haben.

Ein weiteres Forschungsfeld ist das Gefäßgebiet der Niere. Erste Arbeiten zur Charakterisierung von Arterien der Niere als Fraktal liefern Sernetz et al. [34] (1992), Wübbeke [42] (1994) und Sernetz et al. [35] (1995).
An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. Sernetz aus dem Institut für Biochemie und Endokrinologie der Justus-Liebig-Universität Gießen für die Überlassung der Dissertationsarbeiten [4],[7],[18], [42] und den Quellen [34],[35] danken.

# Kapitel 1

# Die Lunge

Die menschliche Zelle gewinnt ihre Energie durch den oxidativen Abbau von Nährstoffen. Sie benötigt somit Sauerstoff ($O_2$), der stets zugeliefert werden muß. Ebenso muß das Stoffwechselendprodukt Kohlendioxid ($CO_2$) abtransportiert werden. Beides erfolgt durch **Konvektion** und **Diffusion**. Diese Transportvorgänge von $O_2$ und $CO_2$ bezeichnet man als **Gasaustausch** oder **Atmung**. Durch Konvektion legen die Gasmoleküle bei der Lungenbelüftung und im Blutkreislauf große Strecken zurück. Die Diffusion ist notwendig, um die Atemgase $O_2$ und $CO_2$ in den geschlossene Blutkreislauf ein- bzw. auszuschleusen. Dies erfolgt in den **Alveolen** und in den zu versorgenden Geweben. Nach dem **Fickschen Diffusionsgesetz** erfordert ein effektiver Diffusionsaustausch eine große Austauschfläche und einen kleinen Diffusionsweg. Beide Voraussetzungen sind in der **Lunge** in idealer Weise erfüllt. Dieses Kapitel beschreibt die Lunge. Grundlage für die Kapitel 1.1, 1.2 und 1.3 sind die Quellen [3],[21],[22], [23], [32], [37], [38].

## 1.1 Äußere Form und Größe

Der Mensch besitzt zwei Lungen, eine linke und eine rechte. Die Lungen haben keine Eigenform. Sie füllen den Bereich aus, der zwischen **Thorax**, **Zwerchfell** und **Mediastinum** verbleibt. Das Mediastinum befindet sich zwischen den beiden Lungen. Es beinhaltet vor allem das Herz, Thymus,

**Trachea**, Speiseröhre, Nerven Lymphknoten und große Gefäße. Das Herz nimmt hier den größten Raum ein. Dabei liegt der größere Teil dieses Organs links und beansprucht somit Platz, der der linken Lunge nicht zur Verfügung steht (Herzbucht). Folglich unterscheiden sich die Lungen in ihrer Weite. Die größten Breitendurchmesser stehen im Verhältnis von ungefähr 10 : 7. Dieses Plus der rechten Lunge wird jedoch durch ein Minus an Höhe fast ausgeglichen. Die rechte Zwerchfellkuppel wölbt sich weiter in den Thoraxraum hinein als die linke. Der Grund dafür ist die Leber. Sie liegt rechts unterhalb des Zwerchfells. Somit kann sich die linke Lunge etwas stärker nach unten entwickeln. Zahlenmäßig verhalten sich die rechte und linke Lunge in Gewicht und Volumen wie 11 : 10. Jede Lunge beansprucht ein Volumen von etwa 2 Litern. Ihr Gewicht liegt im Bereich von etwa $200 - 400$ *Gramm* (je nach Flüssigkeitsgehalt). Mit einer Dichte von etwa $0,1$ bis $0,2$ $g/ml$ ist die Lunge das relativ leichteste Organ des menschlichen Körpers.
Jede Lunge ist von einer mit Gefäßen versorgten Hülle, der **Pleura visceralis** überzogen. Sie ist nur durch einen engen Flüssigkeitsspalt von der **Pleura parietalis** getrennt. Sie überzieht die innere Thoraxwand, das Zwerchfell und das Mediastinum seitlich. Zwischen den beiden Pleuralblättern herrscht Unterdruck. Die Blätter sind gegeneinander verschiebbar und ermöglichen somit die Atembewegung der Lungen. Die Pleuralblätter werden oft unter der Bezeichnung **Brustfell** zusammengefaßt.
Als **Hilum pulmonis** bezeichnet man die einzige Eintritts- bzw. Austrittstelle der Atemwege, Blut- und Lymphgefäße sowie Nerven an der Mediastinalseite der Lunge. Hier geht die Pleura visceralis in die Pleura parietalis über. Die Abbildung 1.1 zeigt den Zusammenhang in schematischer Darstellung.
Die Lungen sind durch tiefe Einschnitte in Lappen, sogenannten **Lobi** unterteilt. Die rechte Lunge ist in drei Lappen (Ober-, Mittel-,Unterlappen), die linke in zwei (Ober- und Unterlappen) gegliedert. Die Lappenbildung ermöglicht die elastische Verformbarkeit der Lungen bei der Atmung. Bei der Inspiration erweitert sich der Brustraum nicht gleichmäßig. Bestünde die Lunge nur aus einem Lappen, so hätte dies eine Verzerrung des Lungengewebes zur Folge. Diese Verzerrung wird durch die gegeneinander verschieblichen Lungenlappen vermieden. Die Lunge besteht hauptsächlich aus Luftwegen, Lungenbläschen, den Ästen der Lungenarterien und den Wurzeln der Lungenvenen. Das lockere Bindegewebe der Lunge enthält Lymphgefäße und Lymphknoten sowie Nerven.

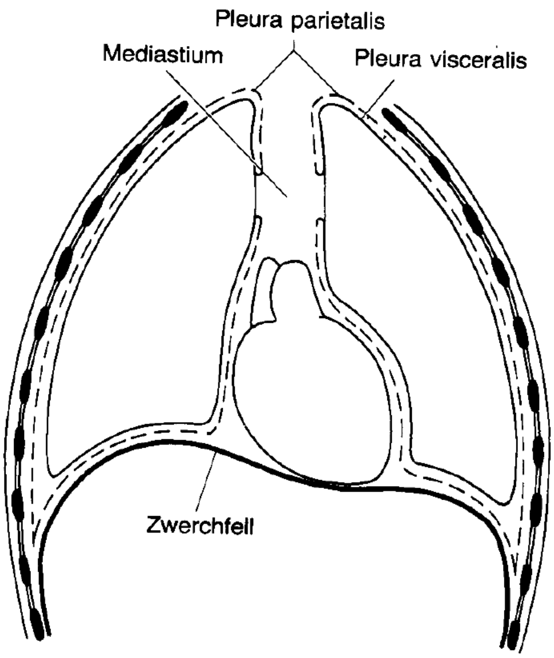



Abbildung 1.1: Lage der Lungen [38, Seite 272]

## 1.2 Innerer Aufbau und Gliederung

Ein effektiver Diffusionsaustausch erfordert eine große Austauschfläche. Die Lungen sind daher nicht als Hohlorgane nach Art eines Blasebalgs gebaut, sondern gleichen im Inneren einem sehr verzweigten Baum, dem **Bronchialbaum**. Frischluft wird somit über ein verzweigtes Röhrensystem (**Bronchien**) zu den Gasaustauschgebieten (**Alveolarraum**) geleitet. Über die Trachea gelangt die Frischluft in die beiden Lungen. Dort verteilt sie sich dann auf immer feineren Verzweigungen des Bronchialbaums. Das Bronchialsystem teilt sich etwa 23 mal dichotom auf. Die Teilungen laufen nicht streng synchron ab. Manchmal teilt sich ein Ast schon wieder, während der andere noch ruht. So kommen scheinbar Dreiteilungen zustande.
Bei jeder Verzweigung entsteht eine neue **Generation**, beginnend mit der Generation 0, der Trachea. Die Bronchien der 1. Generation heißen **Haupt-**

**bronchien** und versorgen die linke bzw. die rechte Lunge mit Frischluft. In der 2. Generation finden sich die **Lappenbronchien**, deren Versorgungsgebiet mit den Lungenlappen übereinstimmt. Es folgen die **Segmentbronchien** in der 3. Generation. Durch sie ist jeder Lungenlappen in **Segmente** unterteilt. Jedes Segment ist das Aufzweigungsgebiet eines einzigen Bronchus. Die innere Aufgliederung der Lappen in Segmente ist in beiden Lungen annähernd gleich. Tabelle 1.1 zeigt die Anzahl der Segmente in den jeweiligen Lungenlappen (die linke Lunge ist nur in zwei Lappen unterteilt). Die

Tabelle 1.1: Anzahl der Segmente pro Lungenlappen

| | Rechte Lunge | Linke Lunge |
|---|---|---|
| Oberlappen | 3 Segmente | 5 Segmente |
| Mittellappen | 2 Segmente | |
| Unterlappen | 5 Segmente | 4 Segmente |

Anordnung der fünf Segmente im oberen Bereich der beiden Lungen unterscheidet sich nicht.
Bei den Unterlappen liegen die Verhältnisse etwas anders. Durch die Linksverlagerung des Herzens, bildet der linke Unterlappen nur vier Segmente aus. Das siebte Segment fehlt häufig. Der Bronchialbaum ist in drei Zonen aufgeteilt. Die **Leitungszone**, die **Übergangszone** und die **Respirationszone**. In der Leitungszone befinden sich nur Bronchien, in denen noch keine Alveolen vorhanden sind. Hier erfolgt die Luftbewegung allein durch **Konvektion**. Das Volumen dieser Zone zusammen mit den Räumen von Nase, Mund, Rachen und Kehlkopf (Larynx) bezeichnet man als **anatomischen Totraum**, weil hier kein Gasaustausch über Diffusion stattfindet. Neben ihrer Zuleitungsfunktion erfüllen diese Atemwege wichtige Aufgaben bei der Anwärmung, Anfeuchtung und Reinigung der Atemluft. Selbst eine sehr kalte und trockene Atemluft ist körperwarm und vollständig mit Wasserdampf gesättigt bevor sie in die Alveolen gelangt.
Die Bronchien der letzten Generation in dieser Zone heißen **Terminalbronchiolen**. Das Verzweigungsgebiet eines einzigen Terminalbronchiolus wird als **Acinus** zusammengefaßt. Die Leitungszone reicht bis zur 16. Generation. Es schließt sich die **Übergangszone** mit den **Bronchioli respiratorii** an. Dies sind Bronchien in deren Wände bereits einige Alveolen vorkommen. Sie

liegen im Bereich der 17. – 19. Generation. Ab der Übergangszone gewinnt die Diffusion einen zunehmenden Einfluß auf den Transport der Atemgase. In der Respirationszone befinden sich die **Alveolargänge** (Ductuli alveolares) die dicht mit Alveolen besetzt sind und die **Alveolarsäcke** (Sacculi alveolares). Sie bestehen nur aus Alveolen und bilden die letzte Generation. Dieser Bereich dient dem Gasaustausch, der sich an der Alveolarwand vollzieht. Die Alveolen sind somit die eigentlichen Funktionselemente der Lunge. Abbildung 1.2 zeigt die Verzweigung der Atemwege. Die Alveolen sind von

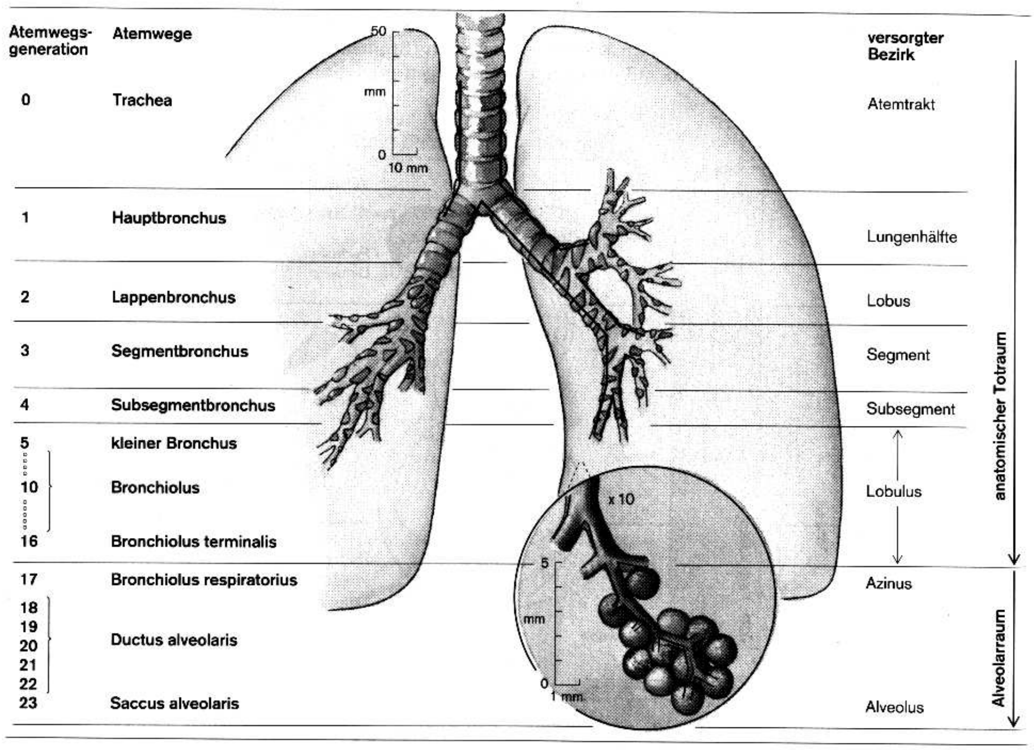



Abbildung 1.2: Die Verzweigung der Atemwege [21, Seite 214]

elastischen Fasern umsponnen und haben eine halbkugelige Gestalt (siehe Abbildung 1.3). Beim Erwachsenen haben sie am Ende der Ausatmung eine Durchmesser von $0,1 - 0,2mm$, bei Einatmung von $0,3 - 0,5mm$. Ihre Anzahl wird auf etwa 300 Millionen, ihre Gesamtfläche auf $80 - 100m^2$ geschätzt. Dies entspricht dem 50 fachen der äußeren Körperoberfläche.

Die Alveolen sind von einem dichten **Capillarnetz** umgeben, das von sauerstoffarmen Blut durchflossen wird. Die Capillaroberfläche hat unter Ruhebedingung eine Größe von ca. $60m^2$ und kann durch Einbeziehung von nicht durchbluteten Gefäßgebieten auf ca $90m^2$ vergrößert werden (z.B. bei schwerer Arbeit). Die Gewebeschicht, die das Gas im Alveolarraum vom Blut in den Capillaren trennt ist hauchdünn. Diese sogenannte **alveolocapilläre Membran** hat eine Dicke von weniger als $1\mu m$. Somit liegt eine große und dünne Fläche für den Gasaustausch vor. Die Alveolen werden pro Tag mit etwa $7000 - 8000$ Litern Blut umspült. Dabei gelangt das sauerstoffarme

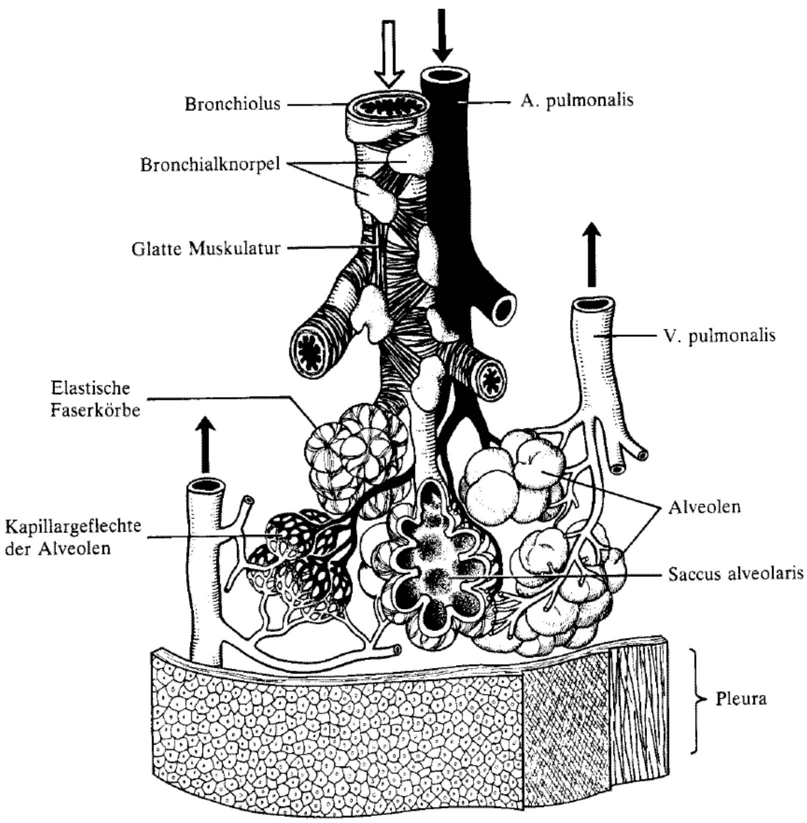



Abbildung 1.3: Der Alveolarbereich [32, Seite 341]

Blut von der rechten Herzkammer über die Lungenarterie, **A.pulmonalis** in die Capillare zu den Alveolen. Die Arterien verlaufen parallel zum Bronchialbaum. Durch Diffusion nimmt das Blut Sauerstoff auf und gibt gleichzeitig überschüssiges Kohlendioxid ab. An den Segmentegrenzen liegen die großen Venen. Hier sammelt sich das sauerstoffreiche Blut an. Arterien und Venen verlaufen in der Lunge nur kurze Strecken parallel. Aus jeder Lunge gehen zwei große Venenstämme, **Vv. pulmonales** hervor. Sie vereinigen sich meist nicht und münden getrennt in den linken Vorhof.

## 1.3 Bau der Trachea und der Bronchien

Die Trachea ist ein etwa 10-12 cm langes und 1,6-1,8 cm breites rohrförmiges Gefäß. Die Wand der Trachea muß versteift sein, damit sie bei vermindertem Druck nicht zusammengepreßt wird. Sie ist aber auch kein starres Rohr. Denn bei jeder Einatmung bläht sich die Lunge bauchwärts auf. Dabei wird die Trachea nach unten gezogen. Beim Schlucken oder beim Rückneigen des Kopfes wird sie nach oben gestreckt. Die Trachea wird durch 16 bis 20 hufeisenförmigen Knorpelspangen dauernd offengehalten. Die knorpelfreie Rückwand wird von glatter Muskulatur gebildet. Die freien Enden der Knorpelspangen können durch diese Muskulatur zusammengezogen werden. Somit ist die Weite der Trachea verstellbar. Die Knorpelspangen sind elastisch und sorgen so für die Rückführung in den Ausgangszustand. Zwischen den Knorpelspangen liegen elastische Ringbänder, die sich scherengitterartig überkreuzen. Sie verspannen die Knorpelspangen. Dies ermöglicht eine maximale Längenänderung von 30-40%. Durch diese Konstruktion zieht sich die Trachea bei der Längsdehnung nicht zusammen, sondern sie vergrößert sogar ihren Durchmesser. So nimmt die Länge bei tiefer Einatmung um etwa 1,5 cm zu. Der Durchmesser vergrößert sich dabei um rund 0,2 cm. Durch den Wechsel von Knorpelspangen und Bindegewebe sind die Wände der Trachea im Längsschnitt wellenförmig. Ein Querschnitt durch die Trachea zeigt, daß sie nicht kreisförmig, sondern vorne rund und hinten gerade ist. Die Wand der Trachea ist in drei Schichten gegliedert: Schleimhaut, Band-Muskel-Knorpelwand und die äußere Bindegewebeschicht.
Der Bau der Bronchien unterscheidet sich kaum von dem der Trachea. Die Knorpel der Hauptbronchien bilden flache, unregelmäßig geformte, zusammenhängende Platten. In den folgenden Bronchien verringert sich ihre Anzahl. Ab der 4. Generation fehlen sie völlig.

## 1.4 Der Bronchialbaum

Nachdem die Luft in den Lungen durch einen Kunststoff ersetzt und das Gewebe aufgelöst ist, bleibt ein sehr fein verzweigter Baum übrig, der Bronchialbaum. Weibel untersuchte mehrere ausgegossene Lungen [39]. Der Bronchialbaum verzweigt sich etwa 23 mal dichotom. Die Zahl der Bronchien in der Generation $z$ ist somit

$$n(z) = 2^z.$$

Mit steigender Generation verkleinert sich der Durchmesser $d_z$ der Bronchien. Mit Außnahme der vierten Generation gilt dies auch für ihre Länge. **Weibels Modell** besteht aus zylinderförmigen Bronchien. [39, Seite 137]. Er erhält für die Durchschnittsdaten einer normalen Lunge die zu 3/4 mit Luft gefüllt ist, folgendes Modell für den Bronchialbaum:

$$d_z = \begin{cases} 1,8e^{-0,388z} cm & \text{für } z \leq 3 \\ 1,3e^{-(0,2929-0,00624z)z} cm & \text{für } z > 3 \end{cases}$$

$$l_z = \begin{cases} 12e^{-0,92z} cm & \text{für } z \leq 3 \\ 2,5e^{-0,17z} cm & \text{für } z > 3. \end{cases}$$

Die zylinderförmigen Bronchien in der z-ten Generation haben einen Gesamtquerschnitt von

$$A_z = 2^z \frac{d_z^2}{4}\pi = \begin{cases} 122,54e^{-0,083z} cm^2 & \text{für } z \leq 3 \\ 1,32e^{(0,1074+0,0125z)z} cm^2 & \text{für } z > 3, \end{cases}$$

und ihr Volumen ist

$$V_z = 2^z \frac{d_z^2}{4}\pi l_z = \begin{cases} 30,5e^{-1,003z} cm^3 & \text{für } z \leq 3 \\ 3,3e^{(0,0125z-0,0626)z} cm^3 & \text{für } z > 3. \end{cases}$$

Tabelle 1.2 zeigt die numerischen Daten für zylinderförmige Bronchien. Für die Leitungszone die bis zur 16. Generation reicht, ergibt sich ein Volumen von 173 $cm^3$. Übergangszone und Respirationszone ohne Alveolen beinhalten 1490 $cm^3$. Die zu 3/4 mit Luft gefüllte Lunge faßt 4800 $cm^3$. Die Alveolen beinhalten somit ein Volumen von 3137 $cm^3$. Das sind 65% des Atemvolumens.

Tabelle 1.2: Weibels Modell in numerischen Daten

| z | n(z) | $d_z$ [$cm$] | $l_z$ [$cm$] | $A_z$ [$cm^2$] | $V_z$ [$cm^3$] | $\sum_{i=0}^{z} V_i$ [$cm^3$] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1,800 | 12,000 | 2,54 | 30,50 | 30,5 |
| 1 | 2 | 1,221 | 4,782 | 2,34 | 11,19 | 41,7 |
| 2 | 4 | 0,828 | 1,906 | 2,15 | 4,10 | 45,8 |
| 3 | 8 | 0,562 | 0,760 | 2,04 | 1,50 | 47,3 |
| 4 | 16 | 0,445 | 1,270 | 2,48 | 3,14 | 50,4 |
| 5 | 32 | 0,351 | 1,069 | 3,09 | 3,30 | 53,7 |
| 6 | 64 | 0,281 | 0,901 | 3,94 | 3,55 | 57,3 |
| 7 | 128 | 0,227 | 0,761 | 5,17 | 3,93 | 61,2 |
| 8 | 256 | 0,186 | 0,642 | 6,94 | 4,45 | 65,7 |
| 9 | 512 | 0,154 | 0,541 | 9,55 | 5,17 | 70,8 |
| 10 | 1024 | 0,130 | 0,457 | 13,49 | 6,16 | 77,0 |
| 11 | 2048 | 0,110 | 0,385 | 19,52 | 7,52 | 84,5 |
| 12 | 4096 | 0,095 | 0,325 | 28,97 | 9,42 | 93,9 |
| 13 | 8192 | 0,083 | 0,274 | 44,09 | 12,01 | 106,0 |
| 14 | 16384 | 0,073 | 0,231 | 68,80 | 15,92 | 121,9 |
| 15 | 32768 | 0,065 | 0,195 | 110,07 | 21,49 | 143,4 |
| 16 | 65536 | 0,059 | 0,165 | 180,55 | 29,73 | 173,2 |
| 17 | 131072 | 0,054 | 0,139 | 303,67 | 42,19 | 215,4 |
| 18 | 262144 | 0,050 | 0,117 | 523,65 | 61,38 | 276,7 |
| 19 | 524288 | 0,047 | 0,099 | 925,87 | 91,56 | 368,3 |
| 20 | 1048576 | 0,045 | 0,083 | 1678,45 | 140,04 | 508,3 |
| 21 | 2097152 | 0,043 | 0,070 | 3119,81 | 219,60 | 727,9 |
| 22 | 4194304 | 0,042 | 0,059 | 5945,83 | 353,09 | 1081,0 |
| 23 | 8388608 | 0,042 | 0,050 | 11618,00 | 582,09 | 1663,1 |

| | |
|---|---|
| $d_z$ | Durchmesser der Bronchien, |
| $l_z$ | Länge der Bronchien, |
| $A_z$ | Gesamtquerschnittsfläche der Bronchien in der z-ten Generation, |
| $V_z$ | Gesamtvolumen der Bronchien in der z-ten Generation, |
| $\sum_{i=0}^{z} V_i$ | Gesamtvolumen der Bronchien bis zur z-ten Generation. |

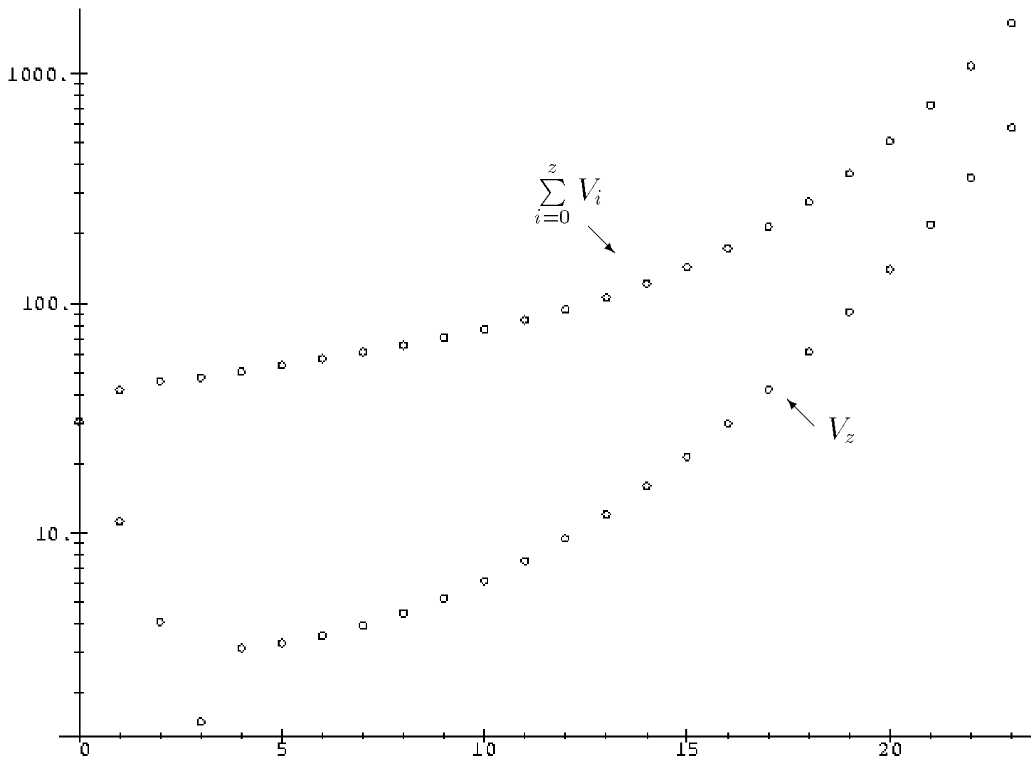



Abbildung 1.4: Weibels Modell: $V_z$ und $\sum_{i=0}^{z} V_i$ gegen die Generation z halblogarithmisch aufgetragen

Um die Lunge mit minimaler Arbeit zu belüften, muß der innere Reibungswiderstand gegen die Luftströmung minimal sein. Dies wird durch ein maximalen Radius der Bronchien erreicht. Gleichzeitig muß das Volumen der Bronchien minimal sein, damit der größte Teil der Atemluft in den Alveolen vorhanden ist.
Diese Gegensätze sind Grundlage für **das Modell von Horsfield und Cumming** [15]. Die $2^z$ Bronchien in der z-ten Generation haben den gleichen Radius $r_z$ und die gleiche Länge $l_z$. Durch einen konstanten Verzweigungwinkel $\theta$ ist das System symmetrisch, siehe Abbildung 1.8. Die Luftstömung in den Bronchien sei laminar. Nach Poiseuilles Gesetz für laminare Rohrströmungen ist der innere Reibungswiderstand gegen die Luftströmung (ab

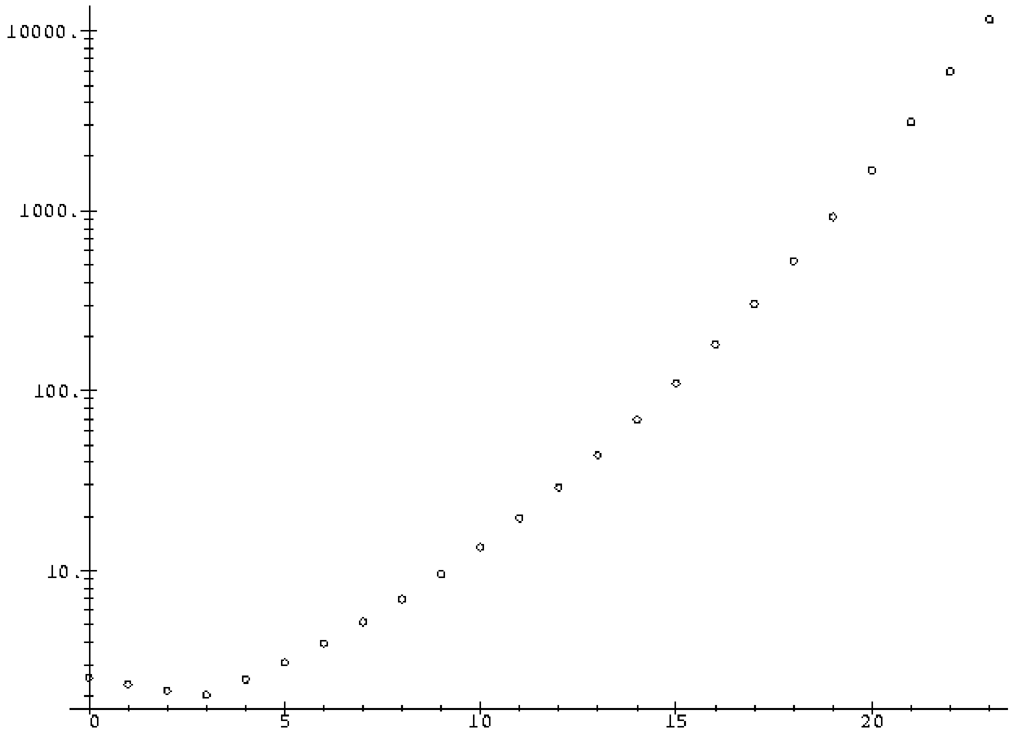



Abbildung 1.5: Weibels Modell: Gesamtquerschnitt $A_z$ der Bronchien gegen die Generation $z$ halblogarithmisch aufgetragen

jetzt nur Widerstand) einer Bronche in der z-ten Generation

$$R_z = \frac{8\eta l_z}{\pi r_z^4}, \tag{1.1}$$

mit $\eta$ als Viskosität der Luft. Der gesamte Widerstand $R$ in der z-ten Generation ergibt sich durch $2^z$ Einzelwiderstände der Bronchien, die parallel liegen. Es folgt

$$\frac{1}{R} = \frac{2^z}{R_z} \Rightarrow R = \frac{R_z}{2^z}.$$

Die Generationen liegen in Serie. Der Widerstand des Bronchialbaums $R_t$ ist somit

$$R_t = \frac{R_0}{2^0} + \frac{R_1}{2^1} + \frac{R_2}{2^2} + \cdots + \frac{R_{23}}{2^{23}}. \tag{1.2}$$

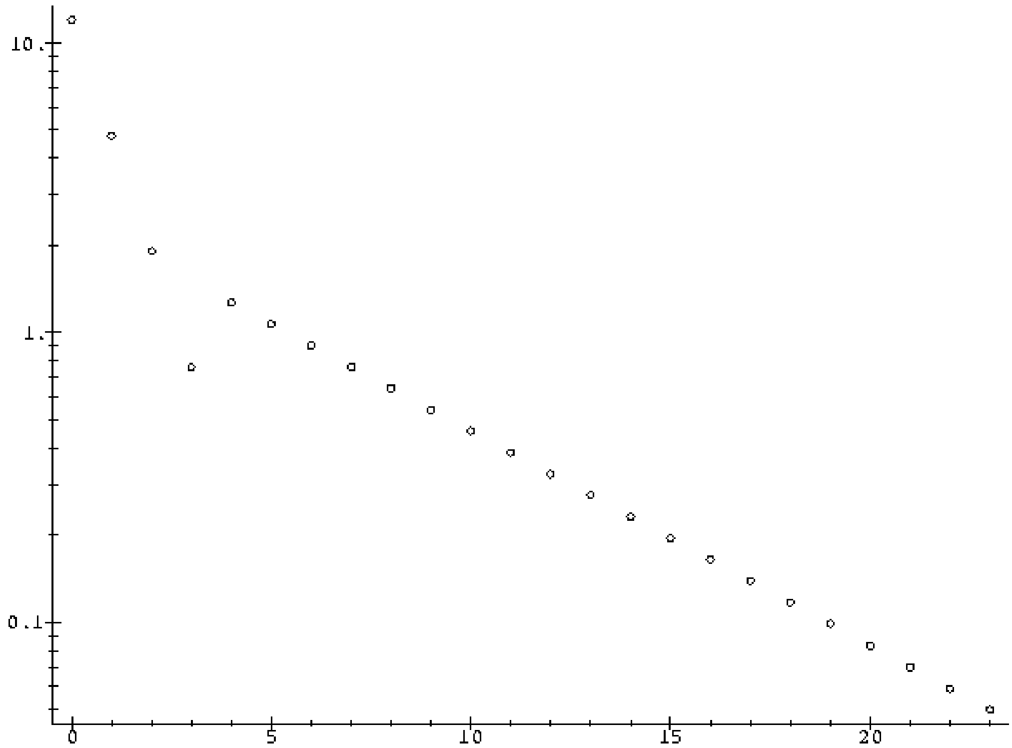



Abbildung 1.6: Weibels Modell: Bronchienlänge $d_z$ gegen die Generation $z$ halblogarithmisch aufgetragen

Durch Einsetzen von (1.1) in (1.2) ergibt sich

$$R_t = \frac{8\eta l_0}{\pi r_0^4} + \frac{8\eta}{\pi} \sum_{z=1}^{23} \frac{l_z}{2^z r_z^4}. \tag{1.3}$$

Die Dicke der Bronchialwand $a_z$ ist proportional zu $r_z$ [10, Seite 30]. Somit gibt es eine Konstante $c$ mit $a_z = r_z c$. Die Dichte der Bronchialwände $b$ sei in jeder Generation gleich. Eine Bronchie in der z-ten Generation hat dann die Masse

$$M_z = 2\pi r_z l_z a_z b = 2\pi r_z^2 l_z c b.$$

Mit $k := cb$ ist die Masse aller Bronchien

$$M_t = 2\pi r_0^2 l_0 k + 2\pi k \sum_{z=1}^{23} 2^z r_z^2 l_z.$$

Nach $r_0^2$ aufgelöst ergibt dies

$$r_0^2 = \frac{1}{l_0}\left(\frac{M_t}{2\pi k} - \sum_{z=1}^{23} 2^z r_z^2 l_z\right). \tag{1.4}$$

Durch Substitution von $r_0$ aus (1.4) in (1.3) folgt

$$R_t = \frac{8\eta l_0}{\pi} \frac{l_0^2}{\left(\frac{M_t}{2\pi k} - \sum\limits_{z=1}^{23} 2^z r_z^2 l_z\right)^2} + \frac{8\eta}{\pi} \sum_{z=1}^{23} \frac{l_z}{2^z r_z^4}.$$

Betrachtet man für ein festes $n$ ($1 \leq n \leq 23$) die partielle Ableitung $\partial R_t / \partial r_n$, um das Minimum von $R_t$ bezüglich $r_n$ zu bestimmen, so gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_t}{\partial r_n} &= \frac{8\eta l_0}{\pi} \frac{l_0^2(-2)(-2)2^n r_n l_n}{\left(\frac{M_t}{2\pi k} - \sum\limits_{z=1}^{23} 2^z r_z^2 l_z\right)^3} + \frac{8\eta}{\pi} \frac{(-4) l_n}{2^n r_n^5} \\
&= \frac{32\eta}{\pi} \frac{2^n l_0^3 r_n l_n}{\left(\frac{M_t}{2\pi k} - \sum\limits_{z=1}^{23} 2^z r_z^2 l_z\right)^3} - \frac{32\eta}{\pi} \frac{l_n}{2^n r_n^5} \\
&= \frac{32\eta}{\pi} \frac{2^n l_0^3 r_n l_n}{(r_0^2 l_0)^3} - \frac{32\eta}{\pi} \frac{l_n}{2^n r_n^5} \qquad \text{(wegen 1.4)} \\
&= \frac{32\eta}{\pi}\left(\frac{2^n r_n l_n}{r_0^6} - \frac{l_n}{2^n r_n^5}\right).
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Weiter sind $\eta, r_0, l_n, r_n > 0$ und somit ist

$$\frac{\partial^2 R_t}{\partial r_n^2} = \frac{32\eta}{\pi}\left(\frac{2^n l_n}{r_0^6} + \frac{5 l_n}{2^n r_n^6}\right) > 0. \tag{1.6}$$

Mit Gleichung (1.5) folgt

$$\frac{\partial R_t}{\partial r_n} = 0 \iff \frac{2^n r_n l_n}{r_0^6} = \frac{l_n}{2^n r_n^5} \iff r_0^6 = r_n^6 2^{2n} \iff r_n = r_0 2^{-n/3}.$$

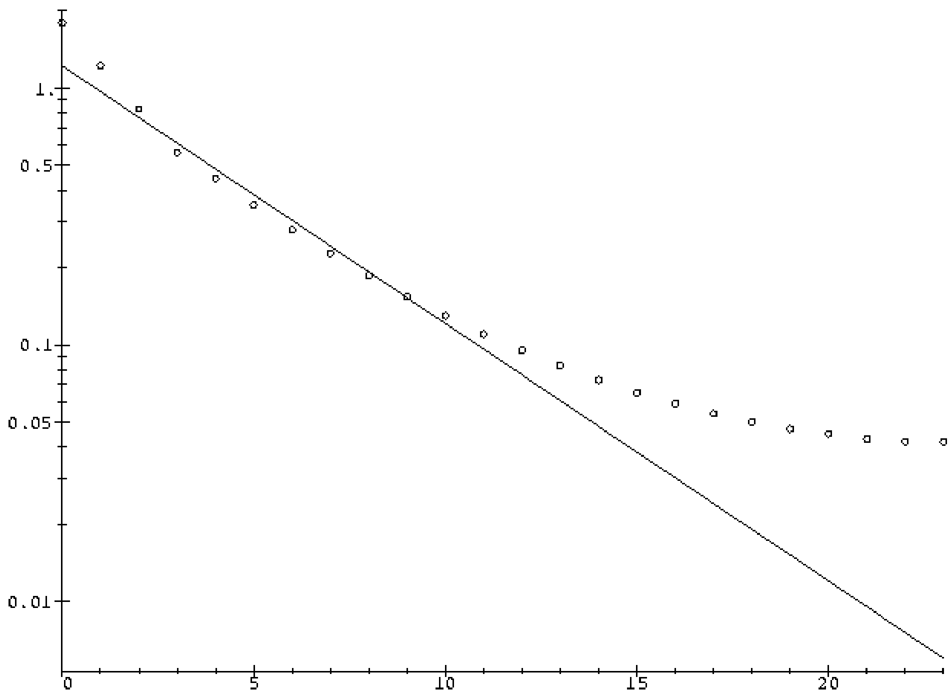



Abbildung 1.7: Bronchiendurchmesser nach Weibel und $d_z = d_1 2^{-z/3}$ in halblogarithmischer Darstellung

Wegen (1.6) besitzt $R_t$ in $r_n = r_0 2^{-n/3}$ ein Minimum. Mit $r_{n+1} = r_0 2^{-(n+1)/3}$ folgt

$$\frac{r_n}{r_{n+1}} = \frac{r_0 2^{-n/3}}{r_0 2^{-(n+1)/3}} = \frac{1}{2^{-1/3}} \Rightarrow r_{n+1} = r_n 2^{-1/3} \approx 0,794 r_n. \tag{1.7}$$

Der Widerstand ist somit minimal, wenn der Radius jeder Bronche nach jeder Verzweigung um den Faktor $2^{-1/3}$ abnimmt. Dies gilt auch für den Durchmesser. Durch potenzieren in die dritte Potenz erhält man

$$d_n^3 = d_{n+1}^3 + d_{n+1}^3. \tag{1.8}$$

Abbildung 1.7 zeigt einen Vergleich mit Weibels Daten. Mehrere Generationen der Leitungszone sind bezüglich des Widerstands optimal. Um das Volumen zu minimieren, betrachte ich drei Bronchien die an den Punkten $A, C$

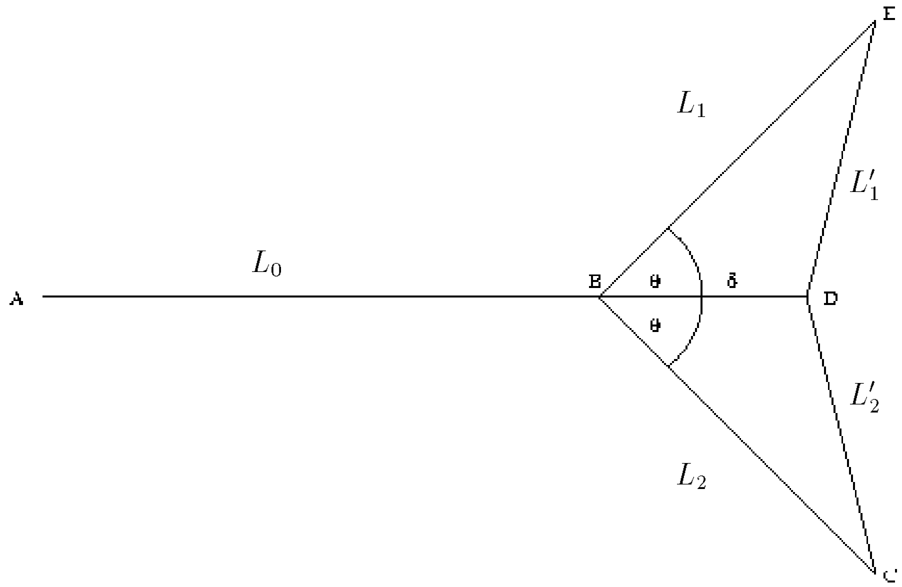



Abbildung 1.8: Symmetrisches Verzweigungsmodell der Bronchien

und $E$ fixiert sind, siehe Abbildung 1.8. Die Längen seien $L_0 = \overline{AB}$, $L_1 = \overline{BE}$ und $L_2 = \overline{BC}$. Aus symmetrischen Gründen ist $L_1 = L_2$. Eine Verschiebung von Punkt $B$ zu $A$ verkleinert $L_0$ und vergrößert $L_1$ und $L_2$. Verschiebt man $B$ von $A$ bis zur x-Koordinate von $E$, so vergrößert sich $L_0$ und $L_1, L_2$ verkleinern sich. Dabei ändert sich das Volumen und der Winkel $\theta$ $(0 < \theta < \pi/2)$. Offensichtlich gibt es ein minimales Volumen $V_{min}$. Sei dies im Punkt $B$. Ich bestimme nun den resultierenden Winkel $\theta$. Sei dazu

$$\begin{aligned} V_{min} &= L_0 r_0^2 \pi + L_1 r_1^2 \pi + L_2 r_2^2 \pi \\ &= L_0 r_0^2 \pi + L_1 \pi \left( r_1^2 + r_2^2 \right). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Verschiebt man nun $B$ um $\delta > 0$ nach $D$, so ist

$$\begin{aligned} L'_0 &= L_0 + \delta \\ L'_1 &= \sqrt{L_1^2 + \delta^2 - 2\delta L_1 \cos\theta} \quad \text{(Kosinussatz)} \\ L'_2 &= L'_1. \end{aligned}$$

Das sich ergebende Volumen ist dann

$$\begin{aligned} V(\delta) &= L_0' r_0^2 \pi + L_1' \pi \Big( r_1^2 + r_2^2 \Big) \\ &= \Big( L_0 + \delta \Big) r_0^2 \pi + \sqrt{L_1^2 + \delta^2 - 2\delta L_1 \cos\theta} \;\; \pi \Big( r_1^2 + r_2^2 \Big). \end{aligned}$$

Der Fall $L_1' = \sqrt{L_1^2 + \delta^2 - 2\delta L_1 \cos\theta} = 0$ tritt im Modell nicht auf. Hier ist die Funktion $V(\delta)$ stetig differenzierbar. Es ist $V(0) = V_{min}$ und

$$\left. \frac{dV(\delta)}{d\delta} \right|_{\delta=0} = 0. \tag{1.10}$$

Mit

$$\frac{dV(\delta)}{d\delta} = r_0^2 \pi + \frac{2\delta - 2L_1 \cos\theta}{2\sqrt{L_1^2 + \delta^2 - 2\delta L_1 \cos\theta}} \;\; \pi \Big( r_1^2 + r_2^2 \Big)$$

folgt

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV(\delta)}{d\delta} \right|_{\delta=0} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad r_0^2 \pi + \frac{-2L_1 \cos\theta}{2\sqrt{L_1^2}} \;\; \pi \Big( r_1^2 + r_2^2 \Big) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad r_0^2 \pi - \cos\theta \;\; \pi \Big( r_1^2 + r_2^2 \Big) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{r_0^2}{r_1^2 + r_2^2}. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\frac{d^2 V(\delta)}{d\delta^2} = \frac{\sqrt{L_1^2 + \delta^2 - 2\delta L_1 \cos\theta} - \dfrac{(\delta - L_1 \cos\theta)(2\delta - 2L_1 \cos\theta)}{2\sqrt{L_1^2 + \delta^2 - 2\delta L_1 \cos\theta}}}{L_1^2 + \delta^2 - 2\delta L_1 \cos\theta} \, \pi \Big( r_1^2 + r_2^2 \Big).$$

Daher ist für alle $0 < \theta < \pi/2$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 V(\delta)}{d\delta^2} \right|_{\delta=0} &= \left( L_1 - \frac{(-L_1 \cos\theta)^2}{L_1} \right) \frac{\pi \Big( r_1^2 + r_2^2 \Big)}{L_1^2} \\ &= \Big( 1 - \cos^2\theta \Big) \frac{\pi (r_1^2 + r_2^2)}{L_1} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Es folgt, daß $V(0) = V_{min}$ tatsächlich minimal ist. Für die Bronchien mit den Radien $r_0, r_1$ und $r_2$ ist $\theta$ der Winkel um ihr Volumen zu minimieren. Gleichzeitig soll der Widerstand im symmetrischen Bronchialbaum minimal sein. Also $r_1 = r_2$ mit $r_1 = r_0 2^{-1/3}$. Es folgt

$$\cos\theta = \frac{r_0^2}{\left(r_0 2^{-1/3}\right)^2 + \left(r_0 2^{-1/3}\right)^2} = \frac{1}{2 \cdot 2^{-2/3}} = 2^{-1/3} \Rightarrow \theta \approx 0,6539.$$

Für den Winkel ergibt sich $\theta = 37°28'$. Dies ist der Winkel für minimales Volumen in einem symmetrischen Bronchialbaum mit minimalem Widerstand. Horsfield und Cumming [15] untersuchten insgesamt 116 Verzweigungen mit 232 Winkeln in einen Lungenausguß. Tabelle 1.3 zeigt die Winkel nach Bronchiendurchmessern gruppiert. Der Mittelwert der Winkel liegt bei $39°24'$. Eine zufällige Auswahl von 102 Winkeln ergab einen Mittelwert von $41°26'$ nahe des Idealwertes $37°28'$. Dabei lagen die Winkel zwischen $-2°$ und $112°$.

Tabelle 1.3: Verzweigungswinkel im Bronchialbaum

| Durchmesser des Vaterbronchien in cm | liegen in Generation | Mittelwert der Winkel in ° | Zahl der Winkel |
|---|---|---|---|
| $>$ 0,4 | 0 - 4 | 32 | 32 |
| 0,3 - 0,4 | 5 | 30 | 8 |
| 0,2 - 0,3 | 6 - 7 | 36 | 62 |
| 0,1 - 0,2 | 8 - 11 | 43 | 122 |
| $<$ 0,1 | 12 -23 | 50 | 8 |

Weibels Modell bezieht sich auf Durchschnittswerte. **Goldberg** et al. [13] betrachteten die unterschiedliche Länge der Tochterbronchen. Es ergibt sich ein Zusammenhang zu den Fibonacci Zahlen bzw. zum „Goldenen Schnitt“. Die Trachea verzweigt sich in einen kurzen $B_k$ und in einen langen $B_l$ Bronchus. Der linke Hauptbronchus mißt $\approx 60mm$, der rechte $\approx 37mm$. Es ist $B_k/B_l = 0,62$. Anhand von zwei Methoden wird diese Idee bis zur siebten Generation fortgeführt.

**Methode A:** Berechnet von der ersten bis zur siebten Generation alle $B_k/B_l$ und bildet den Gesamtdurchschnitt.

**Methode B:** Bildet die Summe aller kurzen $\sum B_k$ und aller langen $\sum B_l$ Bronchien in den Generation eins bis sieben. Bestimmt $\sum B_k / \sum B_l$ für jede Generation und dann den Gesamtdurchschnitt.

Tabelle 1.4 zeigt das Ergebnis der Methoden A und B. Mit $F_n$ als n-te Fibonacci Zahl[1] gilt

$$\Phi := \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) = 0,618\ldots.$$

Beim „Goldenen Schnitt“ gilt für die zwei Teilstücke $a, b$, ebenfalls $\Phi = a/b$. Aus der Botanik sind zahlreiche Zusammenhänge dieser Art bekannt.

Tabelle 1.4: Gesamtdurchschnitt von $B_k/B_l$

| | Methode A | Methode B |
|---|---|---|
| 1. Lunge | $0,66 \pm 0,02$ | $0,62 \pm 0,03$ |
| 2. Lunge | $0,64 \pm 0,02$ | $0,62 \pm 0,03$ |

[1] $F_0 := 0, F_1 := 1, F_{n+1} := F_n + F_{n-1}$

# Kapitel 2

# Die fraktale Geometrie

Die klassische Geometrie kann zerklüftete, irreguläre, zersplitterte, verästelte und andere ähnliche Mengen nicht befriedigend beschreiben. Beispiele für diese komplexen Mengen sind die Cantor Menge, stetige nicht differenzierbare Kurven oder raumfüllende Oberflächen. Solche Mengen wurden oft als „pathologisch“ bezeichnet und als Sonderfälle ignoriert. Die von Mandelbrot definierte fraktale Geometrie ist ein mächtiges Instrument um diese „pathologischen“ Mengen zu beschreiben. Kennzeichnend ist ihre fraktale Dimension. Sie ist umso größer, je komplexer die Menge ist. Gewöhnlich ist sie nicht ganzzahlig. In der fraktalen Geometrie wird eine Vielzahl von Dimensionen benutzt, z.B. die Hausdorff-Dimension, fraktale Dimension, Box-Dimension, Selbstähnlichkeits-Dimension und viele andere. Sie sind alle miteinander verwandt. Einige von ihnen sind jedoch nur für bestimmte Mengen sinnvoll definiert. Manchmal sind sie alle anwendbar und stimmen überein. Grundlage dieser Dimensionsbegriffe ist die Hausdorff-Dimension. Sie leitet sich vom Hausdorff-Maß ab.

## 2.1 Das Hausdorff-Maß

Um das Hausdorff-Maß zu definieren sind einige Grundlagen aus der Maßtheorie erforderlich. Sie werden im folgenden kurz und allgemein vermittelt. Literatur:[2],[6],[11],[30],[31].

**Definition 2.1.1 ($\sigma$-Algebra)** *Ein nichtleeres System $\mathcal{A}$ von Teilmengen einer Menge $X$ heißt $\sigma$-Algebra in $X$, wenn es folgende Eigenschaften besitzt:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$,
2. $A \in \mathcal{A}$ *impliziert* $X \setminus A \in \mathcal{A}$,
3. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ *impliziert* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Für jede beliebige Menge $X$ ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ eine $\sigma$-Algebra in $X$.

**Definition 2.1.2 (Borelsche $\sigma$-Algebra und Borel Mengen)** *Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Die kleinste $\sigma$-Algebra in $X$, die alle offenen Mengen enthält heißt Borelsche $\sigma$-Algebra, sie wird mit $\mathcal{B}(X)$ bezeichnet. Ihre Elemente heißen Borel Mengen.*

Im folgenden verwende ich auf dem $\mathbb{R}^n$ stets den euklidischen Abstand als Metrik. Also $d(x, y) := |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots (x_n - y_n)^2}$. Jede offene, jede abgeschlossene und jede kompakte Menge in $\mathbb{R}^n$ ist eine Borel Menge.

**Definition 2.1.3 (Maß auf $\sigma$-Algebra)** *Ein Maß auf einer $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}$ ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$ mit den Eigenschaften*

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. *für eine abzählbare Folge $A_i \in \mathcal{A}$ von disjunkten Mengen, gilt*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

*Die Mengen aus $\mathcal{A}$ heißen meßbare Mengen.*

Mit $A, B \in \mathcal{A}$ und $A \subseteq B$ folgt $(B \setminus A) \cap A = \emptyset$. Dann gilt für ein Maß $\mu$ auf der $\sigma$-Algebra $\mu(B) = \mu(B \setminus A \ \cup \ A) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$. Also die Beziehung

$$A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B). \tag{2.1}$$

**Definition 2.1.4 (Verteilung)** *Ein Maß $\mu$ auf den Borel Mengen des $\mathbb{R}^n$ mit einem kompakten Träger und mit $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ nennt man Verteilung.*

Der Träger der Verteilung $\mu$ ist die kleinste kompakte Menge $A$ aus $\mathbb{R}^n$ mit $\mu(\mathbb{R}^n \setminus A) = 0$. Das Maß ist somit auf der Menge $A$ konzentriert.

**Beispiel 2.1.5 (Lebesgue-Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$)** *Jeder n-dimensionale Quader der Form*

$$Q = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n)$$

*ist eine Borel Menge in $\mathbb{R}^n$. Sein Volumen ist durch*

$$Vol^n(Q) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_n - a_n)$$

*gegeben. Für eine Borel Menge $F$ aus $\mathbb{R}^n$ definiert dann*

$$\mathcal{L}^n(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} Vol^n(Q_i) : F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i\right\}$$

*ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, das n-dimensionale Lebesgue-Maß von $F$.*

Das Maß läßt sich auch auf nicht Borel Mengen fortsetzen. Man bezeichnet es als das n-dimensionale äußere Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$. Da sämtliche Mengen in dieser Arbeit Borel Mengen sind, werden äußere Maße hier nicht weiter betrachtet. Offensichtlich ist das Lebesgue-Maß $\mathcal{L}^n$ nur für $n \in \mathbb{N}$ definiert. Um das Hausdorff-Maß zu definieren müssen die Begriffe $\delta$-Überdeckung und der Durchmessers einer Menge definiert werden. Für eine Teilmenge $U$ eines metrischen Raumes $(X, d)$ ist der **Durchmesser** durch

$$|U| := \sup\Big\{d(x, y) : x, y \in U\Big\}$$

definiert. Es sei $(U_i)$ eine abzählbare Familie von Teilmengen aus $X$ mit $0 < |U_i| \leq \delta$. Gilt für $F \subset X$

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i,$$

so heißt $(U_i)$ eine **$\delta$-Überdeckung** von $F$. Sei nun $s$ eine nicht negative Zahl, betrachte für $F \in \mathcal{B}(X)$ und jedes $\delta > 0$ den Wert

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : U_i \in \mathcal{B}(X) \text{ ist eine } \delta\text{−Überdeckung von F} \right\}. \quad (2.2)$$

D.h. es werden alle $\delta$-Überdeckungen von $F$ gebildet. Für jede solche Überdeckungen nimmt man die Durchmesser der offenen Mengen erhebt sie zur s-Potenz, summiert sie und bildet das Infimum. Für $\delta \to 0$ ergibt sich der Limes inferior. Das Infimum $\mathcal{H}^s_\delta(F)$ ist für $\delta \to 0$ monoton steigend und strebt gegen einen Grenzwert. Deshalb existiert ein eindeutiger Grenzwert für jede Borel Menge aus $X$, auch wenn er gegen unendlich strebt. Das Hausdorff-Maß kann nun definiert werden.

**Definition 2.1.6 (Hausdorff-Maß)** *Es sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, $F \in \mathcal{B}(X)$ und $s$ eine nicht negative Zahl. Dann definiert*

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F)$$

*ein Maß auf $\mathcal{B}(X)$. Der Grenzwert $\mathcal{H}^s(F)$ wird das s-dimensionale Hausdorff-Maß von $F$ genannt.*

Man bedenke, daß $s$ nicht ganzzahlig sein muß. Abbildung 2.1 zeigt wie eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ mit Kugeln überdeckt wird. Ist $F$ eine Borel Menge von $\mathbb{R}^n$, so gilt die Beziehung

$$\mathcal{H}^n(F) = c_n \mathcal{L}^n(F). \quad (2.3)$$

Die Konstante $c_n$ entspricht dem n-dimensionale Volumen einer Kugel mit dem Durchmesser 1 [31, Seite 54]. Also

$$c_n := \frac{\Gamma(1/2)^n}{\Gamma(1+n/2)} r^n = \frac{\pi^{n/2}}{2^n (n/2)!}.$$

Denn jede Menge $U$ ist in einer Kugel mit dem Durchmesser $|U|$ enthalten. Folgende Behauptungen sind nützliche Eigenschaften des Hausdorff-Maßes.

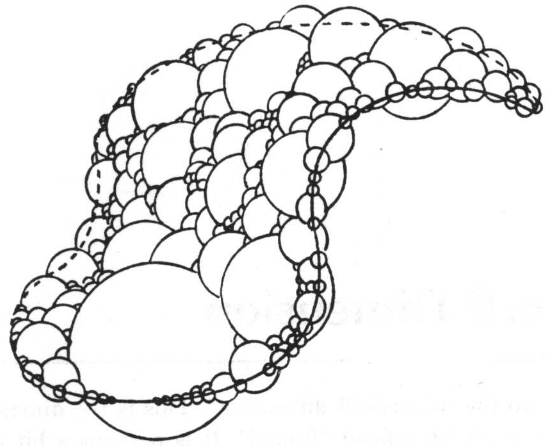


Abbildung 2.1: Eine Überdeckung mit Kugeln [6, Seite 148]

**Behauptung 2.1.7 (Skalierungseigenschaft)** *Sei* $F \subset \mathbb{R}^n$ *und* $\lambda > 0$ *dann gilt*

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F) \text{ mit } \lambda F = \{\lambda x : x \in F\}.$$

**Beweis:** Sei $(U_i)$ eine $\delta$-Überdeckung von $F$, dann ist $(\lambda U_i)$ eine $\lambda\delta$-Überdeckung von $\lambda F$,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda F) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda U_i|^s = \lambda^s \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \\ &\Rightarrow \mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda F) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s_{\delta}(F) \\ &\Rightarrow \mathcal{H}^s(\lambda F) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(F). \end{aligned}$$

Ist $(U_i)$ eine $\delta$-Überdeckung von $\lambda F$, dann ist $(U_i/\lambda)$ eine $\delta/\lambda$-Überdeckung von $F$,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \mathcal{H}^s_{\delta/\lambda}(F) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |U_i/\lambda|^s = (1/\lambda)^s \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \\ &\Rightarrow \mathcal{H}^s_{\delta/\lambda}(F) \leq (1/\lambda)^s \mathcal{H}^s_{\delta}(\lambda F) \\ &\Rightarrow \mathcal{H}^s(F) \leq (1/\lambda)^s \mathcal{H}^s(\lambda F). \end{aligned}$$

Insgesamt folgt $\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$. $\square$

**Behauptung 2.1.8 (Hölder-Bedingung mit Exponent $\alpha$)** *Es sei $F \subset \mathbb{R}^n$ und $f : F \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung mit den Konstanten $c, \alpha > 0$, so daß $|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|^\alpha$ für alle $x, y \in F$ gilt. Dann gilt für jedes $s \geq 0$*

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}\Big(f(F)\Big) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F).$$

**Beweis:** Sei $(U_i)$ eine $\delta$-Überdeckung von $F$, dann ist $|f(F \cap U_i)| \leq c|U_i|^\alpha$,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \Big(f(F \cap U_i)\Big) \text{ ist eine } c\delta^\alpha = \epsilon\text{-Überdeckung von } f(F) \\
&\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{\infty} |f(F \cap U_i)|^{s/\alpha} \leq c^{s/\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \\
&\Rightarrow \quad \mathcal{H}_\epsilon^{s/\alpha}\Big(f(F)\Big) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}_\delta^s(F) \\
&\Rightarrow \quad \mathcal{H}^{s/\alpha}\Big(f(F)\Big) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F).
\end{aligned}$$

□

## 2.2 Die Hausdorff-Dimension

Der folgende Satz zeigt, daß es möglich ist, jeder Borel Menge eine Hausdorff-Dimension zuzuordnen. Außerdem wird die topologische Dimension eingeführt. Für Fraktale ist die Beziehung zwischen den beiden Dimensionen entscheidend. Literatur: [6], [11], [30].

**Satz 2.2.1** *Sei $F$ eine Borel Menge und $0 < s < t$. Dann gelten folgende Implikationen*

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s(F) < \infty \quad &\Rightarrow \mathcal{H}^t(F) = 0 \\
\mathcal{H}^t(F) > 0 \quad &\Rightarrow \mathcal{H}^s(F) = \infty.
\end{aligned}$$

**Beweis:** Sei $(U_i)$ eine $\delta < 1$ Überdeckung der Borel Menge $F$,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad |U_i|^t / |U_i|^s = |U_i|^{t-s} \leq \delta^{t-s} \Rightarrow |U_i|^t \leq \delta^{t-s}|U_i|^s \\
&\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \Rightarrow \mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s}\mathcal{H}_\delta^s(F) \\
&\Rightarrow \quad \mathcal{H}^t(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \lim_{\delta \to 0} \delta^{t-s}\mathcal{H}_\delta^s(F) = 0 \cdot \mathcal{H}^s(F) = 0.
\end{aligned}$$

Angenommen $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, dann folgt mit der ersten Aussage $\mathcal{H}^t(F) = 0$. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $\mathcal{H}^t(F) > 0$ und damit folgt die zweite Aussage. □

Folglich gibt es für jede Borel Menge $F$ genau einen einzigen „kritischen Wert“ $s$, bei dem das Hausdorff-Maß von unendlich auf null springt. Also

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^t(F) &= \infty \text{ für alle } t < s, \\ \mathcal{H}^t(F) &= 0 \quad \text{für alle } t > s. \end{aligned}$$

Abbildung 1 zeigt die Situation für den Fall $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

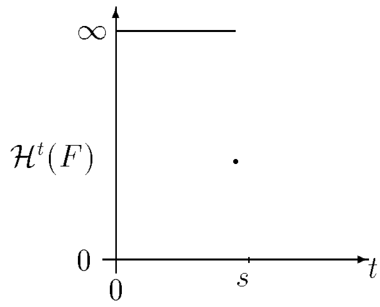



Abbildung 2.2: Der Graph von $\mathcal{H}^t(F)$ gegen $t$. Bei $t = s$ springt das Maß von unendlich auf null.

Die Hausdorff-Dimension ist wie folgt definiert.

**Definition 2.2.2** *Die Hausdorff-Dimension $dim_H F$ einer Borel Menge $F$ ist der einzige kritische Wert des Hausdorff-Maßes*

$$dim_H F := \inf\left\{s : \mathcal{H}^s(F) = 0\right\} = \sup\left\{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\right\}.$$

Natürlich ist es möglich, daß $\mathcal{H}^s(F) = 0$ ist für alle $s > 0$ (etwa ein Punkt). In diesen Fall setzt man $\dim_H F = 0$. Ist $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ für alle $s > 0$ so setzt man $\dim_H F = \infty$. Borel Mengen für die es ein $s$ gibt mit $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$, nennt man *s-Mengen*. Für die mathematische Untersuchung sind sie die bei weiten günstigsten Mengen, die man untersuchen kann, sie treten auch überraschend oft auf. Die folgende Behauptung liefert eine untere Abschätzung der Hausdorff-Dimension.

**Behauptung 2.2.3 (Verteilungsprinzip)** *Es sei $\mu$ eine Verteilung auf $F$. Gibt es für ein $s \geq 0$ Zahlen $c > 0$ und $\delta > 0$, so daß*

$$\mu(U) \leq c|U|^s \text{ für alle Mengen } U \text{ mit } |U| \leq \delta,$$

*dann ist $\mathcal{H}^s(F) \geq \mu(F)/c$ und somit $dim_H F \geq s$.*

**Beweis:** Ist $(U_i)$ eine $\delta$-Überdeckung von $F$, so gilt

$$0 < \mu(F) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i) \leq c \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s.$$

Für die Infima gilt, $\mathcal{H}^s_\delta(F) \geq \mu(F)/c > 0$ und mit $\delta \to 0$ folgt die Behauptung. □

**Satz 2.2.4** *Sei $F \subset \mathbb{R}^n$ und $f : F \to \mathbb{R}^m$ eine Bi-Lipschitz-Abbildung, d.h.*

$$c_1|x-y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x-y|$$

*für alle $x, y \in F$ und $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$, dann gilt*

$$dim_H f(F) = dim_H F.$$

**Beweis:** Mit Behauptung (2.1.8), $\alpha = 1$ und $s > dim_H F$ folgt

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}^s\big(f(F)\big) \leq c_2^s \mathcal{H}^s(F) = 0 \\ \Rightarrow\ & dim_H f(F) \leq s \quad \forall s > dim_H F \\ \Rightarrow\ & dim_H f(F) \leq dim_H F. \end{aligned}$$

Da $f$ eine Bi-Lipschitz-Abbildung ist, folgt daß $f$ injektiv und somit invertierbar ist. Mit $f^{-1} : f(F) \to F$ und Behauptung (2.1.8)

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \left|f^{-1}\big(f(x)\big) - f^{-1}\big(f(y)\big)\right| = |x-y| \leq c_1^{-1}|f(x) - f(y)| \\
&\Rightarrow \quad \mathcal{H}^s\Big(f^{-1}(f(F))\Big) = \mathcal{H}^s(F) \leq c_1^{-s}\mathcal{H}^s\Big(f(F)\Big) \quad \forall s \geq 0 \\
&\Rightarrow \quad \mathcal{H}^s(F) \leq c_1^{-s}\mathcal{H}^s\Big(f(F)\Big) = 0 \quad \forall s > dim_H f(F) \\
&\Rightarrow \quad dim_H F \leq dim_H f(F),
\end{aligned}$$

ingesamt folgt die Behauptung. □

Dieser Satz zeigt eine fundamentale Eigenschaft der Hausdorff-Dimension. *Sie ist bezüglich Bi-Lipschitz-Abbildung invariant.* Zwischen zwei Mengen mit unterschiedlichen Hausdorff-Dimensionen kann es somit keine Bi-Lipschitz Abbildung geben. Aus der Topologie ist bekannt, daß die topologische Dimension bezüglich Homöomorphismen (stetige bijektive Abbildungen mit stetiger Inverser) invariant ist. Um weitere wichtige Eigenschaften der topologischen Dimension aufzuzählen, wird hier das Wichtigste kurz vermittelt.

**Definition 2.2.5 (Basis eines metrischen Raumes)** *Eine Familie $\mathcal{B}$ aus offenen Mengen eines metrischen Raumes $X$ heißt Basis für die offenen Mengen von $X$, genau dann wenn für jede offene Menge $A \subseteq X$ und jedes $x \in A$ ein $U \in \mathcal{B}$ existiert mit $x \in U \subseteq A$ [6, Seite 43].*

**Definition 2.2.6 (Topologische Dimension eines metrischen Raumes)** *(Kleine induktive Dimension)*

1. *$dim_T(\emptyset) = -1$,*
2. *Für $k \geq 0$ ist $dim_T X \leq k \Leftrightarrow$ es gibt eine Basis $(U_i)$ von $X$ mit $dim_T \partial U_i \leq k-1$,[1] $dim_T X = k \Leftrightarrow dim_T X \leq k$ und $dim_T X \not\leq k-1$,*
3. *Gilt für alle $k$ $dim_T X \not\leq k$, so gilt $dim_T X = \infty$.*

*[6, Seite 81]*

[1] $\partial U$ bezeichnet den Rand von $U$

Folgende Eigenschaften der topologischen Dimension sind bekannt.

1. *Punkte haben die topologische Dimension 0, Kurven die Dimension 1, Oberflächen sind 2-dimensional und Volumen sind 3 dimensional, Allgemein gilt: Beinhaltet $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht leere offene Menge,dann ist $dim_T S = n$, sie ist für jede Menge ganzzahlig.*

2. *Für $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ und $A \subseteq B$ folgt $dim_T A \leq dim_T B$.*

3. *Sind $S$ und $T$ homöomorphe Mengen, d.h. es gibt eine stetige bijektive Abbildung mit stetiger Inverse zwischen $S$ und $T$, so gilt $dim_T T = dim_T S$.*

4. *Sei $F_1, F_2, \ldots$ eine abzählbare Folge von abgeschlossenen Teilmengen mit $dim_T F_i \leq n$ und $F := \bigcup F_i$, dann gilt $dim_T F \leq n$ [16, Seite 30].*

Bei der Hausdorff-Dimension sind die Beziehungen leicht durch die Maßeigenschaften nachzuweisen.

1. **Glatte Mengen.** Ist $F$ eine kompakte glatte (d.h. stetig diffenzierbare) Menge so ist $dim_H F = dim_T F$, entspricht also ihrer topologischen Dimension. Das Lebesgue-Borel-Maß existiert für diese Menge. Mit der Beziehung zwischen Hausdorff- und den Lebesgue-Borel-Maß (2.3) folgt die Behauptung.

2. **Monotonie.** Falls $A \subseteq B$ folgt, $\dim_H A \leq dim_H B$. Mit der Beziehung (2.1) folgt für alle $s$: $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B)$, also $\dim_H A \leq \dim_H B$.
   Ist $F \subset \mathbb{R}^n$, dann folgt $dim_H F \leq n$.

3. **Abzählbare Stabilität.** Sei $F_1, F_2, \ldots$ eine abzählbare Folge von Borel Mengen und $F := \bigcup F_i$, dann gilt $\dim_H F = \sup\{\dim_H F_i\}$.
   Denn aus $s > dim_H F_i$ für alle $i$, folgt $\mathcal{H}^s(F_i) = 0$
   $\Rightarrow \mathcal{H}^s\left(\bigcup F_i\right) \leq \sum \mathcal{H}^s\left(F_i\right) = 0 \Rightarrow dim_H F \leq s$.
   Nun ist $F_i \subseteq F$. Wegen der **Monotonie** folgt $dim_H F_i \leq dim_H F$ und daher $dim_H F = \sup\{dim_H F_i\}$.

4. **Abzählbare Mengen.** Ist $F$ abzählbar, so gilt $dim_H F = 0$. Besteht $F_i$ aus genau einen Punkt, so ist $\mathcal{H}^0(F_i) = 1$. Also ist $dim_H F_i = 0$. Mit der **Abzählbaren Stabilität** folgt, das abzählbare Mengen die Hausdorff-Dimension 0 besitzen und $\mathcal{H}^0(F)$ gibt die Anzahl der Punkte an.

Die aufgezählten Eigenschaften der beiden Dimensionsbegriffen rechtfertigen den Begriff der Hausdorff-**Dimension**. Mandelbrot [24, Seite 15] definiert ein Fraktal [2] in seiner Orginalarbeit wie folgt.

**Definition 2.2.7** *Ein Fraktal ist eine Menge $F$, mit $dim_T F < dim_H F$.*

Mandelbrot benutzt für die Hausdorff-Dimension auch den Begriff fraktale Dimension.

**Beispiel 2.2.8 (Die Cantor Menge)** *Das Intervall $\mathcal{G}_0 := [0,1]$ wird in drei Teilintervalle gleicher Länge geteilt und das mittlere offene Drittel entfernt, so daß die Menge $\mathcal{G}_1 := [0,1/3] \cup [2/3,1]$ übrig bleibt. Dann werden von den beiden Teilintervallen von $\mathcal{G}_1$ wieder die jeweils mittleren offenen Drittel entfernt, so daß die Menge*

$$\mathcal{G}_2 := [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$$

*entsteht. Diese Prozedur wird fortgesetzt. Allgemein erhält man $\mathcal{G}_k$ indem aus jedem Teilintervall von $\mathcal{G}_{k-1}$ die offenen mittleren Drittel entfernt werden. Es entsteht somit eine Folge von Mengen $\mathcal{G}_0 \supset \mathcal{G}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{G}_n \supset \cdots$, wobei jedes $\mathcal{G}_n$ aus $2^n$ Intervallen der Länge $3^{-n}$ besteht. Die* **Cantor-Menge** *$\mathcal{C}$ besteht aus den Zahlen, die in allen $\mathcal{G}_n$ liegen, d.h. $\mathcal{C} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n = \lim_{n\to\infty} \mathcal{G}_n$. Aus der Konstruktion folgt, daß $\mathcal{C} \subset [0,1]$ beschränkt und das Komplement*

$$[0,1] \setminus \mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i'$$

*offen ist. Wobei $I_i'$ die Vereinigung der offenen Intervalle ist, die beim i-Schritt entfernt werden. Da die Vereinigung über eine beliebige Indexmenge von offener Teilmengen offen ist, folgt daß das Komplement $[0,1] \setminus \mathcal{C}$ offen ist und somit ist $C$ abgeschlossen. Damit ist $\mathcal{C}$ kompakt. Jedes $\mathcal{G}_n$ beinhaltet $2^n$ Intervalle der Länge $3^{-n}$. Für das Lebesgue-Maß ergibt sich*

$$\mathcal{L}^1(\mathcal{G}_n) = (2/3)^n \Rightarrow \mathcal{L}^1(\mathcal{C}) = \mathcal{L}^1(\lim_{n\to\infty} \mathcal{G}_n) = \lim_{n\to\infty} (2/3)^n = 0.$$

[2] lat.: fractum = gebrochen

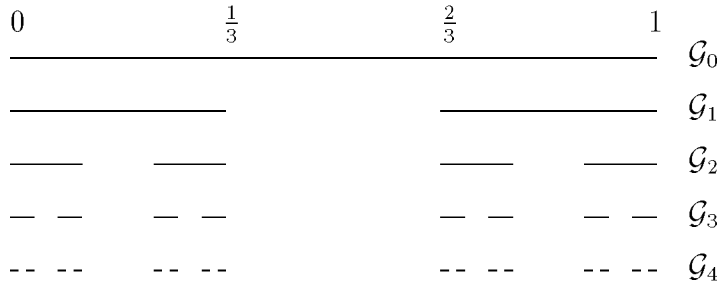



Abbildung 2.3: Konstruktion der Cantor-Menge

*Somit enthält $\mathcal{C}$ keine Intervalle. Es kann somit keine Basis aus offenen Intervallen aus $\mathcal{C}$ geben. Daher ist $dim_T\mathcal{C} \leq 0$. Anderseits ist $\mathcal{C}$ nicht leer, z.B. sind alle Intervallendpunkte in $\mathcal{C}$ enthalten. Damit ist $dim_T\mathcal{C} > -1$. Aus der Ganzzahligkeit der topologischen Dimension folgt also: $dim_T\mathcal{C} = 0$. Aber das ist noch nicht alles, die Cantor-Menge ist eine überabzählbare Menge. Sie beinhaltet genau die Zahlen mit der Darstellung $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/3^n$, wobei $a_n = 0$ oder $a_n = 2$ ist. Vom topologischen Standpunkt aus gesehen ist sie eine komplizierte Menge. Da $\mathcal{C}$ überabzählbar ist folgt aus der abzählbaren Stabilität, $\mathcal{H}^0(\mathcal{C}) = \infty$, anderseits beinhaltet $\mathcal{C}$ keine Intervalle, die Vermutung, daß $\mathcal{H}^1(\mathcal{C}) = 0$ ist, und $0 < dim_H\mathcal{C} < 1$ liegt nahe. Damit ist die Cantor-Menge ein guter Kandidat für ein Fraktal. Bei der folgenden Berechnung der Hausdorff-Dimension bestätigt sich diese Vermutung.*
*Sei nun $\mathcal{G}_n$ wie oben definiert. Also besteht $\mathcal{G}_n$ aus $2^n$ Intervalle der Länge $3^{-n}$. Diese Intervalle bilden eine Überdeckung $(U_i)$ von $\mathcal{C}$. Mit $s := \log 2/\log 3$ gilt für das Hausdorff-Maß*

$$\mathcal{H}^s_{3^{-n}}(\mathcal{C}) \leq \sum_{i=1}^{2^n} |U_i|^s = 2^n 3^{-ns} = 1 \Rightarrow \mathcal{H}^s(\mathcal{C}) \leq 1.$$

*Es bleibt noch zu zeigen, daß $\mathcal{H}^s(\mathcal{C}) > 0$ ist. Das Verteilungsprinzip (2.2.3) liefert eine untere Abschätzung. Sei $\mu$ eine Verteilung auf $\mathcal{G}_n$, so daß jedes der $2^n$ Intervalle die Masse $2^{-n}$ trägt. Weiter sei $U$ eine Menge mit $3^{-(n+1)} \leq |U| < 3^{-n}$. Die Menge $U$ kann somit höchstens ein Intervall von $\mathcal{G}_n$ schneiden. Denn der Abstand zwischen zwei Intervallen in $\mathcal{G}_n$ ist mindestens $3^{-n}$. Es gilt $\mu(U) \leq 2^{-n} = (3^{-n})^s \leq (3|U|)^s$. Daher ist $\mathcal{H}^s(\mathcal{C}) > 0$ und* *somit* $dim_H\mathcal{C} \geq s$. *Folglich ist* $s = \log 2/\log 3$ *der kritische Wert des Hausdorff-Maßes und die Cantor-Menge hat die fraktale Dimension*

$$dim_H\mathcal{C} = \log 2/\log 3 = 0,6309\ldots.$$

## 2.3 Die Box-Dimension

Das Hausdorff-Maß bildet die Grundlage für die fraktale Geometrie. Für die numerische Dimensionsbestimmung ist das Maß allerdings kaum brauchbar. Grund ist die unendliche Summe der Durchmesser $|U_i|^s \leq \delta^s$ beim Hausdorff-Maß (2.2). Die Box-Dimension vermeidet diese Schwierigkeit, indem der Ausdruck $|U_i|^s$ durch $\delta^s$ ersetzt wird und nur endliche Überdeckungen betrachtet werden. Literatur: [6], [11], [30].
Sei nun $F$ eine nichtleere beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Der Wert $N_\delta(F)$ ist die kleinste Anzahl von Mengen mit dem Durchmesser von höchstens $\delta$, mit der man $F$ überdecken kann. Betrachte für $s \geq 0$ den Wert

$$N_\delta(F)\delta^s := \inf\left\{\sum_i \delta^s{:}(U_i) \text{ ist eine endliche } \delta\text{-Überdeckung von } F\right\}. \quad (2.4)$$

Der Unterschied zum Hausdorff-Maß ist ersichtlich. Existiert für alle $\delta > 0$ der Wert etwa $c$, so gilt die Proportionalität $N_\delta(F)\delta^s \propto c$. Dies ist als Potenzgesetz bekannt. Es folgt $\log N_\delta(F) + s\log\delta \propto \log c$. Somit kann die Potenz $s$ leicht bestimmt werden. Mit der Bezeichnung (2.4) folgt die Definition.

**Definition 2.3.1 (Box-Dimension)** *Die untere und obere Box-Dimension einer Teilmenge $F$ von $\mathbb{R}^n$ sind durch*

$$\underline{dim}_B F = \liminf_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}$$
$$\overline{dim}_B F = \limsup_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}$$

*gegeben. Stimmen beide Werte überein, so ist die Box-Dimension durch*

$$dim_B F = \lim_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}$$

*definiert.*

Gibt es für $N_\delta(F)$ kein exaktes Potenzgesetz, so benutz man die oberen und unteren Limites.
Diese Definition ist für numerische oder experimentelle Zwecke attraktiv, da

$s$ durch die Steigung im doppeltlogarithmischen Diagramm geschätzt werden kann. Für die Hausdorff-Dimension und Box-Dimension ergibt sich die Abschätzung $dim_H F \leq dim_B F$. Sei dazu $1 < \mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F)$. Wegen (2.2) gilt $\mathcal{H}^s_\delta(F) \leq N_\delta(F)\delta^s$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 0 < \log\left(N_\delta(F)\delta^s\right) = \log N_\delta(F) + s \log \delta \\ &\Rightarrow s \leq \liminf_{\delta \to 0} \Big( \log N_\delta(F)/(-\log \delta)\Big) \\ &\Rightarrow dim_H F \leq \underline{dim}_B F \leq \overline{dim}_B F. \end{aligned} \tag{2.5}$$

In der folgenden Behauptung wird ein Beispiel gegeben.

**Behauptung 2.3.2** *Die Menge* $F = \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\}$ *ist eine kompakte Menge mit* $0 = dim_H F < dim_B F = 1/2$.

**Beweis:** Offenbar ist $F$ kompakt und abzählbar, somit ist $dim_H F = 0$. Sei $|U| = \delta < 1/2$ und $k \in \mathbb{N}$ erfülle

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} > \delta \geq \frac{1}{k(k+1)}. \tag{2.6}$$

Somit kann $U$ höchstens einen Punkt aus $\{1, 1/2, \ldots, 1/k\}$ überdecken. Also werden mindestens $k$ Mengen mit dem Durchmesser $\delta$ benötigt, um $F$ zu überdecken, es folgt

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \frac{\log k}{\log\Big(k(k+1)\Big)}.$$

Für $\delta \to 0$ ergibt sich $\underline{dim}_B F \geq 1/2$. Ist $\delta$ wie in (2.6) definert, dann überdecken $(k+1)$ Intervalle der Länge $\delta$ das Intervall $[0, 1/k]$, $\delta(k+1) \geq 1/k$. Die übrigen $(k-1)$ Punkte von $F$ können durch weitere $(k-1)$ Intervalle überdeckt werden. Es folgt somit

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 2k}{\log\Big(k(k-1)\Big)}$$

und daher $\overline{dim}_B F \leq 1/2$. Insgesamt folgt $dim_B F = 1/2$. □

Nun ist $F$ nach Definition (2.2.7) aber kein Fraktal, trotzdem hat sie eine

gebrochene Box-Dimension. Die Box-Dimension entscheidet also nicht, ob eine Menge ein Fraktal ist. Ein späterer Satz zeigt, für welche Mengen die Box-Dimension mit der Hausdorff-Dimension übereinstimmt. Diese Fraktale treten in der Praxis häufig auf. Der große Vorteil ist dann die relative einfache Bestimmung der fraktalen Dimension mit Hilfe der Box-Dimension.
In den folgenden zwei Anwendungen benutzt man Potenzgesetze um die Dimension zu bestimmen.

**Anwendung 2.3.3 (Hirnhaut bei Säugetieren)** *Die Hirnoberfläche von Säugetieren ist durch Hirnwindungen, Furchen, Spalten und Einschnitte stark zerklüftet. Beim Menschen reichen die Einschnitte etwa 2 cm tief. Die weiche Hirnhaut (Pia mater encephali) liegt der Oberfläche des Gehirns unmittelbar an. Sie folgt dabei allen Unebenheiten der Hirnoberfläche. Ihre Oberfläche entspricht somit der Hirnoberfläche. H.Elias und D.Schwartz [8] verglichen diese Oberfläche bei verschiedenen Säugetieren.*

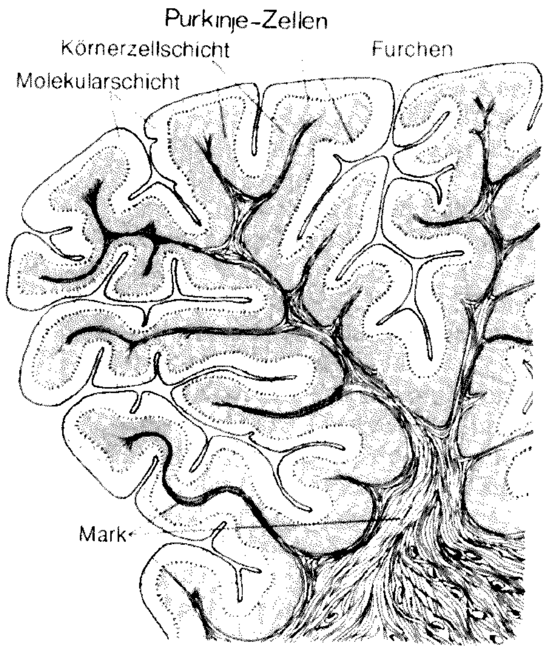



Abbildung 2.4: Sagittalschnitt durch das menschliche Kleinhirn *[36, Seite 795]*

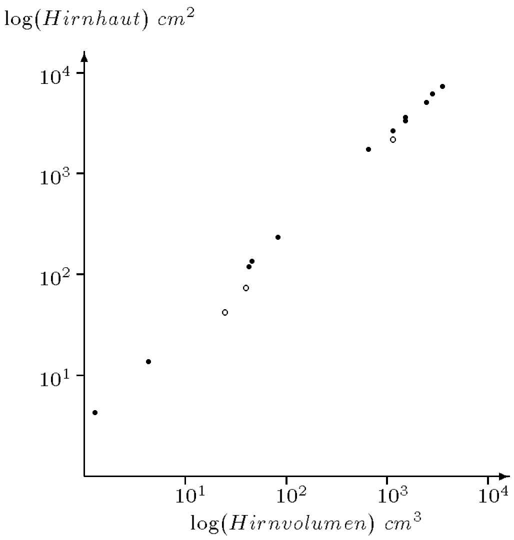
Tabelle 2.1: Säugetierhirne ausgesuchter Spezies (Durchschnittswerte)

| *Säugetier* | *Hirnvolumen* ($cm^3$) | *Hirnhaut* ($cm^2$) |
|---|---|---|
| **Beuteltiere** | | |
| *Maus Opossum* | *1,24* | *4,38* |
| *Opossum* | *4,25* | *13,20* |
| *Wallaby* | *25,00* | *43,30* |
| *Känguruh* | *39,20* | *74,90* |
| **Fleischfresser** | | |
| *Waschbär* | *42,6* | *122* |
| *Fuchs* | *45,3* | *135* |
| *Steppenwolf* | *85,3* | *227* |
| **Primaten** | | |
| *Mensch* | *1198* | *2275* |
| **Wale** | | |
| *Baird-Wal* | *722* | *1717* |
| *Großer Tümler* | | |
| *Atlantik* | *1145* | *2700* |
| *Pazifik* | *1498* | *3343* |
| *Rundkopfdelphin* | *1500* | *3522* |
| *Pilotwal* | | |
| *Pazifik* | *2580* | *5335* |
| *Atlantik* | *2842* | *6294* |
| *Falscher Schwertwal* | *3650* | *7392* |

*Abbildung* 2.5 *zeigt die Daten in doppeltlogarithmischer Darstellung. Berechnet man die Ausgleichsgerade, so gilt die Beziehung*

$$\log S = 0,93 \log V + 0,5. \tag{2.7}$$

*Dabei steht* $S$ *für die Hirnhautoberfläche und* $V$ *für das Volumen des Hirns. Man erhält somit das Potenzgesetz* $S = \sqrt{10} \cdot V^{0,93}$*. Bei glatten Oberflächen von Volumen erwartet man die Flächen-Volumen-Beziehung* $S^{1/2} \propto V^{1/3}$ *und somit* $\log S \propto 2/3 \log V$*. Nun ist der Koeffizient* $0,93$ *aber erheblich größer als* $2/3$*. Die Gleichung* (2.7) *erscheint paradox. Es liegt die Vermutung nahe,*




**Obere Punkte:**
Wale, Delphine, Mensch (Kringel)

**Mittlere Punkte:**
Fleischfresser mit Wallaby und Känguruh als Kringel. Beide in Gefangenschaft geboren und aufgewachsen.

**Untere Gruppe:**
Oppossum und Maus Oppossum.

Abbildung 2.5: Relation zwischen Hirnvolumen und Hirnhautoberfläche

*daß die Hirnhaut eine größere Dimension als zwei besitzt. Um die Dimension $D$ der Hirnhaut und somit der Hirnoberfläche zu bestimmen benutzt man die Potenzbeziehung*

$$S^{1/D} \propto V^{1/3} \Rightarrow 1/D \log S \propto 1/3 \log V \Rightarrow \log S \propto D/3 \log V.$$

*Mit* (2.7) *ergibt sich* $D = 3 \cdot 0,93 = 2,79$.*[25, Seite 125]*

**Anwendung 2.3.4 (Grundumsatz)** *Der Grundumsatz $G$ ist die Energie pro Tag die ein Organismus im Ruhezustand verbraucht. Lange Zeit vermutete man ein „Oberflächengesetz“. Also eine Proportionalität zwischen Grundumsatz und der Körperoberfläche des Organismus. Kleiber [20] untersuchte den Grundumsatz bei verschiedenen Tieren bezüglich ihrer Masse $m$. Durch doppeltlogarithmischer Darstellung* $\log G$ *gegen* $\log m$ *erhält man eine Ausgleichsgerade mit der Steigung* $b = 0,75$. *Für den Grundumsatz eines Organismus mit der Masse $m$ gilt dann die Beziehung*

$$G = a \cdot m^{0,75}.$$

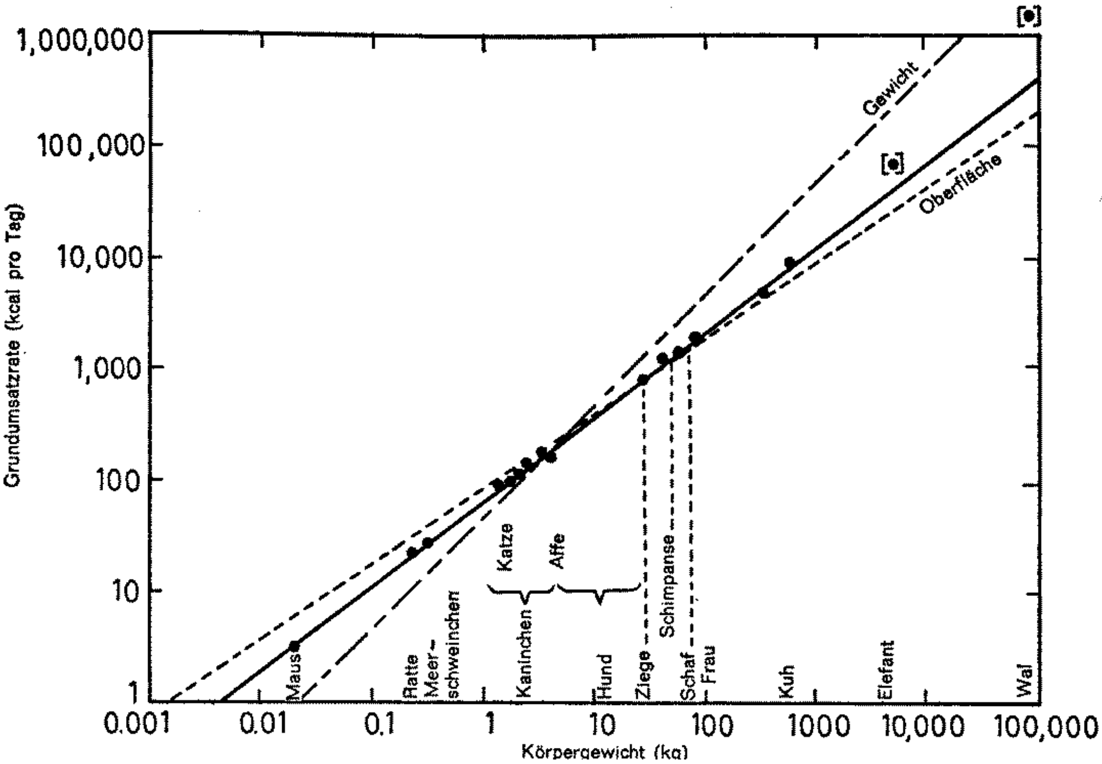



Abbildung 2.6: Relation zwischen Grundumsatz und Körpergewicht in doppeltlogarithmischen Diagramm [20, Seite 176].

*Dabei steht a für den Massenkoeffizienten. Somit ist der Grundumsatz weder zum Volumen V ($V \propto m^1$), noch zur Oberfläche S ($S \propto V^{2/3} \propto m^{2/3}$) proportional. Vielmehr ergibt sich die Proportionalität zur einer Zwischengröße*

$$G \propto m^{0,75} \propto V^{0,75} \propto r^{3 \cdot 0,75} = r^{2,25}.$$

*Damit ist der Grundumsatz zur einer fraktalen Struktur proportional, die zur einer Oberfläche mit der Dimension 2,25 ähnlich ist [33],[4, Seite 2].*
*In dem von Sernetz und seiner Gruppe experimentell erreichbaren Bereich der Arteriolen (Durchmesser ca. 0,1 mm), die das transport-limitierende Gebiet des Blutgefäßsystems darstellen, erhalten sie Dimensionswerte um 2,2 bis 2,3, was dem Skalenverhalten der Stoffwechselumsätze sehr nahekommt (Email-Mitteilung von Prof. Dr. Sernetz).*

In der Praxis stellt sich die Frage, mit welchen Mengen das Fraktal überdeckt werden soll, um die Box-Dimension zu bestimmen. Folgendes zeigt, daß es genügt Würfel im $\delta$-Koordinatennetz von $\mathbb{R}^n$ zu betrachten. Also Würfel der Form

$$[m_1\delta, (m_1+1)\delta] \times \cdots \times [m_n\delta, (m_n+1)\delta],$$

wobei $m_1, \ldots m_n$ ganze Zahlen sind. Jeder Würfel hat die Kantenlänge $\delta$ und somit den Durchmesser $\delta\sqrt{n}$. Sei $N'_\delta(F)$ die Anzahl von $\delta-$Gitterwürfeln, die $F$ überdecken. Sie bilden somit eine endliche $\delta\sqrt{n} - \textit{Überdeckung}$ dieser Menge. Es folgt

$$N_{\delta\sqrt{n}}(F) \leq N'_\delta(F).$$

Ist nun $\delta\sqrt{n} < 1$, so folgt

$$\frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log(\delta\sqrt{n})} \leq \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\sqrt{n} - \log\delta}.$$

Für die Grenzwerte der unteren und oberen Box-Dimensionen ergeben sich somit

$$\underline{dim}_B F \leq \liminf_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \tag{2.8}$$

$$\overline{dim}_B F \leq \limsup_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta}. \tag{2.9}$$

Faktum ist, daß jede Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit dem Durchmesser höchstens $\delta$ in $3^n$ Würfeln mit der Seitenlänge $\delta$ enthalten ist [11, Seite 44]. Somit gilt die Ungleichung

$$N'_\delta(F) \leq 3^n N_\delta(F).$$

Sei nun $\delta < 1$ gewählt, so ergibt sich

$$\frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \leq \frac{\log\left(3^n N_\delta(F)\right)}{-\log\delta} \leq \frac{\log 3^n}{-\log\delta} + \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}.$$

Für die untere und obere Box-Dimension ergeben sich die Grenzwerte

$$\underline{dim}_B F \geq \liminf_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \tag{2.10}$$

$$\overline{dim}_B F \geq \limsup_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta}. \tag{2.11}$$

Die Beziehungen (2.8), (2.9), (2.10) und (2.11) zeigen, daß Gitterwürfel zur Überdeckung ausreichen, um die Dimension zu berechnen. Man nennt dieses Verfahren Box Counting Methode (BCM).
Das Fraktal $F$ sei nun eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. In der Praxis unterteilt man $\mathbb{R}^n$ in ein Gitter der Maschenweite $\delta$. Also eine Pflasterung des $\mathbb{R}^n$ durch Würfel der Kantenlänge $\delta$. Nun zählt man die Anzahl $N_\delta(F)$ der Würfel für verschiedene kleine $\delta$ die $F$ schneiden. Man verwendet eine Folge von Gittern, mit dem Reduktionsfaktor 1/2. D.h. die Maschenweite zwischen aufeinander folgenden Gittern beträgt 1/2. Betrachtet man das Potenzgesetz, so folgt

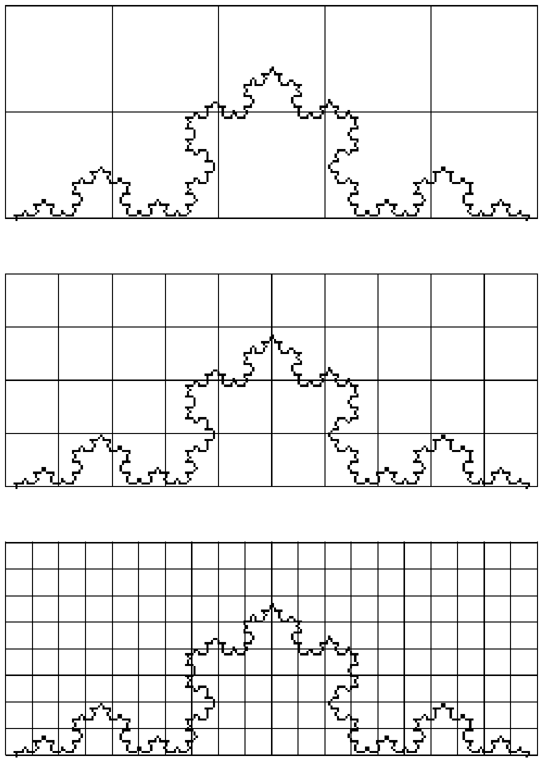
$$N_\delta(F) \propto c\delta^{-s} \Rightarrow \log N_\delta(F) \propto \log c - s \log \delta. \tag{2.12}$$

Die Box-Dimension ist somit die logarithmische Rate, mit welcher $N_\delta(F)$ zunimmt, während $\delta \to 0$ strebt. Diese kann als Steigung des Graphen von $\log N_\delta(F)$ gegen $-\log \delta$ geschätzt werden. Der Vorteil der Box-Dimension ist das auch unregelmäßige Strukturen sehr schnell behandelt werden können. Dies sind etwa natürlich gewachsene Strukturen. Obwohl dies keine Fraktale sind, zeigt sich bei der Bestimmung der Box-Dimension fraktales Verhalten.

**Beispiel 2.3.5 (Box Counting Methode und Koch-Kurve)** *Dieses Beispiel zeigt, wie die Box-Dimension der Koch-Kurve $\mathcal{K}$ bestimmt werden kann. Die Konstruktion der Koch-Kurve ist im Beispiel* (2.4.17) *gegeben. Die Grundlinie hat die Länge eins. Für die folgenden drei Gitter beträgt die Maschenweite* 1/5, 1/10 *und* 1/20. *Die Meßdaten sind aus der Abbildung* 2.7 *zu entnehmen. In einen doppeltlogarithmischen Diagramm liegen die Meßdaten auf einer Geraden. Diese Ausgleichsgerade wird mit der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt. Sie hat die Steigung $b = 1,25$. Für die Box-Dimension ergibt sich hier der Wert*

$$dim_B\mathcal{K} = 1,25.$$

*Ein späterer Satz zeigt $dim_B\mathcal{K} = dim_H\mathcal{K} = \log 4/\log 3 = 1,26\ldots$*



*Maschenweite:* $\delta = 1/5$

*Zahl der Boxen:* $N_\delta(\mathcal{K}) = 8$

*Maschenweite:* $\delta = 1/10$

*Zahl der Boxen:* $N_\delta(\mathcal{K}) = 16$

*Maschenweite:* $\delta = 1/20$

*Zahl der Boxen:* $N_\delta(\mathcal{K}) = 45$

Abbildung 2.7: BCM und Koch-Kurve

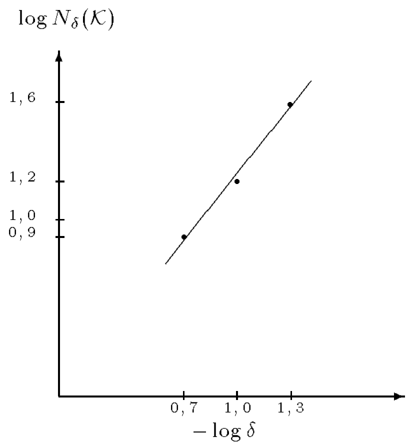



Abbildung 2.8: Darstellung der Meßergebnisse

## 2.4 Die Ähnlichkeitsdimension

Grundlage dieses Kapitels sind die Quellen [6], [11], [17] [30].
Fraktale können aus Teilen aufgebaut sein, die auf bestimmte Weise dem Ganzen ähnlich sind. Z.B. ist die Cantor-Menge die Vereinigung zweier ähnlicher Kopien von sich selbst. Diese Selbstähnlichkeit der Fraktale wird benutzt, um sie zu konstruieren und ihre Dimension zu bestimmen. Kontraktionen bzw. Ähnlichkeitsabbildungen sind hier wichtige Werkzeuge. Allgemein sind Kontraktionen auf metrischen Räumen definiert. Sei nun $(X, d)$ ein metrischer Raum mit der Metrik $d$ und $D \subset X$. Eine Abbildung $S : D \to D$ heißt Kontraktion auf $D$ bezüglich $d$, wenn es eine Zahl $c$ mit $0 < c < 1$ ($c$ heißt das Verhältnis von $S$) gibt, so daß

$$d\Big(S(x), S(y)\Big) \leq c \cdot d(x, y) \text{ für alle } x, y \in D \tag{2.13}$$

gilt. Gilt die Gleichheit, also $d\Big(S(x), S(y)\Big) = c \cdot d(x, y)$ so nennt man $S$ eine Ähnlichkeitsabbildung auf $D$.

**Definition 2.4.1 (Invariante Menge)** *Es sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, $D \subset X$ und $S_1, \ldots, S_n$ Kontraktionen auf $D$. Eine nichtleere kompakte Teilmenge $F$ von $D$ heißt invariant bezüglich der Abbildungen $S_i$ genau dann wenn,*

$$F = S(F) = \bigcup_{i=1}^{n} S_i(F)$$

*gilt. Die Abbildung $S : D \to X$ mit $S(E) = \bigcup_{i=1}^{n} S_i(E)$ nennt man Hutchinson Operator. Mit $S^0(E) = E$, $S^k(E) = S(S^{k-1}(E))$ für $k \geq 1$ ist die Iteration $S^k$ definiert.*

**Beispiel 2.4.2 (Cantor-Menge)** *Seien die Ähnlichkeitsabbildungen $S_1, S_2$ durch $S_1(x) := x/3$ und $S_2(x) := x/3 + 2/3$ auf $\mathbb{R}$ gegeben. Sei $\mathcal{C}$ die Cantor Menge. Es gilt $S_1(\mathcal{C}) = [0, 1/3] \cap \mathcal{C}$ und $S_2(\mathcal{C}) = [2/3, 1] \cap \mathcal{C}$. Die Vereinigung ergibt also wieder die Cantor-Menge $\mathcal{C} = S_1(\mathcal{C}) \cup S_2(\mathcal{C})$. Somit ist die Cantor Menge invariant bezüglich $S_1$ und $S_2$.*

Es stellt sich die Frage, ob es zu beliebigen Kontraktionen $S_1, \ldots, S_n$ auf $D \subset X$ eine invariante Menge gibt. Erst dann macht es Sinn, ihre Dimension zu bestimmen. Hier findet der Banachsche Fixpunktsatz eine Anwendung. Um ihn anzuwenden, ist einige Vorarbeit nötig.

**Lemma 2.4.3 (Hausdorff-Metrik)** *Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Für jede nichtleere kompakte Teilmenge $A$ von $X$ und $\delta > 0$ ist die $\delta$ parallele Erweiterung von $A$ durch $A_\delta := \{x \in X : d(x, y) \leq \delta$ und $y \in A\}$ gegeben. Für zwei nichtleere kompakte Teilmengen $A$ und $B$ von $X$ wird durch*

$$h(A, B) := \inf\Big\{\delta : A \subset B_\delta \text{ und } B \subset A_\delta\Big\}$$

*eine Metrik auf allen nichtleeren kompakten Teilmengen von $X$ definiert.*

**Beweis:** Siehe [6, Seite 66] □

Für offene Mengen ist dies keine Metrik, es gilt $h\Big((0,1), [0,1]\Big) = 0$, obwohl die Mengen verschieden sind. Selbst leere Mengen sind nicht zugelassen. Nach Konvention gilt $\inf \emptyset := \infty$ und daher ist $h(\emptyset, \{0\})$ unendlich und ist mit einer Metrik nicht vereinbar. Das Gleiche gilt für unbeschränkte Mengen, z.B. $h\Big(\{0\}, [0, \infty)\Big)$.

**Lemma 2.4.4** *Es sei $(X, d)$ ein vollständiger metrischer Raum und $K(X)$ sei die Vereinigung aller nichtleeren kompakten Teilmengen von $X$. Dann ist auch $\Big(K(X), h\Big)$ ein vollständiger metrischer Raum.*

**Beweis:** Mit [6, Seite 67] folgt, daß $K(X)$ vollständig ist. Lemma 2.4.3 liefert die Metrik. □

**Lemma 2.4.5** *Sei $(X, d)$ ein vollständiger metrischer Raum, $S_1, \ldots, S_n$ Kontraktionen mit den Verhältnissen $c_1 \ldots, c_n$ auf $K(X) \subset X$ und $c := \max\{c_i\}$. Dann ist der Hutchinson Operator eine Kontraktion auf $K(X)$ bezüglich $h$ und es gilt*

$$h\Big(S(A), S(B)\Big) \leq c \cdot h(A, B) \text{ für alle } A, B \in K(X).$$

**Beweis:** Sei $\delta > h(A,B)$ gegeben. Ist $x' \in S(A)$, dann gibt es ein $x \in A$ und ein $i$ mit $x' = S_i(x) \in S(A)$. Da $\delta > h(A,B)$ ist, also $A \subset B_\delta$ und $B \subset A_\delta$, gibt es nach Definition mindestens ein $y \in B$ mit $d(x,y) < \delta$. Für den Punkt $y' := S_i(y) \in S(B)$ gilt die Ungleichung

$$d(x', y') = d\Big(S_i(x), S_i(y)\Big) \leq c_i \cdot d(x,y) \leq c\delta.$$

Dies gilt für alle $x' \in S(A)$ und somit ist $S(A)$ in der $c\delta$-parallelen Erweiterung von $S(B)$ enthalten. Also ist $S(A) \subset S(B)_{c\delta}$. Analog zeigt man $S(B) \subset S(A)_{c\delta}$.
Somit gilt $S(A) \subset S(B)_{c\delta}$ und $S(B) \subset S(A)_{c\delta}$ für alle $\delta > h(A,B)$. Für die Hausdorff-Metrik gilt somit

$$h\Big(S(A), S(B)\Big) \leq c \cdot h(A,B).$$

□

Die Voraussetzungen für den Banachschen Fixpunktsatz sind nun verfügbar.

**Satz 2.4.6** *Es sei $(X,d)$ ein vollständiger metrischer Raum und $S_1, \ldots S_n$ seien Kontraktionen auf $X$. Dann gibt es eine eindeutige nichtleere kompakte invariant Menge $F$ bezüglich der Kontraktionen $S_1, \ldots, S_n$.*

**Beweis:** Sei $K(X)$ die Vereinigung aller nichtleeren kompakten Teilmengen von $X$. Mit Lemma (2.4.4) und Lemma (2.4.5) folgt, daß $(K(X), h)$ ein vollständiger metrischer Raum ist. Die Kontraktionen $S_1, \ldots, S_n$ sind stetige Abbildungen. Ist $E$ nun eine kompakte Menge, so ist auch $S_i(E)$ kompakt. Insbesondere ist die endliche Vereinigung kompakter Mengen kompakt. Für den Hutchinson Operator ergibt sich nun $S : K(X) \to K(X)$. Mit Lemma (2.4.5) folgt, daß $S$ eine Kontraktion ist. Somit ist $S$ eine Kontraktion auf einen vollständigen metrischen Raum. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz [41, Seite 88] existiert ein eindeutiger Fixpunkt von $S$ in $K(X)$. Dieser Fixpunkt ist eine kompakte Menge $F$. Für $F$ gilt somit

$$F = S(F) = \bigcup_{i=1}^{n} S_i(F).$$

□

**Korollar 2.4.7** *Seien die Bezeichnungen wie in Satz (2.4.6). Ist $E$ eine nichtleere kompakte Teilmenge von $X$, so gilt*

$$\lim_{k\to\infty} h\Big(S^k(E), F\Big) = 0.$$

**Beweis:** Banachscher Fixpunktsatz [41, Seite 88]. □

Die $S^k(E)$ liefern somit eine zunehmende gute Approximation für $F$. Ist $F$ ein Fraktal, so bezeichnet man die $S^k(E)$ als **Präfraktale** von $F$. Nun ist die Existenz von invarianten Mengen geklärt. Es stellt sich die Frage wie die Dimension bestimmt werden kann. Folgende **heuristische Überlegung** liegt nahe. Seien $S_1, \ldots, S_n$ Ähnlichkeitsabbildungen auf $\mathbb{R}^m$ mit den Verhältnissen $c_1, \ldots, c_n$. Für die invariante Menge $F$ sei die Vereinigung $F = \bigcup S_i(F)$ disjunkt. Betrachtet man nun das s-dimensionale Hausdorff-Maß von $F$ und verwendet die Behauptung (2.1.7), so ergibt sich

$$\mathcal{H}^s(F) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{H}^s\Big(S_i(F)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{H}^s(c_i \cdot F) = \sum_{i=1}^{n} c_i^s \mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(F) \cdot \sum_{i=1}^{n} c_i^s.$$

Gilt die Ungleichung $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$, so erfüllt $s$ die Gleichung $\sum_{i=1}^n c_i^s = 1$. Ein Lemma zeigt, daß diese Gleichung eine eindeutige Lösung hat. Ziel ist es, diesen plausiblen Weg zu beweisen und die Voraussetzung der disjunkten Vereinigung abzuschwächen. Im folgenden werden nur noch Ähnlichkeitsabbildungen betrachtet.

**Definition 2.4.8** *Es bezeichnet $S_\infty$ die eindeutige nichtleere kompakte invariante Menge bezüglich der Ähnlichkeitsabbildungen $S_1, \ldots, S_n$ mit den Verhältnissen $c_1, \ldots, c_n$ in einem vollständigen metrischen Raum. Das Symbol $S_\infty$ deutet auf die Iteration des Hutchinson Operators hin.*

**Lemma 2.4.9** *Seien $c_1, \ldots, c_n$ Konstanten mit $0 < c_i < 1$ für alle $i \leq n$. Dann gibt es eine eindeutige nichtnegative Zahl $s$, mit*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^s = 1.$$

**Beweis:** Betrachte die Funktion $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, definiert durch

$$\Phi(s) := \sum_{i=1}^{n} c_i^s.$$

Für die stetige Funktion $\Phi(s)$ gilt, $\Phi(0) = n \geq 1$ und $\lim_{s\to\infty} \Phi(s) = 0 < 1$. Nach den Zwischenwertsatz existiert mindestens ein $s \in [0,\infty)$ mit $\Phi(s) = 1$. Die Funktion $\Phi$ ist differenzierbar. Es gilt $\Phi'(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i^s \ln c_i < 0$ für alle $s$. Somit gibt es genau ein $s$ mit $\Phi(s) = 1$. □

**Definition 2.4.10 (Die Ähnlichkeitsdimension)** *Sei $F = S_\infty$ und $s$ die Lösung der Gleichung $\sum_{i=1}^{n} c_i^s = 1$, so heißt $dim_S F = s$ die Ähnlichkeitsdimension von $F$.*

Das $S$ erinnert an $Similarity$ und später an $Self - Similarity$. Es sei bemerkt, daß Überlappungen bei der Ähnlichkeitsdimension erlaubt sind. Somit ist $S_i(F) \cap S_j(F) \neq \emptyset$ zulässig. Die Formel kann für dieses $F$ nutzlos sein. Um dies einzusehen, denke man an ein Quadrat, das mit vier seiner Kopien überdeckt wird. Dabei sei jede Kopie mit dem Faktor 3/4 skaliert. Dies führt zu erheblichen Überlappungen. Für das Quadrat in $\mathbb{R}^2$ ergibt sich der Wert $dim_S F = \log 4/(\log 4/3) = 4,8\ldots > 2$.
Aus Beispiel (2.4.2) sind die Abbildungen $S_1$ und $S_2$ mit den Verhältnissen $c_1 = c_2 = 1/3$ für die Cantor-Menge bekannt. Es gilt also $2 \cdot 1/3^s = 1$. Für die Ähnlichkeitsdimension folgt der schon bekannte Wert $dim_S\mathcal{C} = \log 2/\log 3$. Mit der folgenden Definition ergibt sich für die Cantor-Menge eine andere weitere Eigenschaft.

**Definition 2.4.11 (Selbstähnliche Mengen)** *Eine Menge $F$ heißt selbstähnlich (bezüglich der $S_i$), wenn*

1. *$F = S_\infty$, also $F = S(F) = S_1(F) \cup \cdots \cup S_n(F)$ ist und,*
2. *$\mathcal{H}^s(F) > 0$, $\mathcal{H}^s\big(S_i(F) \cap S_j(F)\big) = 0$ für $i \neq j$ und $s = dim_H F$*

*gilt.*

Eine selbstähnliche Menge ist somit aus verkleinerten Kopien von sich selbst zusammengesetzt. Aus Beispiel (2.4.2) ist bekannt, daß $S_1(\mathcal{C}) \cap S_2(\mathcal{C}) = \emptyset$ ist. Aus der Maßdefinition folgt $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ für alle $s$. Außerdem ist aus Beispiel (2.2.8), $\mathcal{H}^s(\mathcal{C}) > 0$ für $s = dim_H \mathcal{C}$ bekannt. Somit ist die Cantor-Menge eine selbstähnliche Menge.

**Satz 2.4.12** *Es sei $F = S_\infty$, $dim_S F = d$ und $dim_H F = s$. Dann gilt*

$$0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty \Rightarrow \Big( F \textit{ ist selbstähnlich} \Leftrightarrow dim_H F = dim_S F \Big).$$

**Beweis:** Sei $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ und $F$ selbstähnlich. Für $i \neq j$ gilt $\mathcal{H}^s\Big(S_i(F) \cap S_j(F)\Big) = 0$. Dann ist wegen (2.1.3)[3]

$$\mathcal{H}^s(F) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{H}^s\Big(S_i(F)\Big) = \sum_{i=1}^{n} c_i^s \mathcal{H}^s(F).$$

Also ist $\sum_{i=1}^n c_i^s = 1$ und somit folgt $dim_H F = dim_S F$.
Sei nun $0 < \mathcal{H}^d(F) < \infty$. Dann ist

$$\mathcal{H}^d(F) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathcal{H}^d\Big(S_i(F)\Big) = \sum_{i=1}^{n} c_i^d \mathcal{H}^d(F).$$

Nun ist aber $\sum_{i=1}^n c_i^d = 1$ und somit $\mathcal{H}^d(F) = \sum_{i=1}^n \mathcal{H}^d\Big(S_i(F)\Big)$. Es folgt $\mathcal{H}^d\Big(S_i(F) \cap S_j(F)\Big) = 0$ für alle $i \neq j$. □

**Definition 2.4.13 (Offene Mengen Bedingung)** *Seien $S_1, \ldots, S_n$ Ähnlichkeitsabbildungen. Die $S_i$ genügen der Offenen Mengen Bedingung, wenn es eine nichtleere beschränkte offene Menge $V$ gibt, mit*

$$\bigcup_{i=1}^{n} S_i(V) \subset V \textit{ und } S_i(V) \cap S_j(V) = \emptyset \textit{ für } i \neq j.$$

[3] Allgemein gilt $\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B) - \mathcal{H}^s(A \cap B)$, [2, Seite 22]

**Lemma 2.4.14** *Sei $0 < a < b < \infty$, $0 < r < \infty$ und $(V_i)$ eine Familie disjunkter offener Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Jedes $V_i$ enthält eine Kugel mit dem Radius $ar$ und ist in einer Kugel mit dem Radius $br$ enthalten. Dann schneidet jede abgeschlossene Kugel $B$ mit dem Radius $r$ höchstens $(1+2b)^n a^{-n}$ der Abschlüsse $\overline{V_i}$.*

**Beweis:** Schneiden nun $\overline{V_1}, \cdots, \overline{V_k}$ die Kugel $B$. Dann ist jedes $\overline{V_i}, \cdots, \overline{V_k}$ in der zu $B$ konzentrischen Kugel mit dem Radius $(1+2b)r$ enthalten. Summiert man die Volumina der zugehörigen inneren Kugeln von $V_i$ mit den Radien $ar$ auf, so folgt

$$k\alpha_n(ar)^n \leq \alpha_n(1+2b)^n r^n,$$

wobei $\alpha_n r^n$ das Volumen einer Kugel mit dem Radius $r$ ist. Somit folgt $k \leq (1+2b)^n a^{-n}$. □

Im folgenden bezeichnet $J_k$ die Menge aller k-Term-Folgen $(i_1, \ldots, i_k)$, mit $1 \leq i_j \leq n$. Für $n = k = 2$ ergibt sich die Menge

$$J_2 := \Big\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\Big\}.$$

Mit $\sum_{i=1}^n c_i^s = 1$ und $k \geq 1$ ist dann

$$\sum_{J_k}(c_{i_1}\cdots c_{i_k})^s = \sum_{i_1,\ldots i_k=1}^{n}(c_{i_1}\cdots c_{i_k})^s = \left(\sum_{i_1=1}^{n} c_{i_1}^s\right)\cdots\left(\sum_{i_k=1}^{n} c_{i_k}^s\right) = 1. \quad (2.14)$$

Für jede Menge $A$ sei $A_{i_1,\ldots,i_k} = S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_k}(A)$. Ist $F = S_\infty$, so gilt

$$F = \bigcup_{i_1,\cdots,i_k=1}^{k} F_{i_1,\ldots,i_k} = \bigcup_{J_k} F_{i_1,\cdots,i_k}.$$

**Satz 2.4.15** *Gilt die Offene Mengen Bedingung für die Ähnlichkeitsabbildungen $S_i, \ldots, S_n$ mit den Verhältnissen $c_1, \ldots, c_n$ auf $\mathbb{R}^m$ und ist $F = S_\infty$, dann ist*

$$dim_H F = dim_S F = dim_B F.$$

*Darüber hinaus ist $F$ eine selbstähnliche Menge und es gilt für $dim_H F = s$ die Ungleichung $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.*

**Beweis:** Sei nun $s = dim_S F$ die Ähnlichkeitsdimension der kompakten Menge $F$. Zunächst wird die Ungleichung $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ gezeigt. Daraus folgt nach Definition, daß $s = dim_H F$ ist, also $dim_S F = dim_H F$. Für die obere Abschätzung wird die Überdeckung mit den Mengen $F_{i_1,\ldots,i_k}$ gewählt, also

$$F = \bigcup_{J_k} F_{i_1,\ldots,i_k}. \tag{2.15}$$

Nun ist die Abbildung $S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_k}$ selbst eine Ähnlichkeitsabbildung mit dem Verhältnis $c_{i_1} \cdots c_{i_k}$. Mit (2.14) gilt

$$\sum_{J_k} |F_{i_1,\ldots,i_k}|^s = \sum_{J_k} (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s \, |F|^s = |F|^s. \tag{2.16}$$

Es ist $c_{i_1} \cdots c_{i_k} \leq (\max_i c_i)^k =: c^k$. Ist $\delta > 0$ gegeben, dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $|F_{i_1,\ldots,i_k}| \leq c^k |F| \leq \delta$. Mit (2.15) ist $(F_{i_1,\ldots,i_k})$ eine $\delta-$Überdeckung von $F$. Mit (2.16) folgt $\mathcal{H}^s_\delta(F) \leq |F|^s$ für alle $\delta > 0$. Daher gilt für das Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^s(F) \leq |F|^s < \infty$. Also $dim_H F \leq s$.
Um das Verteilungsprinzip für die untere Abschätzung anzuwenden, wird eine Verteilung auf $F$ definiert. Dazu sei $I$ die Menge **aller** unendlichen Folgen mit $I := \{(i_1, i_2, \ldots) : 1 \leq i_j \leq n\}$. Sei $I_{i_1,..,i_k} := \{(i_1, .., i_k, q_{k+1}, \ldots) : 1 \leq q_j \leq n\}$ der „Zylinder“, welcher aus **all** jenen Folgen in $I$ mit den Anfangstermen $i_1, \ldots, i_k$ besteht. Sei nun $\mu$ eine Verteilung auf $I$ mit

$$\mu(I_{i_1,\ldots,i_k}) := (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s. \tag{2.17}$$

Nach Voraussetzung ist $\sum_{i=1}^n c_i^s = 1$. Es folgt

$$\mu(I_{i_1,\ldots,i_k}) = (c_{i_1} \ldots, c_{i_k})^s = \sum_{i=1}^n c_i^s (c_{i_1} \ldots, c_{i_k})^s = \sum_{i=1}^n \mu(I_{i_1,\ldots,i_k,i})$$

und somit ist $\mu$ eine Verteilung auf Teilmengen von $I$ mit

$$\mu(I) = \sum_{i=1}^n \mu(I_i) = \sum_{i=1}^n c_i^s = 1.$$

Die Verteilung $\mu$ wird nun auf $F$ übertragen. Durch

$$\tilde{\mu}(A) := \mu\left\{(i_1, i_2, \ldots) : x_{i_1,i_2,\ldots} = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{i_1,\ldots i_k} \in A \subset F\right\} \tag{2.18}$$

ist eine Verteilung auf alle $A \subset F$ definiert. Es folgt $\tilde{\mu}(F) = \mu(I) = 1$. Nun steht das Verteilungsprinzip (2.2.3) zur Verfügung. Sei $V$ die offene Menge aus der Voraussetzung. Es gilt $\overline{V} \supset S(\overline{V}) = \bigcup_{i=1}^{n} S_i(\overline{V})$. Mit (2.4.7) folgt, daß die fallende Folge $S^0(\overline{V}) \supset S^1(\overline{V}) \supset S^2(\overline{V}) \ldots$ gegen $F$ konvergiert. Weiter gilt $\overline{V} \supset F$ und für jede endliche Folge $(i_1, \ldots, i_k)$ gilt somit $\overline{V}_{i_1,\ldots,i_k} \supset F_{i_1,\ldots,i_k}$. Sei $B$ eine Kugel mit dem Radius $r < 1$. Nun wird $\tilde{\mu}(B) = \tilde{\mu}(F \cap B)$ abgeschätzt. Dazu schneidet man jede unendliche Folge $(i_1, i_2, \ldots)$ aus $I$ nach dem ersten Term $i_k$ so ab, daß die Ungleichung

$$(\min_i c_i) r \leq c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k} \leq r \tag{2.19}$$

erfüllt ist. Es bezeichnet $\mathcal{Q}$ die Menge aller endlichen Folgen, die (2.19) erfüllen. Die Menge $\mathcal{Q}$ ist nicht leer. Mit $r < (\min_i c_i)$ gibt es Folgen

$$c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_n} > r \text{ und } c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_n} (\min_i c_i) \leq r.$$

Es folgt (2.19). Mit $1 \leq i_j \leq n$ ist $\mathcal{Q}$ eine endliche Menge. Es gibt für jede unendliche Folge $(i_1, i_2 \ldots) \in I$ genau ein $k$ mit $(i_1, i_2 \ldots, i_k) \in \mathcal{Q}$. Nach Voraussetzung sind $V_1, \ldots V_n$ disjunkt ($V_i = S_i(V)$). Induktiv folgt, daß für jedes endliche $(i_1, \ldots i_k)$, auch $V_{i_1,\ldots i_k,1}, \ldots, V_{i_1,\ldots i_k,n}$ disjunkt sind. Damit ist die Auswahl offener Mengen $\{V_{i_1,\ldots,i_k} : (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{Q}\}$ disjunkt. Es ist

$$F \subset \bigcup_{\mathcal{Q}} F_{i_1,\ldots,i_k} \subset \bigcup_{\mathcal{Q}} \overline{V}_{i_1,\ldots,i_k}. \tag{2.20}$$

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ so gewählt, daß $V$ eine Kugel mit dem Radius $a$ enthält und in einer Kugel mit dem Radius $b$ enthalten ist. Mit $(i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{Q}$ und (2.19) enthält die Menge $V_{i_1,\ldots,i_k}$ eine Kugel mit dem Radius $c_{i_1} \cdots c_{i_k} a \geq (\min_i c_i) ar$. Weiter ist $V_{i_1,\ldots i_k}$ in einer Kugel mit dem Radius $c_{i_1} \cdots c_{i_k} b \leq br$ enthalten. Es bezeichnet $\mathcal{Q}_1$ die Folgen $(i_1, \ldots, i_k)$ in $\mathcal{Q}$, so daß die Kugel $B$ die Menge $\overline{V}_{i_1,\ldots,i_k}$ schneidet. Nach Lemma (2.4.14) schneidet $B$ höchstens

$$q := (1 + 2b)^m a^{-m} (\min c_i)^{-m} \tag{2.21}$$

der $\overline{V}_{i_1,\ldots,i_k}$, mit $(i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{Q}_1$. Also gibt es höchstens $q$ Folgen in $\mathcal{Q}_1$. Mit (2.20) gibt es dann für jedes $x_{i_1,i_2,\ldots} \in F \cap B$ ein $k \in \mathbb{N}$, so daß $(i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{Q}_1$ und $x_{i_1,i_2,\ldots} \in \bigcup_{\mathcal{Q}_1} \overline{V}_{i_1,\ldots,i_k}$ ist. Mit (2.18) folgt für die Verteilung $\tilde{\mu}$ auf $F$

$$\tilde{\mu}(B) = \tilde{\mu}(F \cap B) \leq \mu\Big\{(i_1, i_2, \ldots) : x_{i_1,i_2,\ldots} \in F \cap B\Big\} \leq \mu\Big\{\bigcup_{\mathcal{Q}_1} I_{i_1,\ldots i_k}\Big\}.$$

Mit (2.17), (2.19) und (2.21) folgt

$$\tilde{\mu}(B) \leq \mu\Big\{\bigcup_{\mathcal{Q}_1} I_{i_1,\ldots i_k}\Big\} \leq \sum_{\mathcal{Q}_1} \mu(I_{i_1,\ldots i_k}) = \sum_{\mathcal{Q}_1} (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s \leq \sum_{\mathcal{Q}_1} r^s \leq q r^s.$$

Nun ist jede beliebige Menge $U$ offensichtlich in einer Kugel mit dem Radius $|U|$ enthalten. Es folgt für alle $|U| < \delta$, daß $\tilde{\mu}(U) \leq q|U|^s$ ist. Das Verteilungsprinzip (2.2.3) liefert die Relation

$$\mathcal{H}^s(F) \geq \tilde{\mu}(F)/q = q^{-1} > 0.$$

Insgesamt folgt $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ und somit $dim_H F = s = dim_S F$.
Es ist noch $s = dim_B F$ zu zeigen. Dazu sei $\Lambda$ die Menge **aller Folgen** aus $I$, so daß es **genau ein** $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $(i_1, \ldots i_k) \in \mathcal{Q}$. Mit (2.19) folgt

$$\sum_{\Lambda} (\min_i c_i)^s r^s \leq \sum_{\Lambda} (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s = \sum_{J_k} (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s = 1.$$

Also enthält $\Lambda$ höchstens $(\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$ Folgen. Für jede Folge $(i_1, \ldots, i_k) \in \Lambda$ ist

$$|\overline{V}_{i_1,\ldots,i_k}| = c_{i_1} \cdots c_{i_k} |\overline{V}| \leq r|\overline{V}|.$$

Somit kann $F$ durch $(\min c_i)^{-s} r^{-s}$ Mengen mit dem Durchmesser $r|V|$ überdeckt werden. Für die Box-Dimension ergibt sich

$$\overline{dim}_B F = \limsup_{r \to 0} \frac{\log\Big((\min c_i)^{-s} r^{-s}\Big)}{-\log(r|V|)} = \limsup_{r \to 0} \frac{s \log\Big((\min c_i) r\Big)}{\log(r|V|)} \leq s.$$

Mit (2.5) folgt

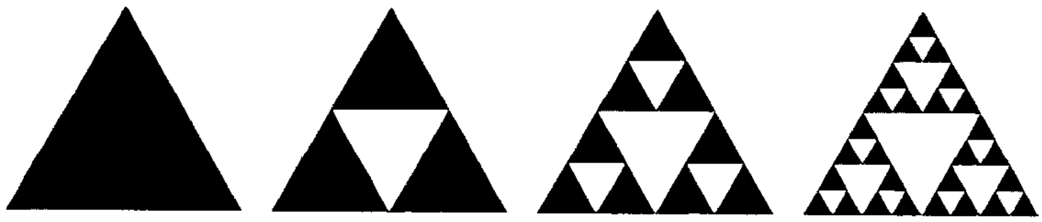
$$s = dim_H F \leq \underline{dim}_B F \leq \overline{dim}_B F \leq s$$

und somit $dim_H F = dim_B F$.
Mit (2.4.12) folgt, daß $F$ eine selbstähnliche Menge ist. □

**Beispiel 2.4.16 (Das Sierpiński-Dreieck)** *Ausgangsmenge ist das gleichseitige Dreieck $\Delta_0$. Im ersten Schritt ersetzt man $\Delta_0$ durch drei gleichseitige Dreiecke der halben Höhe. Also aus drei Kopien von sich selbst, die um einhalb skaliert sind. Man erhält $\Delta_1$.Im zweiten Schritt ersetzt man $\Delta_1$ durch drei Kopien von $\Delta_1$, die um einhalb skaliert sind. Dieses Verfahren wird nun* *fortgesetzt. Abbildung* (2.9) *zeigt die ersten drei Schritte. Ist die Seitenlänge eine Einheit lang, so ist die Konstruktion durch die drei Ähnlichkeitsabbildungen* $S_i : \Delta_n \to \Delta_{n+1}$

$$\begin{aligned} S_1(x,y) &:= 0,5 \cdot (x,y), \\ S_2(x,y) &:= 0,5 \cdot (x,y) + (0,5\ ,\ 0), \\ S_3(x,y) &:= 0,5 \cdot (x,y) + \left(0,25\ ,\ 0,5 \cdot \sqrt{0,75}\right) \end{aligned}$$

*realisiert. Das Sierpiński-Dreieck* $\Delta$ *ist der Fixpunkt des Hutchinson Opera-*



$\Delta_0$ $\Delta_1$ $\Delta_2$ $\Delta_3$

Abbildung 2.9: Konstruktion des Sierpiński-Dreiecks [25, Seite 152]

*tors. Es ist*

$$\Delta = S(\Delta) = S_1(\Delta) \cup S_2(\Delta) \cup S_3(\Delta).$$

*Daher besteht* $\Delta$ *aus drei Kopien von sich selbst, jeweils um einhalb skaliert. Die Offene Mengen Bedingung ist erfüllt, wenn* $V$ *das Innere des Ausgangsdreiecks ist. Für die selbstähnliche Menge* $\Delta$ *gilt somit*

$$dim_H\Delta = dim_B\Delta = dim_S\Delta = \log 3/\log 2 = 1,584\ldots,$$

*denn dies ist die Lösung von* $3 \cdot (1/2)^s = 1$.

**Beispiel 2.4.17 (Die Koch-Kurve)** *Die Konstruktion der Koch-Kurve* $\mathcal{K}$ *aus Beispiel* 2.3.5 *ist durch vier Ähnlichkeitsabbildungen zu verwirklichen. Sie beinhalten Skalierung, Rotation und Translation. Die Abbildung 2.10 zeigt die erste Iteration des zugehörigen Hutchinson Operators, angewandt auf das*

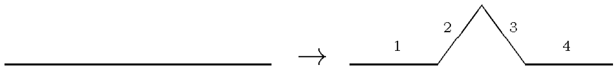



Abbildung 2.10: Konstruktion der Koch-Kurve 1. Iteration

*Einheitsintervall. Die Ziffern stehen für die jeweiligen Ähnlichkeitsabbildungen. Die Tabelle* 2.2 *zeigt die Einzelheiten. Die Koch-Kurve ist die invariante Menge des Hutchinson Operators. Es ist*

$$\begin{aligned} \cos 60° &= \cos(-60°) = 1/2 \\ \sin 60° &= -\sin(-60°) = \sqrt{3}/2. \end{aligned}$$

*Setzt man diese Werte in die Drehmatrix ein, so erhält man die vier Ähnlichkeitsabbildungen, siehe Tabelle* 2.3. *Für den Hutchinson Operator gilt somit*

$$\mathcal{K} = S(\mathcal{K}) = S_1(\mathcal{K}) \cup S_2(\mathcal{K}) \cup S_3(\mathcal{K}) \cup S_4(\mathcal{K}).$$

*Hier erkennt man, daß die Koch-Kurve aus* 4 *Kopien von sich selbst besteht, die jeweils um* $1/3$ *skaliert sind. Siehe auch Beispiel* 2.3.5. *Dies veranschaulicht die Selbstähnlichkeit der Koch-Kurve. Die Verhältnisse der Ähnlichkeitsabbildungen sind jeweils* $1/3$. *Die offene Mengen Bedingung ist erfüllt, wenn man für* $V$ *ein gleichschenkliges Dreieck mit der Grundlinienlänge* 1 *und der Höhe* $\sqrt{3}/2$ *wählt. Um die Dimension zu bestimmen muß die Gleichung*

$$4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1$$

*gelöst werden. Die Lösung ist*

$$s = \log 4 / \log 3 = dim_H \mathcal{K} = dim_B \mathcal{K} = dim_S \mathcal{K} = 1,261\ldots.$$

Tabelle 2.2: Transformationen der Koch-Kurve

| *Abbildung* $k$ | *Skalierung* $s$ | *Rotation* $\Theta$ | *Translation* $T_x$ | $T_y$ |
|---|---|---|---|---|
| *1* | *1/3* | $0°$ | *0* | *0* |
| *2* | *1/3* | $60°$ | *1/3* | *0* |
| *3* | *1/3* | $-60°$ | *1/2* | $\sqrt{3}/6$ |
| *4* | *1/3* | $0°$ | *2/3* | *0* |

Tabelle 2.3: Ähnlichkeitsabbildungen der Koch-Kurve

| *Abbildung* | *x-Teil* | *y-Teil* |
|---|---|---|
| $S_1(x,y)$ | $x/3$ | $y/3$ |
| $S_2(x,y)$ | $x/6-\sqrt{3}y/6+1/3$ | $\sqrt{3}x/6+y/6$ |
| $S_3(x,y)$ | $x/6+\sqrt{3}y/6+1/2$ | $-\sqrt{3}x/6+y/6+\sqrt{3}/6$ |
| $S_4(x,y)$ | $x/3+2/3$ | $y/3$ |

## 2.5 Projektionen von Fraktalen

Dieser Abschnitt zeigt, wie sich die fraktale Dimension bei orthogonaler Projektion verhält. Dabei wird der Zusammenhang zwischen der Hausdorff-Dimension und der Konvergenz eines $\mu$-Integrals[4] benutzt. Es zeigt sich, daß bei bestimmten Voraussetzungen die fraktale Dimension erhalten bleibt. Das hat praktische Auswirkungen. Man kann dann die Dimension eines Objektes im Raum abschätzen, indem man die Dimension des Fotos abschätzt. Für die numerische Bestimmung der Box-Dimension ist das ein Vorteil.
Literatur: [1], [11], [12].

**Definition 2.5.1 (Das s-Potential)** *Es sei $\mu$ eine Verteilung auf $\mathbb{R}^n$. Das s-Potential an einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ für $s \geq 0$ ist durch*

$$\Phi_s(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s}$$

*definiert.*

**Definition 2.5.2 (Die s-Energie)** *Die s-Energie der Verteilung $\mu$ auf $\mathbb{R}^n$ ist*

$$I_s(\mu) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi_s(x) d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^s}.$$

**Lemma 2.5.3** *Es seien $\mu$ eine Verteilung auf $\mathbb{R}^n$, $F \subset \mathbb{R}^n$ eine Borel Menge und $0 < c < \infty$ eine Konstante.*

$$\textit{Ist } \limsup_{r\to 0} \frac{\mu\Big(B_r(x)\Big)}{r^s} < c \textit{ für alle } x \in F, \textit{dann ist } \mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}.$$

**Beweis:** [11, Seite 71] □

[4]Definition siehe z.B. [9, Seite 121]

**Lemma 2.5.4** *Es sei $F$ eine Borel Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{H}^s(F) = \infty$. Dann gibt es eine kompakte Menge $E \subset F$, so daß $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ und für eine Konstante $b$*

$$\mathcal{H}^s\Big(E \cap B_r(x)\Big) \leq br^s$$

*für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $r \geq 0$ gilt. Dabei ist $B_r(x)$ der abgeschlossene Ball mit dem Mittelpunkt $x$ und dem Radius $r$.*

**Beweis:** [11, Seite 74] □

Der folgende Satz zeigt die Beziehung zwischen der Hausdorff-Dimension einer Menge $F$ und der s-Energie.

**Satz 2.5.5** *Es sei $F$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.*

1. *Gibt es auf $F$ eine Verteilung $\mu$ mit $I_s(\mu) < \infty$, dann ist $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ und $dim_H F \geq s$.*
2. *Ist $F$ eine Borel Menge mit $\mathcal{H}^s(F) > 0$, also $dim_H F \geq s$, dann gibt es eine Verteilung $\mu$ auf $F$ mit $I_t(\mu) < \infty$ für alle $t < s$.*

**Beweis:** Sei nun $\mu$ eine Verteilung mit $I_s(\mu) < \infty$. Der Träger von $\mu$ ist in $F$ enthalten. Sei $F_1$ eine Teilmenge von $F$ mit

$$F_1 := \left\{x \in F : \limsup_{r \to 0} \frac{\mu(B_r(x))}{r^s} > 0\right\}.$$

Für $x \in F_1$ gibt es dann ein $\epsilon > 0$ und eine Folge positiver Zahlen $(r_i)$ mit $\lim_{i\to\infty} r_i = 0$, so daß

$$\mu\Big(B_{r_i}(x)\Big) \geq \epsilon r_i^s$$

gilt. Sei $A_i$ der Kreisring $B_{r_i}(x) \setminus B_{q_i}(x)$ mit $0 < q_i < r_i$. Die Verteilung $\mu$ ist stetig[5] und somit erhält man für genügend kleine $q_i$ die Abschätzung

$$\mu(A_i) \geq \frac{1}{4}\epsilon r_i^s.$$

[5] [2, Seite 23]

Der Fall $\mu(\{x\}) > 0$ entfällt, da sonst $I_s(\mu) = \infty$ ist. Man nimmt Teilfolgen von $(r_i)$, wenn notwendig, so daß $r_{i+1} < q_i$ für alle $i$ angenommen werden kann. Somit ist sichergestellt, daß die $A_i$ disjunkte Kreisringe mit den Mittelpunkten in $x$ sind. Für den Mittelpunkt $x$ und ein beliebiges $y \in A_i$ ist dann $|x-y| \leq r_i$ und $|x-y|^{-s} \geq r^{-s}$. Für ein beliebiges $x \in F_1$ gilt somit die Abschätzung

$$\Phi_s(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4} \epsilon r_i^s r_i^{-s} = \infty.$$

Nach Voraussetzung ist aber

$$I_s(\mu) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi_s(x) d\mu(x) < \infty,$$

und somit ist $\Phi_s(x) < \infty$ für $\mu$ fast alle $x$. Also bis auf einer Menge von Maß null, bezüglich $\mu$. Da $x$ ein beliebiges Element aus $F_1$ war, gilt $\mu(F_1) = 0$. Ist nun $x \in F \setminus F_1$, so ist nach Konstruktion von $F_1$

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\mu\Big(B_r(x)\Big)}{r^s} = 0.$$

Das Lemma (2.5.3) liefert für alle $c > 0$ die Abschätzung

$$\mathcal{H}^s(F) \geq \mathcal{H}^s(F \setminus F_1) \geq \frac{\mu(F \setminus F_1)}{c} \geq \frac{\mu(F) - \mu(F_1)}{c} = \frac{\mu(F)}{c}.$$

Da $\mu$ eine Verteilung auf $F$ ist, ist $\mu(F)$ positiv, endlich und unabhänig von $c$. Für $c \to 0$ folgt somit $\mathcal{H}^s(F) = \infty$. Mit (2.2.2) folgt $dim_H F \geq s$.
Um den zweiten Teil zu beweisen verwendet man das Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^s$, um eine Verteilung auf $F$ zu konstruieren. Für jedes $t < s$ muß dann $I_t(\mu) < \infty$ gezeigt werden.
Da $\mathcal{H}^s(F) > 0$ ist, existiert nach Lemma (2.5.4) eine kompakte Menge $E \subset F$ mit $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ und

$$\mathcal{H}^s\Big(E \cap B_r(x)\Big) \leq br^s$$

für $x \in \mathbb{R}^n$ und einer Konstante $b$. Man erhält eine Verteilung $\mu$ auf $E$ (und somit auf $F$) durch $\mu(A) := \mathcal{H}^s(E \cap A)$. Für ein festes $x \in \mathbb{R}^n$ sei nun

$$m(r) := \mu\Big(B_r(x)\Big) = \mathcal{H}^s\Big(E \cap B_r(x)\Big) \leq br^s.$$

Ist nun $0 \leq t < s$, dann ist

$$\begin{aligned}
\Phi_t(x) &= \int\limits_{|x-y|\leq 1} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^t} \quad + \int\limits_{|x-y|>1} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^t} \\
&\leq \int\limits_0^1 r^{-t} dm(r) + \mu(\mathbb{R}^n) \\
&= r^{-t} m(r)\Big|_{\downarrow 0}^{1} + t \int\limits_0^1 r^{-(t+1)} m(r) dr + \mu(\mathbb{R}^n) \text{ (partiell integriert)} \\
&\leq b - \lim_{r \searrow 0} r^{s-t} b + t \int\limits_0^1 r^{-(t+1)} b r^s dr + \mu(\mathbb{R}^n) \\
&\leq b + bt \int\limits_0^1 r^{s-t-1} dr + \mu(\mathbb{R}^n) \\
&= b\left(1 + \frac{t}{s-t}\right) + \mathcal{H}^s(E) < \infty.
\end{aligned}$$

Somit ist $\Phi_t(x)$ beschränkt, etwa $\Phi_t(x) < c$. Es folgt

$$I_t(\mu) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi_t(x) d\mu(x) \leq c\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$$

$\square$

Für den nächsten Satz müssen zwei Begriffe geklärt werden. Ein Maß $\mu$ heißt lokal-endlich, wenn zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung $U$ von $x$ existiert mit $\mu(U) < \infty$. Ein lokal-endliches Maß $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, \infty]$ heißt dann ein **Borel-Maß**. Somit ist sichergestellt, daß $\mu(K) < \infty$ für alle kompakten Mengen $K \subset X$. Es sei $C_k(\mathbb{R}^n)$ der Raum aller stetigen Funktionen mit kompaktem Träger,$C_k^+(\mathbb{R}^n)$ der Raum aller nicht negativen Funktionen aus $C_k(\mathbb{R}^n)$. Ein lineares Funktional $I$ auf $C_k(\mathbb{R}^n)$ mit $I(f) \geq 0$ für alle $f \in C_k^+(\mathbb{R}^n)$ nennt man ein **positiv lineares Funktional**.

**Satz 2.5.6 (Riesz Darstellungssatz)** *Es sei $S$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $\Psi$ ein positives lineares Funktional auf dem Raum $\mathcal{F}$ der stetigen*

*Funktionen auf $S$. Dann existiert ein Borel-Maß $\mu$ mit dem Träger auf $S$ und $\mu(S) < \infty$, so daß für alle $f \in \mathcal{F}$*

$$\Psi(f) = \int_S f d\mu$$

*ist.*

**Beweis:** Allgemeine Aussage mit Beweis, siehe [9, Seite 333]. □

Ein Borel-Maß $\mu$ mit einem Träger $E$ ist eine Verteilung auf $E$. Nach Definition ist $E$ kompakt und es gilt $0 < \mu(E) < \infty$.

**Satz 2.5.7 (Satz von Fubini)** *Es sei $f$ eine meßbare Funktion auf $\mathbb{R}^{n+m}$. Existiert mindestens eins der Integrale*

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}^{n+m}} |f(x,y)| dx dy \\ I_2 &= \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)| dx \right) dy \\ I_3 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)| dy \right) dx \end{aligned}$$

*und ist endlich, dann gilt*

*a)* $f(\cdot, y) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ *für fast alle* $y \in \mathbb{R}^m$,
*b)* $f(x, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$ *für fast alle* $y \in \mathbb{R}^n$,
*c)* $\int_{\mathbb{R}^n} f(x, \cdot) dx \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$
*d)* $\int_{\mathbb{R}^m} f(\cdot, y) dy \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ *und*
*e)* $I_1 = I_2 = I_3$.

*Aus [1, Seite 18]*

**Lemma 2.5.8**

*a)* *Ist $f$ meßbar, so auch $|f|$.*

*b)* *Sind $f$ und $g$ meßbar und reell, so auch $f+g$ und $f \cdot g$.*

*c)* *Ist $\{f_n\}$ eine Folge von meßbaren Funktionen, dann sind $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ und $\liminf_{n\to\infty} f_n$ meßbar.*

*d)* *Ist $f$ stetig und auf einer meßbaren Menge definiert, so ist $f$ meßbar.*

*e)* *Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $g$ meßbar und reell, dann ist $f \circ g = f\big(g(x)\big)$ meßbar.*

*Aus [1, Seite 14]*

**Definition 2.5.9** *Es sei $G(n,k)$ die Menge aller $k$-dimensionaler Vektorräume von $\mathbb{R}^n$.*

**Beispiel 2.5.10** *Die Menge $G(2,1)$ beinhaltet alle Geraden in $\mathbb{R}^2$ die den Ursprung schneiden. Denn jeder Vektorraum beinhaltet den Nullvektor.*

**Satz 2.5.11 (Projektionssatz)** *Sei $F \subset \mathbb{R}^n$ eine Borel Menge und $proj_\Pi F$ die orthogonale Projektion von $F$ auf $\Pi \in G(n,k)$. Ist $dim_H F \leq k$, dann ist*

$$dim_H(proj_\Pi F) = dim_H F \;\; \text{für fast alle} \;\; \Pi \in G(n,k).$$

**Beweis:** Allgemeiner Beweis siehe [26, Theorem 5.6 (b), Seite 238]. Dort wird die Aussage auf Suslin Mengen (siehe 2.6.1) ausgeweitet.
Der folgende Beweis zeigt den Fall für $F \subset \mathbb{R}^2$ und $\Pi \in G(2,1)$. Dann ist $\Pi$ eine Gerade $L_\theta$, die den Ursprung mit dem Winkel $\theta \in [0,\pi)$ schneidet. Der Winkel $\theta = \pi$ wird nicht betrachtet. Die Gerade ist dann eindeutig durch einen Winkel $\theta$ oder durch einen normierten Richtungsvektor $\Theta$ bestimmt. Somit ist $\Theta$ abhänig von $\theta$. Für die orthogonale Projektion von $F$ auf die Gerade kann dann $proj_\theta F$ geschrieben werden. Die Abbildung (2.11) zeigt dies. Es ist dann

$$dim_H(proj_\theta F) = dim_H F$$

zu zeigen.

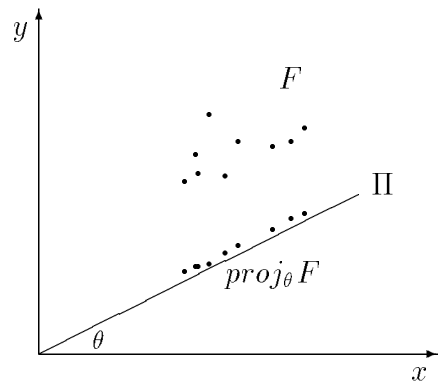



Abbildung 2.11: Projektion der Menge $F$ auf die Gerade Π

Projektionen vergrößern keine Abstände. Für $x, y \in F$ gilt somit

$$|proj_\theta x - proj_\theta y| \leq |x - y|.$$

Also ist $proj_\theta$ eine Lipschitz-Abbildung. Mit Teil 1 von Satz (2.2.4) folgt

$$dim_H(proj_\theta F) \leq dim_H F.$$

Es ist noch $dim_H(proj_\theta F) \geq dim_H F$ zu zeigen. Sei dazu $s < dim_H F \leq 1$, dann ist $\mathcal{H}^s(F) > 0$. Nach Aussage 2 von Satz (2.5.5) existiert eine Verteilung $\mu$ auf einem kompakten Träger $E \subset F$ mit

$$I_t(\mu) = \iint\limits_{FF} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^t} < \infty \ \textit{für alle} \ t < s. \tag{2.22}$$

Mit $x$ als Ortsvektor sei $x \bullet \Theta$ das gewöhnliche Skalarprodukt der zwei Vektoren $x$ und $\Theta$. Die Abbildung $f \mapsto \int f(x \bullet \Theta)d\mu(x)$ ist ein positives lineares Funktional. Nach Riesz (2.5.6) gibt es für jede stetige Funktion $f$ auf einen Kompaktum und jedes $\theta \in [0, \pi)$ ein Borel-Maß $\mu_\theta$ auf $\mathbb{R}$ mit[6]

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(u)d\mu_\theta(u) = \int\limits_{F} f(x \bullet \Theta)d\mu(x)$$

[6]Ist $[a, b]$ der Träger von $\mu_\theta$ dann gilt $\mu_\theta[a, b] = \mu\{x : a \leq x \bullet \Theta \leq b\}$.

und einem Träger auf $\mathbb{R}$. Für jedes $u \in \mathbb{R}$ ist $u\Theta$ ein Punkt auf der Geraden $\Pi$. Somit kann $\mu_\theta$ auch als Verteilung auf der Geraden $\Pi$ gesehen werden. Der Träger von $\mu_\theta$ ist dann eine Teilmenge von $proj_\theta F$. Es folgt

$$\begin{aligned} I_t(\mu_\theta) &= \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_\theta(u)d\mu_\theta(v)}{|u-v|^t} \\ &= \int\limits_{F}\int\limits_{F} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x \bullet \Theta - y \bullet \Theta|^t} \\ &= \int\limits_{F}\int\limits_{F} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|(x-y) \bullet \Theta|^t}. \\ &= \int\limits_{F}\int\limits_{F} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{\big||x-y||\Psi \bullet \Theta|\big|^t}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde der Betrag des Vektors $(x-y) \in \mathbb{R}^2$ aus dem Skalarprodukt gezogen. Somit ist $\Psi$ ein normierter Vektor mit der Richtung $(x-y)$. Ich zeige nun $I_t(\mu_\theta) < \infty$ für $\mathcal{L}^1$ fast alle $\theta \in [0,\pi)$. Dies folgt, wenn $\int_0^\pi I_t(\mu_\theta)d\theta < \infty$ ist. Zeige zunächst das die Funktion

$$f(x,y,\theta) := \frac{1}{|(x-y)|^t|\Psi \bullet \Theta|^t}$$

auf $\Omega = F \times F \times [0,\pi)$ meßbar ist. Die Menge $\Omega$ ist meßbar, die Funktion

$$f_n := \begin{cases} f(x,y,\theta) & \text{für } f(x,y,\theta) < \infty \\ n & \text{sonst} \end{cases}$$

ist meßbar auf $\Omega$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit Lemma (2.5.8) ist $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n = f(x,y,\theta)$ auf $\Omega$ meßbar. Nach Fubini (2.5.7) genügt es

$$\int\limits_{F}\int\limits_{F}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^t|\Psi \bullet \Theta|^t} d\theta < \infty \tag{2.23}$$

zu zeigen. Läuft $\theta$ von 0 bis $\pi$, so repräsentiert der Vektor $\Theta$ alle Geraden durch den Ursprung. Der Ausdruck $\int_0^\pi |\Psi \bullet \Theta|^{-s} d\theta$ ist nicht von $x$ und $y$ abhängig. Man erhält die Gleichung

$$\int\limits_{F}\int\limits_{F}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^t|\Psi \bullet \Theta|^t} d\theta = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{d\theta}{|\Psi \bullet \Theta|^t} \int\limits_{F}\int\limits_{F} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^t}.$$

Das Integral über $F \times F$ ist wie oben (2.22) gezeigt endlich. Es bleibt noch $\int_0^\pi |\Psi \bullet \Theta|^{-t} d\theta < \infty$ für $t < 1$ zu zeigen. Für den Winkel $\tau$ zwischen zwei Vektoren gilt

$$\cos\tau = \frac{\Psi \bullet \Theta}{|\Psi||\Theta|} = \Psi \bullet \Theta.$$

Denn $\Psi$ und $\Theta$ sind normiert, also $|\Psi| = |\Theta| = 1$. Wie bei $\Theta$, sei $\psi$ der Winkel zwischen x-Achse und der Geraden mit dem Richtungsvektor $\Psi$. Für den Winkel $\tau$ gilt somit $\tau = |\psi - \theta| \in [0, \pi]$. Der cos ist eine symmetrische Funktion, es folgt die Beziehung

$$|\Psi \bullet \Theta|^{-t} = |\cos(\psi - \theta)|^{-t}.$$

Betrachte nun $\int_0^\pi |\cos(\psi - \theta)|^{-t} d\theta$. Der Winkel $\psi$ ist beliebig, aber fest. Mit $\psi := \pi/2$ ist $|cos(\pi/2 - \theta)|^{-t} = |sin\theta|^{-t}$. Die Polstellen sind $\theta_1 = 0$ und $\theta_2 = \pi$. Es genügt die Konvergenz von

$$\int_0^{\tan 0,5} \frac{d\theta}{\sin^t\theta} = \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_\epsilon^{\tan 0,5} \frac{d\theta}{sin^t\theta}$$

zu zeigen. Die Substitution $\theta = 2\arctan x$ ergibt $d\theta = 2(1+x^2)^{-1}dx$. Benutzt man $2\arctan x = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ für $|x| < 1$ [7] so folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_\epsilon^{\tan 0,5} \frac{d\theta}{sin^t\theta} &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{2\arctan\epsilon}^{1} \frac{2(1+x^2)^t}{2^t x^t (1+x^2)} dx \\
&= \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{2\arctan\epsilon}^{1} \frac{2^{1-t}}{x^t(1+x^2)^{1-t}} dx \\
&\leq \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{2\arctan\epsilon}^{1} \frac{2^{1-t}}{x^t} dx \\
&= \lim_{\epsilon \searrow 0} \left. \frac{2^{1-t}x^{1-t}}{1-t} \right|_{2\arctan\epsilon}^{1} \\
&= \frac{2^{1-t}}{1-t} < \infty.
\end{aligned}$$

[7] [5, Seite 72 (2.146), Seite 73 (2.154a)]

Damit ist (2.23) gezeigt. Mit Fubini (2.5.7) folgt

$$\int_0^\pi I_t(\mu_\theta)d\theta < \infty.$$

Für fast alle $\theta \in [0,\pi)$ und alle $t < s < dim_H F$ ist dann $I_t(\mu_\theta) < \infty$. Mit Teil 1 von Satz (2.5.5) folgt $dim_H(projF) \geq s$. Damit ist der Satz bewiesen. □

## 2.6 Schnittmengen von Fraktalen

Dieser Abschnitt zeigt, welche Dimension die Schnittmenge eines Fraktals und einer Menge aus $G(n,k)$ hat. Bei der Aussage genügt es, daß das Fraktal eine Suslin Menge ist. Der Beweis der Aussage (Satzes 2.6.4) ist sehr aufwendig. Statt ihn zu beweisen werden einige anschauliche Beispiele gegeben.
Literatur: [11].

**Definition 2.6.1 (Suslin Mengen)** *Es sei $I$ das System aller Folgen mit positiven ganzen Zahlen. Für $i \in I$ sei $i|n = i_1, i_2, \ldots, i_n$. Die Suslin Mengen eines metrischen Raumes $(X,d)$ haben die Darstellung*

$$E = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{i|n},$$

*mit $E_{i|n}$ ist abgeschlossene Menge von $X$ für alle $n \geq 1$ und $i \in I$.*

**Satz 2.6.2** *Jede Borel Menge ist eine Suslin Menge.*

**Beweis:** Siehe [31, Seite 86] □

**Definition 2.6.3** *Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$, dann ist*

$$\tau_x V = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : y - x \in V \right\}$$

*die $x$-Translation von $V$.*

**Satz 2.6.4** *Es sei $V \in G(n,k)$, $s > n-k$ und $F$ eine Suslin Menge aus $\mathbb{R}^n$ mit $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$, dann ist*

$$dim_H \ F \cap \tau_x V = s+k-n \quad \text{und} \quad \mathcal{H}^{s+k-n}(F \cap \tau_x V) < \infty$$

*für $\mathcal{H}^s \times \gamma_{k,n}$[8] fast alle $(x,V) \in F \times G(n,k)$.*

**Beweis:** Siehe [26, Seite 242]. □

Für die Beispiele wähle ich Fraktale $F \subset \mathbb{R}^2$, die mit einer Geraden geschnitten werden. Dabei ist $F = E \times G$ das Produkt zweier Mengen. Die folgenden Sätze geben Dimensionsformeln für Produkte.

**Lemma 2.6.5** *Sind $E \subset \mathbb{R}^n$ und $F \subset \mathbb{R}^m$ Borel Mengen mit $\mathcal{H}^s(E) < \infty$ und $\mathcal{H}^t(F) < \infty$, dann ist*

$$\mathcal{H}^{s+t}(E \times F) \geq c \cdot \mathcal{H}^s(E) \cdot \mathcal{H}^t(F)$$

*mit $c = 2^{-(s+t)}$.*

**Beweis:** Siehe [11, Seite 107] □

**Satz 2.6.6 (Produktformel I)** *Sind $E \subset \mathbb{R}^n$ und $F \subset \mathbb{R}^m$ Borel Mengen, dann ist*

$$dim_H(E \times F) \geq dim_H E + dim_H F.$$

**Beweis:** Mit $s < dim_H E$ und $t < dim_H F$ ist $\mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}^t(F) = \infty$. Nach Lemma (2.5.4) gibt es $E_0 \subset E$ und $F_0 \subset F$ mit $0 < \mathcal{H}^s(E_0) < \infty$ und $0 < \mathcal{H}^s(F_0) < \infty$. Mit Lemma (2.6.5) folgt

$$\mathcal{H}^{s+t}(E \times F) \geq \mathcal{H}^{s+t}(E_0 \times F_0) \geq c \cdot \mathcal{H}^s(E_0) \cdot \mathcal{H}^t(F_0) > 0.$$

Daher ist $dim_H(E \times F) \geq s+t$ für alle $s < dim_H E$ und $t < dim_H F$. Es folgt die Behauptung. □

Das Beispiel [11, Seite 111] zeigt, daß im allgemeinen keine Gleichheit gilt. Allerdings ist die Dimension des Produktes nach oben beschränkt.

[8] Maß auf G(n,k)

**Satz 2.6.7 (Produktformel II)** *Für Borel Mengen* $E \subset \mathbb{R}^n$ *und* $F \subset \mathbb{R}^m$ *ist*

$$dim_H(E \times F) \leq dim_H E + \overline{dim}_B F.$$

**Beweis:** Beweis für $E \subset \mathbb{R}$ und $F \subset \mathbb{R}$.
Sei $t > \overline{dim}_B F$. Nach Definition der Box-Dimension gibt es eine Zahl $\delta_0 > 0$, so daß $F$ für alle $\delta \leq \delta_0$ durch $N_\delta(F) \leq \delta^{-t}$ Intervalle der Länge $\delta$ überdeckt wird. Mit $s > dim_H E$ ($\Rightarrow \mathcal{H}^s(E) = 0$) gibt es eine $\delta$-Überdeckung $(U_i)$ von $E$ mit $\sum_i |U_i|^s < 1$. Für jedes $i$ sei $(U_{i,j})$ eine $|U_i|$-Überdeckung von $F$ durch $N_{|U_i|}(F)$ Intervalle der Länge $|U_i|$. Somit wird $U_i \times F$ durch $N_{|U_i|}(F) \leq |U_i|^{-t}$ Quadrate $\{U_i \times U_{i,j}\}$ der Seitenlänge $|U_i|$ überdeckt. Es ist $|U_i \times U_{i,j}| \leq \delta\sqrt{2}$ und

$$E \times F \subset \bigcup_i \bigcup_j \Big(U_i \times U_{i,j}\Big).$$

Für das Hausdorff-Maß gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{s+t}_{\delta\sqrt{2}}(E \times F) &\leq \sum_i \sum_j |U_i \times U_{i,j}|^{s+t} \\ &\leq \sum_i N_{|U_i|}(F) \cdot 2^{(s+t)/2} \cdot |U_i|^{s+t} \\ &\leq 2^{(s+t)/2} \sum_i |U_i|^{-t} |U_i|^{s+t} \\ &< 2^{(s+t)/2}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\mathcal{H}^{s+t}(E \times F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^{s+t}_{\delta\sqrt{2}}(E \times F) < \infty.$$

Für die Hausdorff-Dimension (2.2.2) folgt

$$dim_H(E \times F) \leq s + t$$

für alle $s > dim_H E$ und $t > \overline{dim}_H F$. Es folgt die Behauptung. $\square$

**Satz 2.6.8 (Produktformel III)** *Für Borel Mengen* $E \subset \mathbb{R}^n$ *und* $F \subset \mathbb{R}^m$ *mit* $dim_H F = \overline{dim}_B F$ *ist*

$$dim_H(E \times F) = dim_H E + dim_H F.$$

**Beweis:** Mit den Sätzen (2.6.6) und (2.6.7) folgt die Beziehung

$$dim_H E + dim_H F \leq dim_H(E \times F) \leq dim_H E + \overline{dim}_B F.$$

$\square$

**Beispiel 2.6.9 (Cantor Kamm)** *Es sei $\mathcal{C}$ die Cantor Menge, nach Satz* (2.4.15) *ist $dim_H \mathcal{C} = \overline{dim}_B \mathcal{C}$ und $dim_H[0,1] = 1$ (Zwei Ähnlichkeitsabbildungen mit dem Skalierungsfaktor $1/2$.). Mit $\mathcal{F} := \mathcal{C} \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ und Satz* (2.6.8) *folgt*

$$dim_H \mathcal{F} = dim_H \mathcal{C} + dim_H[0,1] = dim_H \mathcal{C} + 1.$$

*Für alle $L \in G(2,1)$ ist $dim_H L = dim_H \tau_x L = 1$ mit $x \in \mathcal{F}$. Mit Satz* (2.6.4)

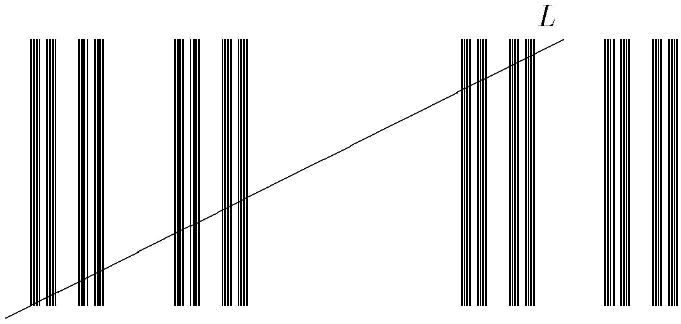



Abbildung 2.12: Der Cantor Kamm mit einer Geraden $L \in G(2,1)$.

*folgt*

$$dim_H \ \mathcal{F} \cap \tau_x L = dim_H \mathcal{C} + 1 - 2 + 1 = dim_H \mathcal{C}$$

*für fast alle $(x, L) \in \mathcal{F} \times G(2,1)$.*
*Sei $L \in G(2,1)$ eine Gerade die nicht orthogonal zur x-Achse ist und $\mathcal{F}$ schneidet. Es ist $\mathcal{F} \cap L \subset L$, mit der Monotomie der Hausdorff-Dimension (Seite 28, Punkt 2) folgt*

$$dim_H \ \mathcal{F} \cap L \leq dim_H L = 1.$$

*Der Projektionssatz* (2.5.11) *liefert*

$$dim_H \ \mathcal{F} \cap L = dim_H \ proj_0(\mathcal{F} \cap L).$$

*Für die Projektion auf die x-Achse ist* $proj_0(\mathcal{F} \cap L) = \mathcal{C} \cap [x, y] \neq \emptyset$ *mit* $0 = x < y \leq 1$. *Die Cantor Menge ist eine selbstähnliche Menge. Somit befinden sich in jeder Umgebung von* $x \in \mathcal{C}$ *Kopien von* $\mathcal{C}$. *Dies auch im Intervall* $[x, y]$, *es folgt*

$$dim_H\ \mathcal{F} \cap L = dim_H \mathcal{C}.$$

Das nächsten Beispiel zeigt die „Cantor-Zielscheibe." Sie entsteht durch Rotation der Cantor Menge um den Ursprung.

**Beispiel 2.6.10** *Die „Cantor-Zielscheibe"* $\mathcal{F}$ *ist in Polarkoordinaten durch* $\{(r, \theta) : r \in \mathcal{C}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ *definiert. Folgende kurze Rechnung zeigt* $dim_H \mathcal{F} = dim_H \mathcal{C} + 1$. *Sei dazu*

$$\begin{aligned} &f : [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \\ &f(x, y) = (x \cos y, x \sin y). \end{aligned}$$

*Für die stetig differenzierbare Funktion* $f$ *ist die Matrixnorm*[9] *der Ableitung*

$$\|Df(x, y)\| = \left\| \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{pmatrix} \right\|$$

*beschränkt und* $f$ *eine Lipschitz-Abbildung. Weiter ist* $\mathcal{F} = f(\mathcal{C} \times [0, 2\pi])$. *Mit den Sätzen* (2.2.4) *und* (2.6.8) *folgt*

$$\begin{aligned} dim_H \mathcal{F} &= dim_H f\Big(\mathcal{C} \times [0, 2\pi]\Big) \\ &\leq dim_H\ \mathcal{C} \times [0, 2\pi] \\ &= dim_H \mathcal{C} + dim_H [0, 2\pi] \\ &= dim_H \mathcal{C} + 1. \end{aligned}$$

*Schränkt man* $f$ *auf* $\Omega = [2/3, 1] \times [0, \pi]$ *ein, so ist* $Df(x, y)$ *regulär. Also ist* $\|Df(x, y)\| > 0$ *für alle* $(x, y) \in \Omega$. *Mit* $L = \min\limits_{x,y \in \Omega} \|Df(x, y)\|$ *folgt für alle* $(x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega$

$$L|(x, y) - (\tilde{x}, \tilde{y})| \leq |f(x, y) - f(\tilde{x}, \tilde{y})|.$$

[9] Für die Matrix $A$ ist $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} |Ax||x|^{-1} = \max\limits_{|x|=1} |Ax|$ eine Matrixnorm [41, Seite 18].

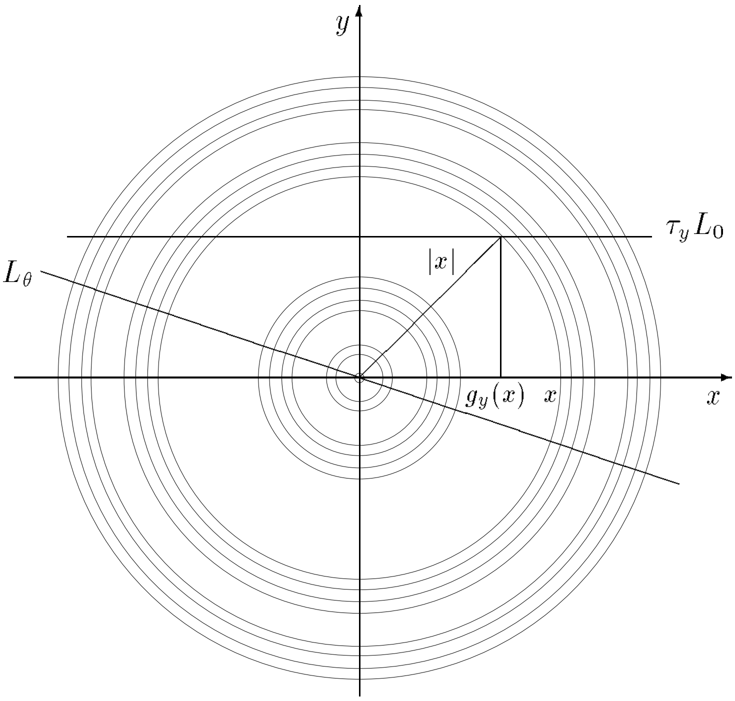



Abbildung 2.13: Die „Cantor-Zielscheibe“ $\mathcal{F}$ mit $L_0, L_\theta \in G(2,1)$ und der Darstellung $2/3 \mapsto g_y(2/3)$.

*Also ist $f$ eine Bi-Lipschitz-Abbildung auf $\Omega$. Mit den Sätzen* (2.2.4), (2.6.8) *und $f\Big((\mathcal{C} \cap [2/3,1]) \times [0,\pi]\Big) \subset \mathcal{F}$ folgt*

$$\begin{aligned} dim_H \mathcal{F} &\geq dim_H f\Big((\mathcal{C} \cap [2/3,1]) \times [0,\pi]\Big) \\ &= dim_H \Big((\mathcal{C} \cap [2/3,1]) \times [0,\pi]\Big) \\ &= dim_H \ \mathcal{C} \cap [2/3,1] + dim_H [0,\pi] \\ &= dim_H \mathcal{C} + 1. \end{aligned}$$

*Mit Satz* (2.6.4) *folgt*

$$dim_H \ \mathcal{F} \cap \tau_x L = dim_H \mathcal{C} + 1 - 2 + 1 = dim_H \mathcal{C}$$

*für fast alle $(x, L) \in \mathcal{F} \times G(2,1)$.*
*Für $L \in G(2,1)$ ist $L \cap \mathcal{F}$ eine Drehung von $\mathcal{C} \cup (-\mathcal{C})$ um den Ursprung.*

*Bei Drehungen in* $\mathbb{R}^2$ *bleibt der Abstand zweier Punkte konstant. Drehungen sind also Bi-Lipschitz-Abbildungen. Mit* (2.2.4) *folgt*

$$dim_H\ \mathcal{F} \cap L = dim_H \mathcal{C}.$$

*Im folgenden wird der Schnitt* $\mathcal{F} \cap \tau_y L_0$ *mit* $y \in (1/3, 3/5]$ *aus Abbildung* (2.13) *betrachtet. Das Fraktal* $\mathcal{F}$ *ist symmetrisch zu den Koordinatenachsen. Um die Hausdorff-Dimension zu bestimmen, genügt es den Schnitt auf der rechten Halbebene* $\mathbb{H}$ *zu betrachten, es ist*

$$dim_H\ \mathcal{F} \cap \tau_y L_0 = dim_H\ (\mathbb{H} \cap \mathcal{F} \cap \tau_y L_0). \tag{2.24}$$

*Die Hausdorff-Dimension ist monoton (Seite 28,Punkt 2), mit*

$$\mathbb{H} \cap \mathcal{F} \cap \tau_y L_0 \subset \tau_y L_0$$

*und* (2.24) *folgt*

$$dim_H\ \mathcal{F} \cap \tau_y L_0 = dim_H\ \Big(\mathbb{H} \cap \mathcal{F} \cap \tau_y L_0\Big) \leq dim_H \tau_y L_0 = 1. \tag{2.25}$$

*Der Projektionssatz* (2.5.11) *liefert*

$$dim_H\ \Big(\mathbb{H} \cap \mathcal{F} \cap \tau_y L_0\Big) = dim_H\ proj_0\Big(\mathbb{H} \cap \mathcal{F} \cap \tau_y L_0\Big). \tag{2.26}$$

*Für ein festes* $y \in (1/3, 3/5]$ *ist die Funktion* $g_y$ *durch*

$$g_y : [2/3, 1] \to \mathbb{R}$$
$$g_y(x) = \sqrt{x^2 - y^2}$$

*definiert (siehe Abbildung 2.13). Die Funktion* $g_y(x)$ *ist stetig differenzierbar für alle* $x \in (2/3, 1)$. *Für jedes feste* $y \in (1/3, 3/5]$ *seien*

$$\begin{aligned} M_y &:= \inf_{x \in [2/3,1]} g'_y(x) = \inf_{x \in [2/3,1]} \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} > 0 \textit{ für alle } y \in (1/3, 3/5] \\ N_y &:= \sup_{x \in [2/3,1]} g'_y(x) = \sup_{x \in [2/3,1]} \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} < \infty \textit{ für alle } y \in (1/3, 3/5]. \end{aligned}$$

*Für alle* $x, z \in [2/3, 1]$ *folgt die Abschätzung*

$$M_y|x - z| \leq |g_y(x) - g_y(z)| \leq N_y|x - z|. \tag{2.27}$$

*Damit ist* $g_y(x)$ *für jedes feste* $y \in (1/3, 3/5]$ *eine Bi-Lipschitz-Abbildung in* $[2/3, 1]$. *Dies gilt auch für* $g_y(x)$ *auf* $\mathcal{C} \cap [2/3, 1]$. *Es ist*

$$g_y\Big(\mathcal{C} \cap [2/3, 1]\Big) = proj_0\Big(\mathbb{H} \cap \mathcal{F} \cap \tau_y L_0\Big) \tag{2.28}$$

*(Siehe Abbildung* 2.13*). Die Hausdorff-Dimension ist bezüglich Bi-Lipschitz Abbildungen invariant* (2.2.4). *Mit* (2.25), (2.26), (2.28) *und* (2.27) *folgt*

$$\begin{aligned} dim_H \ \mathcal{F} \cap \tau_y L_0 &= dim_H \ \Big(\mathbb{H} \cap \mathcal{F} \cap \tau_y L_0\Big) \\ &= dim_H \ proj_0\Big(\mathbb{H} \cap \mathcal{F} \cap \tau_y L_0\Big) \\ &= dim_H \ g_y\Big(\mathcal{C} \cap [2/3, 1]\Big) \\ &= dim_H \ \mathcal{C} \cap [2/3, 1] \\ &= dim_H \mathcal{C}. \end{aligned}$$

# Kapitel 3

# Der Bronchialbaum als Fraktal

Dieses Kapitel zeigt, daß natürliche Objekte fraktale Strukturen aufweisen können. Dies sind sicherlich zerklüftete, irreguläre, zersplitterte oder verästelte Mengen. Der Bronchialbaum ist eine verästelte Menge. Er füllt die Lungen dichter, gleichmäßiger und undurchsichtiger aus als jeder botanische Baum. Die sukzessive Verzweigung der Leitungszone ist von beeindruckender Regelmäßigkeit. Aus Kapitel 1.4 ist die Gleichung (1.8)

$$d_n^3 = d_{n+1}^3 + d_{n+1}^3$$

für die Durchmesser der Bronchien in der Leitungszone bekannt. Die folgenden Durchmesser sind mit einer Ähnlichkeitsabbildung berechenbar. Es gilt

$$d_{n+1} = 2^{-1/3} d_n. \tag{3.1}$$

Dies hat physikalische, physiologische und geometrische Konsequenzen. Die physikalische ist, daß der innere Reibungswiderstand gegen die Luftströmung in der Leitungszone minimal ist (1.7). Die weiteren werden nun diskutiert.

## 3.1 Eine Fläche mit positivem Volumen

Ein effektiver Diffusionsaustausch erfordert eine große Austauschfläche. Die sukzessive Verzweigung der Bronchien ermöglicht dies (Tabelle 1.2 und Abbildung 1.5). Die Bronchienspitzen bilden somit eine große Fläche. Ziel ist es, dieser Fläche eine fraktale Dimension zuzuordnen. Dazu betrachte ich den gesetzmäßigen Aufbau der Leitungszone, um einen unendlich oft verzweigten Bronchialbaum $\mathcal{T}$ zu konstruieren. Die Bronchiendurchmesser genügen der Gleichung (3.1). Mit Weibels Daten für die Bronchienlänge, (siehe Seite 8) ist die Pfadlänge[1] bis zur n-ten Generation ($n > 3$) durch die geometrische Reihe

$$\begin{aligned} \mathrm{Pfad}_n &= 19,45 + 2,5 \cdot \sum_{z=3}^{n} e^{-0,17z} \\ &= 11,58 + 2,5 \cdot \sum_{z=0}^{n-3} e^{-0,17z} \\ &= 11,58 + 2,5 \, \frac{1 - e^{-0,17(n-2)}}{1 - e^{-0,17}} \end{aligned}$$

gegeben. Weiter ist

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{Pfad}_n = 27,57$$

beschränkt. Damit liegt der Bronchialbaum $\mathcal{T}$ in einer kompakten Menge $B \subset \mathbb{R}^3$. Sei $F_n \subset \mathcal{T}$ die Querschnittsfläche[2] einer Bronchie in der n-ten Generation, siehe Abbildung 3.1. Dann ist $|F_n| = d_n$. Mit (3.1) folgt

$$|F_{n+1}| = 2^{-1/3}|F_n|.$$

Also gibt es eine Ähnlichkeitsabbildung $S_1$ auf $B$ (siehe 2.13) mit

$$S_1(F_n) := F_{n+1}.$$

Mit $c_1 := 2^{-1/3} < 1$ folgt

$$\Big|S_1(F_n)\Big| = |F_{n+1}| = c_1 \cdot |F_n|.$$

Die Verzweigung verläuft dichotom. Die zwei Tochterbronchien haben den gleichen Durchmesser. Daher gibt es eine zweite Ähnlichkeitsabbildung $S_2$ auf $B$ mit dem Verhältnis $c_2 := c_1$. Sei $S$ der Hutchinson Operator von $S_1$ und $S_2$ (siehe Definition 2.4.1). Wie bei einem Baum vereinigen sich auch die

[1] $\mathrm{Pfad}_n := l_0 + l_1 + \cdots + l_n$

[2] nicht das Lebesgue-Maß, sondern die Menge

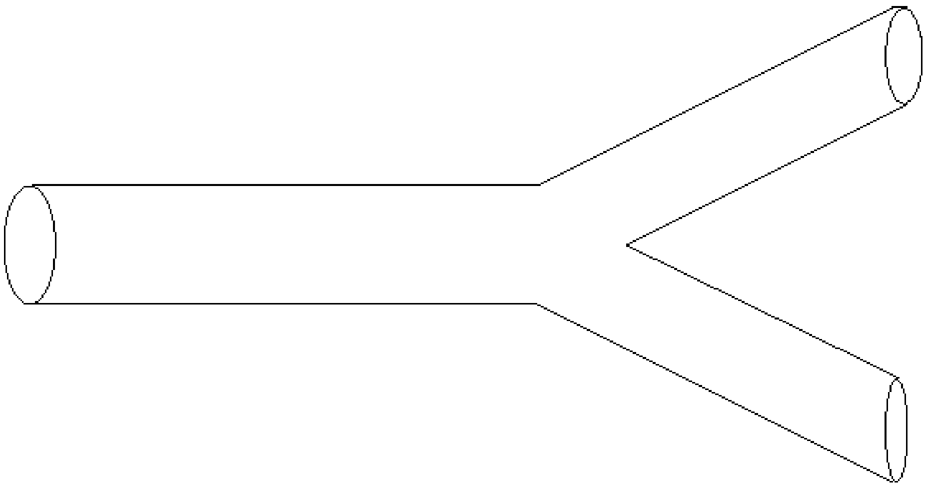



Abbildung 3.1: Bronchienverzweigung mit Querschnittsflächen $F_n$ und $F_{n+1}$

Bronchien nach einer Verzweigung nicht mehr. Daher überlappen sich die Bronchienspitzen nicht. Mit $F_0$ als Querschnittsfläche der Trachea, ist die Querschnittsfläche der zwei Hauptbronchien

$$S(F_0) := S_1(F_0) \cup S_2(F_0).$$

Folglich ist $S^n(F_0)$ die Gesamtquerschnittsfläche der Bronchien in der n-ten Generation. Das Lebesgue-Maß von $S^n(F_0)$ ist

$$\mathcal{L}^2\Big(S^n(F_0)\Big) = 2^n \,\frac{d_n^2}{4}\,\pi = \frac{2^n\,2^{-2n/3} d_0^2}{4}\,\pi = \frac{2^{n/3} d_0^2}{4}\,\pi. \tag{3.2}$$

Nach Satz (2.4.6) existiert eine eindeutige nichtleere kompakte invariante Menge $F$ mit

$$F = S(F) = S_1(F) \cup S_2(F).$$

Mit Korollar 2.4.7 folgt

$$\lim_{n\to\infty} S^n(F_0) \to F. \tag{3.3}$$

Damit ist $F$ die Austauschfläche des Bronchialbaums $\mathcal{T}$. Mit (3.2) und (3.3) folgt, daß $\mathcal{L}^2(F)$ unbeschränkt ist. Topologisch gesehen ist $\dim_T F = 2$, und $F$ ist als Teilmenge des Bronchialbaums in der kompakten Menge $B \subset \mathbb{R}^3$

enthalten. Damit muß $F$ eine sehr stark gefaltete Fläche sein, die $B$ ausfüllt. Sei $V$ nun das Innere von $B$. Dann ist $V \subset B \subset \mathbb{R}^3$ eine nichtleere, beschränkte, offene Menge. Da sich die Bronchienspitzen nicht überlappen, ist

$$S_1(V) \cap S_2(V) = \emptyset.$$

Korollar 2.4.7 besagt $\lim\limits_{n\to\infty} S^n(B) \to F$. Mit $F \subset V \subset B$ folgt

$$S(V) \subset V.$$

Die Offene Mengen Bedingung (2.4.13) ist somit erfüllt.
Ist $\dim_S F = s$, so ist nach Definition (2.4.10)

$$\sum_{i=1}^{2} c_i^s = 1 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{2} \left(2^{-1/3}\right)^s = 1 \Longleftrightarrow 2 \cdot 2^{-s/3} = 1 \Longleftrightarrow s = 3. \tag{3.4}$$

Nach Satz (2.4.15) und (3.4) ist $F$ eine selbstähnliche Menge mit

$$dim_H F = dim_B F = 3 \text{ und } 0 < \mathcal{H}^3(F) < \infty. \tag{3.5}$$

Es folgt die Ungleichung

$$2 = dim_T F < dim_H F = 3.$$

Nach Definition (2.2.7) ist $F$ ein Fraktal mit der Hausdorff-Dimension 3. Geometrisch gesehen ist das Fraktal eine „Fläche mit positivem Volumen“, in der sich die Bronchienspitzen zusammenfügen. Diese „Fläche“ ist raumfüllend. Die Hausdorff-Dimension ist monoton (Seite 28, Punkt 2). Es folgt

$$F \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow dim_H F \leq 3.$$

Mit (3.5) besitzt $F$ die größtmögliche fraktale Dimension im $\mathbb{R}^3$. Nach (3.4) führt die dichotome Verzweigung genau dann zu dieser raumfüllenden fraktalen Austauschfläche, wenn die Durchmesser der Gleichung (3.1) genügen. Dies liefert für die Diffusion die größtmögliche Austauschfläche. Das ist der physiologische Vorteil der Leitungszone.
Dies zeigt, daß bei einem endlich verzweigten Bronchialbaum die Leitungszone den Zugang zu der größtmöglichen Austauschfläche ermöglicht. Gleichzeitig ist der innere Reibungswiderstand gegen die Luftströmung minimal.
Der gesetzmäßige Aufbau reicht bis zur 12. Generation, siehe Abbildung (1.7). Die gesamten Bronchienspitzen in der 12. Generation können als das Präfraktal $S^{12}(F_0)$ betrachtet werden.

## 3.2 Methode zur Dimensionsbestimmung

Dieser Abschnitt zeigt eine Methode, wie sich die Dimensionsbestimmung von fraktalen Oberflächen im $\mathbb{R}^3$, auf ein zwei-dimensionales Problem reduzieren läßt. Der Bronchialbaum kann als fraktale Oberfläche im $\mathbb{R}^3$ angesehen werden. Die Dimension soll numerisch bestimmt werden. Dazu bestimmt man die Box-Dimension mittels BCM. Sie hat den Vorteil, daß man auch Präfraktalen oder natürlichen Fraktalen schnell eine Dimension zuordnen kann. Dies zeigt Beispiel (2.3.5). Allgemein ist kein gesetzmäßiger Aufbau notwendig. Allerdings ist die BCM im $\mathbb{R}^3$ aufwendiger als im $\mathbb{R}^2$. Für die BCM im $\mathbb{R}^3$ ist ein 3D-Datensatz der Menge notwendig. Bei einem Organ z.B. erstellt man einen Ausguß. Zwei Möglichkeiten bieten sich zum erstellen des 3D-Datensatzes an.

1. **Serienschnittverfahren**
   Dazu fixiert man den Ausguß in eine geeignete Gußform und füllt diese mit einem kontrastfarbigen Kunststoff. Es entsteht ein Rohling. Mit Hilfe eines mechanischen Serienschnittverfahrens werden aus diesem Schnittbilder erzeugt (Schichtdicke: 0,25 bis 0,1 mm). Anschließend werden die einzelnen Bilder mit einem entsprechenden Computerprogramm zu einen 3D-Datensatz zusammengefaßt.
   [7, Seite 18],[42, Seite 27]

2. **Kernspin-Computertomographie**
   Der Ausguß wird in einen Behälter mit einer wässrigen Lösung gegeben. Die Lösung stellt das signalgebende Medium für die Messung dar. Der Ausguß ist das signallose Negativbild. Eine Computertransformation wandelt das Negativbild in ein Positiv um.
   [7, Seite 19],[42, Seite 28]

Ich werde die Dimension des Bronchialbaums im Raum abschätzen, indem ich ein Foto vom Ausguß betrachte. Also BCM im $\mathbb{R}^2$. Ich erwarte eine größere Dimension als 2. Ein Foto ist eine orthogonale Projektion. Der Projektionssatz 2.5.11 kann nicht direkt angewandt werden. Deswegen betrachte ich nur die Umrißlinien der Bronchien. Ich begründe dies anhand des fraktalen Bronchialbaums $\mathcal{T}$ im $\mathbb{R}^3$ (siehe Kapitel 3.1). Mit Hilfe von Schnittmengen reduziere ich die Dimension um eines, auf kleiner 2. Dann ist der Projektionssatz anwendbar.

Im ersten Schritt schneide ich jede Bronchie mit einer Ebene. Sei dazu $\mathcal{T}_{i,n}$ die i-te Bronchie in der n-ten Generation. Dann ist

$$\mathcal{T} = \bigcup_{i,n} \mathcal{T}_{i,n}. \tag{3.6}$$

Die Hausdorff-Dimension ist monoton (Seite 28, Punkt 2), mit (3.5) folgt

$$F \subset \mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow dim_H F \leq dim_H \mathcal{T} \leq 3 \Rightarrow dim_H \mathcal{T} = 3.$$

Die Bronchien $\mathcal{T}_{i,n}$ sind abzählbar. Mit (3.6) und der abzählbaren Stabilität (Seite 28, Punkt 3) folgt

$$\begin{aligned} dim_H \mathcal{T} &= dim_H \bigcup_{i,n} \mathcal{T}_{i,n} \\ &= \sup_{i,n} \{dim_H \mathcal{T}_{i,n}\} = 3. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Sei nun $x \in \mathcal{T}_{i,n}$ und $V \in G(3,2)$ so gewählt, daß $\tau_x V$ die Bronchie $\mathcal{T}_{i,n}$ in Längsrichtung schneidet, $\tau_x V$ ist von $\mathcal{T}_{i,n}$ abhängig .Übrig bleibt die Schnittfläche mit der Bronchienwand. Für den gesamten Bronchialbaum ergibt sich die Menge

$$\mathcal{T}_\circ := \bigcup_{i,n} \mathcal{T}_{i,n} \cap \tau_x V. \tag{3.8}$$

Entsprechend (3.7) gilt für die Dimension

$$\begin{aligned} dim_H \mathcal{T}_\circ &= dim_H \Big( \bigcup_{i,n} \mathcal{T}_{i,n} \cap \tau_x V \Big) \\ &= \sup_{i,n} \{dim_H \ \mathcal{T}_{i,n} \cap \tau_x V\}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Die Dimension von (3.9) wird mit Satz 2.6.4 bestimmt. Nach (3.7) existieren $p, q \in \mathbb{N}$ mit

$$2 < dim_H \mathcal{T}_{p,q} \leq 3.$$

Damit kann Satz 2.6.4 angewandt werden. Mit (3.9), Satz 2.6.4 und (3.7) folgt

$$\begin{aligned} dim_H \mathcal{T}_\circ &= \sup_{i,n} \{dim_H \ \mathcal{T}_{i,n} \cap \tau_x V\} \\ &= \sup_{i,n} \{dim_H \mathcal{T}_{i,n} + 2 - 3\} \\ &= \dim_H \mathcal{T} - 1 & (3.10) \\ &= 2, & (3.11) \end{aligned}$$

für $\mathcal{H}^3 \times \gamma_{2,3}$ fast alle $(x, V) \in \mathcal{T}_{i,n} \times G(3,2)$.
Im zweiten Schritt projiziere ich $\mathcal{T}_\circ$ orthogonal auf die Ebene $\Pi \in G(3,2)$. Mit (3.11) und dem Projektionssatz 2.5.11 folgt

$$dim_H(proj_\Pi \mathcal{T}_\circ) = dim_H \mathcal{T}_\circ, \tag{3.12}$$

für fast alle $\Pi \in G(3,2)$. Mit (3.12) und (3.10) folgt

$$dim_H \mathcal{T} = dim_H(proj_\Pi \mathcal{T}_\circ) + 1. \tag{3.13}$$

Der Bronchialbaum ist für alle praktischen Zwecke selbstähnlich [25, S. 169a]. Für die Dimension kann gemäß Satz 2.4.15

$$dim_H(proj_\Pi \mathcal{T}_\circ) = dim_B(proj_\Pi \mathcal{T}_\circ) \tag{3.14}$$

angenommen werden. Die Menge $proj_\Pi \mathcal{T}_\circ$ interpretiere ich als die Umrißlinien der Bronchien auf einen Foto vom Ausguß. Daher genügt es die BCM in der Ebene anzuwenden, um die Box-Dimension und damit die fraktale Dimension des Bronchialbaums zu bestimmen.

## 3.3 Erstellung der 2D-Datensätze

Das von mir geschriebene C++ Programm boxc.cpp bestimmt die Box-Dimension mittels BCM in der Ebene. Das Bild muß im protable pixmap Format (ppm-Datei (ascii)) vorliegen. Das Programm benutzt zur BCM Quadrate. Bei der ersten Iteration beträgt die Kantenlänge der Quadrate 1 Pixel. Mit jeder Iteration verdoppelt sich die Kantenlänge der Quadrate. Daher sind nur quadratische Bilder der Größe $2^n$ x $2^n$ Pixel zugelassen. Dies muß keine Einschränkung sein.
Die Software XV 3.10a kann verschiedene Bildformate einlesen und sie als ppm-Dateien speichern. Rechteckige Bilder kann XV 3.10a in quadratische überführen. Dazu legt man ein Quadrat um die eigentliche Bildinformation. Durch anklicken des Quadrates und des Menüpunktes Crop schneidet man das Quadrat aus. Notfalls muß mit Set Size im Menü Image Size nachgebessert werden, um die Bildgröße $2^n$ x $2^n$ Pixel zu erhalten. Dabei kann es zu kleinen Verzerrungen kommen.
Das Sierpiński-Dreieck und Fotos der Bronchialbäume $\mathcal{T}_g$ [39, Seite 112] und

Tabelle 3.1: Auflösung und Bildgröße nach der Datenvorbereitung

| Dateiname | Auflösung | Bildgröße |
|---|---|---|
| sier.ppm | 72dpi x 72dpi | 256 x 256 Pixel |
| koch.ppm | 72dpi x 72dpi | 256 x 256 Pixel |
| baumfein.ppm | 72dpi x 72dpi | 512 x 512 Pixel |
| baumgrob.ppm | 72dpi x 72dpi | 512 x 512 Pixel |

$\mathcal{T}_f$ [27, Seite 182] wurden mit einem Flachbettscanner eingescannt und als Bitmap-Datei (bmp) gespeichert. Die Koch-Kurve wurde mit der Software Mathematica 2.2 auf einer Unix-Workstation berechnet und als Postscript Datei (ps) gespeichert. Die Abbildungen 3.2, 3.3 und 3.4 zeigen die Bilder im Postscript Format. Fotos von Bronchialbäumen sind Projektionen auf Ebenen. Die Abbildungen 3.3 und 3.4 zeigen daher Projektionen der Bronchialbäume, also $proj_\Pi \mathcal{T}_g$ und $proj_\Pi \mathcal{T}_f$. Die Software COREL PHOTO PAINT

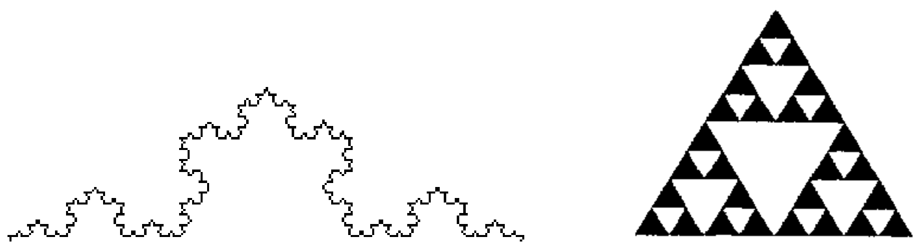


Abbildung 3.2: Die Koch-Kurve, 4. Iteration und das Sierpiński-Dreieck, 3. Iteration [22, Seite 152]

4.0 für Windows 95 ermöglicht es, nur die Umrißlinien eines Bildes zu betrachten. Die Abbildungen 3.5 und 3.6 zeigen die Umrißlinien der Mengen $proj_\Pi \mathcal{T}_g$ und $proj_\Pi \mathcal{T}_f$ in Postscript Format. Mit XV 3.10a werden die Bilder für das Programm boxc.cpp vorbereitet und als ppm-Datei gespeichert. Bei der Datenvorbereitung verkleinerte sich die Auflösung der Bronchialbäume von 300dpi x 300dpi auf 72dpi x 72dpi. Die Tabelle 3.1 zeigt die Auflösung und die Größe der Bilder, mit dem das Programm boxc.cpp arbeitet.

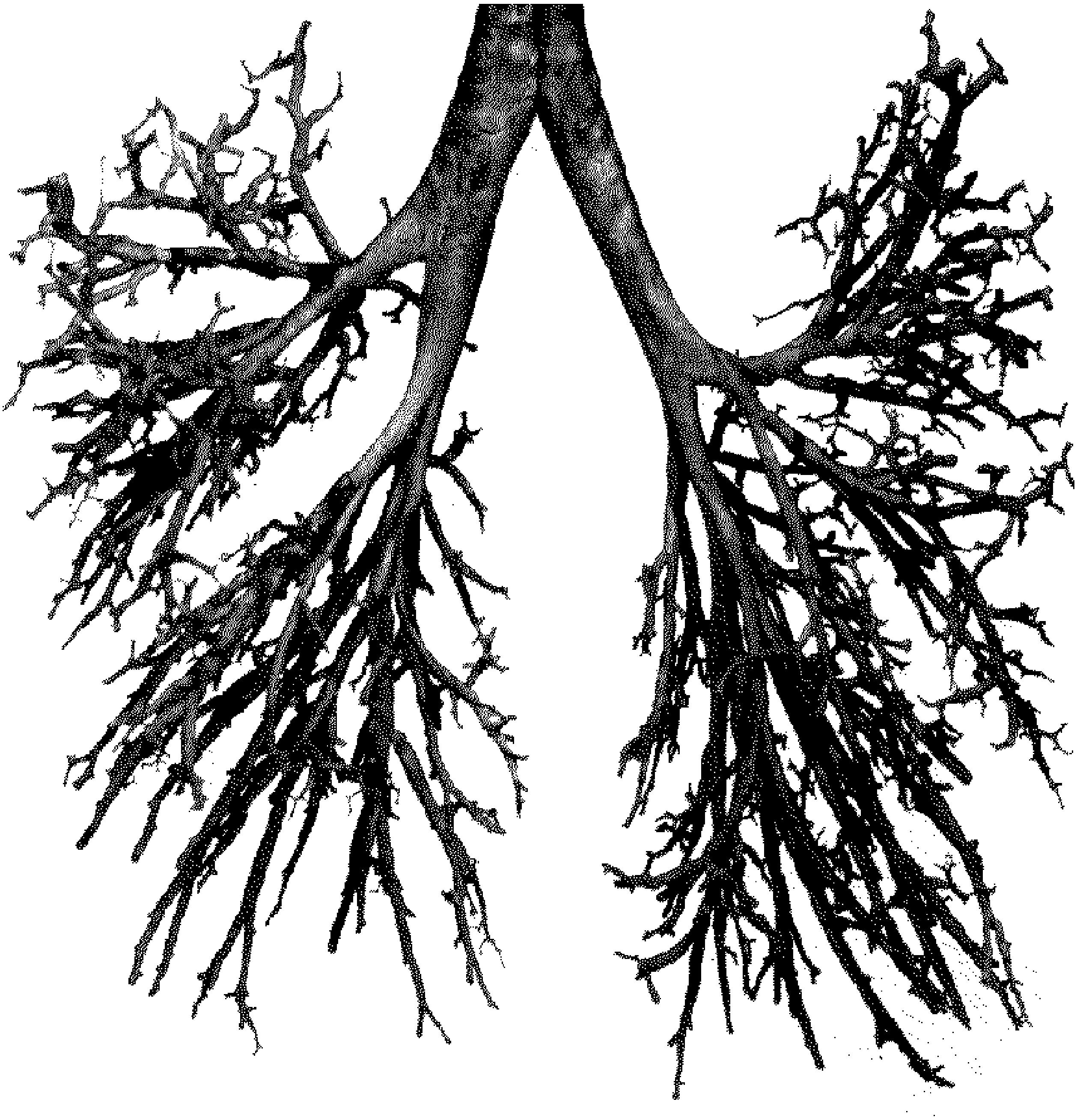


Abbildung 3.3: Grob verzweigter Bronchialbaum $\mathcal{T}_g$ [39, Seite 112]

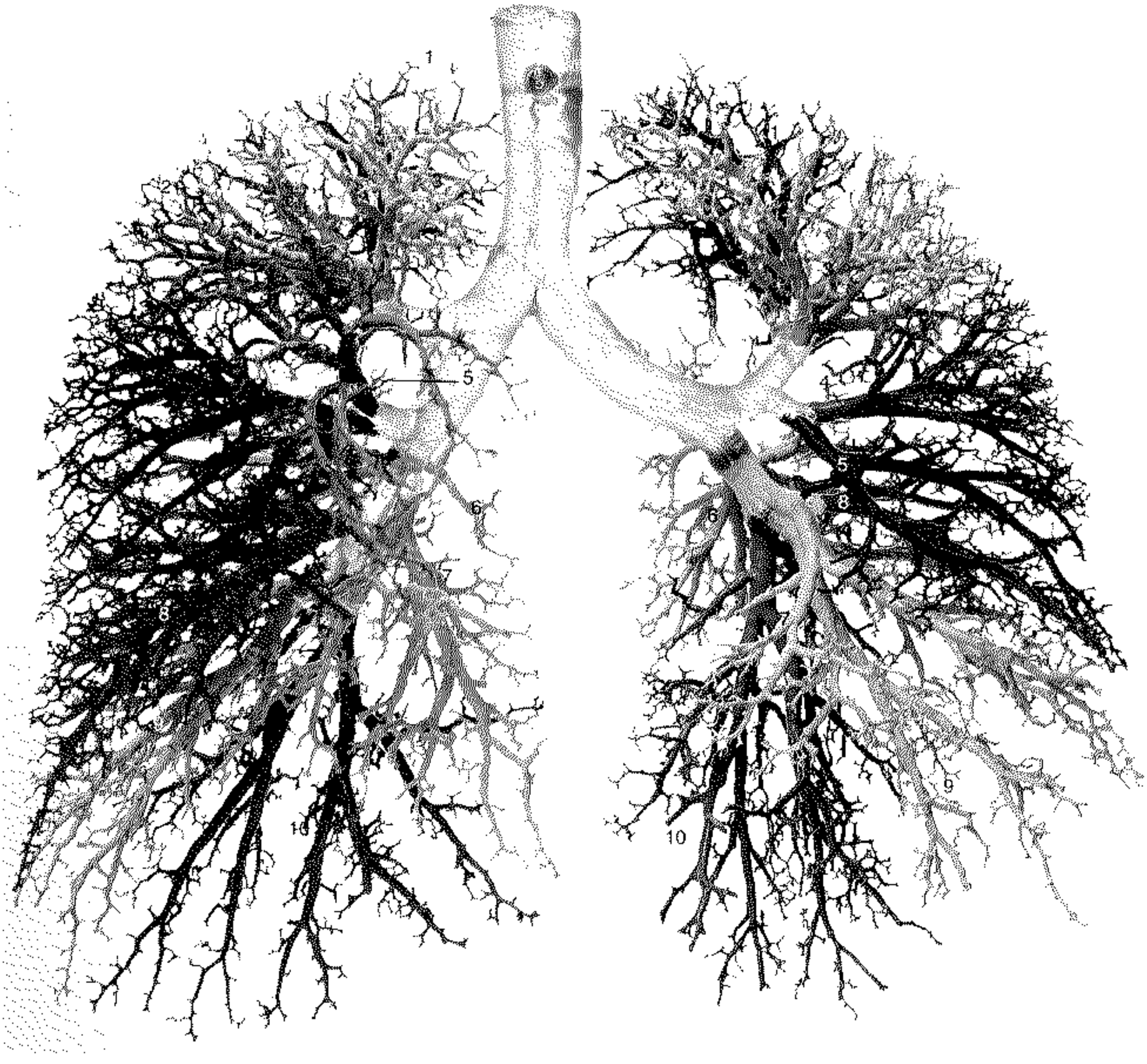



Abbildung 3.4: Fein verzweigter Bronchialbaum $\mathcal{T}_f$ [27, Seite 182]

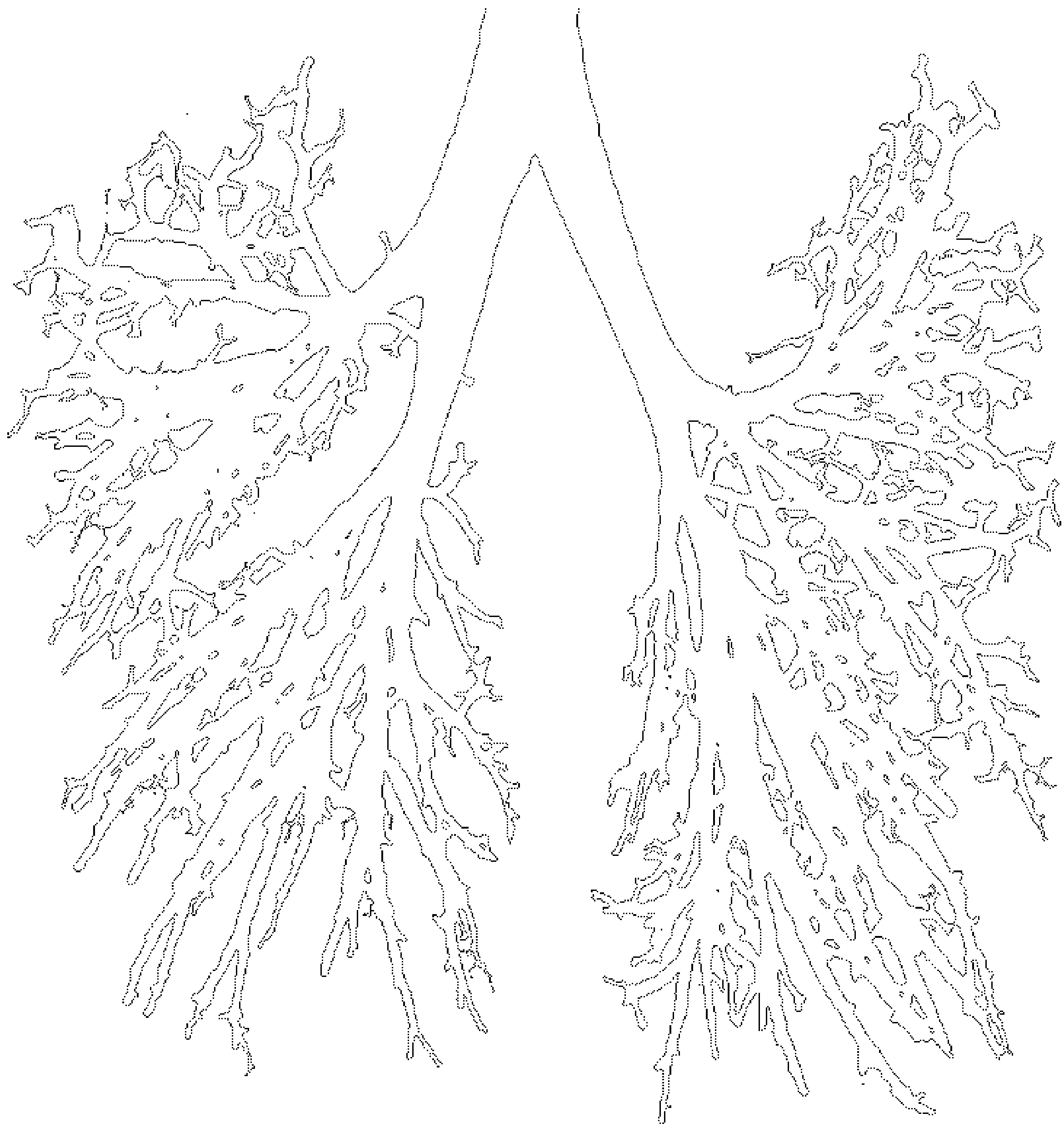


Abbildung 3.5: Umrißlinien des grob verzweigten Bronchialbaums $\mathcal{T}_g$

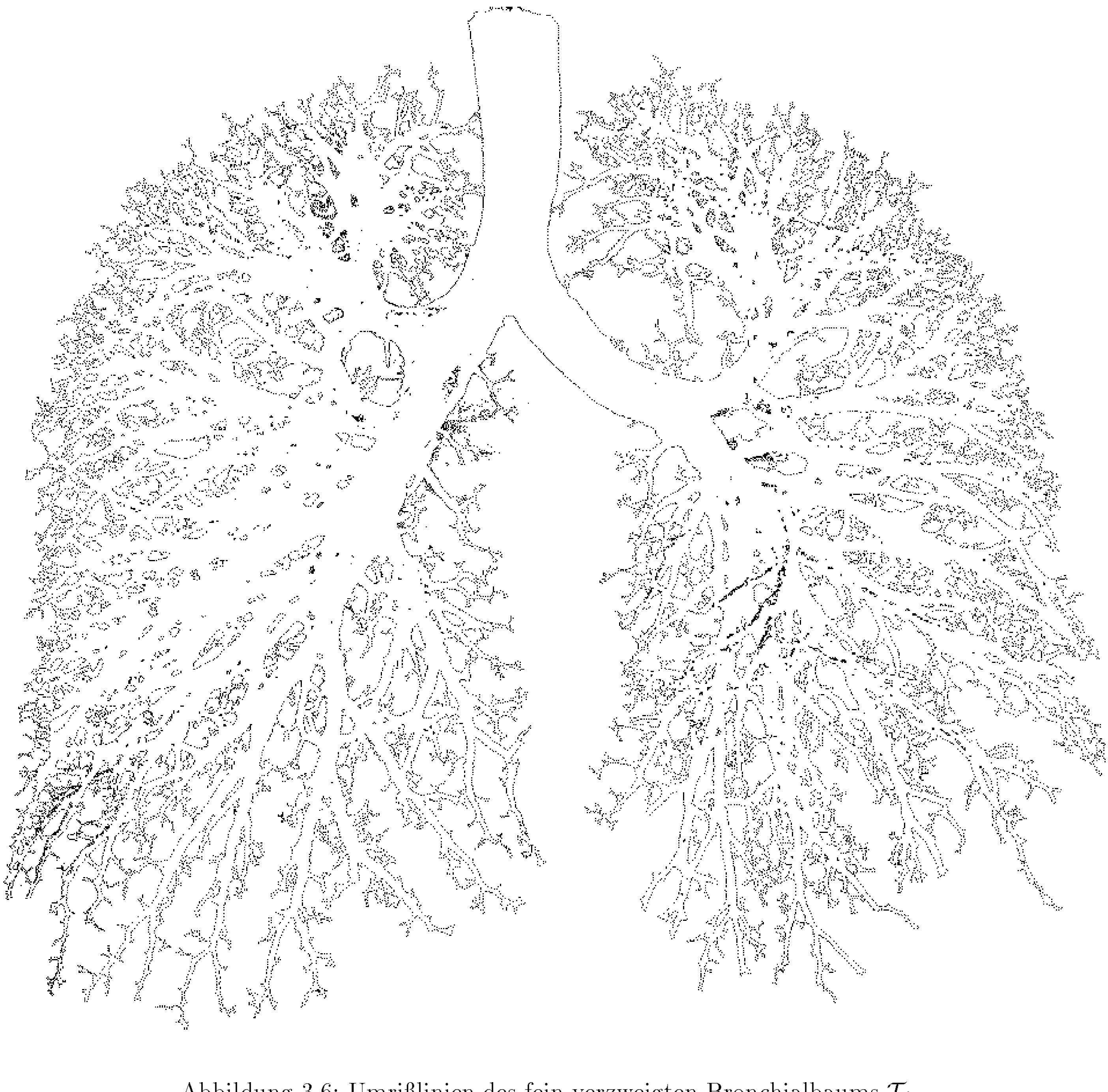


Abbildung 3.6: Umrißlinien des fein verzweigten Bronchialbaums $\mathcal{T}_f$

## 3.4 Numerische Ergebnisse

Das C++ Programm boxc.cpp liefert für das Sierpiński-Dreieck und für die Koch-Kurve akzeptable Dimensionswerte. Die Abbildungen 3.7, 3.8 und die Tabelle 3.6 zeigen dies. Die Meßpunkte in den Abbildungen 3.8, 3.9, und 3.10 folgen nur bis zur einer bestimmten Boxengröße einer Geraden. Dies läßt sich bei Präfraktalen und erst recht bei natürlichen Strukturen nicht vermeiden. Außerdem setzt die Pixelauflösung von 72dpi x 72dpi Grenzen. Als untere und obere Cut-offs, $\delta_{\min}$ und $\delta_{\max}$, bezeichnet man die erste und letzte Stelle, deren Werte einer Geraden folgen. Die Box-Dimension ist dann die Steigung der Ausgleichsgerade[3] im Regressionsbereich $[\delta_{\min}, \delta_{\max}]$. Somit ist es möglich, auch natürlichen Objekten eine Box-Dimension zuzuordnen. Ob das sinnvoll ist, entscheiden die Cut-offs. Nonnenmacher [29] spricht von einer „fraktalen Struktur“ $F$, wenn

$$dim_B F > dim_T F \quad \text{und} \quad \frac{\delta_{\max}}{\delta_{\min}} \geq 10 \tag{3.15}$$

ist. Dann ist es sinnvoll, dieser Menge eine Box-Dimension zuzuordnen und sie als natürliches Fraktal zu bezeichnen. Die Tabelle 3.6 zeigt, daß die untersuchten Mengen „fraktale Strukturen“ aufweisen. Die Umrißlinien der Menge $proj_\Pi \mathcal{T}_g$ interpretiere ich als $proj_\Pi \mathcal{T}_{g\circ}$. Entsprechend gilt dies für die Menge $proj_\Pi \mathcal{T}_f$. Damit ist das Ergebnis aus Kapitel 3.2 anwendbar.
Gemäß (3.14) kann für die Mengen $proj_\Pi \mathcal{T}_{g\circ}$ und $proj_\Pi \mathcal{T}_{f\circ}$

$$\begin{aligned} dim_H(proj_\Pi \mathcal{T}_{g\circ}) &= dim_B(proj_\Pi \mathcal{T}_{g\circ}), \\ dim_H(proj_\Pi \mathcal{T}_{f\circ}) &= dim_B(proj_\Pi \mathcal{T}_{f\circ}) \end{aligned}$$

angenommen werden. Mit (3.13) und der Tabelle 3.6 folgt

$$dim_H \mathcal{T}_g = dim_H(proj_\Pi \mathcal{T}_{g\circ}) + 1 = 2,73737, \tag{3.16}$$
$$dim_H \mathcal{T}_f = dim_H(proj_\Pi \mathcal{T}_{f\circ}) + 1 = 2,84378. \tag{3.17}$$

[3] siehe Seite 39ff

Tabelle 3.2: Numerische Ergebnisse der BCM beim Sierpiński-Dreieck

| $\delta$ [pixel] | 256 | 128 | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_\delta(\Delta)$ | 1 | 4 | 12 | 38 | 104 | 273 | 879 | 3017 | 10589 |

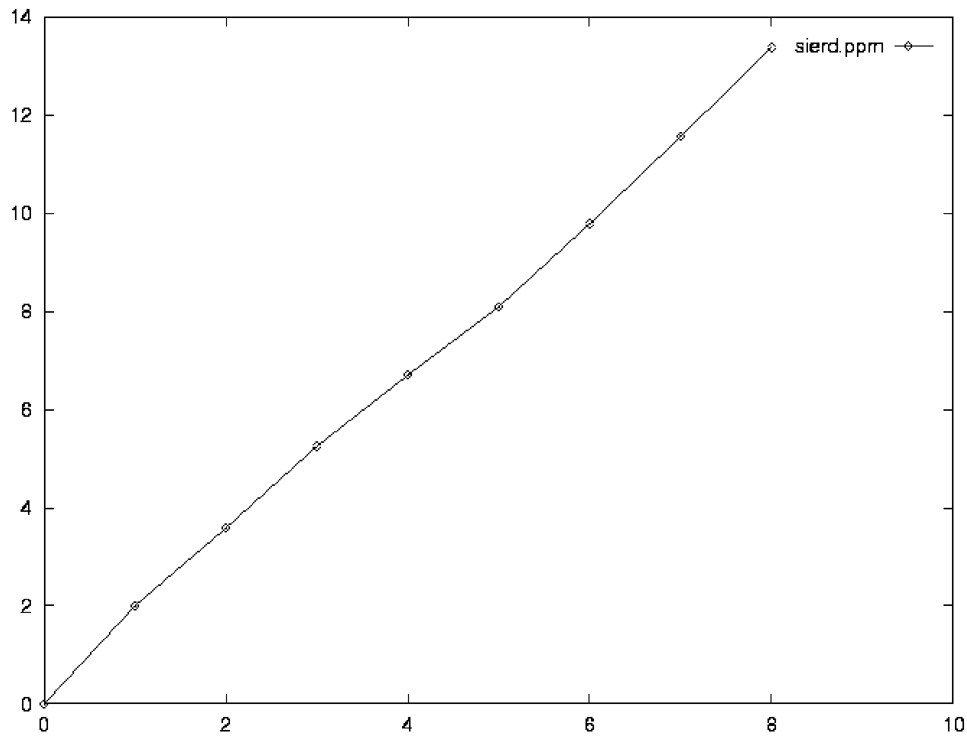



Abbildung 3.7: Darstellung der Daten $\log_2 N_\delta(\Delta)$ gegen $-\log_2 \delta/256$ aus Tabelle 3.2.

Tabelle 3.3: Numerische Ergebnisse der BCM bei der Koch-Kurve

| $\delta$ [pixel] | 256 | 128 | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_\delta(\mathcal{K})$ | 1 | 2 | 6 | 14 | 32 | 87 | 188 | 396 | 728 |

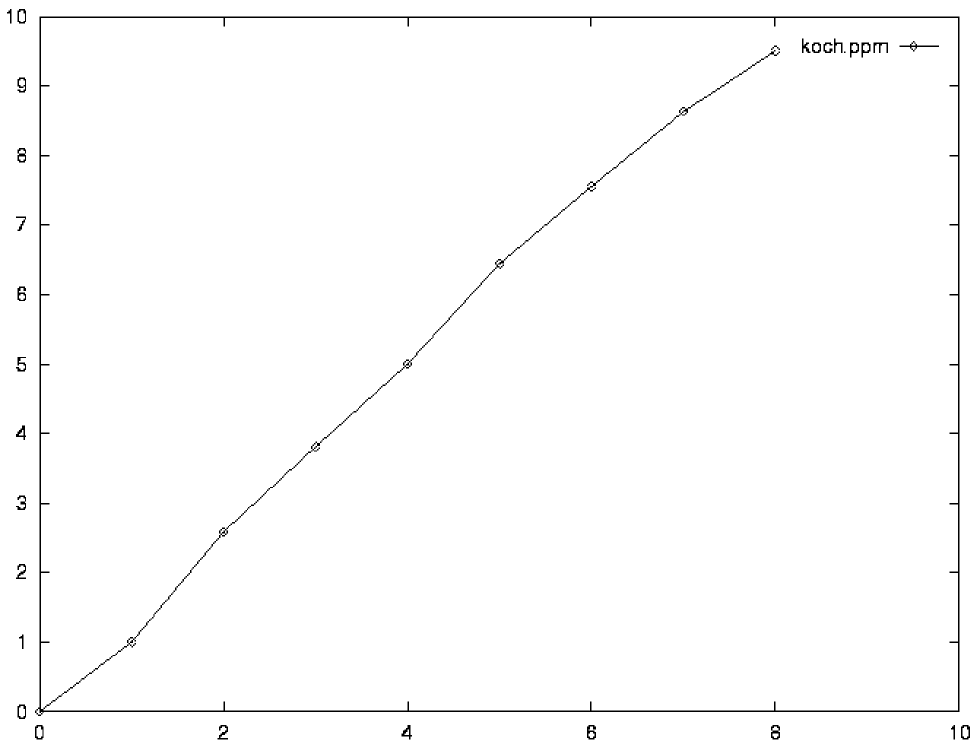



Abbildung 3.8: Darstellung der Daten $\log_2 N_\delta(\mathcal{K})$ gegen $-\log_2 \delta/256$ aus Tabelle 3.2.

Tabelle 3.4: Numerische Ergebnisse der BCM bei der Menge $proj_\Pi \mathcal{T}_{g\circ}$.

| $\delta$ [pixel] | 512 | 256 | 128 | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_\delta(proj_\Pi \mathcal{T}_{g\circ})$ | 1 | 4 | 16 | 57 | 181 | 580 | 1687 | 3664 | 5639 | 6934 |

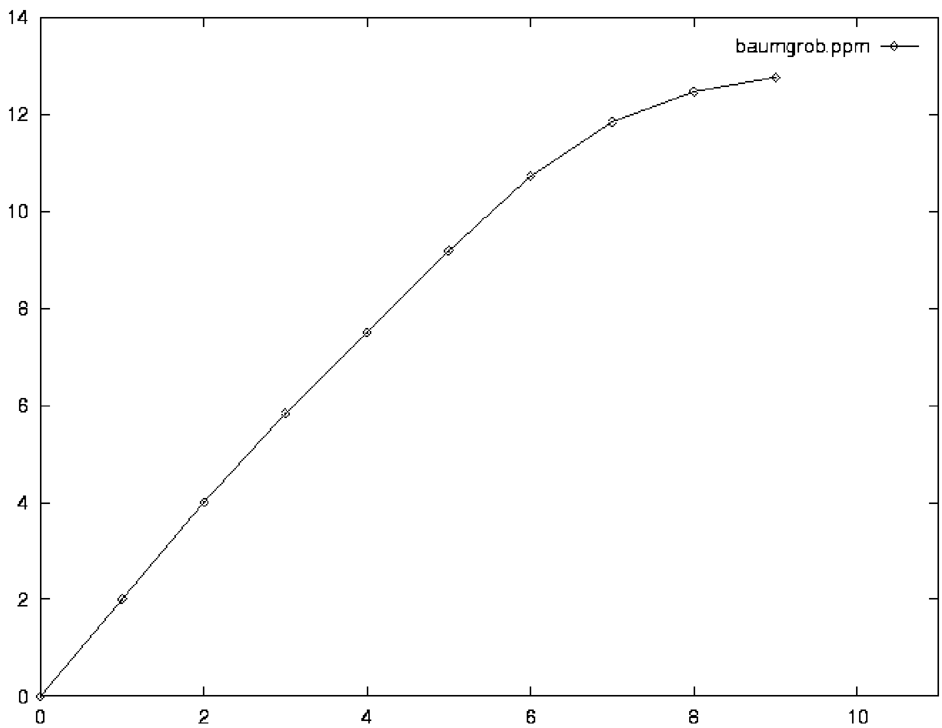



Abbildung 3.9: Darstellung der Daten $\log_2 N_\delta(proj_\Pi \mathcal{T}_{g\circ})$ gegen $-\log_2 \delta/512$ aus Tabelle 3.4.

Tabelle 3.5: Numerische Ergebnisse der BCM bei der Menge $proj_{\Pi}\mathcal{T}_{f\circ}$.

| $\delta$ [pixel] | 512 | 256 | 128 | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_\delta(proj_{\Pi}\mathcal{T}_{f\circ})$ | 1 | 4 | 16 | 61 | 216 | 739 | 2392 | 5907 | 9842 | 12311 |

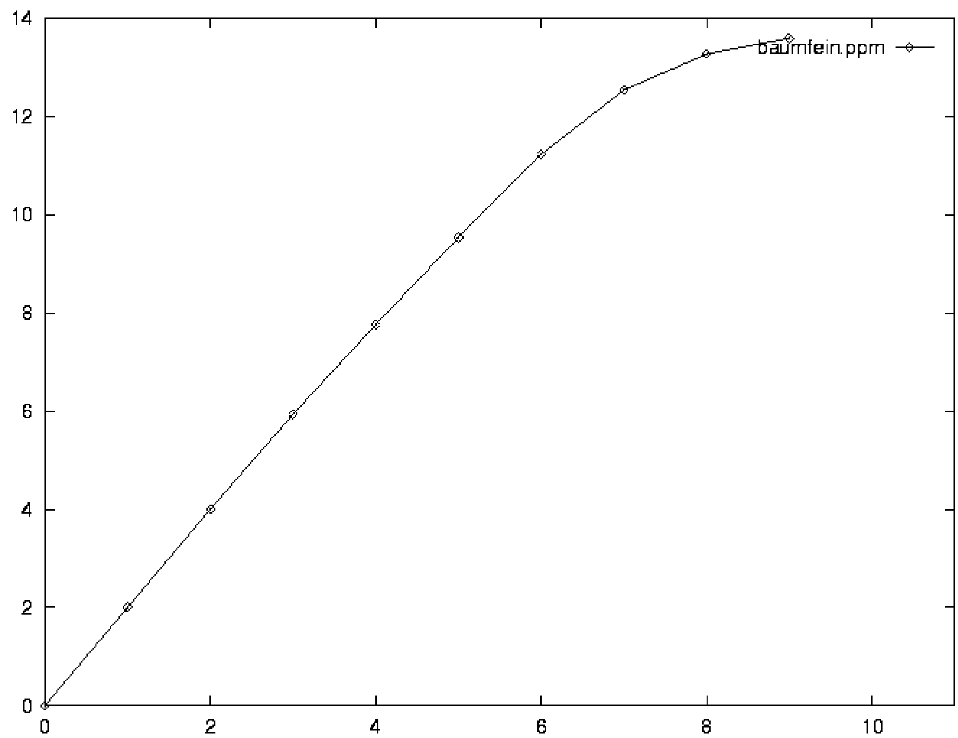



Abbildung 3.10: Darstellung der Daten $\log_2 N_\delta(proj_{\Pi}\mathcal{T}_{f\circ})$ gegen $-\log_2 \delta/512$ aus Tabelle 3.4.

Tabelle 3.6: Auswertung der numerischen Ergebnisse

| Dateiname | Cut-offs | | $\frac{\delta_{\max}}{\delta_{\min}}$ | $\dim_B$ | $\dim_B$ | $\lvert\Delta\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\delta_{\min}$ | $\delta_{\max}$ | | BCM | exakt | Differenz |
| sier.ppm | 1/256 | 1 | 256 | 1,60059 | 1,58496 | 0,01563 |
| koch.ppm | 1/128 | 1 | 128 | 1,26653 | 1,26186 | 0,00467 |
| baumgrob.ppm | 1/64 | 1 | 64 | 1,73737 | 2 | 0,26263 |
| baumfein.ppm | 1/64 | 1 | 64 | 1,84378 | 2 | 0,15622 |

## 3.5 Diskussion und Vergleich der Ergebnisse

Der physikalische Vorteil der Leitungszone ist Grundlage für das Modell aus Kapitel 3.1. Die Abbildung 1.7 zeigt, daß dieser Vorteil ab der 12. Generation nicht mehr gegeben ist. Zusätzlich sind die Bronchien in einer Generation nicht alle gleich lang (siehe Tabelle 1.4). All dies beeinflußt die fraktale Dimension des Bronchialbaums. Hier zeigt das symmetrische Modell seine Grenzen. Da der Bronchialbaum im $\mathbb{R}^3$ eingebettet ist, kann seine fraktale Dimension nicht größer als 3,0 sein (Seite 28, Monotonie).
Die von mir berechneten fraktalen Dimensionen der zwei Bronchialbäume, liegen mit 2,74 bzw. 2,84 nahe bei 3,0. Tabelle 3.6 zeigt, daß die Cut-offs der Gleichung (3.15) genügen. Dies zeigt die fraktale Strukturierung des menschlichen Bronchialbaums.
Untersuchungsobjekt für die Arbeit von Kitaoka und Takahashi [19] war ein oberer Lungenlappen eines Menschen. Dieser Lungenlappen wurde in einem Serienschnittverfahren in 48 einzelne und 0,5 mm dicke Schichten zerlegt. Aus diesen Einzelschnitten erstellten sie nach röntgenologischer Verarbeitung einen Datensatz der Bronchienumrißlinien. Ein Computerprogramm rekonstruierte dann den Bronchialbaum im Lungenlappen. Für drei Bereiche bestimmten sie die Box-Dimension der Bronchien, mittels BCM im $\mathbb{R}^3$. Die Autoren geben für die Box-Dimensionen Werte von 1,73 bis 1,74 an. Bei Flächen ist eine Box-Dimension von mindestens zwei zu erwarten. Die niedrigen Dimensionswerte kommen durch die grobe Struktur des erzeugten 3D-Datensatzes zustande, bei dem nur die großen Bronchien berücksichtigt

wurden, siehe Wübbeke [42, Seite 55].
Kitaoka und Takahashi vermuten für eine feinere Analyse einen Anstieg der Box-Dimension auf einen Wert nahe 3,0, siehe [42, Seite 55].
Ich zeige nun, daß ein Vergleich mit meinen Daten trotzdem möglich ist.
Die Schichtdicke ist mit 0,5 mm sehr groß gewählt. Die vertikale Auflösung des 3D-Datesatzes ist somit niedriger als die der horizontalen. Die gesetzten Pixel sind daher nicht gleichmäßig verteilt. Es ergibt sich eine sehr scharfe Abgrenzung zwischen den Pixelschichten. Die 48 Pixelschichten sind somit klar getrennt und abzählbar. Die abzählbare Stabilität der Hausdorff-Dimension (Seite 28 Punkt 3) ist damit anwendbar. Die Aussage kann auch für die Box-Dimension angenommen werden. Die BCM liefert dann die maximale Box-Dimension der Bronchienumrißlinien aus allen 48 Schichten. Da nur die Umrißlinien der großen Bronchien berücksichtigt wurden, entspricht jede Schicht einen Schnitt durch einen groben Bronchialbaum. Nach Satz 2.6.4 ergibt sich für den gesamten Bronchialbaum die Box-Dimension 2,73 bis 2,74, also der von mir berechnete Wert für den groben Bronchialbaum $\mathcal{T}_g$, siehe Gleichung 3.16.
Andere Autoren geben für den Bronchialbaum keine konkrete fraktakle Dimension an. Nelson et al. [28] beschäftigten sich mit dem gesetzmäßigen Aufbau des Bronchialbaums. Weibel [40] sieht in der selbstähnlichen Verzweigung Vorteile für die genetische Codierung, für den Energieaufwand bei der Lungenbelüftung und der raumfüllenden Eigenschaft des Bronchialbaums. Für die Alveolen gibt er die fraktale Dimension 2,17 an. Damit ist ihre Oberfläche nicht raumfüllend.

# Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftig sich mit der fraktalen Geometrie und der Charakterisierung des menschlichen Bronchialbaums als Fraktal. Die fraktale Geometrie ermöglicht es, komplexe Strukturen wie den Bronchialbaum quantitativ zu beschreiben, indem der Grad ihrer Komplexität durch die fraktale Dimension beschrieben wird.
Sätze über Schnittmengen und Projektionen zeigen, daß ein 2D-Datensatz genügt, um die fraktale Dimension des Bronchialbaums zu bestimmen. Zwei Fotos von Bronchialbaumausgüssen wurden ausgewählt. Nach der Datenvorbereitung wurde die fraktale Dimension mittels BCM im $\mathbb{R}^2$ bestimmt.

# Literaturverzeichnis

[1] Adams R. A.:
Sobolev Spaces
Academic Press, Inc New York, 1975

[2] Bauer H.:
Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie
Walter de Gruyter, Berlin, 3. Auflage, 1978

[3] Beyersdorf F.:
Anatomie: Repetitorium zum Gegenstandskatalog
Akad. Verl. Ges., Wiesbaden, 2. verbesserte Auflage, 1978

[4] Bittner H.:
Modellierung fraktaler Gefäßsysteme
Disseration Würzburg, 1994

[5] Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig:
Taschenbuch der Mathematik
Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main, 2. überarbeitete und erweiterte Auflage, 1995

[6] Edgar G. A.:
Measure, Topology, and Fractal Geometry
Springer Verlag, New York, 1990

[7] Eibenstein M.:
Charakterisierung fetaler Plazentaarterien von Rind und Schaf als Fraktal
Disseration Gießen, 1995

[8] Elias H., Schwartz D.:
Surface areas of the cerebral cortex of mammals determined by stereological methods
Science 166 (1969) 111-113

[9] Elstrodt J.:
Maß- und Integrationstheorie
Springer Verlag, Berlin, 1996

[10] Engel S.:
Die Lunge des Kindes
Georg Thieme Verlag, Stuttgart, 1950

[11] Falconer K. J.:
Fraktale Geometrie Mathematische Grundlagen und Anwendungen
Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1993

[12] Falconer K. J.:
Cambrige Tracts in Mathematics 85, The Geometrie Of Fractals Sets
Cambrige University Press 1985

[13] Goldberg A., West B., Dresselhaus T., Bhargava V.:
Bronchial asymmetry and fibonacci scaling
Experientia 41 (1985) 1537-1538

[14] Hausdorff F.:
Dimension und äußeres Maß
Mathematische Annalen 79 (1919) 157-179

[15] Horsfield K., Cumming G.:
Angles of branching and diameters of branches in the human bronchial tree
Bulletin of Mathematical Biophysics Vol. 29 (1967) 245-259

[16] Hurewicz W., Wallman H.:
Dimension Theory
Princeton, Princeton University Press, 1941

[17] Hutchinson J. E.:
Fractals and self similarity
Indiana University Mathematics Journal 30 (1981) 713-747

[18] Jestczemski, F.:
Multifraktale und globale Charakterisierung fetter inhomogener Fraktale am Beispiel der arteriellen Blutgefäßsystems ausgewählter Organe
Disseration Gießen, 1995

[19] H. Kitaoka, T. Takahashi:
Relationship between the branching pattern of airways and the spatial arrangement of pulmonary acini - A re-examination from a fractal point of view
In: Fractals in Biology and Medicine
Edited by T.F. Nonnenmacher, G.A. Losa, E. Weibel
Birkhäuser Verlag, Basel, 1994, 116-131

[20] Kleiber M.:
Der Energiehaushalt von Mensch und Haustier
Verlag Paul Parey, Hamburg, 1967

[21] Klinke R., Silbernagl S.:
Lehrbuch der Physiologie
Georg Thieme Verlag, Stuttgart, 1994

[22] Leonhardt H.:
Histologie, Zytologie und Mikroanatomie des Menschen
Georg Thieme Verlag Stuttgart, 7.überarbeitete Auflage, 1985

[23] Lippert H.:
Lehrbuch Anatomie
Urban & Schwarzenberg, München, 2. Auflage, 1990

[24] Mandelbrot B.:
Fractals Form, Chance, and Dimension
W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1977

[25] Mandelbrot B.:
Die fraktale Geometrie der Natur
Birkhäuser Verlag, Basel, 1987

[26] Mattila P.:
Hausdorff dimension, orthogonal projections and
intersections with planes
Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ,
Series A.I. Mathematica,Volume 1, (1975) 227-244

[27] McMinn R., Hutchings R., Pegington J., Abrahams P.:
Atlas der Anatomie des Menschen
Ullstein Mosby, Berlin, 1993

[28] Nelson T., West B., Goldberger A.:
The fractal lung: Universal and species-related scaling patterns
Experienta 46 (1990) 251-254

[29] Nonnenmacher T. F.:
Spatial and temporal fractal patterns in cell and molecular biology
In: Fractals in Biology and Medicine
Edited by T.F. Nonnenmacher, G.A. Losa, E. Weibel
Birkhäuser Verlag, Basel, 1994, 22 - 37

[30] Peitgen H., Jürgens H., Saupe D.:
Bausteine des Chaos Fraktale
Springer Verlag, Klett-Cotta, 1992

[31] Roger C. A.:
Hausdorff Measures
Cambridge At The University Press, 1970

[32] Rohen J. W.:
Funktionelle Anatomie des Menschen
Schattauer, Stuttgart, 1990

[33] Sernetz M., Gelléri B., Hofman F.:
The organism as a bioreactor, interpretation of the reduction law of metabolism in terms of heterogeneous catalysis and fractal structure
Journal of Theoretical Biology 117 (1985) 209-230

[34] Sernetz M., Wübbeke J., Wlczek P.:
Three-dimensional image analysis and fractal characterization of kidney arterial vessels
Physica A 191 (1992) 13-16

[35] Sernetz M., Justen M., Jestczemski F.:
Dispersive fractal characterization of kidney arteries by three-dimensional mass-radius-analysis
Fractals, Vol. 3, No.4 (1995) 879-891

[36] Schiebler T. H., Schmidt W.:
Anatomie
Springer Verlag, Berlin, 4. Auflage, 1987

[37] Schmidt R., Thews G.:
Physiologie des Menschen
Springer Verlag, Berlin, 25. Auflage, 1993

[38] Thews, Mutschler, Vaupel:
Anatomie, Physiologie, Pathophysiologie des Menschen
Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, 1980

[39] Weibel E.:
Morphometry of the Human Lung
Springer Verlag Berlin, 1963

[40] Weibel E.:
Fractal geometry: a design principle for living organisms
American Journal of Physiology-Lung Cellular and Molecular Physiology (1991) L361-L369

[41] Werner J.:
Numerische Mathematik 1
Vieweg, Braunschweig, 1992

[42] Wübbeke J.:
Charakterisierung arterieller Nierengefäße von Schwein und Kaninchen als Fraktal
Disseration Gießen, 1994

Hiermit bestätige ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur mit Hilfe der im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen verfaßt habe.

Münster, den 3.Juni 1997